Biljke i semenje

Dimitrije Vranić i Vukašin Marković

Maj 2024

Contents

1 Uvod **2**

2 Malthusov eksponencijalni model **2**
2.1 Ideja iza modela 2
2.2 Izvodjenje modela 3

3 Primena na primeru **4**
3.1 Diferencna jednačina primera 4
3.2 Odredjivanje gama za koje biljka ne izumire 6
3.3 Primena jednačine na konkeretan primer 8
3.3.1 Izumiranje vrste 8
3.3.2 Monoton rast populacije 9

4 References **11**

1 Uvod

Istražujemo problem razmnožavanja biljaka i promene u populaciji svake godine. Nije nam naglašeno da imamo ograničen broj resursa, tako da ne postoji ograničenje broja jediniki na stanovištu. Svaka biljka uvek daje isti broj semena, što znači da imamo homogeno razmnožavanje po broju jedinki, kao i homogeno razmnožavanje po vremenu jer se isti broj semena proizvede svake godine. Zato što svaka biljka uvek umire na kraju sezone, važi i homogenost izumiranja po vremenu.

2 Malthusov eksponencijalni model

2.1 Ideja iza modela

Posmatramo problem promene broja jedinki neke žive populacije tokom nekog vremenskog perioda. Označimo N(t) broj jedinki u nekom trenutku t i nas zanima koliko će biti jedinki u nekom trenutku t + σt.

Da bi ovaj model implementirao, Thomas Robert Malthus, je zadao neke pretpostavke vezane za jedinke, i te pretpostavke su bile:

- Jedva vrsta
- Postoji neograničeno resursa
- Umiru prirodnom smrću
- Homogenost razmnožavanja po broju jedinki
- Homogenost razmnožavanja po vremenu
- Homogenost izumiranja po vermenu, proporcijalno broju jedinki

Nakon što je našao ove pretpostavke, nastala je jednačina koja je bila osnovna ideja:

$$N(t + \sigma t) = N(t) + n\sigma tN(t) - m\sigma tN(t) \tag{1}$$

gde je n - natalitet, a m - mortalitet. Ako izvučemo σtN(t) kao zajednički činilac dobijamo p = (n - m) kao drugi činilac, gde je p prirodni priraštaj populacije. Tada dobijemo formulu:

$$N(t + \sigma t) = N(t) + \sigma tN(t)p \tag{2}$$

Broj jedinki populacije N je diskretna, celobrojna promenljiva. Mi ćemo dozvoliti da veličina N(t) bude kontinualna, kao i da σt može biti proizvoljno mala vrednost, i ovo radimo iz dva razloga:

- Ako je broj jediniki N veliki, mala je relativna greška kontinualne u odnu na celobrojnu vrednost.
- Mnogo je razvijeniji i jednostavniji matematički aparat za kontinualne promenljive nego diskretne.

2.2 Izvodjenje modela

Iz obrasca broj (2) možemo da izrazimo pN(t), pod pretpostavkom da važi N(t),t,σt,n,m,p $\in \mathbb{R}$:

$$\frac{N(t+\sigma t)-N(t)}{\sigma t}=pN(t) \tag{3}$$

I ako (3) pustimo da konvergira ka 0, dobijemo diferencijalnu jednačinu oblika:

$$\frac{dN(t)}{dt}=pN(t), N(0)=N_0 \tag{4}$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine, dobijamo Malthusov eksponencijalni model:

$$\frac{dN(t)}{dt}=pN(t)$$

Sada podelimo obe strane sa N(t), a pomnožimo boe strane sa dt:

$$\frac{dN(t)}{N(t)}=pdt$$

Nakon čega integralimo ceo izraz:

$$\int\frac{dN(t)}{N(t)}=\int pdt$$

Rešavanjem integrala dobijamo jednačinu oblika:

$$ln|N(t)|=pt+c$$

Sada podižemo obe strane jednčine da budu stepen od prirodnog broja e:

$$e^{ln|N(t)|}=e^{pt+c}$$

Nakon što skratimo e i ln dobijamo opšte rešenje diferencijalne jednačine:

$$|N(t)|=e^{pt+c} \tag{5}$$

Mi tražimo partikularno rešenje, pa sada posmatramo slučaj kada je t = 0:

$$N(0)=e^{0+c} => e^c=N(0) \tag{6}$$

Sada preformulišemo jednačinu (5):

$$N(t)=e^{pt}e^c$$

I da bismo dobili partikularno rešenje ubacimo (6) u prethodnu jednačinu:

$$N(t)=N(0)e^{pt} \tag{7}$$

U ovom modelu im iz jednačine (7) je evidentno da ako je prirodni priraštaj pozitivan, eksponencijalno raste i broj jedinki, dok ako je negativan, eksponencijalno opada broj jedinki.

