MIZUHO

One MIZUHO

Strictly Confidential

Quantum Pricing with a Smile: Implementation of Local Volatility Model on Quantum Computer

arXiv:2007.01467 [quant-ph]

2020.10.16

みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社
宮本幸一（共著者：金子和哉、武田直幸、吉野一慶）

One MIZUHO
未来へ。お客さまとともに

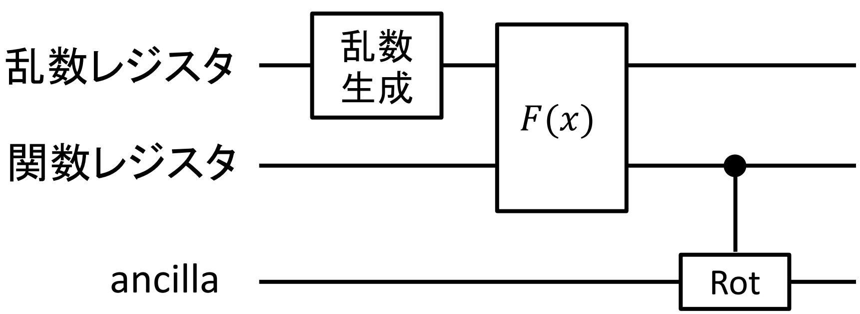
みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社

- 弊社の概要
  - 銀行・生保・損保の3社のJV
    - ✓ 株式保有比率：みずほ銀行 60%、第一生命 30%、損保ジャパン 10%
  - 金融機関や事業会社に対し、金融工学・数理科学に基づくコンサルティングを提供
    - ✓ リスク管理（信用リスク、市場リスク、…）
    - ✓ デリバティブ時価評価
    - ✓ 投資技術　✓ データ分析　… etc
  - オリジナリティ
    - ✓ 数理科学と金融実務の双方に精通
    - ✓ 最先端技術の実務への実装に豊富な経験

- 量子コンピューティングに対する弊社のモチベーション
  - 量子コンピューティングの金融実務への応用を論じた論文が、既に多数
  - 弊社も来るべき将来に当該領域のソリューションを提供できるよう検討を開始
  - 特に、**金融実務の観点**から、**既存の方法論への改善提案**ならびに**新しい応用例の創出**を行っていきたい

量子コンピュータによるモンテカルロ積分

- 量子コンピュータによるモンテカルロ積分（以下「量子モンテカルロ」）[1,2]
  - 計算量Nに対して誤差が$O(N^{-1})$の形で減衰
    - ✓ 古典だと $O(N^{-1/2})$ → "quadratic speedup"
- 問：密度関数 $p(x)$ を持つ確率変数 x と関数 F に対し、期待値 $E[F(x)] = \sum_x p(x)F(x)$を求めよ
- 量子モンテカルロの大まかな流れ
  1. 乱数生成：$p(x)$に基づく確率振幅を持つ$|x\rangle$の重ね合わせ $\sum_x \sqrt{p(x)}|x\rangle$ を生成
  2. $F(x)$を別のレジスタに計算：$\sum_x \sqrt{p(x)}|x\rangle|0\rangle \to \sum_x \sqrt{p(x)}|x\rangle|F(x)\rangle$
  3. $F(x)$をancillaのamplitude（$|1\rangle$を取る確率）にエンコーディング
     $\sum_x \sqrt{p(x)}|x\rangle|F(x)\rangle|0\rangle \to \sum_x \sqrt{p(x)}|x\rangle|F(x)\rangle\left(\sqrt{F(x)}|1\rangle + \sqrt{1-F(x)}|0\rangle\right)$
  4. Quantum Amplitude Estimation (QAE)[3,2]によりancilla = 1の確率（=$E[F(x)]$）を推定



