

# Introdução ao Processamento Digital de Imagem

## MC920 / MO443

Prof. Hélio Pedrini

Instituto de Computação  
UNICAMP

1º Semestre de 2017

# Roteiro

## 1 Registro de Imagens

- Transformadas Geométricas
- Transformações Espaciais
- Interpolação de Intensidade

# Registro de Imagens

- *Registro de imagens* é o processo de correspondência ou alinhamento entre duas ou mais imagens capturadas da mesma cena, porém, obtidas por diferentes sensores, em diferentes instantes de tempo ou sob diferentes pontos de observação.
- A operação de registro é fundamental em processamento e análise de imagens, auxiliando as etapas de identificação e reconhecimento de objetos nas imagens.

# Registro de Imagens

- Diversos domínios de conhecimento utilizam técnicas de registro de imagens.
  - ▶ sensoriamento remoto: aplicações incluem a detecção de mudanças em uma sequência de imagens, a fusão de imagens com características diferentes para permitir que informações sejam adequadamente integradas em termos de resolução espacial ou resolução espectral, a construção de mosaicos a partir de imagens de satélites, a integração de imagens de satélite ou fotografias aéreas com mapas e a localização de regiões de interesse, como edificações e rodovias, em imagens digitais.
  - ▶ área médica: aplicações incluem a combinação de dados obtidos a partir de diferentes técnicas de aquisição, como tomografia computadorizada, tomografia por emissão de pósitrons, ultrassonografia ou ressonância magnética, com o objetivo de obter informações mais completas sobre o paciente.
  - ▶ visão computacional: várias aplicações beneficiam-se das técnicas de registro, tais como a recuperação de informação tridimensional por meio de visão estereoscópica, o rastreamento de objetos em movimento e a reconstrução de objetos.

# Registro de Imagens

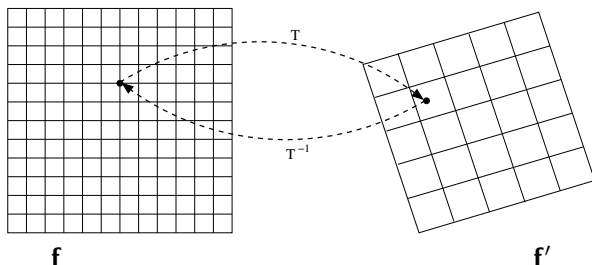
## Transformações Geométricas em Imagens

- *Transformações geométricas* são operações cujo principal objetivo é permitir o mapeamento entre posições espaciais dos pixels da imagem de referência e a imagem modificada.
- Uma transformação geométrica consiste em duas operações básicas, uma *transformação espacial* que define a reorganização dos pixels sobre o plano da imagem e uma *interpolação de intensidade* que trata da atribuição dos níveis de cinza ou cores aos pixels da imagem transformada espacialmente.

# Registro de Imagens

## Transformações Espaciais

- Uma *transformação espacial* é uma função de mapeamento que permite a correspondência entre pontos de duas imagens.
- A figura a seguir ilustra a transformação espacial entre duas imagens bidimensionais  $f$  e  $f'$ .



- A transformação nem sempre resulta em um mapeamento de pontos com coordenadas inteiras: esse problema é encontrado, por exemplo, quando certas transformações de mudança de escala ou rotação são aplicadas a imagens.

# Registro de Imagens

## Transformações Espaciais

- Seja um ponto  $\mathbf{P}$  na imagem original  $\mathbf{f}$  que sofreu uma transformação para uma nova posição  $\mathbf{P}'$  na imagem resultante  $\mathbf{f}'$ .
- A transformação espacial entre esses pontos pode ser realizada de duas formas, por *mapeamento direto* ou *mapeamento indireto*.
- No mapeamento direto, determina-se a localização do ponto  $\mathbf{P}$  na imagem resultante por meio da transformação  $\mathbf{T} : \mathbf{P} \mapsto \mathbf{P}'$ , a qual pode também ser expressa como

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T} \mathbf{P} \quad (1)$$

# Registro de Imagens

## Transformações Espaciais

- Uma dificuldade comum que ocorre no mapeamento direto é que, devido ao problema de discretização da imagem, diferentes pontos da imagem original podem ser mapeados para um mesmo ponto, resultando em falhas na imagem transformada.
- No mapeamento indireto, a transformação  $\mathbf{T}^{-1} : \mathbf{P}' \mapsto \mathbf{P}$  pode ser representada como

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}' \quad (2)$$

a qual garante que todos os pontos da imagem transformada terão um pixel associado à imagem original. Contudo, diferentes pixels da imagem resultante poderão ser mapeados em um único pixel da imagem original.



# Registro de Imagens

## Transformações Espaciais

- Para permitir que as transformações espaciais possam ser realizadas por meio de multiplicação de matrizes e que várias transformações possam ser combinadas para produzir um resultado composto, as equações serão expressas na forma de *coordenadas homogêneas*.
- Em coordenadas homogêneas, um novo componente é adicionado ao ponto.
- Assim, um ponto **P** que tem suas coordenadas expressas por  $(X, Y, Z)$  no sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais (3D) é descrito em coordenadas homogêneas como  $(WX, WY, WZ, W)$ , sendo  $W$  um valor diferente de zero.