3 Primena na primeru

3.1 Diferencna jednačina primera

U našem primeru se traži da izračunamo ukupan broj semena koji proklija u biljke u periodu od jedne sezone. Pritom svaka biljka proizvede konstantan broj semena γ, a deo semena koje preživi prvu zimu je σ. Od preživelog semenja, α je deo koje proklija na početku sezone i daje nove biljke. Dok semenje koje nije proklijalo trenutne godine, ako uspe da preživi i narednu zimu, deo β će proklijati u narednoj. Biljke sve umiru na kraju naredne sezone.

Ako uzmemo da je N_t broj biljaka u jednoj u t-toj sezoni, i posmatramo zadate podatke, možemo primetiti da broj semena koje preživi prvu zimu je $N_t * \sigma * \gamma$, dok je broj semena od preživelih koje proklija u toku jedne sezone je:

$$O_t = N_t * \sigma * \gamma * \alpha$$

Za biljke koje će proklijati naredne sezone možemo napisati da od ukupnog broja preživelih semana za jednu zimu oduzmemo one koje proklijaju te sezone, i dobijemo one koji mogu da proklijaju sledeće godine. One prežive zimu β njih će proklijati.

$$P_t = N_{t-1} * \beta * \sigma * (\gamma * \sigma - \alpha * \gamma * \sigma)$$

I kada malo sredimo obrazac:

$$P_t = N_{t-1} * \beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)$$

Konačna rekurentna formula za t + 1 generaciju je:

$$N_{t+1} = N_t * (\sigma * \gamma * \alpha) + N_{t-1} * (\beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)) \tag{8}$$

Biljke umiru prirodnom smrću nakon što se završi sezona, tako da u jednoj sezoni dobijemo isti broj biljaka koji i ugine, tako da broj biljaka zavisi od izabranih parametara.

Sada iz jednačine (8) možemo naći opšte rešenje nakon što je napišemo kao rekurentnu relaciju drugog reda:

$$N_{t+1} - N_t * (\sigma * \gamma * \alpha) - N_{t-1} * (\beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)) = 0$$

Sada pronadjemo karakterističnu jednačinu :

$$\lambda^{t+1} - \lambda^t * (\sigma * \gamma * \alpha) - \lambda^{t-1} * (\beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)) = 0$$

Nakon čega ćemo podeliti celu jednačinu sa λ^{t-1} i dobiti:

$$\lambda^2 - \lambda * (\sigma * \gamma * \alpha) - (\beta * \gamma * \sigma^2 * (1-\alpha)) = 0$$

Sada možemo da primeni rešenje kvadratne jednačine:

$$\lambda_{1/2} = \frac{\sigma * \gamma * \alpha \pm \sqrt{\sigma^2 * \gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * \sigma^2 * (1-\alpha)}}{2}$$

Nakon što ovaj izraz malo sredimo dobijemo oblik:

$$\lambda_{1/2} = \sigma * \frac{\gamma * \alpha \pm \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1-\alpha)}}{2}$$

Ovde sad dobijamo rešenja:

$$\lambda_1 = \sigma * \frac{\gamma * \alpha + \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1-\alpha)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \sigma * \frac{\gamma * \alpha - \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1-\alpha)}}{2}$$

Odavde možemo da nadjemo opšte rešenje:

$$N_t = C1 * (\sigma * \frac{\gamma * \alpha + \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1-\alpha)}}{2})^t + C2 * (\sigma * \frac{\gamma * \alpha - \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1-\alpha)}}{2})^t$$

Sada možemo naći partikularna rešenja za C1 i C2 za N0 i N1:

$$N_0 = C1 + C2 \tag{9}$$

$$N_1 = \lambda_1 * C1 + \lambda_2 * C2 \tag{10}$$

Rešavanjem ovog sistema možemo da dobijemo partikularno rešenje. Sada ćemo izraziti C1 iz (9) jednačine, i ubaciti u (10):

$$C1 = N_0 - C2$$

$$N_1 = \lambda_1 * (N_0 - C2) + \lambda_2 * C2$$

Nadalje možemo da pomnožimo članove zagrade:

$$N_1 = \lambda_1 * N_0 - \lambda_1 * C2 + \lambda_2 * C2$$

I odavde kada sredimo malo izraz dobijemo:

$$N_1 - \lambda_1 * N_0 = (\lambda_2 - \lambda_1) * C2$$

Odakle možemo da izrazimo C2:

$$C2 = \frac{\lambda_1 * N_0 - N_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Sada možemo da vratimo C2 u jednačina (9) i da izrazimo C1:

$$C1 = \frac{N_1 - N_0 * \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Kada vratimo već izračunate vrednosti za Lambde:

$$C1 = \frac{N_1 - N_0 * (\sigma * \frac{\gamma*\alpha - \sqrt{\gamma^2*\alpha^2+4*\beta*\gamma*(1-\alpha)}}{2})}{\sigma * \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1-\alpha)}}$$

$$C2 = \frac{N_0 * (\sigma * \frac{\gamma*\alpha - \sqrt{\gamma^2*\alpha^2+4*\beta*\gamma*(1-\alpha)}}{2}) - N_1}{\sigma * \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1-\alpha)}}$$