この量子ビットを観測して1を得る確率 = $E[F(x)]$
→ これをQAEで推定

量子モンテカルロの金融への応用

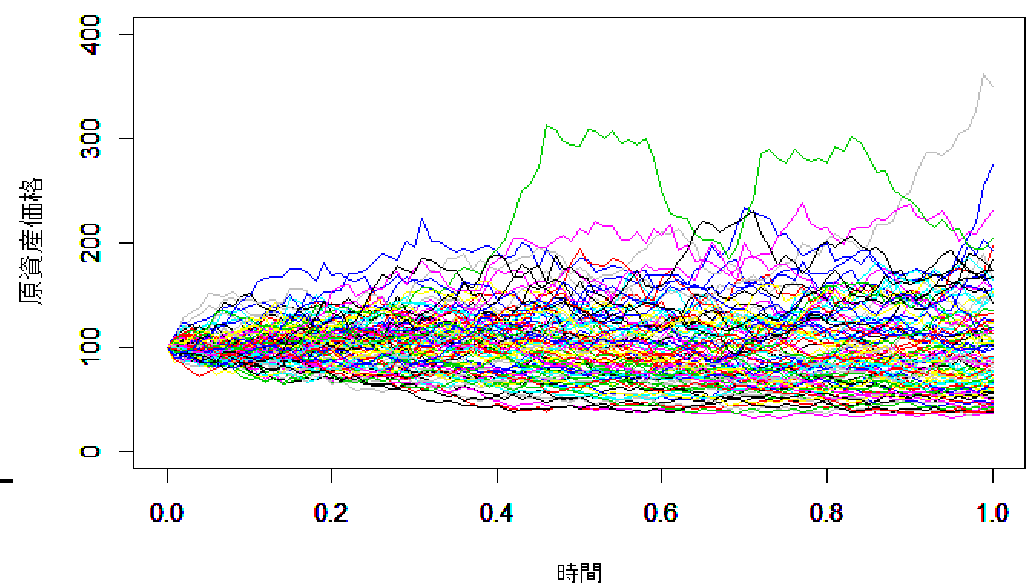
- 量子計算の金融への応用
  - 既に多くの応用例が提案されている
  - 特に、金融機関は日々**膨大なモンテカルロ積分**を行っており、量子高速化の恩恵は大きい
    - ✓ **デリバティブ時価評価**[4-6]←本トークのテーマ
    - ✓ ポートフォリオリスク計測（信用[7,8]・市場[9]）

- デリバティブ
  - 株式等の「原資産」の価格を参照して決まるキャッシュフローを授受する二者間契約
  - 例：European call/put option
    所定の期日T（「満期」と言う）に所定の価格K（"strike"と言う）で原資産を買う/売る権利
    → Tでの原資産価格をS_Tとすると、キャッシュフロー$\begin{cases}\max\{S_T-K,0\}; \mathrm{Call} \\ \max\{K-S_T,0\}; \mathrm{Put}\end{cases}$を得る
  - 他にも、種々の取引条件が付いた複雑な商品（エキゾチックデリバティブ）も存在
    - ✓ 例：早期行使権（アメリカンオプション）
      最終満期までの任意の時点で権利行使できる条項
  - エキゾチックデリバティブは市場で活発に取引されてはおらず、時価が入手不能
    → 金融機関自身が何らかの方法で**時価評価**する必要

モンテカルロ積分によるデリバティブ時価評価

- エキゾチックデリバティブ→多くの場合モンテカルロ積分で時価評価
  - 手順
    1. 原資産価格S_tのランダムな時間発展をモデル化
       例：Black-Scholes(BS)モデル[10,11]　$dS_t = \sigma S_t dW_t$　※ドリフト項は省略
       ボラティリティ（S_tの変動の大きさ）
    2. 最終満期までの原資産の変動シナリオ（”パス”）を多数発生させ、
       生じるキャッシュフローの期待値を取る → これが時価
       - ✓ パス数 ~ 10^5
         取引数は膨大、原資産や取引条件の種類も多岐に亘る
         → 非常に時間が掛かる

（原資産価格の変動のイメージ）



量子モンテカルロのデリバティブ時価評価への適用

■ 現状

- 適用を検討する論文は発表されているが、多くが簡単な問題設定に留まる
- 実務ではより複雑な設定下の計算が行われている → 現状からの拡張が必要

ポイント	既存の研究	拡張すべき対象
モデル	BS　etc	**局所ボラティリティ(LV)モデル** 確率ボラティリティ(SV)モデル　etc
商品性	ヨーロピアン　etc	早期行使権　etc
XVA	勘案せず	勘案
…	…	…

