Biljke i semenje

Dimitrije Vranić i Vukašin Marković

Maj 2024

Contents

1 Uvod

Istražujemo problem razmnožavanja biljaka i promene u populaciji svake godine. Nije nam naglašeno da imamo ograničen broj resursa, tako da ne postoji ograničenje broja jediniki u stanovištu. Svaka biljka uvek daje isti broj semena, što znači da imamo homogeno razmnožavanje po broju jedinki, kao i homogeno razmnožavanje po vremenu jer se isti broj semena proizvede svake godine. Zato što svaka biljka uvek umire na kraju sezone, važi i homogenost izumiranja po vremenu.

2 Biljke i semenje

2.1 Diferencna jednačina primera

U našem primeru se traži da izračunamo ukupan broj semena koji proklija u biljke u periodu od jedne sezone. Svaka biljka proizvede konstantan broj semenja γ, dok je deo semenja koje preživi prvu zimu σ. Od preživelog semenja, α je deo koji proklija na početku sezone i daje nove biljke. Semenje koje ne proklija trenutne godine i uspe da preživi i narednu zimu, deo β od njih će proklijati u narednoj sezoni. Na kraju svake sezone izumiru sve biljke.

Ako uzmemo da je N_t broj biljaka u t-toj sezoni, i posmatramo zadate podatke, možemo primetiti da je broj semenja koje preživi prvu zimu $N_t\sigma\gamma$, dok je broj koji će proklijati u toku jedne sezone:

$$O_t = N_t\sigma\gamma\alpha.$$

One biljke koje mogu da proklijaju iz dvogodišnjeg semenja dobijamo tako što od ukupnog broja preživelog jednogodišnjeg semenja oduzmemo one koje proklijaju te sezone. Od semenja koje prežive i drugu zimu, deo β njih će proklijati.

$$P_t = N_{t-1}\beta\sigma(\gamma\sigma - \alpha\gamma\sigma).$$

Nakon što sredimo obrazac:

$$P_t = N_{t-1}\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha).$$

Konačna rekurentna formula za t + 1 generaciju je, za $N_0 = N0$ i $N_1 = N1$:

$$N_{t+1} = N_t(\sigma\gamma\alpha) + N_{t-1}(\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)). \tag{1}$$

Biljke umiru prirodnom smrću nakon što se završi sezona, tako da sve proklijale biljke iz prethodne sezone umiru u toj istoj sezoni. Zbog toga broj biljaka u trenutnoj sezoni zavisi samo od izabranih parametara koje se odnose na posadjeno semenje.

Iz jednačine (8) možemo naći opšte rešenje nakon što je napišemo kao rekurentnu relaciju drugog reda:

$$N_{t+1} - N_t(\sigma\gamma\alpha) - N_{t-1}(\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)) = 0.$$

Sada pronadjemo karakterističnu jednačinu :

$$\lambda^{t+1} - \lambda^t(\sigma\gamma\alpha) - \lambda^{t-1}(\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)) = 0.$$

Nakon čega ćemo podeliti celu jednačinu sa λ^{t-1} i dobiti:

$$\lambda^2 - \lambda(\sigma\gamma\alpha) - (\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)) = 0.$$

Primenićemo rešenje kvadratne jednačine:

$$\lambda_{1/2} = \frac{\sigma\gamma\alpha \pm \sqrt{\sigma^2\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)}}{2},$$

nakon što ovaj izraz sredimo, dobijemo oblik:

$$\lambda_{1/2} = \sigma\frac{\gamma\alpha \pm \sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}{2}.$$

Rešenja kvadratne jednačine su:

$$\lambda_1 = \sigma\frac{\gamma\alpha + \sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}{2},$$

$$\lambda_2 = \sigma\frac{\gamma\alpha - \sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}{2}.$$

Da bismo proverili da li su rešenja realna, moramo proveriti da li je diskriminanta naše jednačine D ≥ 0 :
Diskriminantna u našoj jednačini je:

$$D = \sigma^2\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)$$

i proveravamo da li za sabirke važi da su nenegativni:
$\sigma^2\gamma^2\alpha^2 \geq 0$ jer su svi članovi kvadrati,
$4\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)$, takodje ispunjava ovaj uslov zato što je γ broj semena, a α, β i σ procenti broja preživelih semena ili proklijalih biljaka, te očekujemo da su nenegativni. Obzirom da su pomenuti procenti manji od jedan, to nam implicira da će i $(1-\alpha)$ takodje biti nenegativno
Odavde imamo zbir dva nenegativna broja, pa je ispunjeno

$$D \geq 0,$$

što znači da su rešenja realni brojevi. Stoga, možemo da zapišemo opšte rešenje diferencne jednačine kao linearnu kombinaciju realnih funkcija :

$$N_t = C_1(\sigma\frac{\gamma\alpha + \sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}{2})^t + C_2(\sigma\frac{\gamma\alpha - \sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}{2})^t.$$