3.2 Odredjivanje gama za koje biljka ne izumire

Da bismo osigurali opstanak vrste, potrebno je da broj biljaka ostane konstantan ili raste u svakoj generaciji. Drugim rečima, potrebno je da očekivani broj biljaka u sledećoj generaciji bude najmanje jednak broju biljaka u trenutnoj generaciji.

Matematički, to znači da ukupan broj biljaka N_{t+1} u sledećoj generaciji treba da bude najmanje jednak broju biljaka N_t u trenutnoj generaciji. Za održivost vrste, osnovna ideja je da se nadje uslov pod kojim $N_{t+1} \geq N_t$.

Koreni karakteristične jednačine su ključni za razumevanje dinamike populacije. Ako oba korena λ_1 i λ_2 imaju apsolutne vrednosti manje od 1, populacija će opadati. Ako su oba korena jednaka 1, populacija će ostati stabilna. Ako je bar jedan koren veći od 1, populacija će rasti.

Rekli smo da su koreni karakteristične jednačine:

$$\lambda_{1/2} = \sigma \frac{\alpha\gamma \pm \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2}$$

Za održivost, potrebno je da bar jedan od korena bude veći ili jednak 1. Prvo razmotrimo koren:

$$\lambda_1 = \sigma \frac{\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2}$$

Postavimo uslov $\lambda_1 \geq 1$:

$$\sigma \frac{\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2} \geq 1$$

Pomnožimo sa 2 i podelimo sa σ:

$$\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))} \geq \frac{2}{\sigma}$$

Izolujemo $\sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}$:

$$\sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))} \geq \frac{2}{\sigma} - \alpha\gamma$$

Kvadriranjem obe strane dobijamo:

$$\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha)) \geq \left(\frac{2}{\sigma} - \alpha\gamma\right)^2$$

Razvijamo kvadrat binoma:

$$\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha)) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma} + \alpha^2\gamma^2$$

Sredjujemo članove na levoj strani:

$$\alpha^2\gamma^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma} + \alpha^2\gamma^2$$

Primetimo da se $\alpha^2\gamma^2$ pojavi na obe strane jednačine, pa ga možemo skratiti:

$$4\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma}$$

Delićemo celu jednačinu sa 4:

$$\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\alpha\gamma}{\sigma}$$

Izolujemo sve članove sa γ na levoj strani:

$$\beta\gamma(1-\alpha) + \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \geq \frac{1}{\sigma^2}$$

Sredjujemo koeficijente γ:

$$\gamma\left(\beta(1-\alpha) + \frac{\alpha}{\sigma}\right) \geq \frac{1}{\sigma^2}$$

Izolujemo γ:

$$\gamma \geq \frac{1}{\sigma^2\left(\beta(1-\alpha) + \frac{\alpha}{\sigma}\right)}$$

Sredjujemo razlomke:

$$\gamma \geq \frac{1}{\sigma^2\beta(1-\alpha) + \sigma\alpha}$$

Dakle, ova jednačina nam predstavlja minimalni broj semenki γ koje svaka biljka treba da proizvede da bi osigurala opstanak vrste. Ovo je zahtevani uslov za γ koji garantuje opstanak vrste, uzimajući u obzir sve parametre σ, α, i β.

3.3 Primena jednačine na konkeretan primer

Posmatraćemo slučaj u kome ćemo prikazati 20 generacija, gde na početku imamo 100 biljka i 0 semenja,.

Kao početni parametri nama su zadati $\gamma = 2$ i $\sigma = 0.8$, i od nas se zahteva da nadjemo α i β tako da se ispune odredjeni uslovi.

Da bismo pronašli uslove za zadatak možemo ubaciti zadate vrednosti u koren karakteristične jednačine koji je bio izveden u poglavlju 3.1.

$$\lambda_{1/2} = \frac{\sigma * \gamma * \alpha \pm \sqrt{\sigma^2 * \gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)}}{2}$$

Nakon zamene vrednosti:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1.6 * \alpha \pm \sqrt{2.56 * \alpha^2 + \beta * 5.12 * (1 - \alpha)}}{2}$$

Nakon analize smo dobili:

3.3.1 Izumiranje vrste

Da bi vrsta izumrla mora da važi da su apsolutne vrednosti oba korena manja od 1:

$$|\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| < 1$$

Na početku eksperimantalnog rada za α i β smo uzeli redom vrednosti 0.5 i 0.2. Fiksiranjem parametra β i ispitivanjem izumiranja generacija za različite vrednosti parametra α dobili smo vrednost $\alpha = 0.35$ za koju naša vrsta sigurno izumire u 20 generacija.