本トークのテーマ

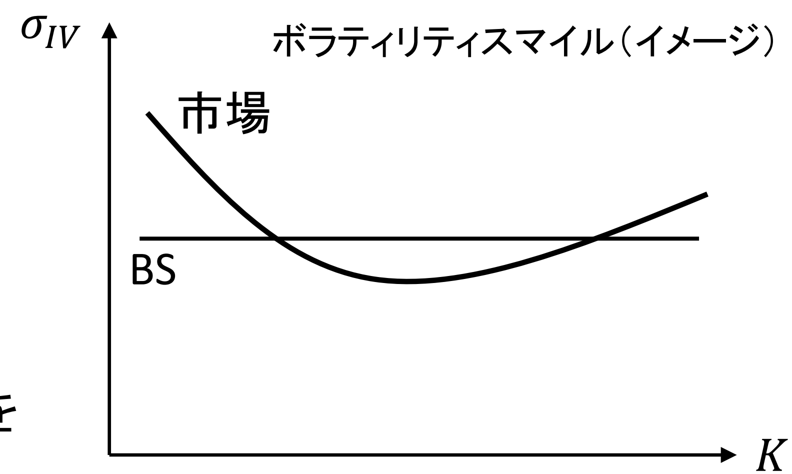
※ XVA：種々の要因による時価調整の総称
カウンターパーティーのデフォルトリスクに起因するCVA等

■ より高度なモデルや商品性に対し、時価計算のための**量子回路を具体的に提示**することで、量子モンテカルロの適用可能性を示したい

局所ボラティリティ(LV)モデル

- BSモデルだけ考えるのでは不十分な理由
  - BSではヨーロピアン等の簡単な商品に対して時価の解析式$V_{BS}(K,T;\sigma)$が存在
    → モンテカルロ不要
    - ✓ 実務でモンテカルロが用いられるのはより高度なモデル
  - BSモデルはヨーロピアンオプションの市場環境に適合しない場合がある
    即ち、**ボラティリティスマイル**を表現できず
    - ✓ インプライドボラティリティ(IV):ヨーロピアンの市場価格V_{mkt}に適合するBSボラティリティ
      $$\sigma_{IV}(K,T):(K,T)\mapsto\sigma_{IV}\ s.t. V_{BS}(K,T;\sigma_{IV})=V_{mkt}(K,T)$$
    - ✓ 市場がBSモデルに合致していればIVはKに依存しないが、そうならないケースあり

- LVモデル[12]
  - ボラティリティが原資産価格や時間に依存
    $$dS_t=\sigma(t,S_t)S_t dW_t$$
  - 任意のスマイルの形状を再現可能
  - 実務でも広く利用、しばしばモンテカルロを適用