Možemo naći partikularna rešenja za C_1 i C_2 za N_0 i N_1:

$$N_0 = C_1 + C_2 \tag{2}$$

$$N_1 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2. \tag{3}$$

Rešavanjem ovog sistema možemo da dobijemo partikularno rešenje. Izrazićemo C_1 iz (9) jednačine, i ubaciti u (10):

$$C_1 = N_0 - C_2$$

$$N_1 = \lambda_1(N_0 - C_2) + \lambda_2 C_2.$$

Izmnožićemo članove zagrade:

$$N_1 = \lambda_1 N_0 - \lambda_1 C_2 + \lambda_2 C_2.$$

Sredjivanjem izraza dobijemo:

$$N_1 - \lambda_1 N_0 = (\lambda_2 - \lambda_1) C_2.$$

Izražavamo C_2:

$$C_2 = \frac{\lambda_1 N_0 - N_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Vratimo C_2 u jednačinu (9) i izrazimo C_1:

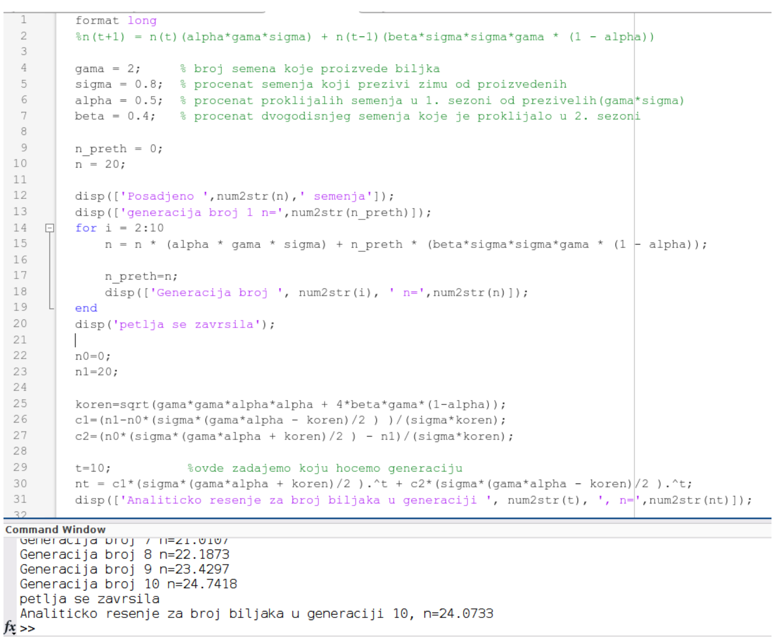
$$C_1 = \frac{N_1 - N_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Kada vratimo već izračunate vrednosti za Lambde:

$$C_1 = \frac{N_1 - N_0(\sigma \frac{\gamma\alpha - \sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}{2})}{\sigma\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}$$

$$C_2 = \frac{N_0(\sigma \frac{\gamma\alpha + \sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}{2}) - N_1}{\sigma\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha)}}.$$

Vrednost rekurentne formule i rešenja diferencne jednačine se poklapaju:



```
format long
%n(t+1) = n(t)(alpha*gama*sigma) + n(t-1)(beta*sigma*sigma*gama * (1 - alpha))

gama = 2;     % broj semena koje proizvede biljka
sigma = 0.8;  % procenat semenja koji prezivi zimu od proizvedenih
alpha = 0.5;  % procenat proklijalih semenja u 1. sezoni od prezivelih(gama*sigma)
beta = 0.4;   % procenat dvogodisnjeg semenja koje je proklijalo u 2. sezoni

n_preth = 0;
n = 20;

disp(['Posadjeno ',num2str(n),' semenja']);
disp(['generacija broj 1 n=',num2str(n_preth)]);
for i = 2:10
    n = n * (alpha * gama * sigma) + n_preth * (beta*sigma*sigma*gama * (1 - alpha));

    n_preth=n;
    disp(['Generacija broj ', num2str(i), ' n=',num2str(n)]);
end
disp('petlja se zavrsila');

n0=0;
n1=20;

koren=sqrt(gama*gama*alpha*alpha + 4*beta*gama*(1-alpha));
c1=(n1-n0*(sigma*(gama*alpha - koren)/2 ) )/(sigma*koren);
c2=(n0*(sigma*(gama*alpha + koren)/2 ) - n1)/(sigma*koren);

t=10;          %ovde zadajemo koju hocemo generaciju
nt = c1*(sigma*(gama*alpha + koren)/2 ).^t + c2*(sigma*(gama*alpha - koren)/2 ).^t;
disp(['Analiticko resenje za broj biljaka u generaciji ', num2str(t), ', n=',num2str(nt)]);
```

