МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ Государственное автономНОЕ образовательное

учреждение высшего образования

«Новосибирский НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ государственный университет» (нОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Механико-математический факультет

Кафедра вычислительных систем

1. Направление подготовки: Математика и компьютерные науки

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

Назарченко Екатерина Андреевна

Тема работы:Моделирование распада разрыва плотности в разреженной плазме

**«К защите допущена» Научный руководитель**

Глинский Б.М., Вшивков В.А.,

д.т.н., профессор д.ф.-м.н. профессор. Заведующий лабораториейИВМиМГ СО РАН

………………/………….. ………………/………...

(фамилия, И., О.) / (подпись, МП) (фамилия, И., О.) / (подпись, МП)

«……» Май 2017г. «……» Май 2017г.

Дата защиты: «……» ………………2017г.

Новосибирск, 2017

# Аннотация

Разреженная плазма описывается кинетическим уравнением Власова для функций распределения ионов и электронов по скоростям. Кинетические уравнения являются уравнениями гиперболического типа и для решения их эффективны конечно-разностные схемы. Но в трёхмерном случае функции распределения являются функциями семи аргументов (3 координаты, компоненты скорости и время), что требует при решении больших вычислительных затрат. Кроме этого, масса электрона во много раз меньше массы иона, решение конечно-разностными методами требует большого количества временных шагов для получения содержательного решения для ионной компоненты. Для решения этой проблемы были предложенные гибридные модели, в которых кинетическое уравнение для электронов не решается, а используется гидродинамическое приближение. В этом случае плотность и скорость плазмы находятся из более простых формул. Это позволяется существенно сократить время вычисления.

На примере решения задачи о распаде разрыва плотности в разреженной плазме в одномерной постановке проведена проверка адекватности модели,определен диапазон параметров, при которых модель можно использовать для данной задачи.

**Оглавление**

[Аннотация 2](#_Toc483400405)

[1. Постановка задачи о распаде разрыва плотности ионов 5](#_Toc483400406)

[1.1. Исходная системы уравнений 5](#_Toc483400407)

[1.2. Обезразмеривание 6](#_Toc483400408)

[1.3. Гидродинамическая постановка задачи 8](#_Toc483400409)

[1.4. Переход от полного кинетического уравнения к гидродинамическому приближению 11](#_Toc483400410)

[1.5. Аналитическая проверка выполнение законов сохранения 14](#_Toc483400411)

[2. Методы решения 17](#_Toc483400412)

[2.1. Решение гидродинамического приближения явной разностной схемой 17](#_Toc483400413)

[2.2. Решение кинетического уравнения Власова разностной схемой ЛаксаВендроффа 17](#_Toc483400414)

[2.3. Решение уравнения Пуассона методом квазилинеаризации 19](#_Toc483400415)

[2.4. Разностная схема для закона сохранения энергии 20](#_Toc483400416)

[3. Описание программы 21](#_Toc483400417)

[3.1. Программа для решения задачи в гидродинамической постановке 21](#_Toc483400418)

[3.2. Программа для решения задачи в кинетической постановке 22](#_Toc483400419)

[4. Результаты вычислений 23](#_Toc483400420)

[4.1. Проверка сходимости решения 23](#_Toc483400421)

[4.2. Cходимости решения кинетического уравнения, полученного с помощью разностной схемы Лакса-Вендроффа 23](#_Toc483400422)

[4.3. Сходимость решения гидродинамического приближения, полученного с помощью явной четырёхточечной разностной схемы 25](#_Toc483400423)

[4.4. Сравнение решения кинетического уравнения и гидродинамического приближения для плотности 26](#_Toc483400424)

[4.5. Проверка выполнения закона сохранения энергии 29](#_Toc483400425)

[5. Выводы 30](#_Toc483400426)

[СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 31](#_Toc483400427)

## Постановка задачи о распаде разрыва плотности ионов

### Исходная системы уравнений

Исследуем одномерную модельную задачу распада разрыва плотности ионов в дисперсионной среде.Будем считать, что сила , действующая на частицу, не зависит от скорости.Тогда уравнение Власова для одномерного случая записывается в виде (1.1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |
|  | (1.2) |

гдефункция распределения ионов по скоростям,напряженность электрического поля, заряд электрона,скорость ионов, масса ионов, потенциал.

