代数结构HW6答案

张朔宁

April 16, 2025

7. 设$A = \{1,2,3,4\}$，在$\mathscr{P}(A)$上定义关系“$\sim$”。任给$S, T \in \mathscr{P}(A)$，$S \sim T$，当且仅当$|S| = |T|$。 证明：“$\sim$”是$\mathscr{P}(A)$上的等价关系，并写出它的商集$\mathscr{P}(A)/\sim$。

   Proof. 先证明“$\sim$”是$\mathscr{P}(A)$上的等价关系：

   (a) 自反性： 对于任意的$S \in \mathscr{P}(A)$，因为$|S| = |S|$，因此$S \sim S$，自反性成立。

   (b) 对称性： 若$S \sim T$，即$|S| = |T|$，那么显然$|T| = |S|$, 因此$T \sim S$，对称性成立。

   (c) 传递性： 若$S \sim T$且$T \sim U$，则$|S| = |T|$且$|T| = |U|$，由等式的传递性可得$|S| = |U|$，即$S \sim U$，传递性成立。

   按元素个数对$\mathscr{P}(A)$中的子集进行分类：

   - 元素个数为0的子集：$\{\varnothing\}$，对应等价类$[\varnothing]$。
   - 元素个数为1的子集：$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$，对应等价类$[\{1\}]$。
   - 元素个数为2的子集：$\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$，对应等价类$[\{1,2\}]$。
   - 元素个数为3的子集：$\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$，对应等价类$[\{1,2,3\}]$。
   - 元素个数为4的子集：$\{\{1,2,3,4\}\}$，对应等价类$[\{1,2,3,4\}]$。

   所以商集$\mathscr{P}(A)/\sim = \{[\varnothing],[\{1\}],[\{1,2\}],[\{1,2,3\}],[\{1,2,3,4\}]\}$。 □

9. $\mathbb{R}$是实数集合，在$\mathbb{R}$上定义关系R。任给$x, y \in \mathbb{R}$，xRy，当且仅当x与y相差一个整数。 证明：R是$\mathbb{R}$上的等价关系，列出所有等价类的代表元。

   Proof. 验证三条性质即可

   (a) 自反性： 对于任意$x \in \mathbb{R}$，因为$x - x = 0$，而0是整数，所以根据关系R的定义有xRx，自反性成立。

   (b) 对称性： 若xRy，则存在整数n，使得$x - y = n$，那么$y - x = -n$，所以yRx，对称性成立。

   (c) 传递性： 若xRy且yRz，则存在整数m, n，使得$x - y = m$，$y - z = n$。两式相加可得$x - z = (x - y) + (y - z) = m + n$，因为$m + n$是整数，所以$xRz$，传递性成立。

   求等价类代表元： 等价类$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid y - x = k, k \in \mathbb{Z}\}$。可以取$[0,1)$中的实数作为代表元 □

11. 设A是非空集合，$\mathscr{B}$是A上所有二元关系构成的集合。在$\mathscr{B}$上定义二元关系$\preceq$。任给$R_1, R_2 \in \mathscr{B}$，$R_1 \preceq R_2$，当且仅当，对所有的$x, y \in A$，若xR_1y，则必有xR_2y。证明：$\langle \mathscr{B}, \preceq \rangle$是偏序集。

    Proof. 验证三条性质即可

    (a) 自反性： 对于任意的$R \in \mathscr{B}$，对于所有的$x, y \in A$，若xRy，显然有xRy，根据关系$\preceq$的定义可知$R \preceq R$，自反性成立。

    (b) 反对称性： 若$R_1 \preceq R_2$且$R_2 \preceq R_1$，对于任意的$x, y \in A$，若xR_1y，由$R_1 \preceq R_2$可得xR_2y；若xR_2y，由$R_2 \preceq R_1$可得xR_1y。所以$R_1 = R_2$，反对称性成立。

