Actividad 1: Distribuciones de Probabilidad

1.- Una barra de 12 pulg que está sujeta por ambos extremos se somete a una cantidad creciente de esfuerzo hasta que se rompe. Sea Y = la distancia del extremo izquierdo al punto donde ocurre la ruptura. Suponga que Y tiene la función de densidad de probabilidad:

$$f(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{24}\right) y \left(1 - \frac{y}{12}\right), & 0 \le y \le 12 \\ 0, & De\ lo\ contario \end{cases}$$

Calcule lo siguiente:

- a.- La función de distribución acumulativa de Y.
- b.- P(Y ≤ 4), P(Y > 6) y P(4 ≤ Y ≤ 6)
- c.- E(Y), E(Y^2) y Var(Y).
- d.- La probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulg del punto de ruptura esperado.

$f(y) = \left\{ \left(\frac{1}{24}\right) y \left(1 - \frac{y}{12}\right), \quad 0 \le y \le 12 \right.$
$0,$ de lo contrario

Calcular

a. Función de distribución acumulativa de Y.

$f(y) = \int_0^y \frac{1}{24} t \left(1 - \frac{t}{12}\right) dt$

$\frac{1}{24} t \left(1 - \frac{t}{12}\right) dt = \frac{1}{24}\left(t \cdot 1 - t \cdot \frac{t}{12}\right)$

$\frac{1}{24} t \left(1 - \frac{t}{12}\right) = \frac{1}{24}\left(t - \frac{t^2}{12}\right)$

$F_Y(y) = \frac{1}{24}\int_0^y \left(t - \frac{t^2}{12}\right) dt$

$F_Y(y) = \frac{1}{24}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{36}\right]_0^y$

$F_Y(y) = \frac{1}{24}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{36}\right)$

$F_Y(y) = \frac{1}{48} y^2 - \frac{1}{864} y^3 = \frac{1}{48} y^2 - \frac{y^3}{864}$

$F_Y(y) = \frac{1}{48} y^2 - \frac{y^3}{864}, \quad 0 \le y \le 12$

P(Y ≤ 4)

$P(Y \le 4) = F_Y(4) = \frac{1}{48}(4)^2 - \frac{(4)^3}{864}$

$P(Y \le 4) = \frac{16}{48} - \frac{64}{864} = \frac{1}{3} - \frac{2}{27} = \frac{7}{27} = 0.26$
0.259259

P(Y > 6)

$P(Y > 6) = 1 - F_Y(6)$

$F_Y(6) = \frac{1}{48}(6)^2 - \frac{(6)^3}{864}$

$F_Y(6) = \frac{36}{48} - \frac{216}{864} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

P(4 ≤ Y ≤ 6)

$P(4 \le Y \le 6) = F_Y(6) - F_Y(4) = 0.5 - 0.26 = 0.24$

c. E(Y), E(Y^2) y Var(Y)

$E(Y) = \int_0^{12} y \cdot f(y)\, dy$

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

$E(Y) = \int_0^{12} y \cdot \frac{1}{24} y \left(1 - \frac{y}{12}\right) dy = \frac{1}{24}\int_0^{12} y^2 \left(1 - \frac{y}{12}\right) dy$

$E(Y) = \frac{1}{24}\left[\int_0^{12} y^2\, dy - \frac{1}{12}\int_0^{12} y^3\, dy\right] \longrightarrow$

$$E(Y) = \frac{1}{24}\int_0^{12}\left(y^2 - \frac{y^3}{12}\right)dy$$

$$E(Y) = \frac{1}{24}\left[\int_0^{12} y^2\,dy - \frac{1}{12}\int_0^{12} y^3\,dy\right]$$

$$= \int_0^{12} y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^{12} = \frac{12^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}} = \frac{1728}{3} = 576$$

$$= \int_0^{12} y^3\,dy \quad \frac{y^4}{4}\Big|_0^{12} = \frac{12^4}{4} - \cancel{\frac{0^4}{4}} = \frac{20736}{4} = 5184$$

$$E(Y) = \frac{1}{24}\left[576 - \frac{1}{12}\cdot 5184\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[576 - \frac{5184}{12}\right] = \frac{1}{24}\left[576 - 432\right] = \frac{1}{24}(144)$$