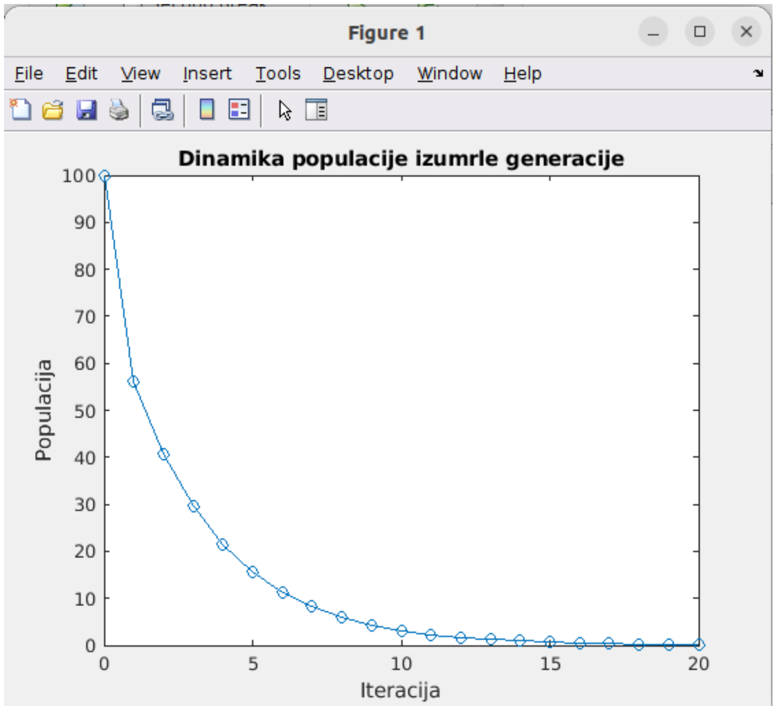

Figure 1: Grafik funkcije za izumiranje vrste

Sa ovog grafika se videlo da je vrsta izumrla u iteraciji 16.

3.3.2 Monoton rast populacije

Da bi vrsta monotono rasla mora barem jedan od korena karakteristične jednačine da bude veći od 1:

$$\lambda_1 > 1 \lor \lambda_2 > 1$$

Na početku eksperimantalnog rada za α i β smo uzeli redom vrednosti 0.5 i 0.4. Opet smo fiksirali parametar β i ispitivali za koji parametar α se ostvaruje monoton rast. Za $\alpha = 0.65$ naša vrsta ostvarije monton rast. Na grafiku je prikazano 20 generacija.

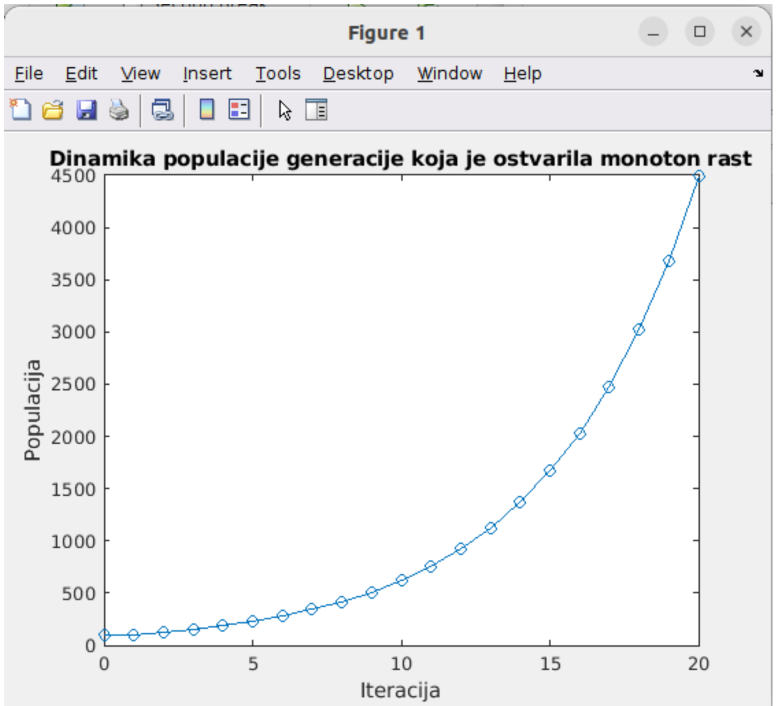

Figure 2: Grafik funkcije za monton rast

4 References

1. Milan Dražić, *Matamatičko modeliranje*, Matematički fakultet, Beograd, 2017.

2. Materijali sa predavanja