Biljke i semenje

Dimitrije Vranić i Vukašin Marković

Maj 2024

Contents

1 Uvod

Istražujemo problem razmnožavanja biljaka i promene u populaciji svake godine. Nije nam naglašeno da imamo ograničen broj resursa, tako da ne postoji ograničenje broja jediniki u stanovištu. Svaka biljka uvek daje isti broj semena, što znači da imamo homogeno razmnožavanje po broju jedinki, kao i homogeno razmnožavanje po vremenu jer se isti broj semena proizvede svake godine. Zato što svaka biljka uvek umire na kraju sezone, važi i homogenost izumiranja po vremenu. Prilikom razvijanja našeg modela, ugledali smo se na Malthusov eksponencijalni model.

2 Malthusov eksponencijalni model

2.1 Ideja iza modela

Posmatramo problem promene broja jedinki neke žive populacije tokom nekog vremenskog perioda. Označimo N(t) broj jedinki u nekom trenutku t i nas zanima koliko će biti jedinki u nekom trenutku t + Δt.

Da bi ovaj model implementirao, Thomas Robert Malthus, je zadao neke pretpostavke vezane za jedinke, i te pretpostavke su bile:

- Jedva vrsta
- Postoji neograničeno resursa
- Umiru prirodnom smrću
- Homogenost razmnožavanja po broju jedinki
- Homogenost razmnožavanja po vremenu
- Homogenost izumiranja po vermenu, proporcijalno broju jedinki

Nakon što je našao ove pretpostavke, nastala je jednačina koja je bila osnovna ideja:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + n\Delta t N(t) - m\Delta t N(t) \tag{1}$$

gde je n - natalitet, a m - mortalitet. Ako izvučemo ΔtN(t) kao zajednički činilac dobijamo p = (n - m) kao drugi činilac, gde je p prirodni priraštaj populacije. Tada dobijemo formulu:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t N(t) p \tag{2}$$

Broj jedinki populacije N je diskretna, celobrojna promenljiva. Mi ćemo dozvoliti da veličina N(t) bude kontinualna, kao i da Δt može biti proizvoljno mala vrednost, i ovo radimo iz dva razloga:

- Ako je broj jediniki N veliki, mala je relativna greška kontinualne u odnosu na celobrojnu vrednost.
- Mnogo je razvijeniji i jednostavniji matematički aparat za kontinualne promenljive nego diskretne.

2.2 Izvodjenje modela

Iz obrasca broj (2) možemo da izrazimo pN(t), pod pretpostavkom da važi N(t),t,Δt,n,m,p $\in \mathbb{R}$:

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = pN(t) \tag{3}$$

I ako (3) pustimo da konvergira ka 0, dobijemo diferencijalnu jednačinu oblika:

$$\frac{dN(t)}{dt} = pN(t), N(0) = N_0 \tag{4}$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine, dobijamo Malthusov eksponencijalni model:

$$\frac{dN(t)}{dt} = pN(t)$$

Sada podelimo obe strane sa N(t), a pomnožimo obe strane sa dt:

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = pdt$$

Nakon čega integralimo ceo izraz:

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int pdt$$

Rešavanjem integrala dobijamo jednačinu oblika:

$$ln|N(t)| = pt + c$$

Sada podižemo obe strane jednčine da budu stepen od prirodnog broja e:

$$e^{ln|N(t)|} = e^{pt+c}$$

Nakon što skratimo e i ln dobijamo opšte rešenje diferencijalne jednačine:

$$|N(t)| = e^{pt+c} \tag{5}$$

Mi tražimo partikularno rešenje, pa sada posmatramo slučaj kada je t = 0:

$$N(0) = e^{0+c} => e^c = N(0) \tag{6}$$

Sada preformulišemo jednačinu (5):

$$N(t) = e^{pt}e^c$$

I da bismo dobili partikularno rešenje ubacimo (6) u prethodnu jednačinu:

$$N(t) = N(0)e^{pt} \tag{7}$$

U ovom modelu iz jednačine (7) je evidentno da ako je prirodni priraštaj pozitivan, eksponencijalno raste i broj jedinki, dok ako je negativan, eksponencijalno opada broj jedinki.

3 Biljke i semenje

3.1 Diferencna jednačina primera

U našem primeru se traži da izračunamo ukupan broj semena koji proklija u biljke u periodu od jedne sezone. Svaka biljka proizvede konstantan broj semenja γ, dok je deo semenja koje preživi prvu zimu σ. Od preživelog semenja, α je deo koji proklija na početku sezone i daje nove biljke. Semenje koje ne proklija trenutne godine i uspe da preživi i narednu zimu, deo β od njih će proklijati u narednoj sezoni. Na kraju svake sezone izumiru sve biljke.