Исходя из (1.2)уравнение (1.1)принимает вид (1.3):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Для вычисления электрического поля используется одно из уравнений Максвелла –(1.4):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4) |

где плотность электронов (см [2]), плотность ионов, характерная плотность ионов, температура электронов.

В одномерном случае(1.4) принимает следующий вид (1.5):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.5) |

Исходя из (1.2), (1.5), получаем уравнение Пуассона для потенциала электрического поля:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.6) |

Выпишем отдельно уравнения и . Система уравнения будет являться исходной.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.7) |

### Обезразмеривание

Приведем систему уравнений(1.7) к безразмерному виду, используя следующий характерные величины:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (1.8) |
|  | |  | (1.9) |
|  | |  | (1.10) |
|  |  | | (1.11) |
|  |  | | (1.12) |

где ионная скорость звука, дебаевская длина, температура электронов, характерная плотность плазмы, ионная плазменная частота. Для этого вместо размерных величин подставим следующее:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | (1.13) |
|  | | | |

где безразмерные величины.

Рассмотрим уравнение (1.3). Подставив в него значения из (1.13), получаем (1.14).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.14) |

Из (1.2) будет следовать, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.15) |

Умножив (1.12) и , получаем следующее равенство:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.16) |

Учтя(1.16), заменим в (1.14) соответствующее выражение на

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.17) |

Разделив коэффициенты левой и правой части в, получим единицу. С учетом(1.12), проверим данное утверждение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.18) |

Сокративв и подставив, , получим, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.19) |

Опустив штрихи в (1.17), мы получаем безразмерное уравнение для (1.3):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.20) |

Проделаем туже самую работу для уравнения (1.6). Подставив в него значения из (1.13), получаем :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.21) |

Разделив коэффициенты левой и правой части в (1.21), получим единицу. Учтя (1.9), (1.10), проверим данное утверждение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.22) |

Опустив штрихи в (1.21), мы получаем безразмерное уравнение для (1.6):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.23) |

гдеплотность плазмы.

### Гидродинамическая постановка задачи

Выпишем отдельно уравнения (1.20)и(1.23). Данная система уравнений эквивалентна(1.7), но при этом является безразмерной.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.24) |

Если значение потенциала в безразмерном виде ,то вместо полного кинетического уравнения (1.20)можно использовать более простое гидродинамическое приближение (1.25)(1.27), при условии, что функция распределения является симметричной (см. [3], [2]).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.25) |
| (1.26) |
| (1.27) |

(подробный переход от кинетического уравнения Власова (1.20) к гидродинамическому приближению (1.25)(1.27) показан в главе 1.4).

Наша задача заключается в том, чтобы смоделировать эволюцию разрыва плотности в плазме.

Будем искать решение гидродинамического приближения(1.27)в следующей области:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.28) |

Определим начальные условия для задачи (1.25)(1.27):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.29) |
|  |

На рисунке1приведена плотность плазмы в начальный момент времени, где точка разрыва плотности.

|  |
| --- |
|  |
| **Рисунок 1** *(Плотность плазмы в начальный момент времени)* |

С помощью определим потенциал электрического поля в начальный момент времени, используя в качестве начального приближения .

|  |
| --- |
| Безымянный.bmp |
| **Рисунок 2***(Потенциал в начальный момент времени)* |

Определим граничные условия для задачи (1.25)(1.27):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.30) |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

### Переход от полного кинетического уравнения к гидродинамическому приближению

Гидродинамическое приближение для кинетического уравнения (1.20)представимо в виде (1.25)(1.27):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Произведем вывод для формул(1.25) и (1.26).

Проинтегрируем уравнение (1.20) по (в дальнейшем пределы интегрирования предполагаются от до).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | | (.) |
| где |  | |  |
| Произведем следующие обозначения: | |  | |

где среднее значение скорости ионов, плотность.

