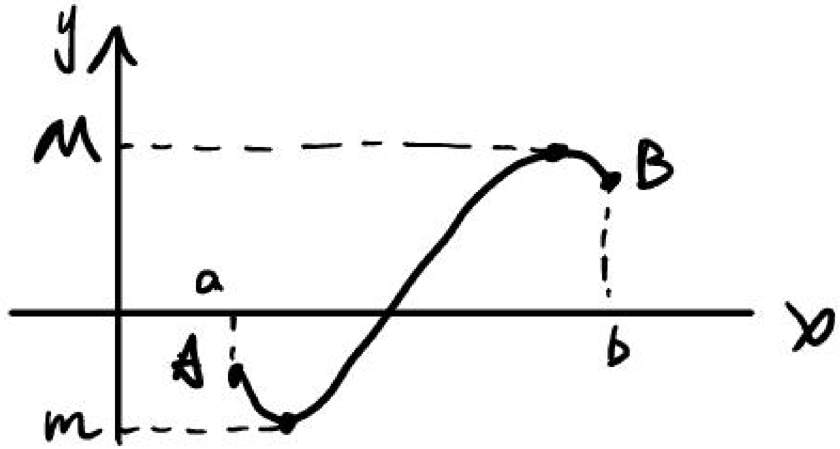
第三章 中值定理

第三章 中值定理

1. 最值定理
2. 有界定理
3. 零点定理
4. 介值定理

1. 费马引理
2. 罗尔定理.
3. 拉格朗日中值定理.
4. 柯西中值定理.

一、仅仅涉及到 $f(x)$ 的定理



1. 最值定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

则 $f(x)$ 有最小值 m 和最大值 M

2. 有界定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

则 $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow$ 有上界也有下界 $\Leftrightarrow \exists K>0$，使 $|f(x)|\le K$

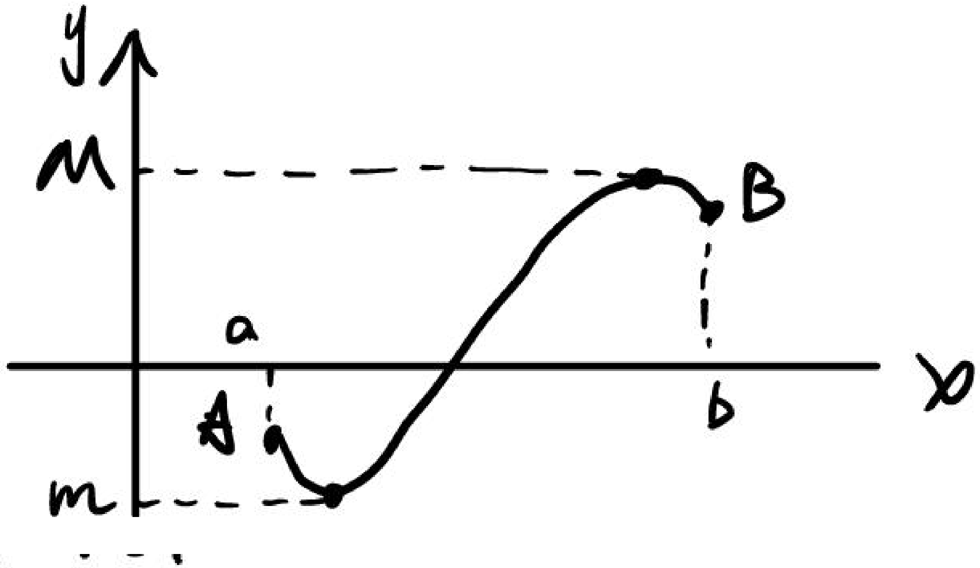
3. 零点定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$

