Computer Vision HW3

컴퓨터공학부
2017-18538
황선영

Question 1 : Camera model

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \left(\mathbf{R} \,|\, \mathbf{t} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix},$$

(a)

$(X \ Y \ Z \ 1)^T$ 가 3-D point in world coordinates 이므로

$O(0,0,0)$을 대입하여 image coordinate $(u \ v \ 1)^T$를 구하면 된다.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} fr_{11} & fr_{12} & fr_{13} & ft_1 \\ fr_{21} & fr_{22} & fr_{23} & ft_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ft_1 \\ ft_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$u = \frac{ft_1}{t_3}$, $v = \frac{ft_2}{t_3}$ 이다. 따라서 image coordinates는 $\left(\frac{ft_1}{t_3}, \frac{ft_2}{t_3}, 1 \right)^T$ 이다.

(b)

perspective projection의 역할 중 4차원을 3차원으로 줄이는 역할을 $\begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$로 통합한 것이 문제의 $[R|t]$ 이므로 행렬곱 계산시 world → camera로 변환 해주는 matrix 이다. 따라서

$$(R|t)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z + t_1 \\ r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z + t_2 \\ r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + t_3 \end{pmatrix}$$

따라서 world coordinate system의 coordinate of camera는

$$\begin{pmatrix} r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z + t_1 \\ r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z + t_2 \\ r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + t_3 \end{pmatrix}$$

이다.

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (R \mid t) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (R \mid 0) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} + t$$

$$= R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + t$$

로 나타낼 수 있다.

$(X\ Y\ Z)^T$ 에 대해

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= R^T \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_2 \\ 1-t_3 \end{pmatrix} \quad (\because R^{-1} = R^T)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ -t_2 \\ 1-t_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r_{11}t - r_{21}t_2 + r_{31} - r_{31}t_3 \\ -r_{12}t - r_{22}t_2 + r_{32} - r_{32}t_3 \\ -r_{13}t - r_{23}t_2 + r_{33} - r_{33}t_3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \sqrt{(-r_{11}t - r_{21}t_2 + r_{31} - r_{31}t_3)^2 + (-r_{12}t - r_{22}t_2 + r_{32} - r_{32}t_3)^2 + (-r_{13}t - r_{23}t_2 + r_{33} - r_{33}t_3)^2}$$

이라 놓자.

주어진 방향의 world coordinate system 내에서의

방향은

$$\begin{pmatrix} \dfrac{r_{11}t - r_{21}t_2 + r_{31} - r_{31}t_3}{\alpha} \\ \dfrac{-r_{12}t - r_{22}t_2 + r_{32} - r_{32}t_3}{\alpha} \\ \dfrac{-r_{13}t - r_{23}t_2 + r_{33} - r_{33}t_3}{\alpha} \end{pmatrix}$$ 이다.

(d)

world coordinate system의 $(d_1, d_2, d_3)^T$를 image coordinate로 변환하면

$$K(R\,|\,t)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} fr_{11} & fr_{12} & fr_{13} & ft_1 \\ fr_{21} & fr_{22} & fr_{23} & ft_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} fr_{11}d_1 + fr_{12}d_2 + fr_{13}d_3 + ft_1 \\ fr_{21}d_1 + fr_{22}d_2 + fr_{23}d_3 + ft_2 \\ r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3 \end{pmatrix}$$

image coordinate는 $\begin{pmatrix} \dfrac{fr_{11}d_1 + fr_{12}d_2 + fr_{13}d_3 + ft_1}{r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3} \\ \dfrac{fr_{21}d_1 + fr_{22}d_2 + fr_{23}d_3 + ft_2}{r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3} \\ 1 \end{pmatrix}$ 으로 나타낼 수 있다.

world coordinate system의 $(x_1, x_2, x_3)^T$를 image coordinate로 변환하면

$$K(R|t)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} fr_{11} & fr_{12} & fr_{13} & ft_1 \\ fr_{21} & fr_{22} & fr_{23} & ft_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} fr_{11}x_1 + fr_{12}x_2 + fr_{13}x_3 + ft_1 \\ fr_{21}x_1 + fr_{22}x_2 + fr_{23}x_3 + ft_2 \\ r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 + t_3 \end{pmatrix}$$

image coordinate는 $\begin{pmatrix} \dfrac{fr_{11}x_1 + fr_{12}x_2 + fr_{13}x_3 + ft_1}{r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 + t_3} \\ \dfrac{fr_{21}x_1 + fr_{22}x_2 + fr_{23}x_3 + ft_2}{r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 + t_3} \\ 1 \end{pmatrix}$ 으로 나타낼 수 있다.

