Московский физико-технический институт

Лабораторная работа:

Исследование систем массового обслуживания M|M|1|к и M|D|1

Студентка ________________ Зажигина Е.А

Март 2021

Постановка задачи:

В этой лабораторной работе предлагается изучить системы массового обслуживания (далее СМО) $M|M|1|k$ и $M|D|1$, а также сравнить основные характеристики таких систем с теоретическими расчетами: среднее время обслуживания заявки, долю отброшенных пакетов при разных значениях λ, μ, k – интенсивностях поступления, обработки и длины очереди.

Особенности реализации:

Для исследования этих СМО предполагалось дорабатывать исходный код на языке C++. Для имплементации системы $M|D|1$ подходит дискретное распределение из стандартной библиотеки. Была реализована поддержка конечной и бесконечной очереди для $M|M|1|k$ и $M|D|1$, которая задается при запуске программы: 0 – бесконечная очередь, $k > 0$ – конечная. Также удалось ввести учет отброшенных кадров PLR – packet loss ratio. Для этой величины также считается доверительный интервал с уровнем доверия 95%. Сравнение данных происходило в программе на языке Python с помощью графиков.

Аналитическая модель:

Обозначим как λ интенсивность поступления заявок в СМО, μ – интенсивность их обслуживания, при этом будем полагать, что $\lambda < \mu$. СМО $M|M|1$ характеризуется экспоненциальным распределением поступления и обслуживания заявок и одним обслуживающим устройством. В [1] можно найти выводы этих формул. Для такой системы вероятность находиться в состоянии k, где k число заявок в системе определяется:

$$p_k = p_0(\frac{\lambda}{\mu})^k, \tag{1}$$

где p_0 – вероятность того, что в системе нет заявок. С помощью условия нормировки $\sum_i p_i = 1$ можно получить выражение для p_0 (при предположении, что $\lambda < \mu$):

$$p_0 = [1 + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^k]^{-1} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}. \tag{2}$$

Среднее число заявок с системе $\bar{N}$, обозначив $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$, находится как:

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = (1-\rho)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(1/(1-\rho)) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}. \tag{3}$$

По формуле Литтла можно найти и среднее время T, когда заявка находится в системе:

$$T_s = \frac{\bar{N}}{\lambda}. \tag{4}$$

В системе $M|M|1|K$ присутствует конечный накопитель размера K. Модифицируем формулы выше. В систему допускаются только те требования, который застают в ней строго меньше, чем K требований. Поэтому вероятность состояний p_k и p_0 (определяется из условия нормировки), $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$p_k = p_0\Pi_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = \begin{cases} p_0(\frac{\lambda}{\mu})^k = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{k+1}}(\frac{\lambda}{\mu})^k, & \text{если } 0 \le k \le K; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{5}$$

$$p_0 = [1 + \frac{\rho(1-\rho^K)}{1-\rho}]^{-1}. \tag{6}$$

Вероятность отказа в обслуживании определяется в том случае, когда в системе одно требование находится в обслуживающем приборе и $K-1$ требований в накопителе (в очереди):

$$P_{\text{отк}} = p_k. \tag{7}$$

Средний размер очереди $\bar{N}$ считаем как матожидание длины очереди:

$$\bar{N} = \sum_{k=1}^{K} p_k \cdot k, \tag{8}$$

а среднее время пребывания в системе как:

$$T_s = \frac{\bar{N}}{\lambda \cdot (1 - P_{\text{отк}})}. \tag{9}$$

СМО $M|D|1$ характеризуется экспоненциальным поступлением заявок, детерминированным временем обслуживания одной заявки и одним обслуживающим устройством. Воспользуемся формулой Полячека-Хинчина для системы $M|G|1$, где G – произвольное распределение обслуживания заявок. Считаем известным, что среднее число заявок $\bar{q}$ в такой системе определяется:

$$\bar{q} = \rho + \frac{\lambda^2 \bar{x^2}}{2(1-\rho)} = \rho + \rho^2 \frac{1 + C_b^2}{2(1-\rho)}, \tag{10}$$

где $\bar{x^2}$ – второй момент распределения времени обслуживания, $\rho = \lambda\bar{x}$, $C_b^2 = \frac{\varsigma_b^2}{\bar{x}^2}$ – нормированная дисперсия времени обслуживания. Так как в $M|D|1$ время обслуживания детерминировано, то $C_b^2 = 0$. Для такой системы среднее время нахождения в системе T_s (пользуясь законом Литтла):