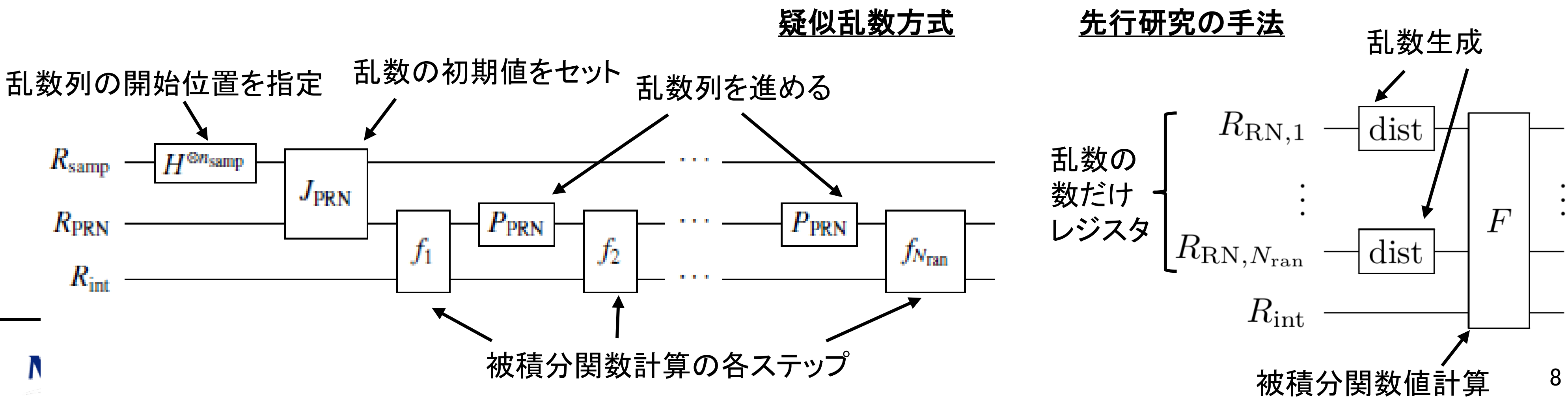


- 本研究では、LVモデルにおける**原資産価格の時間発展**を計算するための量子回路を検討した

量子モンテカルロにおける疑似乱数の利用

- デリバティブ時価評価に量子モンテカルロを適用する場合の問題点
  - 多くの乱数が必要（高次元積分）
    - ✓ 時間発展の離散ステップ数n_tと等しい数の標準正規乱数が必要
      → 長期の取引（e.g. 30年）の場合、$n_t \sim O(10^2)$
  - 先行論文では、1つの乱数に1つのレジスタを割り当て、乱数に対応する状態を生成
    → 所要量子ビット数 $\sim O(10^3 - 10^4)$ （実際には他のレジスタもあるのでもっと多い）

- 解決策：疑似乱数の利用[8]
  - 各乱数を別々のレジスタに作るのでなく、**<u>1つのレジスタ上に逐次的に疑似乱数を作り</u>**、これを用いて逐次的に被積分関数を計算
  - 所要量子ビット数は乱数の数に依存しなくなり、大幅に削減
  - 但し、回路の深さとトレードオフ



LVモデルの原資産価格発展のための量子回路設計

- 本研究では、以下の2つの方針の下、LVモデルの原資産価格発展のための量子回路設計をそれぞれ設計し、所要リソース（量子ビット数・ゲート数（T-count））を見積もった

① PRN-on-a-register方式

✓ 疑似乱数を逐次生成

– 疑似乱数としてPCG[13]を利用（線形合同法 + bit stringのpermutation）

✓ その他の面でも量子ビット数をなるべく削減（例：途中計算結果をクリアしancilla再利用）
→ 必要な計算ステップが増えるため、T-countも増えるが、そこは妥協

② register-per-RN方式

✓ 乱数ごとレジスタ割当（先行論文と同様）

– 標準正規乱数に対応する状態$|SN\rangle$の生成には[14]の手法を利用

✓ 計算ステップをなるべく少なくし、T-countを削減（例：途中計算結果をクリアしない）
→ 量子ビット数は増えるが、そこは妥協

➢ 回路の深さ（T-depth）は両方式とも$O(n_t)$
→ PRN-on-a-register方式の短所は相対的に緩和

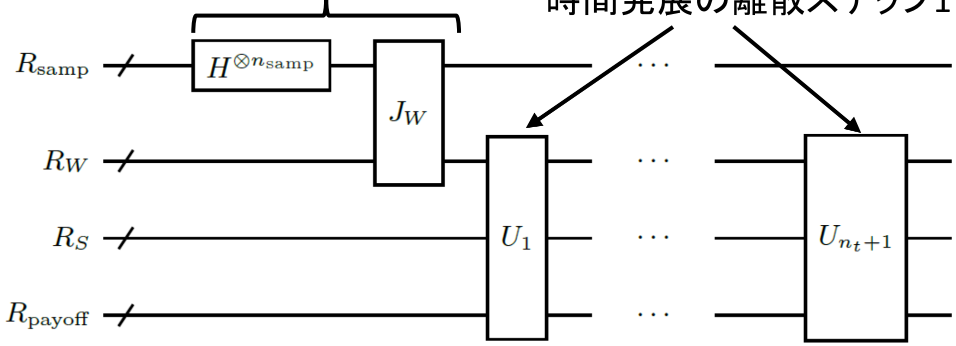
※ ここで、「回路の深さ」は「可能な限り各ゲートを並列実行した場合の計算ステップ数」の意

