代数结构第七周作业参考答案

5.1(2) 解：

(a) **封闭性**：对任意 $x = a_1 + b_1\sqrt{2} \in S$ 和 $y = a_2 + b_2\sqrt{2} \in S$，有

$$x + y = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}.$$

由于 $a_1 + a_2 \in \mathbb{Q}$ 且 $b_1 + b_2 \in \mathbb{Q}$，故 $x + y \in S$。

(b) **结合律**：加法在有理数集合 $\mathbb{Q}$ 中满足结合律，因此对任意 $x, y, z \in S$，有

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(c) **单位元**：取 $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in S$，对任意 $x \in S$，满足

$$x + 0 = (a + b\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2} = x.$$

(d) **逆元**：对任意 $x = a + b\sqrt{2} \in S$，存在 $-x = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in S$，满足

$$x + (-x) = (a + (-a)) + (b + (-b))\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2} = 0.$$

(e) **交换性**：对任意 $x, y \in S$，有

$$x + y = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt{2} = y + x.$$

结论：$\langle S, + \rangle$ 是交换群，单位元为 $0 + 0\sqrt{2}$，任意元素 $a + b\sqrt{2}$ 的逆元为 $-a - b\sqrt{2}$。

5.1(4) 解:

(a) **封闭性**：运算结果均在 S 中。

(b) **单位元**：观察运算表，γ 满足 $x * \gamma = \gamma * x = x$。

(c) **逆元**：
- α 的逆元为 δ（因 $\alpha * \delta = \gamma$），
- β 的逆元为 β（因 $\beta * \beta = \gamma$），
- γ 的逆元为 γ，
- δ 的逆元为 α。

(d) **结合律**：验证部分三元组结果一致（如 $(\alpha*\alpha)*\beta = \beta*\beta = \gamma$，与 $\alpha*(\alpha*\beta) = \alpha*\delta = \gamma$ 结果相同）。

(e) **交换性**：运算表对称（如 $\alpha * \beta = \delta = \beta * \alpha$），故为交换群。

结论：$\langle S, * \rangle$ 是交换群，单位元为 γ，逆元如上述对应。

5.1(6) 解:

(a) **封闭性**：因 p 为素数，$a \cdot b \not\equiv 0 \pmod{p}$，故 $c \in S$。

(b) **结合律**：整数乘法结合律在模运算下仍成立。

(c) **单位元**：1，满足 $a * 1 \equiv a \pmod{p}$。

(d) **逆元**：由费马小定理，$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$，故 $a^{-1} = a^{p-2} \pmod{p} \in S$。

(e) **交换性**：乘法交换，故为交换群。

结论：$\langle S, * \rangle$ 是交换群，单位元为 1，逆元为模 p 的乘法逆元。

5.2 令 $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$，定义运算 $a * b = a + b + ab$。
(1) 证明 $(S, *)$ 是群：

(a) **封闭性：**若 $a, b \neq -1$，则 $a * b = a + b + ab \neq -1$（反证法：假设 $a + b + ab = -1$，则 $(a+1)(b+1) = 0$，矛盾）。
(b) **结合律：**展开得 $(a * b) * c = a * (b * c) = a + b + c + ab + ac + bc + abc$，等式成立。
(c) **单位元：**解 $a * e = a$，得 $e = 0$（验证 $0 * a = a$）。
(d) **逆元：**解 $a * x = 0$，得 $x = -\frac{a}{a+1} \in S$（因 $a \neq -1$）。

(2) 解方程 $2 * x * 3 = 7$：

$$\begin{aligned} (2 * x) * 3 &= 7 \\ (2 + x + 2x) * 3 &= 7 \\ (2 + 3x) + 3 + (2 + 3x) \cdot 3 &= 7 \\ 11 + 12x &= 7 \implies x = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

结论：$x = -\frac{1}{3} \in S$，解成立。

5.4 证明: **必要性：**若 G 交换，则

$$(a * b)^2 = a * b * a * b = a^2 * b^2.$$

充分性：若 $(a * b)^2 = a^2 * b^2$，则

$$a * b * a * b = a * a * b * b \implies b * a = a * b \quad (\text{消去律})$$

5.6 证明: 法一: 设 $(a * b)^n = e$，则：

$$(b * a)^{n+1} = b * a * b * a * \cdots * b * a = b * (a * b)^n * a = b * e * a = b * a.$$

反之亦然. 同时这也说明两个元素若有无穷阶元素则两者都是无穷阶元素.
法二: 观察到 $b * a = a^{-1} * (a * b) * a$，即 $b * a$ 是 $a * b$ 的共轭，共轭元素同阶。

5.10 证明:

(a) **非空：**单位元 $e \in H$。
(b) **封闭性：**若 $a, b \in H$，则对任意 $g \in G$，有：

$$(a * b^{-1}) * g = a * b^{-1} * g = a * g * b^{-1} = g * a * b^{-1},$$

故 $a * b^{-1} \in H$。

5.12 解: Klein 四元群 $K_4 = \{e, a, b, c\}$ 的所有子群为：

- 平凡子群：$\{e\}$。
- 2 阶子群：$\{e, a\}$、$\{e, b\}$、$\{e, c\}$。
- 4 阶子群：K_4 自身。

5.15 解: 6 阶循环群 $G = \langle g \rangle$，生成元为 g 和 g^5。子群：

- 1 阶：$\{e\}$。
- 2 阶：$\langle g^3 \rangle$。
- 3 阶：$\langle g^2 \rangle$。
- 6 阶：G 自身。

5.17 若 G 是 n 阶群且存在 $g \in G$ 的阶为 n，则 $\langle g \rangle$ 是 G 的 n 阶子群，故 $G = \langle g \rangle$，即 G 为循环群。