

# 2023 春代数结构期末考试卷

2023 年 6 月 28 日

题目 1. 解下列同余方程组 (14 分):

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

题目 2.  $m, n \in \mathbb{N}^*$  且  $\gcd(m, n) = 1$ , 求证:  $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$  (10 分)。

题目 3. 有两个置换  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ , 求  $\sigma\tau, \sigma^2\tau, \tau^{-1}\sigma\tau$  (10 分)。

题目 4.  $R$  是定义在  $A \times A$  上的二元关系, 其中  $A$  是自然数集  $\mathbb{N}$  的子集。  $(a, b) \stackrel{R}{\sim} (c, d)$  当且仅当  $a + d = b + c$  (10 分)。

- (1) 求证  $R$  是  $A \times A$  上的等价关系;
- (2) 当  $A = \{1, 2, 3\}$  时, 求商集  $(A \times A)/R$ 。

题目 5. (1) 设  $G$  为一有限群, 证明  $G$  中阶大于 2 的元素个数为偶数;  
(2) 在 (1) 的条件下加上  $|G|$  为偶数, 证明  $G$  中必有 2 阶元。(14 分)

题目 6.  $G$  为一个群, 证明  $G$  没有非平凡子群当且仅当  $G = \{e\}$  或者  $G$  为素数阶循环群 (10 分)。

题目 7. 设  $H$  是群  $G$  的正规子群, 且  $[G : H] = m$ 。求证:  $\forall x \in G, x^m \in H$  (12 分)。

题目 8. 设  $G$  为一个群, 定义  $G$  的中心  $Z(G)$  为:  $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G, xg = gx\}$  (12 分)。

- (1) 证明  $Z(G)$  是  $G$  的正规子群;
- (2) 若  $G$  是交换群, 证明  $Z(G) = G$ ;
- (3) 若  $G/Z(G)$  是循环群, 证明  $Z(G) = G$ 。

题目 9. 设  $R$  是一个环,  $S$  是  $R$  的子集, 而  $I$  是  $R$  的理想且  $I \subset S$  (8 分)。

- (1) 若  $S$  是  $R$  的子环, 证明  $S/I$  是  $R/I$  的子环。
- (2) 若  $S$  是  $R$  的理想, 证明  $(R/I)/(S/I) = R/S$ 。