LVモデルの原資産価格発展のための量子回路設計

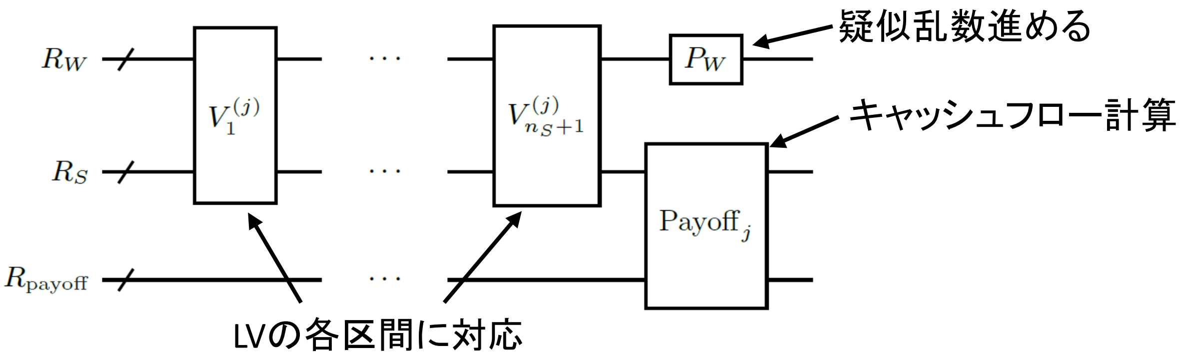
■ PRN-on-a-register方式の回路

・overview　疑似乱数初期値セット

時間発展の離散ステップ1つ分



・U_j



※ LVの関数形はpiecewise linearとする

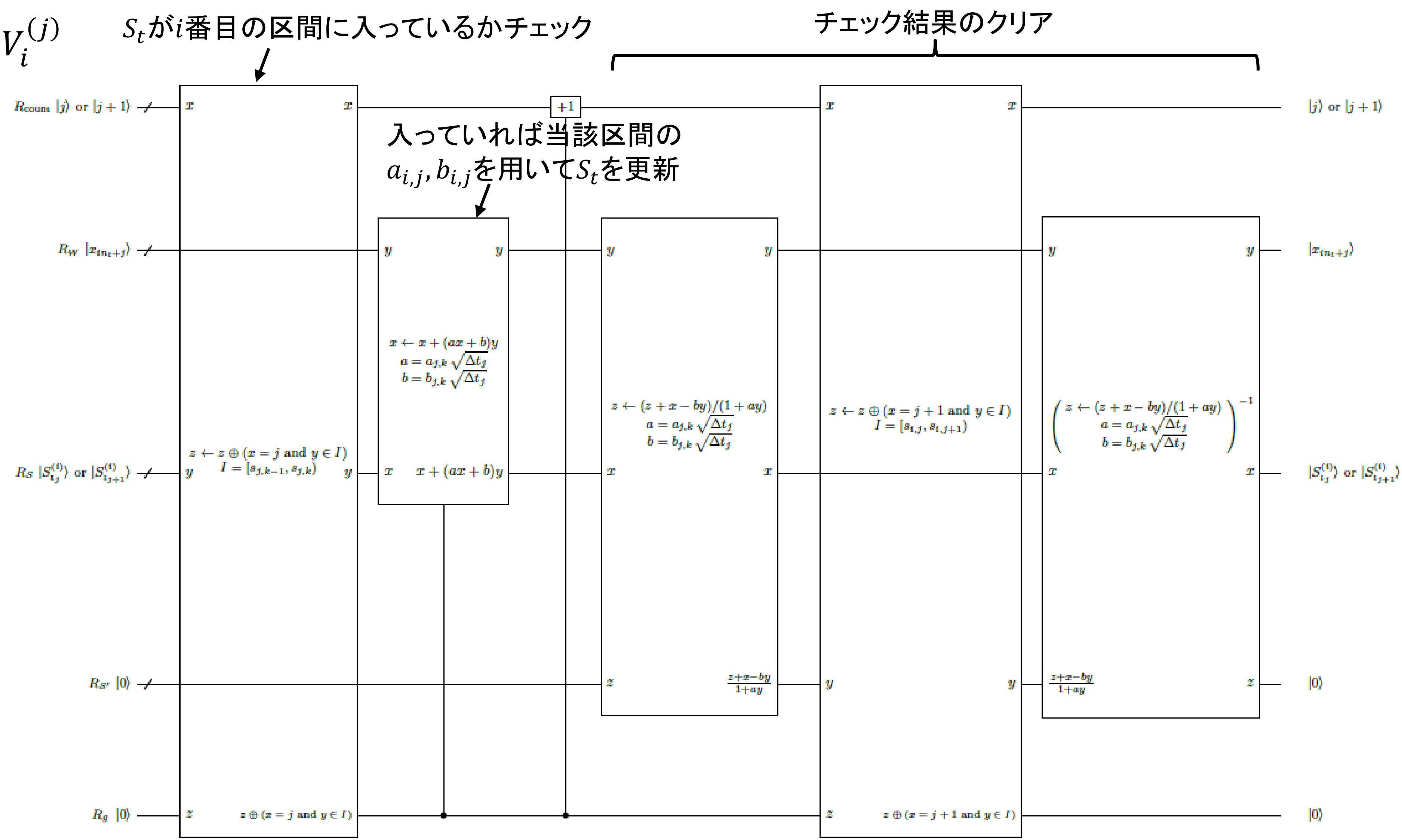
$\sigma(t,S) = a_{i,j}S + b_{i,j}; t_{i-1} \leq t < t_i, s_{i,j-1} \leq S < s_{i,j}$（$t_i, s_{i,j}$：時間・原資産価格のグリッド点、$a_{i,j}, b_{i,j}$：定数）