Ako uzmemo da je N_t broj biljaka u t-toj sezoni, i posmatramo zadate podatke, možemo primetiti da je broj semenja koje preživi prvu zimu $N_t * \sigma * \gamma$, dok je broj koji će proklijati u toku jedne sezone:

$$O_t = N_t * \sigma * \gamma * \alpha$$

One biljke koje mogu da proklijaju iz dvogodišnjeg semenja dobijamo tako što od ukupnog broja preživelog jednogodišnjeg semenja oduzmemo one koje proklijaju te sezone. Od semenja koje prežive i drugu zimu, deo β njih će proklijati.

$$P_t = N_{t-1} * \beta * \sigma * (\gamma * \sigma - \alpha * \gamma * \sigma)$$

Nakon što sredimo obrazac:

$$P_t = N_{t-1} * \beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)$$

Konačna rekurentna formula za t + 1 generaciju je:

$$N_{t+1} = N_t * (\sigma * \gamma * \alpha) + N_{t-1} * (\beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)) \tag{8}$$

Biljke umiru prirodnom smrću nakon što se završi sezona, tako da sve proklijale biljke iz prethodne sezone umiru u toj istoj sezoni. Zbog toga broj biljaka u trenutnoj sezoni zavisi samo od izabranih parametara koje se odnose na posadjeno semenje.

Iz jednačine (8) možemo naći opšte rešenje nakon što je napišemo kao rekurentnu relaciju drugog reda:

$$N_{t+1} - N_t * (\sigma * \gamma * \alpha) - N_{t-1} * (\beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)) = 0$$

Sada pronadjemo karakterističnu jednačinu :

$$\lambda^{t+1} - \lambda^t * (\sigma * \gamma * \alpha) - \lambda^{t-1} * (\beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)) = 0$$

Nakon čega ćemo podeliti celu jednačinu sa λ^{t-1} i dobiti:

$$\lambda^2 - \lambda * (\sigma * \gamma * \alpha) - (\beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)) = 0$$

Primenićemo rešenje kvadratne jednačine:

$$\lambda_{1/2} = \frac{\sigma * \gamma * \alpha \pm \sqrt{\sigma^2 * \gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * \sigma^2 * (1 - \alpha)}}{2}$$

Nakon što ovaj izraz sredimo, dobijemo oblik:

$$\lambda_{1/2} = \sigma * \frac{\gamma * \alpha \pm \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}{2}$$

Rešenja kvadratne jednačine su:

$$\lambda_1 = \sigma * \frac{\gamma * \alpha + \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \sigma * \frac{\gamma * \alpha - \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}{2}$$

Odavde možemo da nadjemo opšte rešenje:

$$N_t = C1 * (\sigma * \frac{\gamma * \alpha + \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}{2})^t + C2 * (\sigma * \frac{\gamma * \alpha - \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}{2})^t$$

Možemo naći partikularna rešenja za C1 i C2 za N0 i N1:

$$N_0 = C1 + C2 \tag{9}$$

$$N_1 = \lambda_1 * C1 + \lambda_2 * C2 \tag{10}$$

Rešavanjem ovog sistema možemo da dobijemo partikularno rešenje. Izrazićemo C1 iz (9) jednačine, i ubaciti u (10):

$$C1 = N_0 - C2$$

$$N_1 = \lambda_1 * (N_0 - C2) + \lambda_2 * C2$$

Izmnožićemo članove zagrade:

$$N_1 = \lambda_1 * N_0 - \lambda_1 * C2 + \lambda_2 * C2$$

Sredjivanjem izraza dobijemo:

$$N_1 - \lambda_1 * N_0 = (\lambda_2 - \lambda_1) * C2$$

Izražavamo C2:

$$C2 = \frac{\lambda_1 * N_0 - N_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Vratimo C2 u jednačinu (9) i izrazimo C1:

$$C1 = \frac{N_1 - N_0 * \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Kada vratimo već izračunate vrednosti za Lambde:

$$C1 = \frac{N_1 - N_0 * (\sigma * \frac{\gamma * \alpha - \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}{2})}{\sigma * \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}$$

$$C2 = \frac{N_0 * (\sigma * \frac{\gamma * \alpha - \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}{2}) - N_1}{\sigma * \sqrt{\gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * (1 - \alpha)}}$$

3.2 Odredjivanje parametra gama koji nam obezbedjuje opstanak vrste

Da bismo osigurali opstanak vrste, potrebno je da broj biljaka prilikom smene generacija ili raste ili ostane konstantan . Drugim rečima, potrebno je da očekivani broj biljaka u sledećoj generaciji bude najmanje jednak broju biljaka u trenutnoj generaciji.