$$T_s = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}, \tag{11}$$

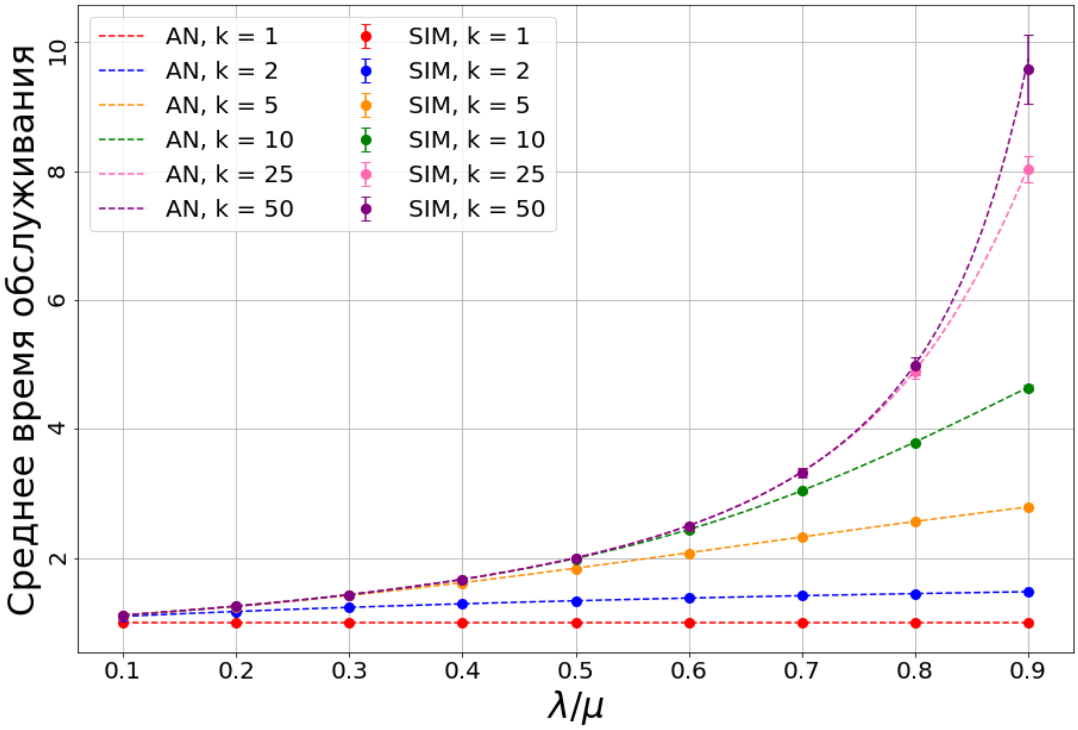
где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Результаты:

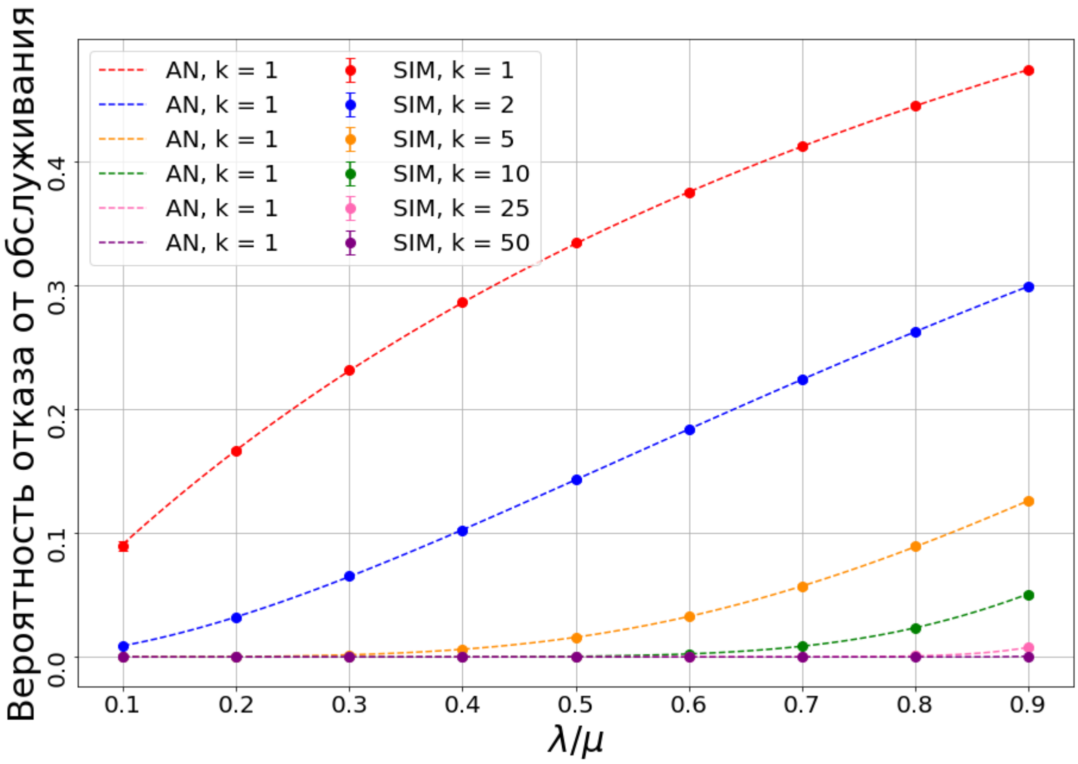
В результате моделирования системы $M|M|1|k$ были получены семейства кривых, представленные на рис. 1. С ростом $\frac{\lambda}{\mu}$ очередь заполняется быстрее, поэтому растет и вероятность отказа в обслуживании. Очевидно, что увеличение размера очереди снижает вероятность отказа, но в то же время при большом $\frac{\lambda}{\mu}$ среднее время обслуживания растет из-за того, что обслуживать может только одно устройство и оно не успевает справляться со всеми заявками быстро, но этого хватает, чтобы доля отказанных была небольшой.