# Registro de Imagens

## Transformações Espaciais

- Um ponto pode ter várias representações homogêneas diferentes. Por exemplo,  $(3, 2, 8, 4)$  e  $(6, 4, 16, 8)$  são duas representações diferentes para um mesmo ponto.
- A transformação do sistema de coordenadas homogêneas para o sistema de coordenadas cartesianas é obtida pela divisão dos primeiros componentes das coordenadas pelo último componente, seguida da remoção deste último componente das coordenadas.
- Uma transformação espacial, dada por exemplo pela equação 1, normalmente é expressa em notação matricial, ou seja

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que é assumido o valor  $W = 1$  nessa representação em coordenadas homogêneas.

# Registro de Imagens

## Transformações Espaciais

- Exemplos dessas transformações são ilustrados na figura a seguir.



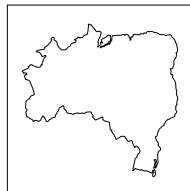
imagem original



mudança de escala



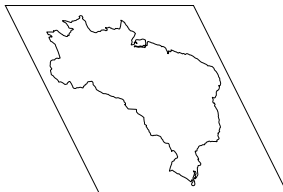
translação



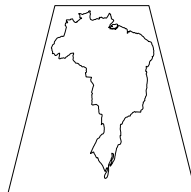
rotação de 27 graus



reflexão em torno do eixo y



cisalhamento em torno do eixo x



perspectiva

# Registro de Imagens

## Transformações Afins

- As *transformações afins* constituem uma classe importante de transformações geométricas e podem ser expressas como

$$\begin{aligned}X' &= aX + bY + cZ + j \\Y' &= dX + eY + fZ + k \\Z' &= gX + hY + iZ + l\end{aligned}\tag{3}$$

ou, equivalentemente, na forma matricial utilizando coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Transformações Afins

- As transformações afins generalizam as transformações de rotação, translação, escala, reflexão e cisalhamento, descritas a seguir.
- As transformações afins preservam o paralelismo entre retas e planos.
- Em geral, as transformações afins não preservam comprimentos, distâncias, áreas, volumes, ângulos ou perpendicularidade.
- Pode-se mostrar, no entanto, que elas preservam a razão entre os volumes de dois sólidos, a razão entre as áreas de dois objetos planos coplanares ou paralelos, e a razão entre os comprimentos de dois segmentos colineares ou paralelos.
- Em particular, o ponto médio de um segmento é mapeado para o ponto médio da imagem desse segmento.

# Registro de Imagens

## Mudança de Escala

- A *mudança de escala* pelos fatores  $S_x$ ,  $S_y$  e  $S_z$  ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, é definida como

$$\begin{aligned}X' &= S_x X \\Y' &= S_y Y \\Z' &= S_z Z\end{aligned}\tag{4}$$

em que  $(X', Y', Z')$  são as coordenadas do novo ponto.

- Na forma matricial, a mudança de escala pode ser representada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Translação

- A *translação* de um ponto  $P(X, Y, Z)$  para uma nova posição  $P(X', Y', Z')$  usando-se deslocamentos  $t_x$ ,  $t_y$  e  $t_z$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned}X' &= X + t_x \\Y' &= Y + t_y \\Z' &= Z + t_z\end{aligned}\tag{5}$$

- Na forma matricial, a translação pode ser representada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Rotação

- A forma mais simples de realizar uma *rotação* tridimensional é aplicar a rotação de um ponto em torno de cada eixo de coordenadas.
- Os ângulos são medidos no sentido horário, quando a origem é vista pela parte positiva do eixo, conforme figura a seguir.

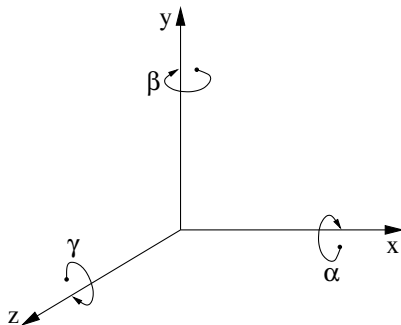


Figura : Ângulos medidos para cada eixo de rotação.



# Registro de Imagens

## Rotação

- A rotação de um ponto em torno do eixo  $x$  por um ângulo  $\alpha$  é realizada pela matriz de transformação

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A rotação de um ponto em torno do eixo  $y$  por um ângulo  $\beta$  é realizada pela matriz de transformação

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Rotação

- De forma análoga, a rotação de um ponto em torno do eixo de coordenadas  $z$  por um ângulo  $\gamma$  é realizada pela matriz de transformação

$$\mathbf{R}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Reflexão

- Em uma *reflexão* com respeito ao plano  $yz$ , apenas os valores de coordenadas  $x$  dos vetores de posição do objeto sofrem alteração (inversão de sinal).