则存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$

4. 介值定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

对任意 $y\in[m,M]$，存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=y$

一、仅仅涉及到$f(x)$的定理



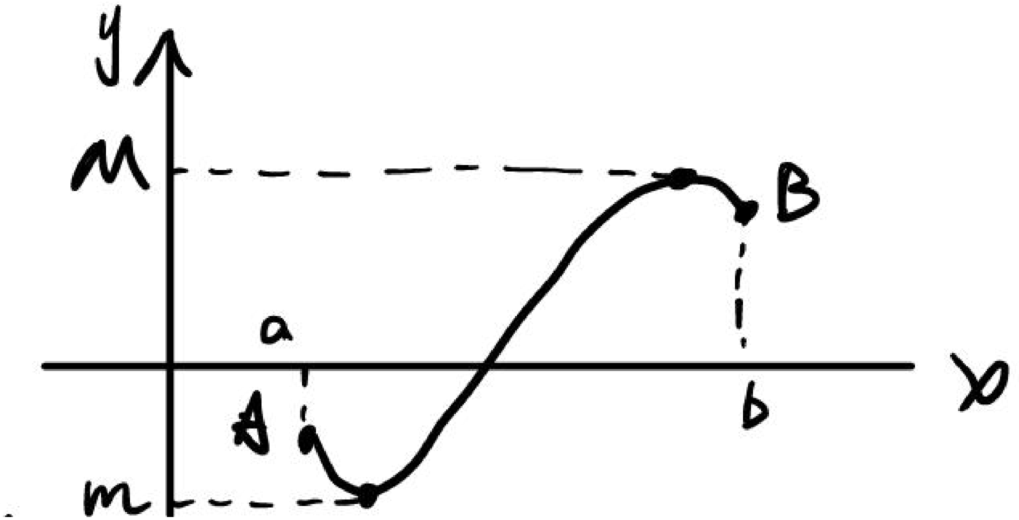
1. 最值定理 若$f(x)$在$[a,b]$连续

则$f(x)$有最小值m和最大值M

2. 有界定理 若$f(x)$在$[a,b]$连续

则$f(x)$有界$\Leftrightarrow$有上界也有下界$\Leftrightarrow \exists K>0$，使$|f(x)|\leq K$

一、仅仅涉及到 $f(x)$ 的定理



3. 零点定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$

则存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$

4. 介值定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

对任意 $y\in[m,M]$，存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=y$

【解题方法】所证结论未涉及到 $f'(x)$，仅涉及 $f(x)$，并且：

① $\xi \in (\quad)$，开区间 $\Rightarrow$ 零点定理

② $\xi \in [\quad]$，闭区间/函数和条件 $\Rightarrow$ 介值定理

【例 1】$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0, f(1)=1$，证明存在$c\in(0,1)$使得$f(c)=1-c$

分析：

解：

【例 1】 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=1-c$

分析：开区间、不涉及 $f'(x)$ → 零点定理

解：设 $g(x)=f(x)+x-1$

$g(0)=f(0)+0-1=-1$

$g(1)=f(1)+1-1=1$

∵ $g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$g(0)\cdot g(1)<0$ ∴ 存在 $c\in(0,1)$ 使 $g(c)=0$

∴ 存在 $c\in(0,1)$ 使 $f(c)=1-c$ 成立，原命题得证 #

【作业】$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0, f(1)=1$, 证明对于任意的$a>0, b>0$，

存在$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

零点定理：$0\cdot 0 \le 0$

【作业】$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0, f(1)=1$，证明对于任意的$a>0,b>0$，存在$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

1° $\xi \to x$: $f(x)=\dfrac{a}{a+b}$

2° $g(x)=f(x)-\dfrac{a}{a+b}$

3° $\begin{cases} g(0)=f(0)-\dfrac{a}{a+b}=-\dfrac{a}{a+b} \\ g(1)=f(1)-\dfrac{a}{a+b}=1-\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{b}{a+b} \end{cases}$

4° $g(0)\cdot g(1)=-\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{b}{a+b}$

$=\dfrac{-ab}{(a+b)^2}<0$

$\exists\, \xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$

$f(\xi)-\dfrac{a}{a+b}=0$ 即 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

【作业】$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0, f(1)=1$，证明对于任意的$a>0, b>0$，存在$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

分析：开区间+无$f'(x)$ → 零点定理

解：设$g(x)=f(x)-\frac{a}{a+b}$　$g(0)=f(0)-\frac{a}{a+b}=-\frac{a}{a+b}$　$g(1)=f(1)-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}$

