代数结构 HW8 答案

张朔宁

May 3, 2025

20. 设 A_4 是全体 4 元偶置换构成的群，请列出它的全部元素

解. A_4 的元素如下:
恒等置换:Id
所有 3-轮换（共 8 个）：$(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)$
两个不相交对换的乘积（共 3 个）：$(12)(34),(13)(24),(14)(23)$ 故:

$$A_4 = \{Id, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

22. 证明:整数加群 $\mathbb{Z}$ 与偶数加群 $2\mathbb{Z}$ 同构

Proof. 定义映射 $\varphi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$，令 $\varphi(n) = 2n$
验证单射:若 $\varphi(m) = \varphi(n)$，则 $2m = 2n \Rightarrow m = n$
验证满射:任意 $k \in 2\mathbb{Z}$，都有 $k = 2n$ 对某个 $n \in \mathbb{Z}$，即 $\varphi(n) = k$
验证同态:对任意 $m, n \in \mathbb{Z}$，有

$$\varphi(m + n) = 2(m + n) = 2m + 2n = \varphi(m) + \varphi(n)$$

因此，φ 是一个同构映射，故$\mathbb{Z}$ 与 $2\mathbb{Z}$ 同构 □

23. 证明:群的同构关系是一种等价关系

Proof. 设 G_1, G_2, G_3 是群,验证等价关系的三条性质即可
自反性:恒等映射 $\mathrm{id}_G(g) = g$ 是同构映射
对称性:若 $\varphi : G_1 \to G_2$ 是同构映射，则其逆映射 $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ 也是同构映射
传递性:若 $\varphi : G_1 \to G_2$、$\psi : G_2 \to G_3$ 均为同构映射，则复合映射 $\psi \circ \varphi : G_1 \to G_3$ 是同构映射

故群的同构是一种等价关系 □

26. 在群 $\langle G, * \rangle$ 中定义新的二元运算 $\bullet$，令

$$a \bullet b = b * a.$$

证明:$\langle G, \bullet \rangle$ 是群，且与 $(G, *)$ 同构

Proof. （1）证明 $\langle G, \bullet \rangle$ 是群:
封闭性:$b * a \in G$，因为 G 对 $*$ 封闭
结合律:

$$(a \bullet b) \bullet c = (b * a) \bullet c = c * (b * a)$$
$$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (c * b) = (c * b) * a$$

单位元:$e \in G$，有 $a \bullet e = e * a = a$，$e \bullet a = a * e = a$
逆元:设 a^{-1} 是 a 的逆元，则:

$$a \bullet a^{-1} = a^{-1} * a = e, \quad a^{-1} \bullet a = a * a^{-1} = e$$

故 $(G, \bullet)$ 是群

（2）定义映射 $\varphi : G \to G$，$\varphi(a) = a^{-1}$

对任意 $a, b \in G$，有

$$\varphi(a * b) = (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$$

下面验证φ 是双射

单射:$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a^{-1} = b^{-1} \Rightarrow a = b$

满射:对任意 $c \in G$，$\varphi(c^{-1}) = c$

故 φ 是同构，$(G, *) \cong (G, \bullet)$ □

1. 设 H 是交换群 G 的子群，证明:H 的每个左陪集也是一个右陪集

Proof. 对任意 $a \in G$，左陪集为 $aH = \{ah \mid h \in H\}$，右陪集为 $Ha = \{ha \mid h \in H\}$

因为 G 是交换群，$ah = ha$，所以 $aH = Ha$ □

2. 设 H 是 G 的子群，$a, b \in G$证明以下命题等价:

   (1) $a^{-1} * b \in H$

   (4) $a \in bH$

Proof. $(1) \Rightarrow (4)$:若 $a^{-1} * b \in H$，设 $h = a^{-1} * b$，则 $b = a * h$，即 $a \in bH$

$(4) \Rightarrow (1)$:若 $a \in bH$，则存在 $h \in H$，使得 $a = b * h$，即 $b^{-1} * a = h \in H$，等价于 $a^{-1} * b \in H$ □