代数结构第三周作业参考答案

2.29 证明: 由二项式定理得

$$(k+1)^p \equiv \sum_{i=0}^{p} C_p^i k^{p-i} \equiv k^p + 1 \pmod p,$$

进而

$$k^p \equiv (k-1)^p + 1 \equiv (k-2)^p + 2 \equiv \cdots \equiv k \pmod p,$$

则若 $p \nmid n$, 有

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod p,$$

即费马小定理.

2.30(2) 证明: p 是奇素数, 则由费马小定理得,

$$LHS \equiv 1 + 2 + \cdots + p - 1 \equiv p(p-1)/2 \equiv 0 \pmod p.$$

2.32 解: 具有 60 个因子且小于 10^4 的数为:

$$5040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7, \quad 7920 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11,$$

$$8400 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7, \quad 9360 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 13.$$

2.33 证明: 由

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{n}{d}$$

知, 要证明原命题, 只需证

$$\sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d}.$$

考虑 n 的因子集上的映射 $d \mapsto n/d$, 易证这是一个一一映射, 故得证.

2.35 证明: 由定理 2.15 可设 $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, 其中 p 和 $2^p - 1$ 均为素数. 当 $p = 2$ 时, $n = 6$, 则可设 $p = 2k + 1$ $(k \geqslant 1)$, 代入可得 $n = 4^k(2 \cdot 4^k - 1)$. 由 $4^k \equiv 1, 4, 7 \pmod 9$, 分别代入可得 $n \equiv 1 \pmod 9$.