Тогда можно записать:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Подставим (1.32)в исходное уравнение(1.31). Получаем (1.33), что соответствует (1.25).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.33) |

Помножим уравнение (1.20)на (1.34):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.34) |

и проинтегрируем - (1.35):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.35) |

Рассмотрим первое слагаемое уравнения(1.35)\*(1.34):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Рассмотрим третье слагаемое уравнения (1.35):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.37) |

где Тогда можно записать :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.38) |

Сделаем следующее обозначения (1.39):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | давление. | (1.39) |

где *U* средняя скорость ионов. Тогда:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.40) |
|  |

Можем записать:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.41) |

Учтя(1.41),второе слагаемое уравнения (1.35) можно представить в виде (1.42):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.42) |

Полагая давление равным нулю, т.е. , из этого вытекает, что:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Тогда выразив(1.35) через(1.36),(1.38)и(1.43), мы получим (1.44):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.44) |

Произведем обратный вывод.Сложив уравнения (1.25),(1.26), получаем (1.45):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Уравнение (1.45) приводится к виду (1.20):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### Аналитическая проверка выполнение законов сохранения

Для системы уравнений (1.25)(1.27)с учетом граничных условий (1.30)должен выполняться законы энергии. Проверим данное утверждение.

Умноживуравнение(1.25) на – (1.46), а уравнение (1.26) на(1.47):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |
|  | (.) |

Сложим уравнения (1.46)и(1.47), разделив пополам. Получаем (1.48).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Приведем уравнение(1.48)к дивергентному виду. Рассмотрим третье слагаемое уравнения (1.48).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | | (1.49) |
| где |  | выражение из (1.25). | |

Рассмотрим последнее слагаемое уравнения (1.48). Выразим из (1.27) и подставим в выражение.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Рассмотрим первое слагаемое уравнения (1.50).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.51) |

Рассмотрим второе слагаемое уравнения (1.50).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |
|  |

Исходя из и (1.52), выражение (1.50) записывается в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |
|  |

Учитывая (1.51) и (1.53) получаем (1.54).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Подставив (1.54) в (1.48) получаем искомое представление энергии в дивергентном виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |
|  |

Проверим выполнения условия сохранения энергии. Для этого проинтегрируем (1.55)по*.*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |
|  |

Рассмотрим второе слагаемое выражения(1.56). Получаем (1.57):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Выражение (1.57) равно нулю, так как в первом и втором члене уравнения , а в третий член обращается в ноль, так как .

Исходя из (1.57) уравнение (1.56) переписывается в следующем виде (1.58):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.58) |
|  |

Проинтегрировав левую и правую часть уравнения (1.58), получаем (1.59), которое будет проверено в численном виде в главе 2.3. Интеграл энергии

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

## Методы решения

### Решение гидродинамического приближения явной разностной схемой

Введем равномерную сетку.

узлы сетки, где

Используяграничные условия (1.30), решим уравнения (1.24), (1.25) явной конечноразностной схемой, которая имеет вид (2.1), (2.2):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | (.) |
|  | | (.) |
| где |  |  |

Данная четырехточечная разностная схема имеет порядок аппроксимации.

### Решение кинетического уравнения Власова разностной схемой ЛаксаВендроффа

Введем равномерную сетку в области :

|  |
| --- |
| узлы сетки, |
| где шаг по координате, шаг по скорости. |

Применим разностный метод для решения кинетического уравнения Власова (1.20). Введем обозначения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3) |

Тогда уравнение Власова с заменой (2.3)примет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4) |

В силу простоты реализации выберем схему ЛаксаВендроффа [см. 4] является достаточно простой в реализации, используем её для получения решения уравнения Власова. Данная разностная схема является двушаговой, и имеет вид (2.4):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.5) |
|  |
|  | (2.6) |

Данная схема является условно-устойчивой. Условие устойчивости имеет вид (2.6):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7) |

Так как то

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Схема ЛаксаВендроффа имеет порядок аппроксимации .

### Решение уравнения Пуассона методом квазилинеаризации

Рассмотрим решение уравнения Пуассона для потенциала:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

при граничных условиях (1.30):

|  |
| --- |
|  |

Для решения уравнения (2.8) используем метод квазилинеаризации, предложенный в [1], в котором решение нелинейного уравнения определяется как предел последовательностирешений линейного уравнения (2.9):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Известно, что при последовательность монотонно сходится к решению (2.8)(см. [1]).