Для $M|D|1$ исследовалась система с бесконечной очередью. На рис. 2 представлено сравнение двух обслуживающих систем: $M|D|1$ и $M|M|1$. Видно, что быстрее обслуживает система с детерминированным временем обработки заявки.

На обоих графиках 1 и 2 видно хорошее согласование теоретических расчетов и имитационного моделирования систем.



(a)



(b)

Рис. 1: Семейство зависимостей характеристик системы $M|M|1|k$ от параметров входного потока при разных значениях длины очереди k. Зависимость **(a)** среднего времени обслуживания и **(b)** и доли отброшенных заявок от $\frac{\lambda}{\mu}$. AN и SIM соответствуют аналитическому расчету и имитационному моделированию.

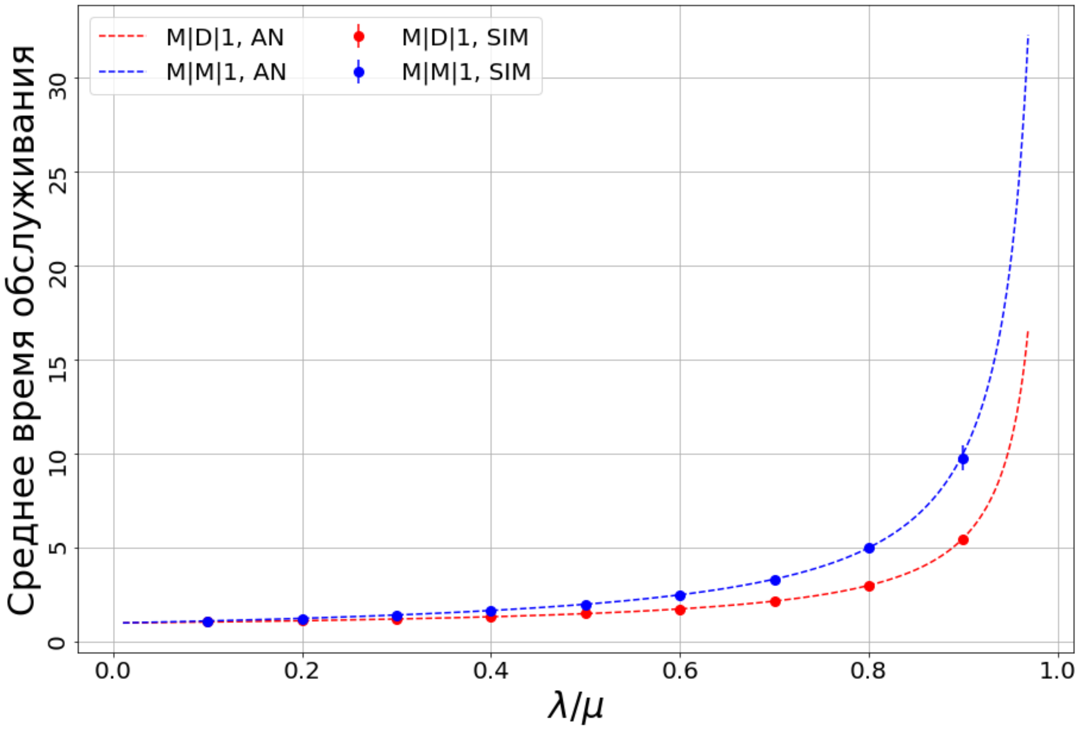


Рис. 2: Зависимость среднего времени обслуживания от $\frac{\lambda}{\mu}$ для СМО $M|D|1$ и $M|M|1$. AN и SIM соответствуют аналитическому расчету и имитационному моделированию.

Выводы:

В данной работе предлагалось изучить СМО $M|D|1|$ и $M|M|1$. На основании теоретический расчетов и имитационного моделирования нам удалось сравнить характеристики этих двух систем.

Список литературы

[1] Kleinrock Leonard. Queuing systems. — Wiley, 1975.