Matematički, to znači da ukupan broj biljaka N_{t+1} u sledećoj generaciji treba da bude najmanje jednak broju biljaka N_t u trenutnoj generaciji. Za održivost vrste, osnovna ideja je da se nadje uslov pod kojim $N_{t+1} \geq N_t$.

Koreni karakteristične jednačine su ključni za razumevanje dinamike populacije. Ako oba korena λ_1 i λ_2 imaju apsolutne vrednosti manje od 1, populacija će opadati. Ako su oba korena jednaka 1, populacija će ostati stabilna. Ako je bar jedan koren veći od 1, populacija će rasti.

Rekli smo da su koreni karakteristične jednačine:

$$\lambda_{1/2} = \sigma \frac{\alpha\gamma \pm \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2}$$

Za održivost, potrebno je da bar jedan od korena bude veći ili jednak 1. Prvo razmotrimo koren:

$$\lambda_1 = \sigma \frac{\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2}$$

Postavimo uslov $\lambda_1 \geq 1$:

$$\sigma \frac{\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2} \geq 1$$

Pomnožimo sa 2 i podelimo sa σ:

$$\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))} \geq \frac{2}{\sigma}$$

Izolujemo $\sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}$:

$$\sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))} \geq \frac{2}{\sigma} - \alpha\gamma$$

Kvadriranjem obe strane dobijamo:

$$\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha)) \geq \left(\frac{2}{\sigma} - \alpha\gamma\right)^2$$

Razvijamo kvadrat binoma:

$$\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha)) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma} + \alpha^2\gamma^2$$

Sredjujemo članove na levoj strani:

$$\alpha^2\gamma^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma} + \alpha^2\gamma^2$$

Primetimo da se $\alpha^2\gamma^2$ pojavi na obe strane jednačine, pa ga možemo skratiti:

$$4\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma}$$

Delićemo celu jednačinu sa 4:

$$\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\alpha\gamma}{\sigma}$$

Izolujemo sve članove sa γ na levoj strani:

$$\beta\gamma(1-\alpha) + \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \geq \frac{1}{\sigma^2}$$

Sredjujemo koeficijente uz γ:

$$\gamma\left(\beta(1-\alpha) + \frac{\alpha}{\sigma}\right) \geq \frac{1}{\sigma^2}$$

Izolujemo γ:

$$\gamma \geq \frac{1}{\sigma^2\left(\beta(1-\alpha) + \frac{\alpha}{\sigma}\right)}$$

Sredjujemo razlomke:

$$\gamma \geq \frac{1}{\sigma^2\beta(1-\alpha) + \sigma\alpha}$$

Dakle, ova jednačina nam predstavlja minimalni broj semenki γ koje svaka biljka treba da proizvede da bi osigurala opstanak vrste. Ovo je zahtevani uslov za γ koji garantuje opstanak vrste, uzimajući u obzir sve parametre σ, α, i β.

3.3 Primena jednačine na konkeretan primer

Posmatraćemo slučaj u kom na početku imamo 100 biljka i 0 semenja, za koji ćemo prikazati 20 generacija.

Kao početni parametri zadati su $\gamma = 2$ i $\sigma = 0.8$, i od nas se zahteva da nadjemo α i β tako da se ispuni uslov za izumiranje vrste, a potom za monoton rast.

Da bismo naše eksperimentalno pronadjene parametre validirali, njihove vrednosti možemo ubaciti u koren karakteristične jednačine koju smo izveli u poglavlju 3.1.

$$\lambda_{1/2} = \frac{\sigma * \gamma * \alpha \pm \sqrt{\sigma^2 * \gamma^2 * \alpha^2 + 4 * \beta * \gamma * \sigma^2 * (1-\alpha)}}{2}$$

Nakon ubacivanja vrednosti zadatih parametara γ i σ dobili smo oblik kojim mozemo da testiramo nase eksperimentalno izračunate parametre α i β:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1.6 * \alpha \pm \sqrt{2.56 * \alpha^2 + \beta * 5.12 * (1-\alpha)}}{2}$$

3.3.1 Izumiranje vrste

Da bi vrsta izumrla mora važiti da su apsolutne vrednosti oba korena manja od 1:

$$|\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| < 1$$

Na početku eksperimantalnog rada za početno α i β smo uzeli redom vrednosti 0.5 i 0.2. Fiksiranjem parametra β i ispitivanjem izumiranja biljaka kroz generacije za različite vrednosti parametra α dobili smo vrednost $\alpha = 0.35$ za koju naše biljke sigurno izumiru u 20 generacija.