В качестве начального приближения возьмём решение уравнения (2.8) на предыдущий момент времени, т.е. . В конечных разностях уравнения (2.9) имеет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |
|  |

решение которого ищется методом прогонки и итерационный процесс продолжается до выполнения условия .

### Разностная схема для закона сохранения энергии

Проверим выполнение закона сохранения энергии(1.59) для задачи в гидродинамическойпостановке (1.25)(1.27). В разностном виде данный закон будет выглядеть следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |

Аналогично мы можем проверить данный закон и для задачи в кинетической постановке, используя разностную схему(2.7) для нахождения .

## Описание программы

### Программа для решения задачи в гидродинамической постановке

Для получения решения и проверки выполнения закона сохранения энергии для задачи в гидродинамической постановке (1.25)(1.27)была написана программа *gidrodinam\_pribl.exe*на языке программирования*С++*, в которой реализована явная четырехточечная разностная схема (2.1)(2.2) для гидродинамического приближения (1.25)(1.26), схема (2.10) для уравнения Пуассона(1.27), а так же схема (2.11) для интеграла энергии (1.59). Для ввода входных параметров используется файл *input.txt*, в котором задаются:

количество точек разбиение сетки по координате,

размер области,

шаг по времени,

момент времени, до которого необходимо выполнить вычисления,

перепад плотности,

погрешность.

По завершении программы создаются файлы, в которые через пробел в две колонки выводятся координата области и значение функции в данной точке для момента времени Результаты для плотности, потенциала, скорости и энергии записываются в файлы *Ro.txt*, *Fi.txt*, *U.txt* и *En.txt*соответственно.

### Программа для решения задачи в кинетической постановке

Для получения решенияи проверки выполнения закона сохранения энергии для задачи в кинетической постанове (1.24)была создана программа *Kinet\_ur.exe*на языке программирования*С++*, в которой была реализована двушаговая разностная схема ЛаксаВендрофа, которая имеет вид(2.4)(2.5), а также схема (2.10) с помощью которой мы получаем решение уравнения Пуассона, а так же схема (2.7), (2.11) для проверки выполнения закона сохранения энергии (1.59). Для ввода входных параметров используется файл *input.txt*, в котором задаются:

количество точек разбиение сетки по координате,

количество точек разбиения сетки по скорости,

минимальное значение скорости,

максимальное значение скорости,

момент времени, до которого необходимо выполнить вычисления,

точка разрыва плотности

размер области по координате,

перепад плотности,

точность.

В отличие от предыдущей программа, в данном случае при задании исходных параметров мы не вводим значение шага по времени , таккак схема ЛаксаВендроффа является условно-устойчивой и вычислениях шаг по времени корректируется внутри программы таким образом, чтобы не нарушалось условия .

## Результаты вычислений

### Cходимости решения кинетического уравнения, полученного с помощью разностной схемы Лакса-Вендроффа

Исследуем сходимость решения для кинетического уравнения, полученного с помощью разностной схемы Лакса-Вендроффа(2.5), (2.6), в зависимости от счётных параметров, на примере графика плотности, уменьшив шаг по пространству и по скорости в 2, а затем в 4 раза. Шаг по времени корректируется внутри программы, в зависимости от условия (2.7).

На рисунке3, иллюстрирующем поведение плотности плазмы, в момент времени в области, которая задаётся параметрами , синей линией приведено решение кинетического уравнения,полученного при разбиение сетки по координате , по скорости ,красной линией изображено решение при , черной линией при

|  |
| --- |
|  |
| **Рисунок 3** *(Сходимости решения кинетического уравнения для плотности, полученного с помощью схемы Лакса-Вендроффа)* |

Таким образом, мы можем проследить, что при увеличении сетки в 2, а затем в 4 раза, решение кинетического уравнения (1.20), полученного с помощью разностной схемы Лакса-Вендроффа начинает сходиться. На рисунке 4 приведено решение, что и на рисунке3, но в увеличенном масштабе.

|  |
| --- |
|  |
| **Рисунок 4***(Решение кинетического уравнения для плотности, полученного с помощью схемы Лакса-Вендроффа, в увеличенном масштабе)* |

### Сходимость решения гидродинамического приближения, полученного с помощью явной четырёхточечной разностной схемы

Исследуем сходимость решения для гидродинамического приближения, полученного с помощью явной четырёхточечной разностной схемы(2.1), (2.2), в зависимости от счётных параметров, уменьшив шаг по пространству и по времени в 2, а затем в 4 раза.