∵ $g(x)$在$[0,1]$上连续 且 $g(0)\cdot g(1)<0$ ∴ $\exists\,\xi\in(0,1)$使　$g(\xi)=0$

∴ $\exists\,\xi\in(0,1)$使 $f(\xi)=\frac{a}{a+b}$　∴原命题得证

【例 2】$f(x)$在$[0,4]$上连续，$f(0)+2f(2)+3f(3)=6$，求证$\xi\in[0,4]$使得$f(\xi)=1$

分析：

【解题方法】所证结论未涉及到$f'(x)$，仅涉及$f(x)$，并且：

① $\xi\in($　　$)$，开区间 ⇒ 零点定理

② $\xi\in[$　　$]$，闭区间/函数和条件 ⇒ 介值定理

【例 2】 $f(x)$在$[0,4]$上连续， $f(0)+2f(2)+3f(3)=6$，求证$\xi\in[0,4]$使得$f(\xi)=1$

分析：

4. 介值定理 若$f(x)$在$[a,b]$连续
对任意$y\in[m,M]$，存在$\xi\in[a,b]$使$f(\xi)=y$

【例 2】$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，$\underbrace{f(0)+2f(2)+3f(3)}_{=6}$，求证 $\xi\in[0,2]$ 使得 $f(\xi)=1$

分析：闭区间+函数和 → 介值定理

4. 介值定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

对任意 $y\in[m,M]$，存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=y$

解：∵ $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，由最值定理，必∃ M，m

$m\le f(0)\le M$，$m\le f(1)\le M$，$m\le f(3)\le M$

∴ $6m\le f(0)+2f(2)+3f(3)\le 6M$

∴ $6m\le 6\le 6M$　　∴ $m\le 1\le M$

由介值定理，必定存在 $\xi\in[0,2]$ 使得

$f(\xi)=1$

二、涉及到$f'(x)$的定理

1. 费马定理

可导极值导为0

①极值点的定义——对于函数$f(x)$

如果$\exists \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\le f(x_0)$，称x_0为极大值点，$f(x_0)$为极大值

如果$\exists \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\ge f(x_0)$，称x_0为极小值点，$f(x_0)$为极小值

②费马定理：

若$f(x)$在$x=x_0$处可导且取极值 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

二、涉及到 $f'(x)$ 的定理

1. 费马定理

可导极值导为0

①极值点的定义——对于函数 $f(x)$

如果 $\exists\delta$，x_0，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，称 x_0 为极大值点，$f(x_0)$ 为极大值

如果 $\exists\delta$，x_0，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\ge f(x_0)$，称 x_0 为极小值点，$f(x_0)$ 为极小值

②费马定理：

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且取极值 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

证明：不妨设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且取极大值，当 $x\to x_0$ 时，有 $f(x)\le f(x_0)$

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$　　$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$　　$\because f'(x_0)$ 存在

$\therefore f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$　$\therefore f'(x_0)=0$

③重要结论

两个重要结论

$$\begin{cases} f(x)\text{可导且}x_0\text{为极值点，} \quad \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \quad f'(x_0)=0 \\ \\ x_0\text{为极值点，} \quad \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \quad f'(x_0)=0\text{或不存在.} \end{cases}$$

两个重要结论

$f(x)$可导且x_0为极值点 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $f'(x_0)=0$

左箭头反例：$y=x^3$在$x=0$处$f'(0)=0$，但不是极值点

x_0为极值点 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $f'(x_0)=0$或不存在

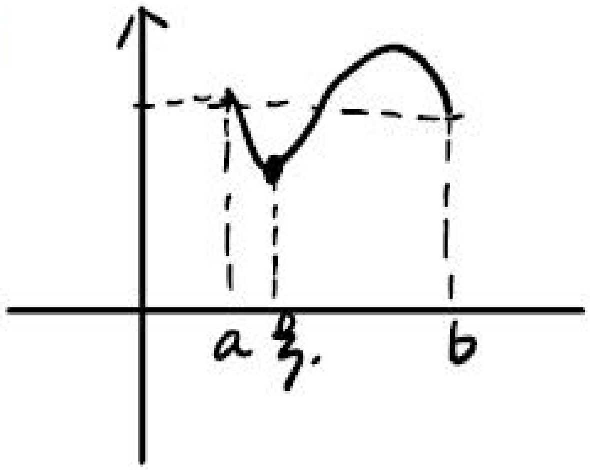
左箭头反例：$y=\begin{cases}-2x, & x<0\\ 3x, & x\geq 0\end{cases}$ $f'_-(0)=-2$ $f'_+(0)=3$

