代数结构 HW10 答案

张朔宁

May 16, 2025

15. 令 $G = \{A | A \in (\mathbb{Q}_n), |A| \neq 0\}$，$G$ 对于矩阵乘法构成群。$f : G \to \mathbb{R}^*$，$f(A) = |A|$。证明：f 是从群 G 到非零实数乘群 $\mathbb{R}^*$ 的同态映射。求 $f(G)$ 和 $\mathrm{Ker} f$。

    解. $\forall A, B \in G, |AB| = |A||B|$,所以$\forall f(AB) = f(A)f(B)$,所以是从群$G$到非零实数乘群$\mathbb{R}^*$的同态映射。
    $f(G) = \mathbb{Q}^*$
    $\mathrm{Ker} f = \{A \in G | |A| = 1\}$

16. G 是交换群，k 是取定的正整数。$f : G \to G$，$f(a) = a^k$。证明：f 是同态映射。求出 $f(G)$ 和 $\mathrm{Ker} f$。

    解. $\forall a, b \in G$,有$f(ab) = (ab)^k = a^k b^k = f(a)f(b)$,故$f$是同态。
    $f(G) = \{a^k | a \in G\}$
    $\mathrm{Ker}\ f = \{a | a^k = e\}$

18. H 是 G 的正规子群，$[G : H] = m$。证明：对于 G 的任意元素 x，$x^m \in H$。

    解. H 是正规子群，商群 G/H 存在，且 $|G/H| = [G : H] = m$
    因为 $\forall xH \in G/H : (xH)^m = H = x^m H$
    即：$x^m \in H$