$$= \underline{6}$$

$E(Y^2)$

$$E(Y^2) = \int_0^{12} y^2 \cdot \frac{1}{24}\, y\left(1 - \frac{y}{12}\right)dy = \frac{1}{24}\int_0^{12} y^3\left(1 - \frac{y}{12}\right)dy$$

$$= \frac{1}{24}\left[\int_0^{12} y^3\,dy - \frac{1}{12}\int_0^{12} y^4\,dy\right]$$

$$= \int_0^{12} y^3\,dy = \frac{y^4}{4}\Big|_0^{12} = \frac{12^4}{4} - \cancel{\frac{0^4}{4}} = \frac{20736}{4} = 5184$$

$$= \int_0^{12} y^4\,dy = \frac{y^5}{5}\Big|_0^{12} = \frac{12^5}{5} - \cancel{\frac{0^5}{5}} = \frac{248832}{5} = 49766.4$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{24}\left[5184 - \frac{49766.4}{12}\right] = \frac{1}{24}\left[5184 - 4147.2\right]$$

$$= \frac{1}{24}\cdot 1036.8 = \frac{216}{5} = 43.2$$

d. $P(|Y - E(Y)| > 2 = P(Y > E(Y) + 2) + P(Y < E(Y) - 2)$

$E(Y) = 6$

$$P(Y > 8) + P(Y < 4)$$

$$P(Y > 8) = 1 - F_Y(8)$$

$y = 8$

$$F_Y(8) = \frac{1}{48}\cdot 8^2 - \frac{8^3}{864}$$

$$F_Y(8) = \frac{64}{48} - \frac{512}{864} = \frac{4}{3} - \frac{64}{108} = 0.7404$$

$$P(Y > 8) = 1 - 0.7404 = 0.2596$$

$P(Y < 4)$

$$P(Y \leq 4) = 0.2592$$

$$P(Y < 4) = F_{Y(4)} = 0.2592$$

$$P(Y - E(Y)| > 2) = P(Y > 8) + P(Y < 4) = 0.2546 + 0.2592$$
$$= 0.59$$

2.- Sea X la temperatura, en grados centígrados, a la cual ocurre una reacción química. Suponga que X tiene una función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\,(4 - x^2), & -1 \le x \le 2 \\ 0 & \end{cases}$$

a.- Corrobore que la función es una distribución válida.

b.- Determine la función de distribución acumulativa.

c.- E(Y), E(Y^2) y Var(Y).

d.- La probabilidad de que la temperatura sea menor a 0°C

e.- La probabilidad de que la temperatura sea entre 4°C y 6°C

2. a) Verificar que la función sea una distribución válida.

$f(x) = \frac{1}{9}(4 - x^2) \qquad -1 \le x \le 2$

$\int_{-1}^{2} \frac{1}{9}(4-x^2)\,dx$

$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{9}(4-x^2)\,dx = \frac{1}{9}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{9}\left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-4 + \frac{1}{3}\right)\right] =$ [redacted]

$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

$= -4 + \frac{1}{3} = -\frac{12}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$

$= \frac{16}{3} - -\frac{11}{3} = \frac{16}{3} + \frac{11}{3} = \frac{27}{3} = 9$

$= \frac{1}{9} \cdot 9 = \underline{1}$ es válida

b) CDF

$F_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{9}(4 - t^2)\,dt$

$F_X(x) = \frac{1}{9}\left[4t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x}$

$F_X(x) = \frac{1}{9}\left[\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) - \left(-4 + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{9}\left[4x - \frac{x^3}{3} + \frac{11}{3}\right]$

$F_X(x) = \dfrac{4x - \frac{x^3}{3} + \frac{11}{3}}{9}$

$x = -1$

$F_X(-1) = \dfrac{4(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{11}{3}}{9} = \dfrac{-4 + \frac{1}{3} + \frac{11}{3}}{9} = \dfrac{-\frac{12}{3} + \frac{12}{3}}{9}$

$= \frac{0}{9} = 0$

$x = 2$

$F_X(2) = \dfrac{4(2) - \frac{2^3}{3} + \frac{11}{3}}{9} = \dfrac{8 - \frac{8}{3} + \frac{11}{3}}{9} = \dfrac{\frac{24}{3} + \frac{3}{3}}{9} = \frac{9}{9} = 1$

