代数结构 HW12 答案

张朔宁

May 31, 2025

19. H, K 是 G 的正规子群，如果 G/H，G/K 是交换群，那么 $G/(H \cap K)$ 也是交换群。

解. 由 G/H 为交换群，有$(g_1H)(g_2H) = (g_2H)(g_1H)$, 等价于$g_1g_2H = g_2g_1H$，即$g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \in H$ 同理，$g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \in K$, 故$g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \in H \cap K$ 故$G/(H \cap K)$为交换群

20. 在群 G 中，a, b 是 G 中的元素，称 $aba^{-1}b^{-1}$ 为 G 的换位元，证明:

(1) G' 的所有有限个换位元乘积构成 G'，G' 是 G 的正规子群;

(2) G/G' 是交换群;

(3) 若 N 是 G 的正规子群且 G/N 是交换群，那么 G' 是 N 的子群。

解. (1) 设 $c_i = a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}$ 为换位元，$i = 1, \ldots, n$，且满足结合律，单位元为 G 的单位元。
$\forall c_i = a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}$，有 $c_i = b_i^{-1}a_i^{-1}a_ib_i$ 也为换位元。
$\forall x = c_1c_2 \cdots c_m \in G'$，有 $x \in G$，故 G' 为 G 的子群。
下证正规性：$\forall g \in G$，$\forall x = c_1c_2 \cdots c_m \in G'$，有

$$gxg^{-1} = g(c_1c_2 \cdots c_m)g^{-1} = (gc_1g^{-1})(gc_2g^{-1}) \cdots (gc_mg^{-1})$$

对 $\forall c_i = a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}$，有

$$gc_ig^{-1} = g(a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1})g^{-1} = (ga_ig^{-1})(gb_ig^{-1})(ga_ig^{-1})^{-1}(gb_ig^{-1})^{-1} \in G'$$

故 $gxg^{-1} \in G'$，即 G' 是 G 的正规子群。

(2) 设 $\forall a, b \in G$，即证 $(aG')(bG') = (bG')(aG')$:

$$(aG')(bG') = abG', \quad (bG')(aG') = baG'$$

因为 $ab(a^{-1}b^{-1}) \in G'$，所以 $abG' = baG'$，得证 G/G' 是交换群。

(3) G/N 是交换群，$\forall a, b \in G$，有 $(aN)(bN) = (bN)(aN)$，即 $aba^{-1}b^{-1} \in N$。
因为 $\forall x = c_1c_2 \cdots c_m \in G'$，其中 $c_i = a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1} \in N$，所以 $x \in N$，故 G' 是 N 的子群。

3. 在环 $(R, +, \cdot)$ 中，如果 $(R, +)$ 是循环群，则 $(R, +, \cdot)$ 是交换环。

解. 设 g 为 $(R, +)$ 的一个生成元，$\forall x, y \in R$，有 $x = mg$，$y = ng$，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$。则

$$x \cdot y = (mg) \cdot (ng) = (mn)g^2 = (nm)g^2 = (ng) \cdot (mg) = y \cdot x$$

故 $(R, +, \cdot)$ 是交换环。

4. 在环 R 中，如果对于任意 $a \in R$ 均有 $a^2 = a$，则称该环是布尔环。证明:

(1) $\forall a \in R$，$2a = 0_R$;

(2) R 是交换环。

解. (1) $(a + a)^2 = 2a \cdot 2a = 4a^2 = 4a$，而 $(a + a)^2 = a + a = 2a$，故 $4a = 2a$，即 $2a = 0_R$，得证！

(2) $\forall a,b\in R$，

$$(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2=a+ab+ba+b=a+b$$

故 $ab+ba=0$，由 $2a=0_R$ 得 $a=-a$，所以 $ab=-ba=ba$，故 R 是交换环。

5. 下列环中哪些是整环，哪些是域？说明理由。

(2) $\{(a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z})\}$;

解. (2) 是整环不是域。乘法满足交换律，为交换环。要证整环，即证 $\forall a,b,c,d\in\mathbb{Z}$，$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\neq 0$ 当且仅当 $a+b\sqrt{2}\neq 0$ 且 $c+d\sqrt{2}\neq 0$。若 $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}=0$，则 $ac+2bd=0$ 且 $ad+bc=0$，解得 $(a,b)=(0,0)$ 或 $(c,d)=(0,0)$。
下证不是域：考虑 $\sqrt{2}$，其逆元 $c+d\sqrt{2}$ 满足 $(0+\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=1$，即 $2d+c\sqrt{2}=1$，无整数解，故该环不是域。

7. 在交换环中，若 ab 是零因子，则 a 是零因子或 b 是零因子。

解. 由 ab 是零因子，即 $\exists c\neq 0$，使得 $(ab)c=0$。
$(ab)c=a(bc)=0$，若 $bc\neq 0$，则 a 是零因子；若 $bc=0$，则 b 是零因子。

8. 设加群 $(G,+)$ 的自同态环为 E，如果 H 是 G 的子群，那么

$$E_H=\{f\mid f\in E,f(H)\subseteq H\}$$

是 E 的子环。

解. 由 $0\in E_H$，得 E_H 为 E 的非空子集。
$\forall f,g\in E_H$，则 $(f+g)(H)=f(H)+g(H)\subseteq H$，满足加法封闭性。
对 $\forall f\in E_H$，$(-f)(H)=-f(H)\subseteq H$，即 $-f\in E_H$，为 f 的逆元。
$(E_H,+)$ 是 $(E,+)$ 的子群。
$\forall f,g\in E_H$，有 $(f\circ g)(H)=f(g(H))\subseteq f(H)\subseteq H$，满足乘法封闭性。
且单位元 $f:G\to G$，$f\in E$ 且 $f\in E_H$。
综上，E_H 为 E 的子环。

9. 一个环的任意两个子环的交仍是子环。

解. 设 S,T 为两个子环。
由 $0\in S$ 且 $0\in T$，得 $0\in S\cap T$，非空。
$1\in S$ 且 $1\in T$，得 $1\in S\cap T$
$\forall a,b\in S\cap T$，则 $a+b\in S$ 且 $a+b\in T$，故 $a+b\in S\cap T$，满足加法封闭性。
$\forall a\in S\cap T$，有 $-a\in S$ 且 $-a\in T$，存在逆元，则 $(S\cap T,+)$ 是 $(S,+)$ 和 $(T,+)$ 的子群。
$\forall a,b\in S\cap T$，有 $ab\in S$ 且 $ab\in T$，故 $ab\in S\cap T$，且 $1\in S\cap T$。
综上，$S\cap T$ 是子环。