代数结构 HW14 答案

张朔宁

June 24, 2025

24. 令 $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$，$\varphi(f(x)) = \varphi(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0$。

解. (a) 加法与乘法同态性： 设 $f(x) = a_0 + \cdots + a_m x^m$, $g(x) = b_0 + \cdots + b_n x^n$，则：

$$\varphi(f+g) = a_0 + b_0 = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(fg) = a_0 b_0 = \varphi(f)\varphi(g)$$

满射性：对任意 $c \in \mathbb{R}$，取 $f(x) = c$，则 $\varphi(f) = c$，故 φ 是满同态。

(b) 核与商环：

$$\ker\varphi = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \varphi(f(x)) = 0\} = \{x \cdot g(x) \mid g(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

由同态基本定理得：

$$\mathbb{R}[x]/\ker\varphi \cong \mathbb{R}$$

25. 若 $\varphi : R_1 \to R_2$ 为满同态，I_1是R_1的理想，则：

解. (a) $\varphi^{-1}(\varphi(I_1)) = I_1 + \ker\varphi$：

$\subseteq$ ： $x \in \varphi^{-1}(\varphi(I_1)) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a), a \in I_1$ 则 $x - a \in \ker\varphi$，得 $x \in I_1 + \ker\varphi$;

$\supseteq$ ： 若 $x = a + b$，其中 $a \in I_1, b \in \ker\varphi$，则 $\varphi(x) = \varphi(a) \in \varphi(I_1)$，即 $x \in \varphi^{-1}(\varphi(I_1))$。

(b) $\varphi(I_1) = R_2 \iff I_1 + \ker\varphi = R_1$：

$\Rightarrow$ 若 $\varphi(I_1) = R_2$，则任意 $x \in R_1$，$\varphi(x) \in \varphi(I_1)$，即 $x \in I_1 + \ker\varphi$;

$\Leftarrow$ 若 $x \in R_1 = I_1 + \ker\varphi$，则对任意 $y \in R_2$，存在 $x = a + b$，得 $\varphi(x) = \varphi(a) \in \varphi(I_1)$，即 $\varphi(I_1) = R_2$。