$E(x^2)$

$$E(x^2) = \frac{1}{9}\int_{-1}^{2} x^2(4-x^2)\,dx$$

$$E(x^2) = \frac{1}{9}\int_{-1}^{2} (4x^2 - x^4)\,dx$$

$$\int 4x^2\,dx = \frac{4x^3}{3}$$

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]\Big|_{-1}^{2}$$

$x = 2$

$$\frac{4(2)^3}{3} - \frac{(2)^5}{5} = \frac{32}{3} - \frac{32}{5} = \frac{160-96}{15} = \frac{64}{15}$$

$x = -1$

$$\frac{4(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{-20+3}{15} = -\frac{17}{15}$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{81}{15}\right] = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$Var(X) = 0.6 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.6 - \frac{1}{16} = \frac{43}{80} = 0.5$$

d) $P(X \leq 0)$

$$F_X(0) = \frac{4(0) - \frac{0^3}{3} + \frac{11}{3}}{9} = \frac{11}{27}$$

e) $P(4 \leq X \leq 6)$

$$P(4 \leq X \leq 6) = F_X(6) - F_X(4)$$

X no puede tomar esos valores ya que su dominio está restringido a $[-1, 2]$, por lo tanto

$$P(4 \leq X \leq 6) = 0$$

3.- El artículo “Computer Assisted Net Weight Control” (Quality Progress, 1983: 22-25) sugiere una distribución normal con media de 137.2 oz y una desviación estándar de 1.6 oz del contenido real de frascos de cierto tipo. El contenido declarado fue de 135 oz.

a.- ¿Cuál es la probabilidad de que un solo frasco contenga más que el contenido declarado?

b.- Suponiendo que la media permanece en 137.2, ¿a qué valor se tendría que cambiar la desviación estándar de modo que 95% de todos los frascos contengan más que el contenido declarado?

c.- Entre 10 frascos seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos ocho contengan más que el contenido declarado?

3.

a)

$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Calcular Z

$Z = \frac{135 - 137.2}{1.6} = \frac{-2.2}{1.6} = -1.375$

$P(z > -1.375)$

$P(z > 1.375) = 1 - P(z \leq -1.375)$

$P(z \leq -1.375)$

$P(z \leq -1.375) = 1 - P(z \leq -1.375)$

$P(z \leq -1.375) = 0.084$

$P(z > -1.375) = 1 - 0.084 = 0.916$

0.96 o 91.6%

b.

$P(z > z) = 0.95 \quad P(z \leq z) = 0.05$

$z = -1.645$

σ

$-1.645 = \frac{135 - 137.2}{\sigma_n}$

-1.645

$= \frac{135 - 137.2}{\sigma_n}$

$\sigma = \frac{135 - 137.2}{-1.645} = \frac{-2.2}{-1.645} = 1.337$ oz

$p = P(x > 135)$

$P(x \geq 8) = P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$

$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$n = 10$

$k =$ de 8 a 10

$p = 0.916$

$P(x \geq 8)$:

$P(x \geq 8) = P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$

$P(x = 8)$:

$P(x = 8) = \binom{10}{8}(0.916)^8(1 - 0.916)^2$

$= \frac{10!}{8!\,2!} \times (0.916)^8 \times (0.084)^2$

$= \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \cdot (0.916)^8 \cdot (0.084)^2$

$= 45 \cdot (0.916)^8 \cdot (0.084)^2$

$P(x = 9)$:

$P(x = 9) = \binom{10}{9}(0.916)^9(1 - 0.916)^1$

$= 10 \cdot (0.916)^9 \cdot (0.084)$

$P(x = 9) = 0.381$

$P(x = 10)$:

$P(x = 10) = \binom{10}{10}(0.916)^{10}(1 - 0.916)^0$

$= 1 \cdot (0.916)^{10} \cdot (1)$

$P(x = 10) = 0.422$

$P(x \geq 8)$:

$P(x \geq 8) = 0.230 + 0.381 + 0.422 = 1.033 = 1.033 \times 100 = 100\%$

Este resultado es así porque $p = 0.916$ ya es una probabilidad alta.