Command Window

```
Generacija broj 7 n=21.0107
Generacija broj 8 n=22.1873
Generacija broj 9 n=23.4297
Generacija broj 10 n=24.7418
petlja se zavrsila
Analiticko resenje za broj biljaka u generaciji 10, n=24.0733
>>
```

Figure 1: Poredjenje opšteg i iterativnog rešenja

2.2 Odredjivanje parametra gama koji nam obezbedjuje opstanak vrste

Da bismo osigurali opstanak vrste, potrebno je da broj biljaka prilikom smene generacija ili raste ili ostane konstantan . Drugim rečima, potrebno je da očekivani broj biljaka u sledećoj generaciji bude najmanje jednak broju biljaka u trenutnoj generaciji.

Matematički, to znači da ukupan broj biljaka N_{t+1} u sledećoj generaciji treba da bude najmanje jednak broju biljaka N_t u trenutnoj generaciji. Za održivost vrste, osnovna ideja je da se nadje uslov pod kojim $N_{t+1} \geq N_t$.

Koreni karakteristične jednačine su ključni za razumevanje dinamike populacije. Ako oba korena λ_1 i λ_2 imaju apsolutne vrednosti manje od 1, populacija će opadati. Ako su oba korena jednaka 1, populacija će ostati stabilna. Ako je bar jedan koren veći od 1, populacija će rasti. Ovo smo zaključili na osnovu opšteg rešenja rekurentne jednačine.

$$N_t = C_1(\lambda_1)^t + C_2(\lambda_2)^t.$$

C1 i C2 su konstante koje nam odredjuju kako se početna populacija i početna stopa promene rasporedjuje. Dok se λ_1 i λ_2 eksponencijalno menjaju, i nakon nekog vremena nadvladjuju prvobitni uticaj konstanti.

Dovoljno je da samo jedan koren bude veći od 1 da bi populacija rasla. U slučaju da je drugi koren manji od 1, on će tokom generacija težiti ka nuli i postaje zanemarljiv u odnosu na prvi koren,

Rekli smo da su koreni karakteristične jednačine:

$$\lambda_{1/2} = \sigma \frac{\alpha\gamma \pm \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2}.$$

Za održivost, potrebno je da bar jedan od korena bude veći ili jednak 1. Prvo razmotrimo koren:

$$\lambda_1 = \sigma \frac{\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2}.$$

Postavimo uslov $\lambda_1 \geq 1$:

$$\sigma \frac{\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}}{2} \geq 1.$$

Pomnožimo sa 2 i podelimo sa σ:

$$\alpha\gamma + \sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))} \geq \frac{2}{\sigma}.$$

Izolujemo $\sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))}$:

$$\sqrt{\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha))} \geq \frac{2}{\sigma} - \alpha\gamma.$$

Kvadriranjem obe strane dobijamo:

$$\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha)) \geq \left(\frac{2}{\sigma} - \alpha\gamma\right)^2.$$

Kvadriranje je ovde bilo moguće ako je potkorena vrednost sa leve strane pozitivna, tj. ako je $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\beta \geq 0$. Dok za desnu stranu važi:

$$\frac{2}{\sigma} \geq \alpha\gamma,$$

odnosno:

$$\gamma \leq \frac{2}{\sigma\alpha}.$$

Razvijamo kvadrat binoma:

$$\gamma(\alpha^2\gamma + 4\beta(1-\alpha)) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma} + \alpha^2\gamma^2.$$

Sredjujemo članove na levoj strani:

$$\alpha^2\gamma^2 + 4\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma} + \alpha^2\gamma^2.$$

Primetimo da se $\alpha^2\gamma^2$ pojavi na obe strane jednačine, pa ga možemo skratiti:

$$4\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4\alpha\gamma}{\sigma}.$$