따라서 image에서는

$$\left(\frac{fr_{11}d_1 + fr_{12}d_2 + fr_{13}d_3 + ft_1}{r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3}, \frac{fr_{21}d_1 + fr_{22}d_2 + fr_{23}d_3 + ft_2}{r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3} \right) t$$

$$+ \left(\frac{fr_{11}\lambda_1 + fr_{12}\lambda_2 + fr_{13}\lambda_3 + ft_1}{r_{31}\lambda_1 + r_{32}\lambda_2 + r_{33}\lambda_3 + t_3}, \frac{fr_{21}\lambda_1 + fr_{22}\lambda_2 + fr_{23}\lambda_3 + ft_2}{r_{31}\lambda_1 + r_{32}\lambda_2 + r_{33}\lambda_3 + t_3} \right)$$

의 line으로 나타난다. 이때 분모가 0이 되는 경우는

선이 나타나지 않아 끊기는 것에 유의해야 한다.

Question 2 : Camera Calibration

$p = \min_p \|Ap\|$, $\|p\| = 1$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다

$\hat{p} = \underset{p}{\mathrm{argmin}} \| U\Sigma V^T p\|^2$ (constraint는 simplicity를 위해 생략)

$\|U\Sigma V^T p\|^2 = \|\Sigma V^T p\|^2$ ($\because$ orthonormality)

이로부터

$\hat{p} = \underset{p}{\mathrm{argmin}} \|\Sigma V^T p\|^2$

라 쓸 수 있다.

$q = V^T p$ 라 하자. orthonormality 로부터 $\|V^T p\|^2 = \|p\|^2$ 이다.

$\hat{q} = \underset{q}{\mathrm{argmin}} \|\Sigma q\|^2$ 로 나타낼수 있다.

diagonals가 decreasing order로 sorted 되어 있으면

$q = [0, 0, \cdots, 1]^T$ 이다.

$q = V^T p$ 이므로 $p = Vq$ 임을 알 수 있다.

그러므로 q는 V의 last column 이다.

Question 3 : Homography

(a)

$p_1^i = (x_i', y_i', 1)^T$, $p_2^i = (x_i, y_i, 1)^T$ 라 하자.

$$x_i' = \frac{H_{11}x_i + H_{12}y_i + H_{13}}{H_{31}x_i + H_{32}y_i + H_{33}}, \quad y_i' = \frac{H_{21}x_i + H_{22}y_2 + H_{23}}{H_{31}x_i + H_{32}y_i + H_{33}}$$ 이고, 이를 정리하여

$$H_{11}x_i + H_{12}y_i + H_{13} - x_i'(H_{31}x_i + H_{32}y_i + H_{33}) = 0$$

$$H_{21}x_i + H_{22}y_i + H_{23} - y_i'(H_{31}x_i + H_{32}y_i + H_{33}) = 0$$

이다. 이를 matrix multiplication으로 나타내면

$$\begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_i x_i' & -x_i' y_i & -x_i' \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 & -x_i y_i' & -y_i y_i' & -y_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \\ H_{13} \\ H_{21} \\ H_{22} \\ H_{23} \\ H_{31} \\ H_{32} \\ H_{33} \end{bmatrix} = 0$$

으로 나타낼 수 있고, $i = 1 \cdots N$ 이라 하면

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 x_1' & -x_1' y_1 & -x_1' \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1 y_1' & -y_1 y_1' & -y_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n x_n' & -x_n' y_n & -x_n' \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x_n y_n' & -y_n y_n' & -y_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \\ H_{13} \\ H_{21} \\ H_{22} \\ H_{23} \\ H_{31} \\ H_{32} \\ H_{33} \end{bmatrix} = 0$$

으로 나타낼 수 있다.

(b)

h를 단위벡터라 하면 8개의 값을 측정하면 되므로 4개의 correspondence 가 필요하다.

(c)

A의 SVD인 $A = U\Sigma V^T$에서 V의 smallest singularvalue가 H이므로 A에 대해 SVD를 진행하면 된다.