4.

a).

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{100 - 96}{14} = \frac{4}{14} = 0.286$$

$P(z > 0.286)$

$P(z \leq 0.286) = 0.6125$

$P(z > 0.286) = 1 - 0.6125 = 0.3875$

$r = 0.3875 = 38.75\%$

b). $P(50 < x < 80)$

50:

$$z = \frac{50 - 96}{14} = -\frac{46}{14} = -3.286$$

80:

$$z = \frac{80 - 96}{14} = -\frac{16}{14} = -1.143$$

$P(z \leq -1.143)$ $P(z \leq -3.286)$:

$P(z \leq -1.143) = 0.1265$

$P(z \leq -3.286)$*

$P(50 < 8 < 80) = P(z \leq -1.143) - P(z \leq -3.286) = 0$

Probabilidad aprox. $0.1265 = 12.65\%$

4.- El artículo “Characterization of Room Temperature Damping in Aluminum-Idium Alloys” (Metallurgical Trans., 1993: 1611-1619) sugiere que el tamaño de grano de matriz A1 (μm) de una aleación compuesta de 2% de indio podría ser modelado con una distribución normal con valor medio de 96 y desviación estándar de 14.

a.- ¿Cuál es la probabilidad de que el tamaño de grano exceda de 100?

b.- ¿Cuál es la probabilidad de que el tamaño de grano sea de 50 y 80?

c.- ¿Qué intervalo (a, b) incluye el 90% central de todos los tamaño s de grano (de modo que 5% esté por debajo de a y 5% por encima de b)?

$P(x \geq 8)$:

$P(x \geq 8) = 0.230 + 0.381 + 0.422 = 1.033 = 1.033 \times 100 = 100\%$

Este resultado es así porque $p = 0.916$ y es una probabilidad alta.

4.

a).

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{100 - 96}{14} = \frac{4}{14} = 0.286$$

$P(z > 0.286)$

$P(z \leq 0.286) = 0.6125$

$P(z > 0.286) = 1 - 0.6125 = 0.3875$

$r = 0.3875 = 38.75\%$

b). $P(50 < x < 80)$

50:

$$z = \frac{50 - 96}{14} = -\frac{46}{14} = -3.286$$

80:

$$z = \frac{80 - 96}{14} = -\frac{16}{14} = -1.143$$

$P(z \leq -1.143)$ $P(z \leq -3.286)$:

$P(z \leq -1.143) = 0.1265$

$P(z \leq -3.286)$ *

$P(50 < 8 < 80) = P(z \leq -1.143) - P(z \leq -3.286) = 0$

Probabilidad aprox. $0.1265 = 12.65\%$

c.

5% : $z = -1.645$

95% : $z = 1.645$

a:

$a = \mu + z \cdot \sigma = 96 + (-1.645) \cdot 14 = 96 - 23.03 = 72.97\ \mu m$

b:

$b = \mu + z \cdot \sigma = 96 + 1.645 \cdot 14 = 96 + 23.03 = 119.03\ \mu m$

El intervalo (a, b) que incluye el 90% central de todos los tamaños de grano es aprox (72.97 μm, 119.03 μm)

5.- Para los 3 conjuntos de datos que se proveen en el CSV:

a.- Construye e interpreta un histograma. Utiliza la regla de Sturges para calcular el número apropiado de clases.

b.- Compara el número de clases con el obtenido con la regla de Scott.

c.- Construye e interpreta un gráfico Q-Q para comprobar si los datos provienen de una distribución normal. Estima los parámetros utilizando la regresión de un gráfico probabilístico.

d.- Utilizando Minitab o algún otro software, ¿a qué distribución es más probable que pertenezca cada conjunto de datos y cuáles serían sus respectivos parámetros?

d. Para la columna de datos 1, la distribución a la que es más probable que pertenezca es Box cox transformation y los parámetros son: AD = 0.202 y P = 0.878.

Para la de datos 2, podría ser tanto la Normal como la Box cox transformation y sus parámetros son los mismos en ambas: AD = 0.384 y P = 0.393.

Para la columna de datos 3, sería Weibull y sus parámetros son AD = 0.575 y P = 0.151.