Portanto

$$\mathbf{E}_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma reflexão no plano  $xz$  é dada por

$$\mathbf{E}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Reflexão

- Finalmente, uma reflexão no plano  $xy$  é dada por

$$\mathbf{E}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Cisalhamento

- A transformação de *cisalhamento* altera as coordenadas dos pontos de acordo com uma função de direção, de modo a causar uma deformação dos objetos presentes na imagem.
- Cada ponto transformado mantém-se em uma linha paralela à direção do cisalhamento.
- Um cisalhamento no espaço altera os pontos em direção paralela a um plano de coordenadas. Dessa forma, pode-se realizar a transformação em duas direções de eixos de coordenadas e manter a outra fixa.
- Em um cisalhamento com respeito ao plano  $yz$ , os fatores  $c_y$  e  $c_z$  da transformação são aplicados nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, mantendo a coordenada  $x$  constante.

# Registro de Imagens

## Cisalhamento

- Essa transformação pode ser expressa como

$$\begin{aligned}X' &= X \\Y' &= Y + c_y X \\Z' &= Z + c_z X\end{aligned}\tag{6}$$

Na forma matricial, o cisalhamento no plano  $yz$  é dado por

$$\mathbf{C}_{yz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_y & 1 & 0 & 0 \\ c_z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um cisalhamento no plano  $xz$  é dado por

$$\mathbf{C}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Cisalhamento

- Finalmente, um cisalhamento no plano  $xy$  é dado por

$$\mathbf{C}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_x & 0 \\ 0 & 1 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Transformação Polinomial

- Uma *transformação polinomial* no espaço tridimensional é dada por

$$\begin{aligned}x' &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k \\y' &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n b_{ijk} x^i y^j z^k \\z' &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n c_{ijk} x^i y^j z^k\end{aligned}\tag{7}$$

em que  $n$  é o grau dos polinômios utilizados na transformação. Os coeficientes  $a_{ijk}$ ,  $b_{ijk}$  e  $c_{ijk}$  podem ser determinados a partir de pontos representativos da imagem, também chamados de *pontos de controle*.



# Registro de Imagens

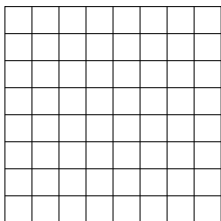
## Transformação Polinomial

- A ordem da transformação é dada por  $m = i + j + k$ , com  $m \geq 1$ .
- Para uma transformação polinomial de ordem  $m$ , há um total de  $(m + 1)(m + 2)(m + 3)/2$  coeficientes.
- As transformações afins, descritas na equação 3, são um caso particular das transformações polinomiais de ordem 1, com 12 coeficientes.
- A transformação polinomial pode ser empregada para compensar alterações geométricas resultantes de mudanças nos ângulos de observação, tais como distorções que ocorrem em equipamentos de aquisição de imagens.

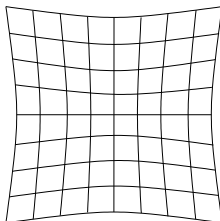
# Registro de Imagens

## Transformação Polinomial

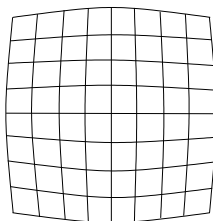
- Duas distorções não lineares que podem ser corrigidas com o modelo polinomial são mostradas a seguir, conhecidas como distorção *almofada* e *barril*, respectivamente.



grade original



distorção *almofada*



distorção *barril*

# Registro de Imagens

## Transformações Projetivas

- As *transformações projetivas* ou *homografias* permitem que cada ponto dos objetos que formam a cena no espaço tridimensional possa ser projetado no plano de imagem.
- As transformações projetivas mais comuns são as projeções ortográfica e perspectiva.

# Registro de Imagens

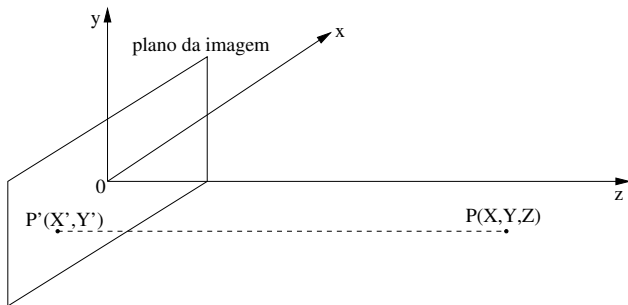
## Projeção Ortográfica

- A *projeção ortográfica* é uma transformação que realiza o mapeamento de pontos tridimensionais sobre o plano da imagem, tal que os pontos são projetados ao longo de linhas paralelas na imagem.
- Esse tipo de projeção é bastante utilizado em desenhos de engenharia e arquitetura para representar e visualizar objetos por meio de um conjunto de vistas bidimensionais que mantêm as proporções relativas do objeto.
- Dessa maneira, a forma dos objetos pode ser reconstruída a partir dessas projeções.
- A projeção ortográfica pode ser modelada por uma câmera que captura a cena, cujo centro de projeção esteja localizado no infinito, tornando as linhas de projeção paralelas ao plano da imagem.
- A projeção pode ocorrer em um dos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  ou  $z = 0$ .

# Registro de Imagens

## Projeção Ortográfica

- Colocando-se a câmera ao longo do eixo  $z$ , conforme ilustrado na figura a seguir, todos os pontos são projetados no plano  $z = 0$ .