- ✓ スマイルにキャリブレーションするのに十分な自由度
- ✓ 実務上もよくあるチョイス

LVモデルの原資産価格発展のための量子回路設計

■ PRN-on-a-register方式の回路

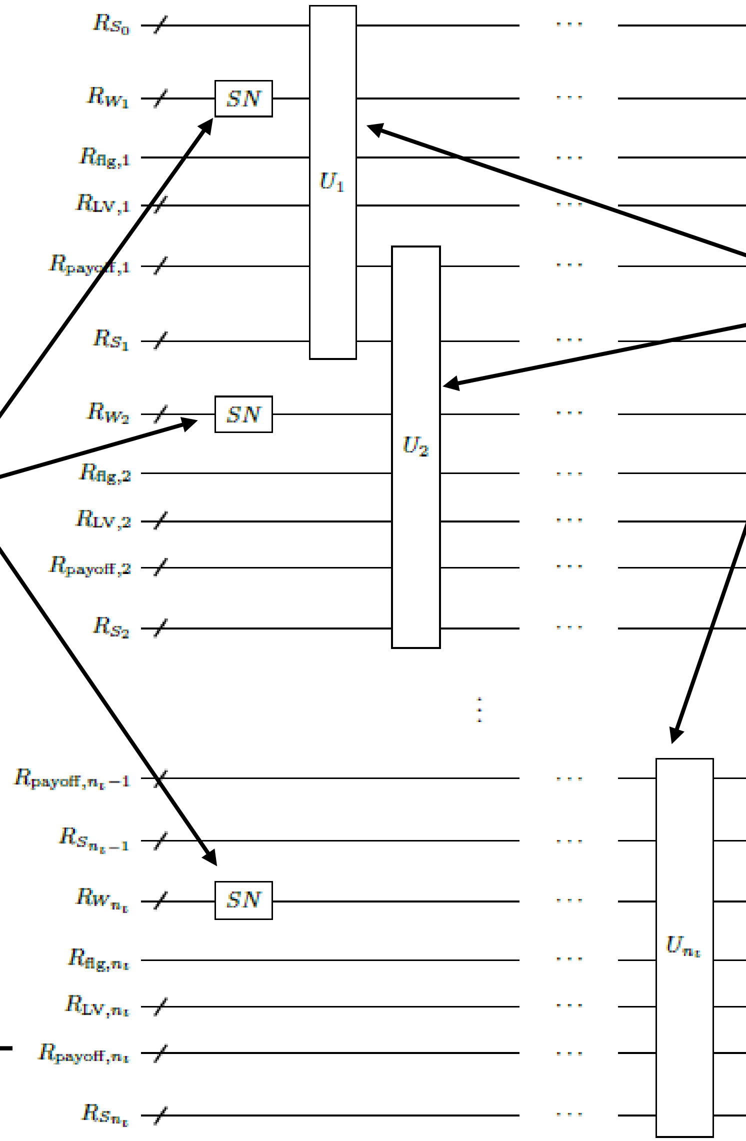
・$V_i^{(j)}$



LVモデルの原資産価格発展のための量子回路設計

■ register-per-RN方式の回路

・overview



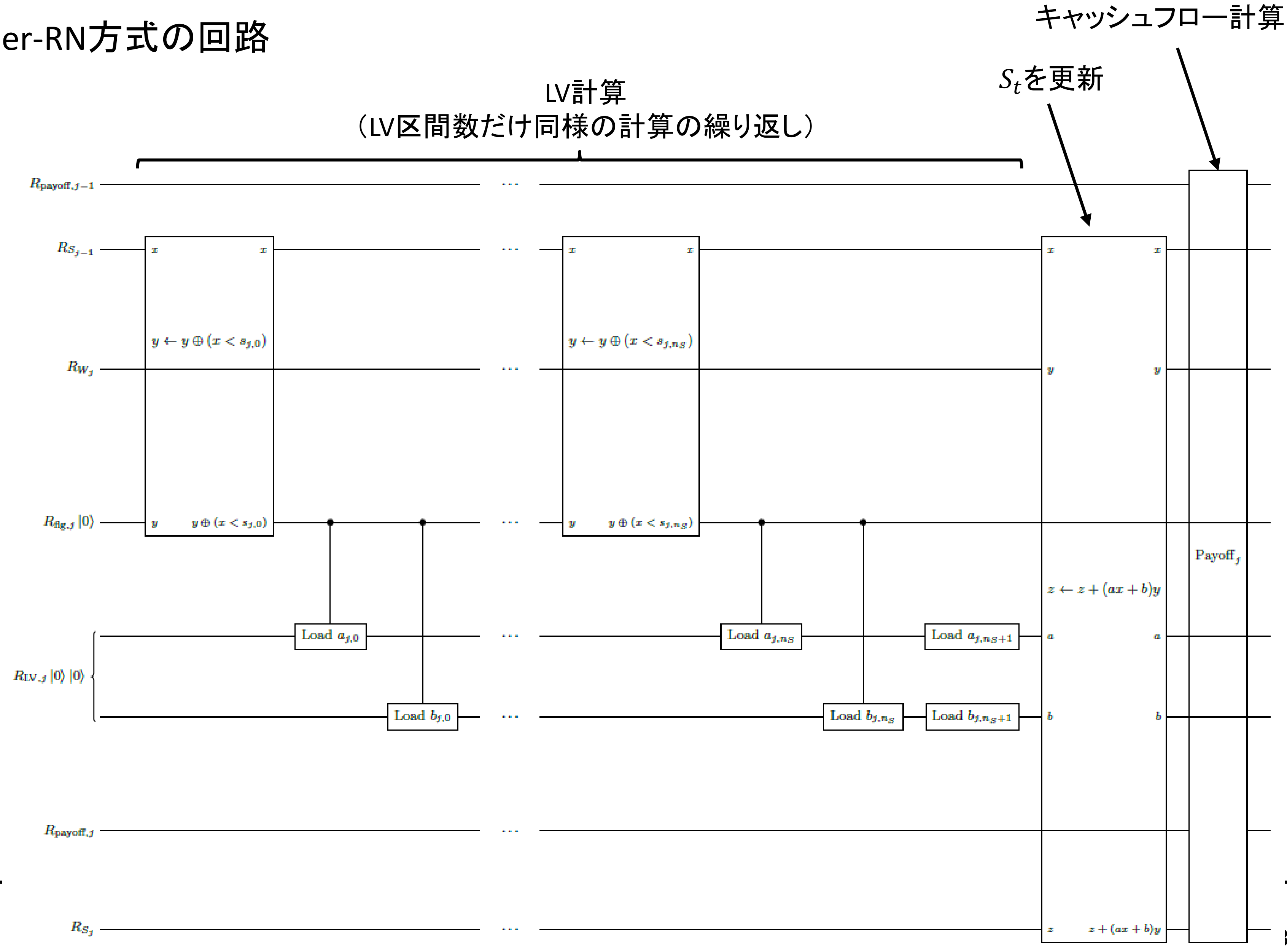
時間発展の離散ステップ1つ分

標準正規乱数に
対応する状態の生成

LVモデルの原資産価格発展のための量子回路設計

■ register-per-RN方式の回路

・U_j



所要リソース見積もり

方式	量子ビット数	T-count	ボトルネック
PRN-on-a-register	$n_{samp} + 2n_{dig} + n_{PRN} + \max\{2n_{PRN}, 7n_{dig}\}$	$(245n_{dig}^2 n_S + 140n_{PRN}^2 + 210n_{dig}^2 + 56n_{dig}n_{ICDF})n_t$	・PCGの漸化式の中の乗算(mod) ・LV計算の中の乗算・除算(途中結果クリアのため負荷増加)
register-per-RN	$(3n_{dig}^2 + 111n_{dig})n_t$	$(7n_{dig}^2 n_S + 63n_{dig} + 28n_S + 3.4 \times 10^4)n_{dig}n_t$	・$\|SN\rangle$の生成に含まれるarccos [15] ・LV計算の中の乗算・除算