Delićemo celu jednačinu sa 4:

$$\beta\gamma(1-\alpha) \geq \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\alpha\gamma}{\sigma}.$$

Izolujemo sve članove sa γ na levoj strani:

$$\beta\gamma(1-\alpha) + \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \geq \frac{1}{\sigma^2}.$$

Sredjujemo koeficijente uz γ:

$$\gamma\left(\beta(1-\alpha) + \frac{\alpha}{\sigma}\right) \geq \frac{1}{\sigma^2}.$$

Izolujemo γ:

$$\gamma \geq \frac{1}{\sigma^2\left(\beta(1-\alpha) + \frac{\alpha}{\sigma}\right)}.$$

Sredjujemo razlomke:

$$\gamma \geq \frac{1}{\sigma^2\beta(1-\alpha) + \sigma\alpha}.$$

Dakle, ova jednačina nam predstavlja minimalni broj semenki γ koje svaka biljka treba da proizvede da bi osigurala opstanak vrste. Ovo je zahtevani uslov za γ koji garantuje opstanak vrste, uzimajući u obzir sve parametre σ, α, i β.

2.3 Primena jednačine na konkeretan primer

Posmatraćemo slučaj u kom na početku imamo 100 biljka i 0 semenja, za koji ćemo prikazati 20 generacija.

Kao početni parametri zadati su $\gamma = 2$ i $\sigma = 0.8$, i od nas se zahteva da nadjemo α i β tako da se ispuni uslov za izumiranje vrste, a potom za monoton rast.

Da bismo naše eksperimentalno pronadjene parametre validirali, njihove vrednosti možemo ubaciti u koren karakteristične jednačine koju smo izveli u poglavlju 2.1.

$$\lambda_{1/2} = \frac{\sigma\gamma\alpha \pm \sqrt{\sigma^2\gamma^2\alpha^2 + 4\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)}}{2}.$$

Nakon ubacivanja vrednosti zadatih parametara γ i σ dobili smo oblik kojim mozemo da testiramo nase eksperimentalno izračunate parametre α i β:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1.6\alpha \pm \sqrt{2.56\alpha^2 + \beta 5.12(1-\alpha)}}{2}.$$

2.3.1 Izumiranje vrste

Da bi vrsta izumrla mora važiti da su apsolutne vrednosti oba korena manja od 1:

$$|\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| < 1.$$

Na početku eksperimantalnog rada za početno α i β smo uzeli redom vrednosti 0.5 i 0.2. Fiksiranjem parametra β i ispitivanjem izumiranja biljaka kroz generacije za različite vrednosti parametra α dobili smo vrednost $\alpha = 0.35$ za koju naše biljke sigurno izumiru u 20 generacija.

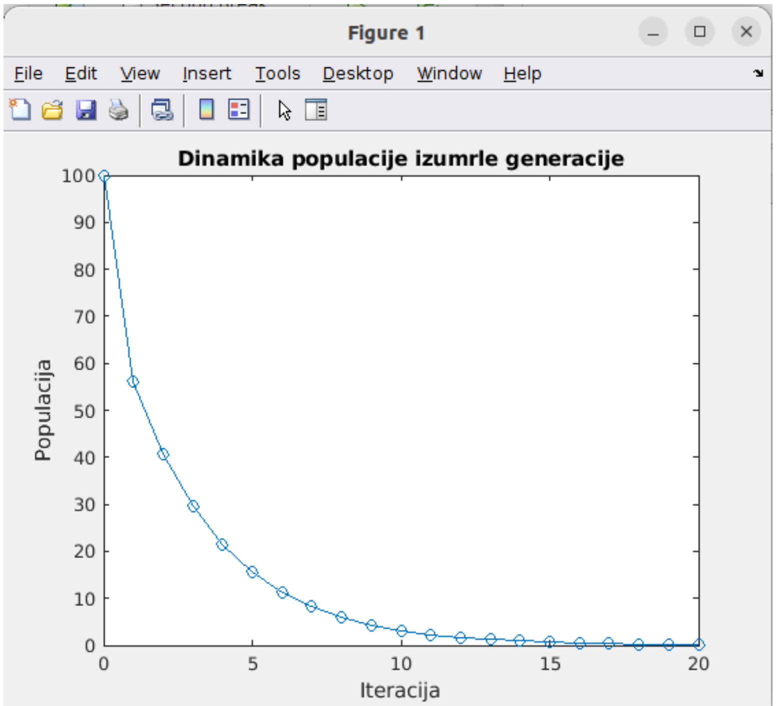


Figure 2: Grafik funkcije za izumiranje vrste

Sa ovog grafika se videlo da je vrsta izumrla u iteraciji 16.
Dobijene vrednosti $|\lambda 1| = 0.7745$ i $|\lambda 2| = 0{,}2245$ za pronadjene parametre α i β su manje od 1. Time nam se validira da je ostvaren uslov za izumiranje vrste .