# Registro de Imagens

## Projeção Ortográfica

- No caso de projeção no plano  $z = 0$ , o ponto  $P(X, Y, Z)$  é projetado como

$$\begin{aligned}X' &= X \\Y' &= Y \\Z' &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

Assim, a projeção ortográfica pode ser expressa, em coordenadas homogêneas, como

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Projeção Ortográfica

- Como uma transformação projetiva mapeia pontos com coordenadas tridimensionais (espaço do objeto) para pontos com coordenadas bidimensionais (plano da imagem), a projeção ortográfica pode ser representada por uma matriz de  $3 \times 4$  elementos, ou seja

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

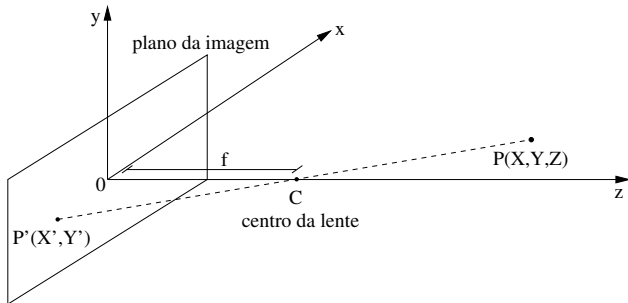
- A *projeção perspectiva*, assim como a projeção ortográfica, realiza a transformação de pontos tridimensionais para o plano da imagem.
- Entretanto, o tamanho dos objetos é reduzido com o aumento da distância do centro de projeção.
- Na transformação perspectiva também ocorre uma redução não uniforme de linhas nos objetos como uma função de orientação e distância dos objetos do centro de projeção.
- Esses efeitos estão relacionados à percepção de profundidade do sistema visual humano, embora a forma dos objetos não seja preservada.



# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

- A figura a seguir mostra um modelo para o cálculo da projeção perspectiva.
- O sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  da câmera é posicionado de tal forma que o plano da imagem coincida com o plano  $xy$ , enquanto o eixo óptico definido pelo centro da lente situa-se ao longo do eixo  $z$ .
- Dessa forma, o centro do plano da imagem localiza-se na origem do sistema, enquanto o centro da lente possui coordenada  $(0, 0, f)$ , sendo  $f$  a distância focal da câmera.



# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

- Seja um ponto **P** no espaço descrito pelas coordenadas  $(X, Y, Z)$ , com  $Z > f$ , ou seja, localizado na frente da lente.
- A obtenção de  $(X', Y')$  a partir da projeção do ponto  $(X, Y, Z)$  sobre o plano da imagem é dada pela relação

$$\frac{X'}{f} = -\frac{X}{Z-f} \qquad \frac{Y'}{f} = -\frac{Y}{Z-f} \qquad (9)$$

- O sinal negativo nas equações 9 indica que a imagem está invertida.
- Portanto, as coordenadas do ponto projetado no plano da imagem ( $Z' = 0$ ) são

$$X' = \frac{fX}{f-Z} \qquad Y' = \frac{fY}{f-Z} \qquad (10)$$

# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

- Dessas relações, a projeção perspectiva pode ser expressa, em coordenadas homogêneas, como

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Como a projeção é realizada sobre o plano  $xy$ , o valor de  $Z'$  pode ser desconsiderado nesta transformação.
- Assim, a projeção perspectiva pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ (-Z/f) + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fX/(f - Z) \\ fY/(f - Z) \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

- Nesse modelo de câmera, o plano da imagem está posicionado atrás do centro de projeção a uma distância  $f$  e a imagem projetada está invertida. Uma maneira de evitar essa inversão é assumir que o plano da imagem esteja na frente do centro de projeção, como mostrado na figura a seguir.
- O centro do plano da imagem possui coordenada  $(0,0,f)$ , na qual  $f$  é a distância focal da lente, enquanto o centro da lente localiza-se na origem do sistema.

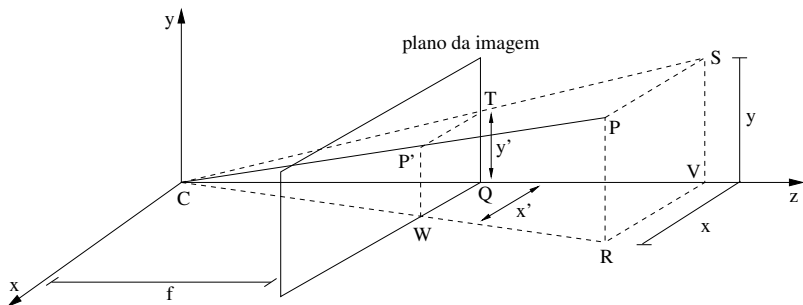


Figura : Formulação alternativa para a projeção perspectiva.

# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

- Considerando um ponto **P** descrito pelas coordenadas  $(X, Y, Z)$ , com  $Z > f$ , pode-se observar a formação dos triângulos  $CQW$  e  $CVR$  pela projeção do ponto **P** no plano  $xz$  e dos triângulos  $CSV$  e  $CTQ$  no plano  $yz$ .
- No plano  $xz$ , os triângulos  $CQW$  e  $CVR$  são semelhantes. Da semelhança, extrai-se a seguinte relação

$$\frac{X'}{f} = \frac{X}{Z} \quad (11)$$

que permite calcular a coordenada  $X'$

$$X' = \frac{X}{Z/f} \quad (12)$$

- Analogamente, dos triângulos  $CSV$  e  $CTQ$ , no plano  $yz$ , extrai-se a relação que permite calcular  $Y'$

$$Y' = \frac{Y}{Z/f} \quad (13)$$

# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

- Dessas relações, a projeção perspectiva pode ser expressa, em coordenadas homogêneas, como

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Como a projeção é realizada sobre o plano  $xy$ , o valor de  $Z'$  pode ser desconsiderado na transformação.
- Assim, a projeção perspectiva pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z/f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fX/Z \\ fY/Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

- Uma outra forma de expressar a projeção perspectiva é a partir da transformação afim, dada pela equação 3, que pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} W & X' \\ W & Y' \\ W & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou, de forma similar

$$\begin{aligned} X' &= \frac{aX + bY + c}{iX + jY + 1} \\ Y' &= \frac{dX + eY + f}{iX + jY + 1} \end{aligned} \tag{14}$$

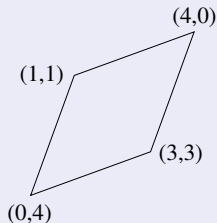
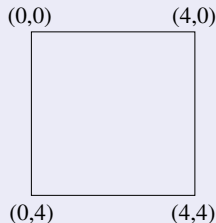
- A partir de quatro pontos não colineares em duas imagens correspondentes, conforme ilustrado no exemplo a seguir, os oito coeficientes da equação 14 podem ser determinados.
- Essa transformação projetiva é útil para auxiliar o registro de imagens obtidas sob diferentes vistas.

# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

### Exemplo:

Dada a transformação projetiva expressa na equação 14, calcule os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $i$  e  $j$  a partir das quatro coordenadas mostradas nas figuras a seguir.



**Figura :** Mapeamento de coordenadas pela transformação projetiva.



# Registro de Imagens

## Projeção Perspectiva

### Exemplo: (continuação)

Os parâmetros podem ser calculados tomando-se as coordenadas dos vértices da imagem (a) e seus vértices correspondentes na imagem (b) e substituindo-as na equação da transformação projetiva.

Assim, para o ponto superior esquerdo das imagens, tem-se que

$$1 = \frac{0a + 0b + c}{0i + 0j + 1} \qquad 1 = \frac{0d + 0e + f}{0i + 0j + 1}$$

Portanto,  $c = f = 1$ . Analogamente, para os outros três vértices, tem-se que os coeficientes da transformação são

$a = 0.75$	$c = 1$	$e = 0.75$	$i = 0$
$b = -0.25$	$d = -0.25$	$f = 1$	$j = 0$

# Registro de Imagens

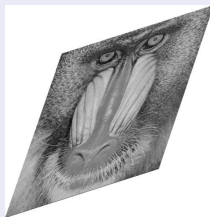
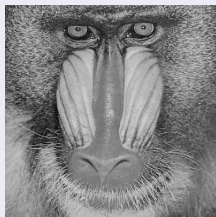
## Projeção Perspectiva

### Exemplo: (continuação)

Pode-se verificar facilmente que o ponto médio  $P(2, 0)$  da aresta superior na imagem a seguir (à esquerda) é mapeado para o ponto médio  $P(2.5, 0.5)$  da aresta correspondente na imagem à direita.

Valores fracionários resultantes do cálculo das posições dos pontos em uma imagem devem ser adequadamente aproximados. A intensidade dos pixels deve ser interpolada levando-se em consideração pontos vizinhos.

Uma ilustração da transformação projetiva é mostrada a seguir.



# Registro de Imagens

## Interpolação de Intensidade

- As transformações espaciais discutidas anteriormente permitem o mapeamento de valores inteiros de coordenadas para valores que podem ser fracionários.
- Portanto, a aplicação satisfatória de transformações geométricas requer estratégias para atribuir intensidades aos pontos que não se encontram na nova grade da imagem.
- Os valores de intensidade de níveis de cinza ou cor para cada pixel na nova grade da imagem transformada podem ser obtidos por um processo de interpolação.
- Quatro métodos comumente utilizados para interpolação de valores de intensidade nos pixels da imagem são:
  - ▶ *vizinho mais próximo.*
  - ▶ *bilinear.*
  - ▶ *bicúbica.*
  - ▶ *polinômios de Lagrange.*

# Registro de Imagens

## Interpolação pelo Vizinho Mais Próximo

- Na interpolação pelo vizinho mais próximo, o valor da intensidade a ser atribuído ao pixel  $(x', y')$  na imagem reamostrada terá o mesmo valor do pixel que estiver mais próximo da posição ocupada pelo pixel  $(x, y)$  na imagem original, conforme mostrado na figura a seguir.

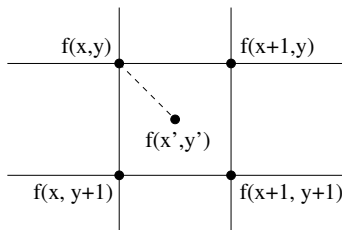


Figura : Interpolação pelo vizinho mais próximo.