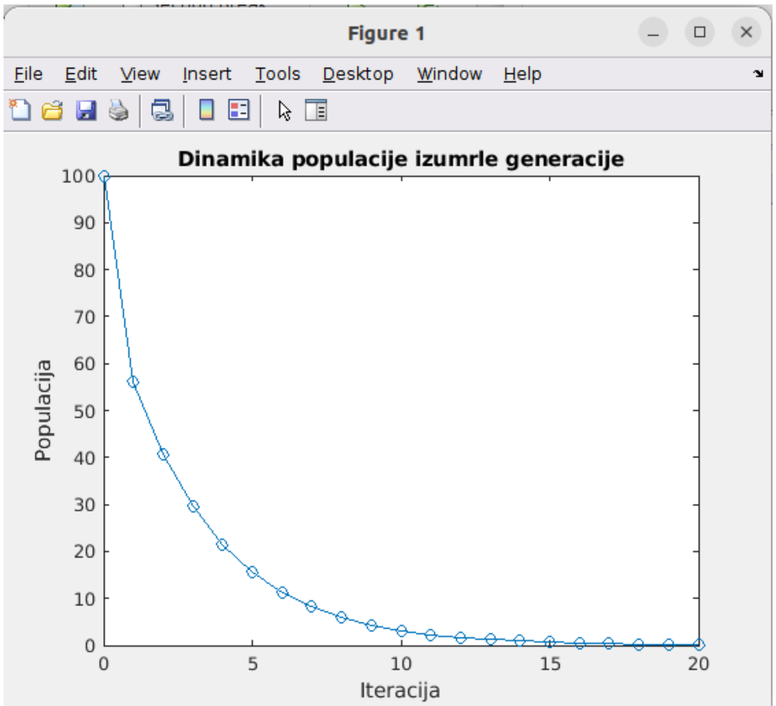

Figure 1: Grafik funkcije za izumiranje vrste

Sa ovog grafika se videlo da je vrsta izumrla u iteraciji 16.
Dobijene vrednosti $|\lambda 1| = 0.7745$ i $|\lambda 2| = 0{,}2245$ za pronadjene parametre α i β su manje od 1. Time nam se validira da je ostvaren uslov za izumiranje vrste .

3.3.2 Monoton rast populacije

Da bi vrsta monotono rasla jedan od korena karakteristične jednačine mora da bude veći od 1, a apsolutna vrednost drugog mora biti manja od 1:

$$\lambda_1 > 1 \wedge |\lambda_2| < 1$$

Na početku eksperimantalnog rada za α i β, uzeli smo redom vrednosti 0.5 i 0.4. Opet smo fiksirali parametar β i ispitivali za koji parametar α se ostvaruje monoton rast. Za $\alpha = 0.65$ naša vrsta ostvaruje monton rast. Na grafiku je prikazano 20 generacija.

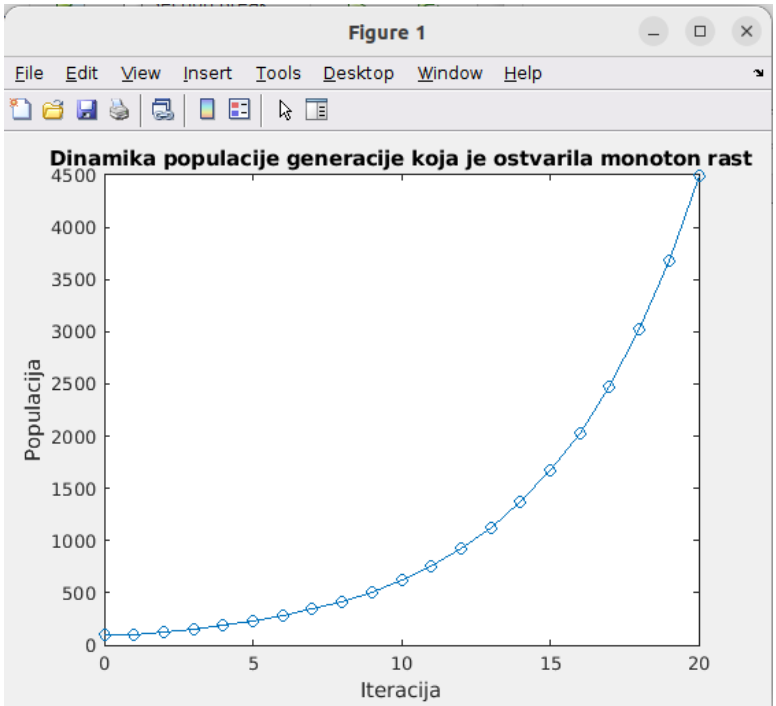

Figure 2: Grafik funkcije za monton rast

Dobijene su vrednosti $\lambda 1$=1.190 i $|\lambda 2|$=0.150 za pronadjene parametre α i β. TIme smo validirali da je ostvaren uslov za monoton rast populacije biljaka.

4 References

1. Milan Dražić, *Matamatičko modeliranje*, Matematički fakultet, Beograd, 2017.
2. Materijali sa predavanja