Naravno možemo i direktno pronaći vrednost jednog od parametra. Izrazićemo parametar β preko parametra α, tako da on dovede do izumiranja populacije. β ćemo izraziti iz pomenutih uslova za izumiranje, gde važi da su apsolutne vrednosti λ_1 i λ_2 manje od 1. Počećemo rešavanjem kvadratne jednačine za λ:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1.6\alpha \pm \sqrt{2.56\alpha^2 + \beta \cdot 5.12(1-\alpha)}}{2}.$$

Zbog jednostavnosti označimo $\Delta = \sqrt{2.56\alpha^2 + \beta \cdot 5.12(1-\alpha)}$.

$$\lambda_1 = \frac{1.6\alpha + \Delta}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{1.6\alpha - \Delta}{2}.$$

Da bismo imali $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| < 1$, moramo ispuniti sledeće uslove:
1. $\frac{1.6\alpha+\Delta}{2} < 1$
2. $\frac{1.6\alpha+\Delta}{2} > -1$
3. $\frac{1.6\alpha-\Delta}{2} < 1$
4. $\frac{1.6\alpha-\Delta}{2} > -1$

Imamo četiri osnovna uslova:
1. $1.6\alpha + \Delta < 2$
2. $1.6\alpha + \Delta > -2$
3. $1.6\alpha - \Delta < 2$
4. $1.6\alpha - \Delta > -2$

Preformulišemo uslove:
1. $\Delta < 2 - 1.6\alpha$
2. $\Delta > -2 - 1.6\alpha$
3. $\Delta > 1.6\alpha - 2$
4. $\Delta < 2 + 1.6\alpha$

Moramo pronaći Δ koje zadovoljava sve ove uslove. Ključno je primetiti da su uslovi 2 i 3 redundantni jer je Δ kvadratni koren, i samim tim, ne može biti negativan. Dakle, validni uslovi su:

1. $\Delta < 2 - 1.6\alpha$
2. $\Delta < 2 + 1.6\alpha$

Kombinacija uslova:

$$\Delta < \min(2 - 1.6\alpha, 2 + 1.6\alpha).$$

Ovo implicira da:

$$\Delta < 2 - 1.6\alpha \quad .$$

Dakle, ključni uslov koji treba zadovoljiti je:

$$\sqrt{2.56\alpha^2 + \beta \cdot 5.12(1-\alpha)} < 2 - 1.6\alpha.$$

Kvadriranjem obe strane dobijamo:

$$2.56\alpha^2 + \beta \cdot 5.12(1-\alpha) < (2 - 1.6\alpha)^2$$

$$2.56\alpha^2 + \beta \cdot 5.12(1-\alpha) < 4 - 6.4\alpha + 2.56\alpha^2$$

Oduzmimo $2.56\alpha^2$ sa obe strane:

$$\beta \cdot 5.12(1-\alpha) < 4 - 6.4\alpha.$$

Podelimo sve sa $5.12(1-\alpha)$:

$$\beta < \frac{4 - 6.4\alpha}{5.12(1-\alpha)}.$$

Ovo je konačan izraz za β tako da apsolutne vrednosti λ_1 i λ_2 budu manje od 1. Svaka vrednost parametra β koja je manja od izvedenog izraza dovodi do izumiranja biljaka u nekoj od budućih generacija. Za neke parametre α, izumiranje vrste ipak nije moguće, pa je u tom slučaju potrebno smanjiti i parametar α. Na sledećoj slici prikazan je graf u 20 generacija, gde je za zadato α pronadjeno β koje vodi ka izumiranju vrste biljaka.