$\therefore f'(0)$不存在，但是$x=0$为极小值点

2. 罗尔定理

罗尔定理找相等

如果 $f(x)$ 满足下列条件



$$\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导 \\ f(a)=f(b) \end{cases}$$

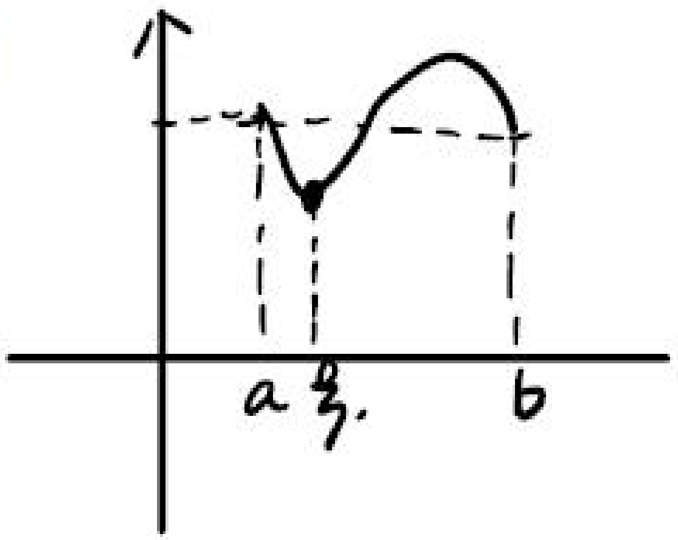
则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

让职场更自由

2. 罗尔定理

罗尔定理找相等

如果 $f(x)$ 满足下列条件



$$\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导 \\ f(a)=f(b) \end{cases}$$

则 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

罗尔定理：可导相等存在导为零

证明前分析：由图象发现必有一点ξ使$f'(\xi)=0$（斜率为0）

证明：$\because f(x)$在$[a,b]$上连续，由最值定理，必存在m、M

$\therefore m$、M至少有1个位于(a,b)内

设$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=M$. $\Rightarrow f'(\xi)=0$或不存在

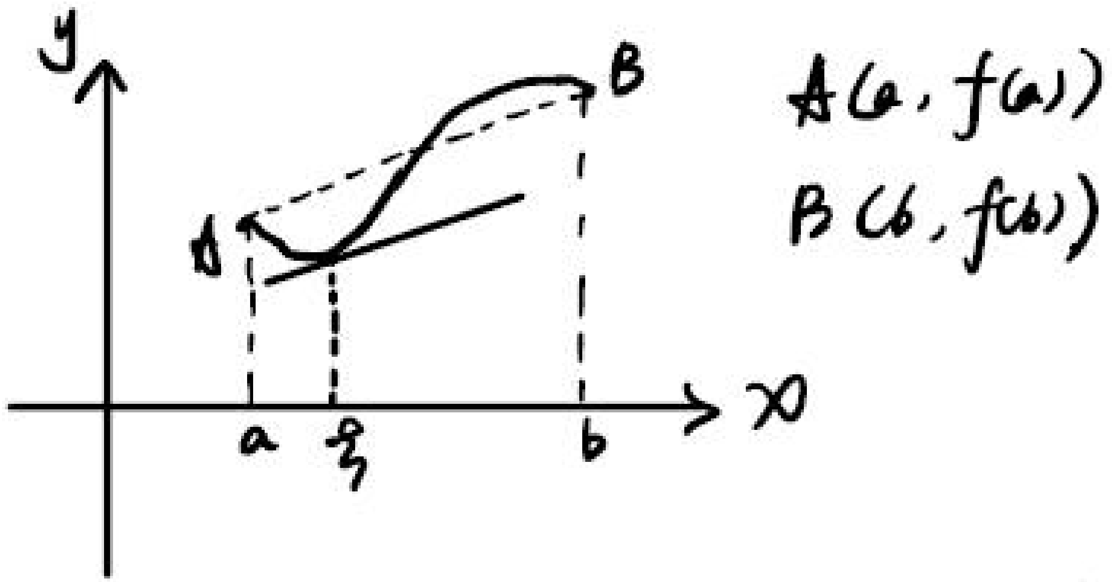
$\because f(x)$在(a,b)上可导 $\therefore$由费马定理 $f'(\xi)=0$