(c) 传递性： 若$R_1 \preceq R_2$且$R_2 \preceq R_3$，对于任意的$x, y \in A$，若xR_1y，因为$R_1 \preceq R_2$，所以xR_2y；又因为$R_2 \preceq R_3$，所以xR_3y。根据关系$\preceq$的定义可知$R_1 \preceq R_3$，传递性成立。

□

18. 证明：一个有限集合与一个可数集合的并是可数集合。

Proof. 设有限集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，可数集合$B = \{b_1, b_2, \cdots\}$。当$B$是有限集合时原命题是显然的，因此下面只需讨论$B$可数无限的情况。 令$C = A \cup B$。 分情况讨论：

(a) 若$A \cap B = \varnothing$，则可以构造一个从$\mathbb{N}$到C的双射f。 定义$f(k) = \begin{cases} a_k, & k = 1, 2, \cdots, n \\ b_{k-n}, & k > n \end{cases}$ 对于任意的$x \in C$，若$x \in A$，则存在$i \in \{1, \cdots, n\}$，使得$x = a_i$，此时$f(i) = a_i$；若$x \in B$，则存在$j \in \mathbb{N}$，使得$x = b_j$，此时$f(j+n) = b_j$，所以f是满射。 若$f(k_1) = f(k_2)$，当$k_1, k_2 \leq n$时，$f(k_1) = a_{k_1}$，$f(k_2) = a_{k_2}$，则$a_{k_1} = a_{k_2}$，所以$k_1 = k_2$；当$k_1, k_2 > n$时，$f(k_1) = b_{k_1-n}$，$f(k_2) = b_{k_2-n}$，则$b_{k_1-n} = b_{k_2-n}$，所以$k_1 - n = k_2 - n$，即$k_1 = k_2$；当$k_1 \leq n$，$k_2 > n$时，$f(k_1) = a_{k_1}$，$f(k_2) = b_{k_2-n}$，因为$A \cap B = \varnothing$，所以$a_{k_1} \neq b_{k_2-n}$，不会出现$f(k_1) = f(k_2)$的情况。所以f是单射。 因此，C是可数集合。

(b) 若$A \cap B \neq \varnothing$，令$A' = A - (A \cap B)$，则$A'$是有限集合，且$C = A' \cup B$，$A' \cap B = \varnothing$，由上面的讨论可知$C$是可数集合。

综上，一个有限集合与一个可数集合的并是可数集合。 □

20. 证明：实数集合$\mathbb{R}$与笛卡尔积$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$等势。

Proof. 由于$\mathbb{R}$与$(0,1)$是等势的，因此只要证明$(0,1) \times (0,1)$与$(0,1)$等势即可。 对于任意$(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$，将$x = 0.x_1x_2x_3\cdots$和$y = 0.y_1y_2y_3\cdots$写成无限小数形式(不存在某一位,从这一位起全都是9)。定义$g : (0,1) \times (0,1) \to (0,1)$为$g((x, y)) = 0.x_1y_1x_2y_2\cdots$。下面证明$g$是双射

(a) 单射:假设$g((x, y)) = g((x', y'))$，即$0.x_1y_1x_2y_2\cdots = 0.x'_1y'_1x'_2y'_2\cdots$。那么$x_i = x'_i$且$y_i = y'_i$对所有$i \in \mathbb{N}$成立，所以$(x, y) = (x', y')$。

(b) 满射：对于任意$z = 0.z_1z_2z_3\cdots \in (0,1)$，令$x = 0.z_1z_3z_5\cdots$和$y = 0.z_2z_4z_6\cdots$，则$g((x, y)) = z$。

□

注. 以下是20题几种常见的伪证

(1) 试图通过构造初等函数来证明双射

(2) 构造的函数形如$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a_0.a_1a_2a_3\cdots \to (a_0.a_1a_3a_5\cdots, a_0.a_2a_4a_6\cdots)$，这不是满射，比如不存在$x$,$f(x) = (2, 3)$