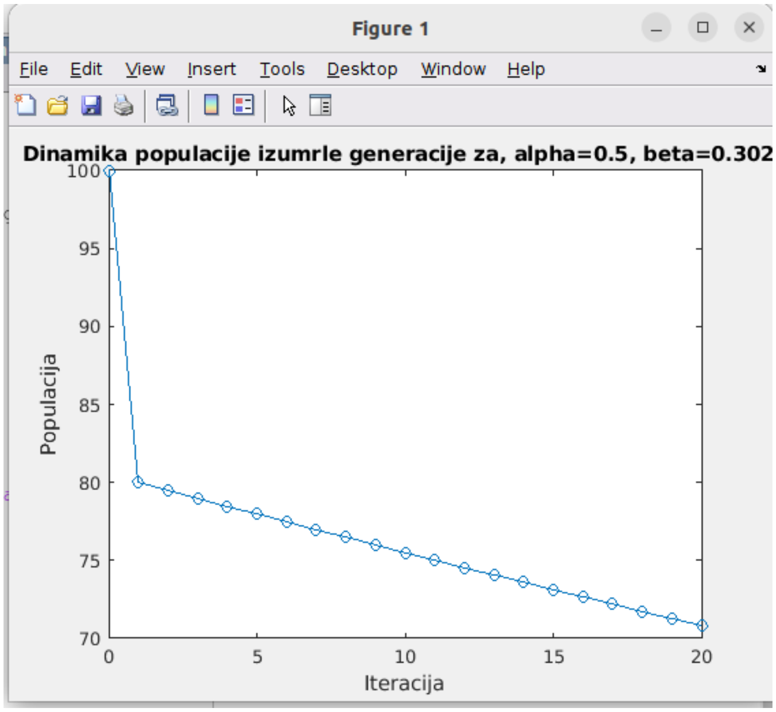


Figure 3: Grafik funkcije izumiranje 2

2.3.2 Monoton rast populacije

Da bi vrsta monotono rasla jedan od korena karakteristične jednačine mora da bude veći od 1, a apsolutna vrednost drugog mora biti manja od 1:

$$\lambda_1 > 1 \wedge |\lambda_2| < 1.$$

Na početku eksperimantalnog rada za α i β, uzeli smo redom vrednosti 0.5 i 0.4. Opet smo fiksirali parametar β i ispitivali za koji parametar α se ostvaruje monoton rast. Za $\alpha = 0.65$ naša vrsta ostvaruje monton rast. Na grafiku je prikazano 20 generacija.

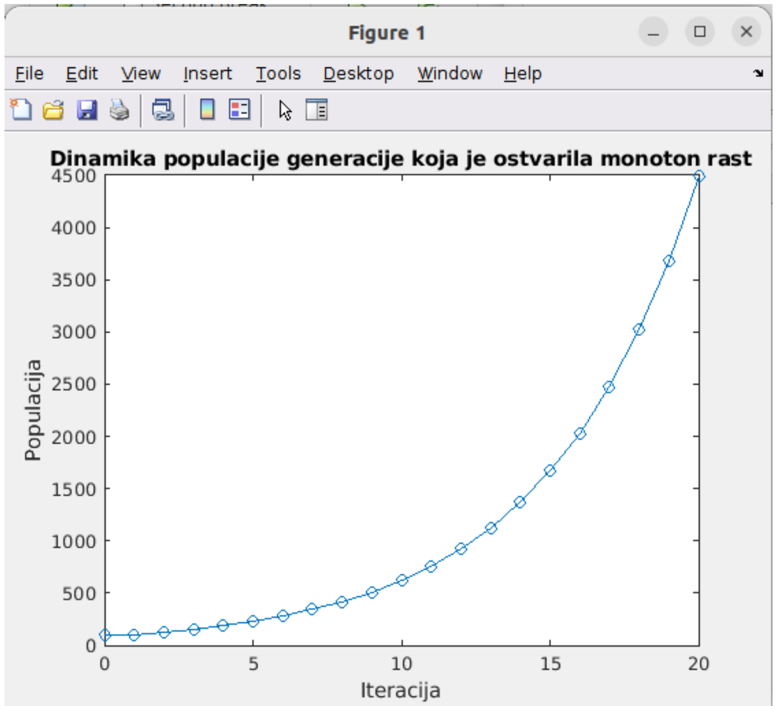


Figure 4: Grafik funkcije za monton rast

Dobijene su vrednosti $\lambda 1$=1.190 i $|\lambda 2|$=0.150 za pronadjene parametre α i β. TIme smo validirali da je ostvaren uslov za monoton rast populacije biljaka.

3 References

1. Milan Dražić, *Matamatičko modeliranje*, Matematički fakultet, Beograd, 2017.
2. Materijali sa predavanja