费马定理：可导极值导为0

3. 拉格朗日中值定理

如果 $f(x)$ 满足下列条件

$$\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导 \end{cases}$$



则 $\exists\ \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明过程：构造函数=曲线-直线

拉格朗日中值定理证明过程：构造函数=曲线-直线

拉格朗日中值定理证明过程：构造函数=曲线-直线

证明前分析：由拉格朗日中值定理有 $f'(\xi)=k_{AB}$（导不是相同值区）

直线AB：$y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$　　曲线：$y=f(x)$

证明：构造函数＝曲线－直线

$$=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$$

$$=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$\begin{cases}\varphi(x)\text{在}[a,b]\text{连续}\\ \varphi(x)\text{在}(a,b)\text{可导}\\ \varphi(a)=\varphi(b)=0\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{罗尔定理}}$ $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad \varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

∴ 拉格朗日中值得证.

证明前分析：由图象知必有 $f'(\xi)=k_{AB}$ （ξ不是相似值区）

直线AB：$y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$　　曲线：$y=f(x)$

证明：构造函数=曲线－直线

$$=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$$

$$=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$\begin{cases}\varphi(x)\text{在}[a,b]\text{连续}\\ \varphi(x)\text{在}(a,b)\text{可导}\\ \varphi(a)=\varphi(b)=0\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{罗尔定理}}$ $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$

$\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　　$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

∴ 拉格朗日中值得证.

注意：

① 若 $f(a)=f(b)$，拉格朗日中值定理退化为罗尔

② $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

③ 做题方法 $\begin{cases} f(b)-f(a)\longrightarrow\text{拉格朗日}\\ f(a)\cdot f(b)\cdot f(c)\longrightarrow 2\text{次拉格朗日}\end{cases}$

证明过程：构造函数=曲线-直线

4. 柯西中值定理

如果 $f(x)$、$g(x)$满足下列条件

$$\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导 \\ g'(x)\neq 0 \end{cases}$$

则 $\exists \xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证明前分析：

- 用两次拉格朗日，相除不行！ $\Longrightarrow$ ξ不同
- 令 $g(x)=x$，退化为拉格朗日

"$g(x) \xRightarrow{\text{退化}} x$"

"$g(x) \xLeftarrow{\text{升级}} x$"

,更自由

证明：在拉格朗日中构造了

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=\text{曲线}-\text{直线}$$

$x \xrightarrow{\text{升级}} g(x)$ 即 拉格朗日 $\xrightarrow{\text{升级}}$ 柯西

$$\therefore \text{构造 } \varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)\text{在}[a,b]\text{连续} \\ \varphi(x)\text{在}(a,b)\text{可导} \\ \varphi(a)=\varphi(b)=0\end{array}\right. \xrightarrow{\text{罗尔定理}} \exists\, \xi \in (a,b) \text{ 使 } \varphi'(\xi)=0$$

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$$

$$\therefore \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \#$$

三、定理的应用

1. 结论中证明 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的问题

方法：由零点定理/介值定理到罗尔定理

零点定理 ( ) 开区间

介值定理 [ ] 闭区间/区离散和

$\Rightarrow$ 罗尔定理

【例 3】$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)上可导，$f(a)\bullet f(b)>0$，$f(a)\bullet f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，求证存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$成立。

【例 3】$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)上可导，$f(a)\cdot f(b)>0$，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，求证存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$成立。

分析：零点定理，找区值！

解：$f(a)\cdot f(b)>0$，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ $\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$

零点定理

1° $f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ $\therefore \exists \xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 使$f(\xi_1)=0$

2° $f(x)$在$[a,b]$连续，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$ $\therefore \exists \xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 使$f(\xi_2)=0$

3° $f(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$连续，(ξ_1,ξ_2)可导 且$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

由罗尔定理，必定存在ξ 使$f'(\xi)=0$

罗尔定理：可导相等存导零

【例 4】$f(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$上可导，$f(0)=1$，$f(1)+2f(2)=3$

证明存在$\xi\in(0,2)$使得$f'(\xi)=0$。

【例 4】 $f(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$上可导，$f(0)=1$，$f(1)+2f(2)=3$