# Registro de Imagens

## Interpolação pelo Vizinho Mais Próximo

- A interpolação pode ser expressa como

$$f(x', y') = \begin{cases} f(x, y), & \text{para } dx < 0.5 \text{ e } dy < 0.5 \\ f(x + 1, y), & \text{para } dx \geq 0.5 \text{ e } dy < 0.5 \\ f(x, y + 1), & \text{para } dx < 0.5 \text{ e } dy \geq 0.5 \\ f(x + 1, y + 1), & \text{para } dx \geq 0.5 \text{ e } dy \geq 0.5 \end{cases} \quad (15)$$

em que  $dx$  e  $dy$  correspondem às distâncias nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, entre os pontos  $(x', y')$  e  $(x, y)$ , ou seja, apenas as partes fracionárias do ponto  $(x', y')$

$$dx = x' - x = x' - \lfloor x' \rfloor$$

$$dy = y' - y = y' - \lfloor y' \rfloor$$

# Registro de Imagens

## Interpolação pelo Vizinho Mais Próximo

- A equação 15 pode ser reescrita como

$$f(x', y') = f(\text{round}(x), \text{round}(y))$$

em que *round* é uma função que aproxima um número para seu valor inteiro mais próximo.

- Embora a interpolação pelo vizinho mais próximo seja simples de ser implementada, este método possui a desvantagem de causar distorções em detalhes finos ou criar formas serrilhadas em bordas retas da imagem.

# Registro de Imagens

## Interpolação Bilinear

- A interpolação bilinear utiliza uma média ponderada de distância dos quatro pixels vizinhos mais próximos para determinar a intensidade de cada pixel  $(x', y')$  na imagem transformada, como mostrado na figura a seguir.

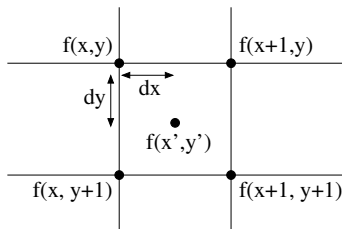


Figura : Interpolação bilinear.

# Registro de Imagens

## Interpolação Bicúbica

- A interpolação é dada por

$$f(x', y') = (1 - dx)(1 - dy) f(x, y) + dx(1 - dy) f(x + 1, y) + (1 - dx)dy f(x, y + 1) + dxdy f(x + 1, y + 1)$$

- A interpolação bilinear reduz os problemas causados pela interpolação pelo vizinho mais próximo, entretanto, causa borramento devido a sua natureza de suavização.



# Registro de Imagens

## Interpolação Bicúbica

- A interpolação bicúbica utiliza uma vizinhança de  $4 \times 4$  pontos ao redor do ponto em questão para calcular seu valor de intensidade, como mostrado na figura a seguir.

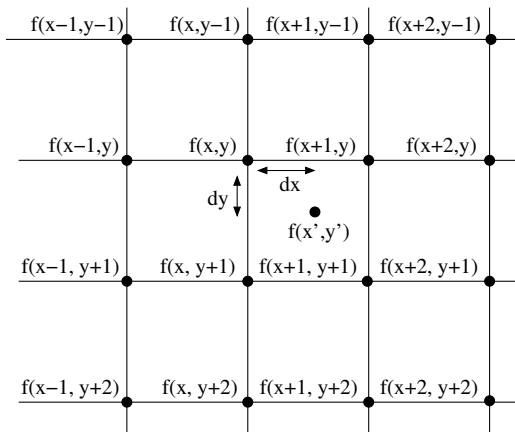


Figura : Interpolação bicúbica.

# Registro de Imagens

## Interpolação Bicúbica

- Uma função comum para determinar as intensidades do pixel na imagem interpolada é a função B-spline cúbica, definida como

$$f(x', y') = \sum_{m=-1}^2 \sum_{n=-1}^2 f(x + m, y + n) R(m - dx) R(dy - n)$$

sendo

$$R(s) = \frac{1}{6} [P(s+2)^3 - 4P(s+1)^3 + 6P(s)^3 - 4P(s-1)^3]$$

$$P(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

# Registro de Imagens

## Interpolação Bicúbica

- A interpolação bicúbica não sofre do problema de bordas serrilhadas causado pela interpolação pelo vizinho mais próximo, assim como não causa borramento como ocorre na interpolação bilinear.
- A interpolação bicúbica é frequentemente utilizada para ampliar áreas da imagem com respeito a um ponto arbitrário.
- Essa interpolação também preserva detalhes finos na imagem.

# Registro de Imagens

## Interpolação por Polinômios de Lagrange

- Outro método que utiliza uma vizinhança de  $4 \times 4$  pontos para calcular o valor de intensidade de um pixel  $(x', y')$  é a interpolação por polinômios de Lagrange, definida como

$$f(x', y') = \frac{-dy(dy-1)(dy-2)L(1)}{6} + \frac{(dy+1)(dy-1)(dy-2)L(2)}{2} + \frac{-dy(dy+1)(dy-2)L(3)}{2} + \frac{dy(dy+1)(dy-1)L(4)}{6}$$

sendo

$$L(n) = \frac{-dx(dx-1)(dx-2)f(x-1, y+n-2)}{6} + \frac{(dx+1)(dx-1)(dx-2)f(x, y+n-2)}{2} + \frac{-dx(dx+1)(dx-2)f(x+1, y+n-2)}{2} + \frac{dx(dx+1)(dx-1)f(x+2, y+n-2)}{6}$$

- Os resultados obtidos a partir da interpolação por polinômios de Lagrange possuem qualidade similar aos obtidos pela interpolação bicúbica, porém, com menor tempo computacional.