※ n_{PRN} : 疑似乱数PCGのビット数　n_{dig} : (疑似乱数以外の)数値を保持するレジスタのビット数

n_t : 時間発展の離散ステップ数　n_S : piecewise-linearなLVの区間数　n_{samp} : $\log_2$(原資産のパス数)

n_{ICDF} : 一様乱数である疑似乱数を標準正規乱数に変換する際、標準正規分布の逆累積分布関数のpiecewise-polynomial近似[16]を用いており、これの区間数

➢ $n_{samp} = 16, n_{dig} = 16, n_{PRN} = 64, n_{ICDF} = 109, n_t = 360, n_S = 5$とすると…

方式	量子ビット数	T-count
PRN-on-a-register	2.4×10^2	3.7×10^8
register-per-RN	9.2×10^5	2.1×10^8

✓ 量子ビット数はPRN-on-a-registerの方が何桁も少ない一方、T-countは$O(1)$ファクターの増大に留まる

MIZUHO

まとめ

- 量子コンピュータによるモンテカルロ積分は、古典対比でquadratic speedupをもたらす
- 金融機関は日々膨大なモンテカルロ積分を実施（特にデリバティブ時価評価）
  → 量子モンテカルロの恩恵大きい
- デリバティブ時価評価への量子モンテカルロ適用は、現状は簡単な設定しか検討されていない
  → 高度化モデルへの拡張が必要
- 本研究では局所ボラティリティ(LV)モデルを検討
  特に、時間発展計算のための量子回路を設計、所用リソース（量子ビット数・T-count）を見積もり
- 以下の2つの方針を検討
  ① PRN-on-a-register方式
    ✓ 疑似乱数を逐次生成して利用することで高次元積分に対しても量子ビット数抑制
      – 長期契約の時価評価には多数の乱数が必要であるため、恩恵大きい
  ② register-per-RN方式
    ✓ 各乱数に対応する状態を別々のレジスタに生成
    ✓ 量子ビット数は大きくなるがT-countは抑制
- 典型的な設定の下、PRN-on-a-register方式の方が、量子ビット数は数桁小さい一方、T-countの増加は$O(1)$ファクター程度
  → LVモデルによるデリバティブ時価評価は、PRN-on-a-register方式の好適例

参考文献

[1] Montanaro, “Quantum speedup of Monte Carlo methods”, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 471, 2181 (2015)

[2] Suzuki et al., “Amplitude Estimation without Phase Estimation”, Quantum Information Processing, 19, 75 (2020)

[3] Brassard et al., “Quantum amplitude amplification and estimation”, Contemporary Mathematics Series Millennium, 305, 53 (2002)

[4] Rebentrost et. al., ”Quantum computational finance: Monte Carlo pricing of financial derivatives”, Phys. Rev. A 98, 022321 (2018)

[5] Stamatopoulos et al., ”Option Pricing using Quantum Computers”, Quantum 4, 291 (2020)

[6] Kaneko et al., “Quantum Pricing with a Smile: Implementation of Local Volatility Model on Quantum Computer”, arXiv:2007.01467 [quant-ph]

[7] Egger et al., “Credit Risk Analysis using Quantum Computers”, arXiv:1907.03044

[8] Miyamoto and Shiohara, ”Reduction of Qubits in Quantum Algorithm for Monte Carlo Simulation by Pseudorandom Number Generator”, Phys. Rev. A 102, 022424 (2020)

[9] Woerner and Egger, “Quantum Risk Analysis”, npj Quantum Inf. 5, 15 (2019)

参考文献

[10] Black and Scholes, ”The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy 81, 637 (1973).

[11] Merton, ”Theory of Rational Option Pricing”, The Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141 (1973)

[12] Dupire, ”Pricing with a Smile”, Risk, 7, 18-20 (1994)

[13] O’Neill, “PCG: A Family of Simple Fast Space-Efficient Statistically Good Algorithms for Random Number Generation”, Harvey Mudd College Computer Science Department Tachnical Report (2014); http://www.pcg-random.org/

[14] Grover and Rudolph,“ Creating superpositions that correspond to efficiently integrable probability distributions ”, arXiv:quant-ph/0208112

[15] T. Haner et al., ”Optimizing Quantum Circuits for Arithmetic”, arXiv:1805.12445

[16] Hormann and Leydold, ”Continuous random variate generation by fast numerical inversion”, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation 13(4):347, (2003)

【本件に関するお問い合わせ先】

みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社
金融工学第二部

宮本　幸一　　TEL：03-4232-2778
e-mail：koichi-miyamoto@fintec.co.jp