证明存在$\xi\in(0,2)$使得$f'(\xi)=0$。

分析：

函数和——介值定理[a，b]

开区间——零点定理（a，b）

【例 4】 $f(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$上可导， $f(0)=1$，$f(1)+2f(2)=3$

证明存在$\xi\in(0,2)$使得$f'(\xi)=0$。

分析：

函数和——介值定理[a，b]；　　开区间——零点定理（a，b）

解：$f(x)$在$[0,2]$连续 ∴ 存在 m, M ∴ $3m\le f(1)+2f(2)\le 3M$ ∴ $m\le 1\le M$

由介值定理，必存在 $c\in(0,2)$ 使 $f(c)=1$

$f(x)$在$[0,2]$连续，$(0,2)$可导 $f(0)=f(c)=1$

∴ $\exists\,\xi\in(0,c)$ 使 $f'(\xi)=0$ #

【作业】$f(x)$在$[-1,1]$上三阶可导，$f(x)$是奇函数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f'(1)=1$，证明存在$\xi\in(-1,1)$使得$f'''(\xi)=0$。

【作业】$f(x)$在$[-1,1]$上三阶可导，$f(x)$是奇函数，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，证明存在$\xi\in(-1,1)$使得$f'''(\xi)=0$。补充条件 $f'(1)=1$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A \Rightarrow f(a)=b \quad f'(a)=A}$$

1° $\because f(0)=0$ $\boxed{f'(0)=1}$

2° $f(x)$为奇函数，$\therefore f'(x)$为偶函数 $\boxed{\therefore f'(1)=1,\ f'(-1)=1}$

3° $f'(x)$在$[-1,0]$连续，$f'(x)$在$(-1,0)$可导 $f'(-1)=f'(0)$

$\therefore \exists\xi_1\in(-1,0)$ 使 $f''(\xi_1)=0$。

4° 同理可证$\exists\xi_2\in(0,1)$ 使 $f''(\xi_2)=0$

5° 在(ξ_1,ξ_2)之间，由罗尔定理 可知$\exists f'''(\xi)=0$

b.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A.$ $\Rightarrow f(a)=?$ $f'(a)=A.$

1° $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=1.$ $f(0)=0$ ✓ $\underline{f'(0)=1.}$ ✓

$f'(-1)=f'(1).$

2° $f(x)$ 奇. $f'(x)$ 偶. 由 $f'(1)=1$. $\therefore f'(-1)=1$. $f'(0)=1.$

罗尔 罗尔

$f''(\xi_1)=0$ $f''(\xi_2)=0$

罗尔定理 $f'''(\xi_3)=0$

2. 结论中仅有ξ，没有a,b。

方法一：还原法

【例 5】$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，$f(1)=0$，证明存在$\xi\in(0,1)$使得

$$\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$$

2. 结论中仅有 ξ，没有 a,b。

方法一：还原法 $[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

【例 5】$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 上可导，$f(1)=0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$

第一步：将 $\xi\to x$ $\quad xf'(x)+2f(x)=0 \quad \therefore \dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{2}{x}=0$

第二步：还原 $\quad [\ln f(x)]'+[\ln x^2]'=0 \quad \therefore [\ln f(x)+\ln x^2]'=0$

$\therefore [\ln f(x)\cdot x^2]'=0$

第三步：辅助函数 $\varphi(x)=x^2\cdot f(x)$

解：设 $\varphi(x)=x^2 f(x)$，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 上可导 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$

$\therefore \exists\xi\in(0,1)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$ $\quad \varphi'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$ $\quad \therefore \varphi'(\xi)=0$ 可得 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$

【例 6】$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$

使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

【例 6】$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

分析：① $f'(x)+f(x)\cdot g'(x)=0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)=0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+\ln e^{g'(x)}=0$

② $[\ln f(x)]'+[\ln e^{g(x)}]'=0$ ③ $\varphi(x)=f(x)\cdot e^{g(x)}$

解：$\varphi(x)=f(x)\cdot e^{g(x)}$ $\varphi(a)=0$ $\varphi(b)=0$ $\varphi'(x)=f'(x)e^{g(x)}+f(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)$

由罗尔定理可知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$ $\therefore f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0$

$\because e^{g(\xi)}\neq 0$ $\therefore f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$ 成立