# Registro de Imagens

## Interpolação de Intensidade

- A imagem original é ampliada duas vezes e cada um dos métodos de interpolação de intensidade é aplicado.



original

# Registro de Imagens

## Interpolação de Intensidade



vizinho mais próximo



bilinear



bicúbica



polinômios de Lagrange

# Registro de Imagens

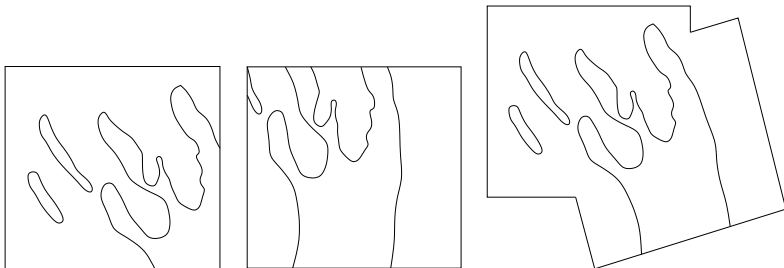
## Técnicas para Registro

- Em razão da diversidade de áreas de aplicação e dos vários tipos de distorção a que estão sujeitas as imagens, as técnicas de registro normalmente são específicas para o problema em estudo.
- Cada abordagem deve considerar, de maneira apropriada, a precisão requerida pela operação de registro, as deformações geométricas e radiométricas entre as imagens e as características próprias dos dados da aplicação sob consideração.
- Apesar de não existir um método genérico que apresente bom desempenho em diferentes domínios de aplicação, a maioria das técnicas de registro compartilha alguns passos em comum, descritos a seguir.
- Feições ou alvos representativos extraídos das imagens, como bordas, cantos ou junções, são detectados manual ou automaticamente.
- A correspondência entre essas características é determinada entre o par de imagens por meio de um conjunto de medidas de similaridade.

# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- O tipo e os parâmetros da função de mapeamento são estimados a partir da correspondência entre as imagens.
- A transformação para alinhar uma imagem à outra requer a redefinição das coordenadas dos pontos da imagem e a interpolação de seus valores de níveis de cinza ou cores.
- A figura a seguir ilustra o registro de duas imagens.





# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- Regiões representativas da imagem, como bordas, pontos isolados, cantos ou junções, devem, idealmente, ser feições distinguíveis e facilmente detectáveis na imagem.
- Exemplos de feições em imagens de sensoriamento remoto são rodovias, rios e topo de edificações.
- Além disso, descritores de objetos, tais como área, assinatura e energia de deformação, podem ser calculados para as regiões.
- Descritores pouco sensíveis a ruído e invariantes com respeito à rotação, translação e escala são particularmente úteis.

# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- Diversas medidas de similaridade têm sido propostas para avaliar a semelhança (ou discrepância) entre duas imagens.
- Tais medidas podem ser calculadas para uma região específica, em vez de toda a imagem.
- Uma medida muito utilizada na determinação do registro é a *correlação cruzada*, definida como

$$CC(u, v) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} f(x, y) w(x - u, y - v) \quad (16)$$

tal que a soma é realizada sobre a região  $S$  em que a imagem  $\mathbf{f}$  e a janela  $\mathbf{w}$  se sobrepõem, cujo centro é dado pelo ponto  $(u, v)$ . Deslocando-se a janela por toda a imagem, o valor máximo da correlação cruzada indicará o ponto de melhor registro entre a janela e a imagem de referência.

- A medida de correlação cruzada não é invariante às mudanças na amplitude da imagem causadas, por exemplo, por variações nas condições de iluminação da imagem.

# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- Uma medida mais apropriada é o *coeficiente de correlação* ou *correlação cruzada normalizada*, definida como

$$CCN(u, v) = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - \bar{f}] [w(x - u, y - v) - \bar{w}]}{\sqrt{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - \bar{f}]^2 [w(x - u, y - v) - \bar{w}]^2}} \quad (17)$$

em que  $\bar{w}$  é o valor médio dos pixels na janela  $\mathbf{w}$ , calculado apenas uma vez, e  $\bar{f}$  é a média das intensidades de  $\mathbf{f}$  na região sob a janela.

- O valor de CCN varia no intervalo de -1 a 1 e é independente da escala de valores de intensidade de  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{w}$ .
- O valor máximo de CCN indica a posição de melhor registro entre a janela e a imagem. Valores próximos a zero indicam baixo grau de registro entre as imagens.

# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- A *informação mútua* é um conceito baseado na entropia que também pode ser utilizado no registro de imagens.
- Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias representando as intensidades  $x_i$  e  $y_j$  das imagens  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$ , respectivamente. A informação mútua é definida como

$$IM(X, Y) = \sum_{x_i \in X} \sum_{y_j \in Y} P(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \quad (18)$$

em que  $P(x_i)$  e  $P(y_j)$  são as distribuições de probabilidade dos níveis de cinza para as imagens  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$ , respectivamente, e  $P(x_i, y_j)$  é a distribuição de probabilidade conjunta.

# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- A informação mútua também pode ser definida em termos de entropia como

$$IM(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (19)$$

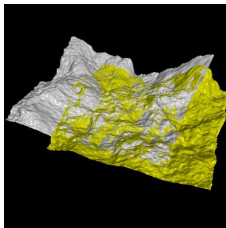
em que  $H(X)$  e  $H(Y)$  são as entropias para as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e  $H(X, Y)$  é a entropia conjunta.

- O valor máximo da informação mútua  $IM(X, Y)$  corresponde ao melhor registro entre as imagens.

# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- O algoritmo iterativo de pontos mais próximos tem como objetivo estimar transformações que minimizem distâncias entre um modelo e um dado a ser ajustado.
- O método consiste em encontrar, a cada iteração, uma translação e uma rotação que alinhem o modelo e os dados.
- Conhecendo a correspondência entre pontos dos dois conjuntos, pode-se estimar a transformação relativa entre eles.
- Uma solução para determinar essa correspondência é assumir que o ponto mais próximo é o par correspondente, determinar a melhor transformação e iterativamente encontrar e refinar o alinhamento.



# Registro de Imagens

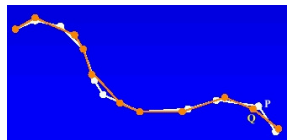
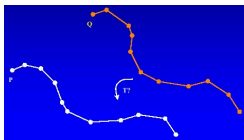
## Técnicas para Registro

- Algoritmo iterativo de pontos mais próximos:

Entrada: Conjuntos de pontos  $P$  e  $Q$ , em que  $P$  é um subconjunto de  $Q$ .

- 1: Busca do ponto mais próximo: para cada ponto  $p$  de  $P$ , encontrar o ponto  $q$  mais próximo em  $Q$ .
  - 2: Cálculo do registro: calcular a transformação rígida  $T$  que minimiza as somas dos quadrados das distâncias entre os pares de pontos próximos  $(p, q)$ .
  - 3: Transformação: aplicar a transformação rígida  $T$  a todos os pontos do conjunto  $P$ .
  - 4: Iteração: repetir os passos 1 a 3 até o método convergir.
- Minimização da função objetivo

$$E = \sum_{i=1}^{N_p} \|T(q_i) - p_i\|^2$$



# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- O método da correlação de fase baseia-se na propriedade de translação da transformada de Fourier.
- Dadas duas imagens,  $f_1$  e  $f_2$ , que diferem apenas por uma translação  $(x_0, y_0)$ , as transformadas de Fourier correspondentes  $F_1$  e  $F_2$  são relacionadas como

$$F_2(u, v) = e^{i2\pi(x_0 u + y_0 v)} F_1(u, v)$$

- As duas imagens possuem então a mesma magnitude da transformada, entretanto, diferem em fase cujo grau é diretamente proporcional à translação.



# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- O espectro de potência cruzado das duas imagens  $f_1$  e  $f_2$ , com transformadas de Fourier  $F_1$  e  $F_2$  respectivamente, fornece a diferença de fase e é definido como

$$\frac{F_1(u, v)F_2^*(u, v)}{|F_1(u, v)F_2^*(u, v)|} = e^{i2\pi(x_0u + y_0v)}$$

em que  $F_2^*$  denota o complexo conjugado de  $F_2$ .

- Esta propriedade estabelece que a fase do espectro de potência cruzado é equivalente à diferença de fase entre as duas imagens.
- Tomando a inversa da transformada de Fourier, obtém-se uma imagem com valores próximos a zero exceto nas coordenadas que têm o deslocamento necessário para o registro da imagem (função impulso).

# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- Rotação também pode ser abordada no domínio de Fourier, pois uma rotação pode ser expressa como uma translação em coordenadas polares.
- O espectro de potência cruzada é computado em função de um ângulo de rotação estimado ( $\phi$ ) e simplificado com o uso de coordenadas polares

$$G(r, \theta; \phi) = \frac{F_1(r, \theta)F_2^*(r, \theta - \phi)}{|F_1(r, \theta)F_2^*(r, \theta - \phi)|}$$

- Assim, primeiro determina-se  $\phi$  tal que a inversa da transformada de Fourier fornece a aproximação mais próxima a um impulso. A translação restante é então dada pela localização do impulso.

# Registro de Imagens

## Técnicas para Registro

- Uma variação desta técnica que apresenta vantagens em termos de custo computacional é baseada no *cepstro* de potência das imagens.
- O cepstro é o logaritmo do espectro de potência de uma imagem.
- Inicialmente, o ângulo de rotação é aproximado como anteriormente.
- Então, o espectro de potência é usado para determinar a translação como anteriormente.
- Como logaritmos são utilizados, imagens são adicionadas ao invés de multiplicadas, o que pode aumentar a velocidade de processamento.