代数结构第九周作业参考答案

6.7 **证明**：由于 H 是 G 的正规子群，故对任意 $g \in G$，有 $gH = Hg$。已知 a 和 b 属于同一左陪集，即 $aH = bH$，故存在 $h_1 \in H$ 使得 $a = bh_1$；同理，c 和 d 属于同一左陪集，即 $cH = dH$，故存在 $h_2 \in H$ 使得 $c = dh_2$。因此：

$$a \cdot c = (bh_1) \cdot (dh_2) = b \cdot (h_1 d) \cdot h_2.$$

由 H 的正规性，存在 $h_3 \in H$ 使得 $h_1 d = dh_3$，代入得：

$$a \cdot c = b \cdot d \cdot h_3 \cdot h_2.$$

由于 $h_3 h_2 \in H$，故 $a \cdot c \in bdH$，即 $a \cdot c$ 与 $b \cdot d$ 属于同一陪集 bdH。

6.10 **证明**：先证 $H_1 \cap H_2$ 是正规子群。对任意 $g \in G$，有：

$$g(H_1 \cap H_2)g^{-1} \subseteq gH_1g^{-1} \cap gH_2g^{-1} = H_1 \cap H_2,$$

故 $H_1 \cap H_2$ 是正规子群。

再证 H_1H_2 是正规子群。首先验证 H_1H_2 为子群：对任意 $h_1h_2, h_1'h_2' \in H_1H_2$，

$$(h_1h_2)(h_1'h_2')^{-1} = h_1h_2h_2'^{-1}h_1'^{-1}.$$

由 H_1, H_2 的正规性，存在 $h_1'' \in H_1$ 使得 $h_2h_2'^{-1}h_1'^{-1} = h_1''h_2h_2'^{-1}$，故上式属于 H_1H_2。再验证正规性：对任意 $g \in G$，

$$gH_1H_2g^{-1} = (gH_1g^{-1})(gH_2g^{-1}) = H_1H_2,$$

故 H_1H_2 是正规子群。

6.11 **证明**：由 H_1, N 均为 G 的正规子群，根据题 10 结论，H_1N 和 H_2N 均为 G 的正规子群。由于 $H_1 \subset H_2$，显然 $H_1N \subseteq H_2N$。任取 $k \in H_2N$ 和 $hn \in H_1N$，其中 $h \in H_1, n \in N$，则：

$$k(hn)k^{-1} = (khk^{-1})(knk^{-1}).$$

由 H_1 和 N 的正规性，$khk^{-1} \in H_1$ 且 $knk^{-1} \in N$，故 $k(hn)k^{-1} \in H_1N$。因此 H_1N 是 H_2N 的正规子群。