На рисунке 5, иллюстрирующем поведение плотности плазмы, в момент времени в области, которая задаётся параметрами синей линией приведено решение гидродинамического приближения, полученного при разбиение сетки по координате и с шагом по времени ,красной линией изображено решение при , чёрной линией при

|  |
| --- |
|  |
| **Рисунок 5***(Сходимости решения гидродинамического приближения для плотности, полученного с помощью явной четырехточечной схемы)* |

Таким образом, мы можем проследить, что при уменьшении шага по времени и пространству в 2, а затем в 4 раза, решение для плотности, полученного с помощью явной четырёхточечной разностной схемы сходится. На рисунке приведено решение, что и на рисунке 6, но в увеличенном масштабе.

|  |
| --- |
|  |
| **Рисунок 6***(Решение кинетического уравнения для плотности, полученного с помощью схемы Лакса-Вендроффа, в увеличенном масштабе)* |

### Сравнение решения кинетического уравнения и гидродинамического приближения для плотности

На рисунках ,,, иллюстрирующих поведение плотности, потенциала и скорости в момент времени в области, которая задаётся параметрами , ,синей линией приведено решение гидродинамического приближениядля ,красной линией для кинетического уравнения для шаг по времени корректируется внутри программы в зависимости от условия (2.7).

|  |
| --- |
|  |
| **Рисунок 7***(Изменение плотности для кинетической и гидродинамической моделей)* |

Так как при решений задачи о распаде разрыва плотности в разреженной плазме в двух разных постановках использовались отличные друг от друга методы, то размер шага по координате при решении кинетической модели был взят в 10 раз меньше, чемдля гидродинамической.

|  |
| --- |
|  |
| **Рисунок 8***(Изменение потенциала для кинетической и гидродинамической моделей)* |

На рисунке красной линией изображено изменение средней скорости для кинетического уравнения, которое считалось по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (.) |
|  | |
| **Рисунок 9***(Изменение скорости для кинетической и гидродинамической моделей)* | |

На рисунках ,, для плотности, потенциала и скорости соответственно мы можем проследить, что решение гидродинамической модели приближает решение кинетической модели.

### Проверка выполнения закона сохранения энергии

На рисунке 10демонстрирует выполнение закона сохранения энергии. Видно, что кинетическая энергия (зеленая линия) растёт, потенциальная энергия (голубая линия) – падает. Полная энергия сохраняется с достаточно хорошей точностью. Потеря энергии составляет 7%.

|  |
| --- |
|  |
| **Рисунок 10***(Проверка выполнения закона сохранения энергии)* |

## Выводы

В данной работе на примере задачи о распаде разрыва плотности в разреженной плазме:

1. была сформулирована кинетическая и гидродинамическая постановка задачи;
2. был сделан вывод гидродинамического приближения (1.25)(1.27) для кинетического уравнения Власова (1.20);
3. был выведен закон сохранения энергии для гидродинамического приближения (1.59);
4. была реализована явная разностная схема (2.1)(2.2), с помощью которой было получено решение гидродинамического приближения (1.25)(1.27);
5. была реализована разностная схема Лакса-Вендрофа(2.5)(2.6), с помощью которой было получено решение для кинетического уравнения Власова(1.20);
6. былопроведено исследование сходимости решений кинетического уравнения и гидродинамического приближения. Расчёты показали, имеет место быть сходимости данных решений;
7. проведено сравнение решений кинетической и гидродинамической моделей. Решение гидродинамической мели приближает решение кинетической модели;
8. проверено выполнение закона сохранения энергии для гидродинамической модели. Полная энергия сохраняется с достаточно хорошей точностью. Потеря энергии составляет 7%.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., Мир, 1968.

. Сагдеев Р.З. В кн: Вопросы теории плазмы, вып. 4. Подредакций М.А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1964.

. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Распад разрыва в дисперсионной среде. – В кн.: Численные методы в физике плазмы. Москва: Наука, 1977.

4.Поттер, Д. Вычислительные методы в физике / Д. Поттер. – М.: Мир, - 1975. – 392 с.