【作业】$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)-2f(\xi)=0$

分析：倒推分析法

解：令 $\varphi(x)=f(x)\cdot e^{-2x}$ $\quad \varphi'(x)=f'(x)\cdot e^{-2x}+f(x)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)$

由罗尔定理，$\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$

$\therefore f'(\xi)\cdot e^{-2\xi}+f(\xi)\cdot e^{-2\xi}(-2)=0$

$\because e^{-2\xi}\neq 0$ $\quad \therefore f'(\xi)-2f(\xi)=0$

方法二：分组法

【例 7】$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明

①存在$c\in(0,1)$使得$f(c)=c$

②存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)-f(\xi)=1-\xi$

【例 7】$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明

①存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=c$

②存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)-f(\xi)=1-\xi$

① 分析：开区间，不涉及 $f'(x)$ $\Rightarrow$ 零点定理.

解：令 $g(x)=f(x)-x$，$g(0)=f(0)=0$　$g(1)=f(1)-1=-\frac{1}{2}$

$g(0)\cdot g(1)<0$ $\therefore \exists\, c\in(0,1)$ 使 $g(c)=0$　$\therefore f(c)-c=0$

$f(c)=c$

方法二：分组法

【例 7】$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明

①存在$c\in(0,1)$使得$f(c)=c$

②存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)-f(\xi)=1-\xi$

适当分组

② 分析：仅有 ξ，凑出 $f(x)$，但无法还原

1° $\xi \to x$ $\quad f'(x)-f(x)=1-x$

2° 适当分组 $f'(x)-1=f(x)-x \quad f'(x)-1-[f(x)-x]=0$

3° 还原 $[f(x)-1]'-[f(x)-x]=0$ 令 $h(x)=f(x)-x$

$\therefore \dfrac{h'(x)}{h(x)}-1=0 \quad \therefore [\ln h(x)]'-[\ln e^x]'=0$

解：令 $\varphi(x)=\dfrac{h(x)}{e^x}=\dfrac{f(x)-x}{e^x} \quad \varphi(0)=0 \quad \varphi(1)\neq 0 \quad \varphi(c)=0$

$\therefore \exists \xi \in (0,c)$ 使 $\varphi(\xi)=0$，$\therefore f'(\xi)-f(\xi)-1+\xi=0$ 成立

3. 结论中有ξ，有a,b。

方法一：若ξ和a,b可以分离

$$\xRightarrow[\text{的一侧}]{\text{在}ab}\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow \text{拉格朗日} \\[2ex] \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \rightarrow \text{柯西.}\end{cases}$$

【例 8】$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

3. 结论中有ξ，有a,b。

方法一：若ξ和a,b可以分离 $\xrightarrow[\text{的一侧}]{\text{在}ab}$ $\begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \to \text{拉格朗日} \\[2ex] \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \to \text{柯西.} \end{cases}$

【例 8】$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$使得

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

分析：$\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln a-\ln b}=\xi\cdot f'(\xi)$ → 柯西.

解：令$g(x)=\ln x$ 由柯西中值定理

$$\exists\xi\in(a,b)\quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=f'(\xi)\cdot\xi.$$

∴ 原命题得证

方法二：若ξ和a,b无法分离 凑——某东西的导数=0构造辅助函数

【例 9】$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$g'(x)\neq 0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使得$\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

方法二：若ξ和a,b无法分离 →积！→(分的)$'=0$ →辅助函数

【例 9】$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$g'(x)\neq 0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使得$\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

分析：ξ、ab无法分离→积。

①$\xi\to x$ $\quad [f(x)-f(a)]g'(x)=f'(x)[g(b)-g(x)]$

②去分母再移项 $\quad f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)=f(a)\cdot g'(x)+g(b)\cdot f'(x)$

$$[f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)-g(b)f(x)]'=0$$

解：令$\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)-f(a)g(x)-g(b)f(x)$

$\varphi(a)=-g(b)f(a)\quad \varphi(b)=-g(b)f(a)\quad \varphi(a)=\varphi(b)$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$使$\varphi'(\xi)=0$

∴整理得$\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ #

4. 结论中有ξ、η

(强化班讲)

四、初识泰勒

1. 泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 $n+1$ 阶导数，则

四、初识泰勒

1、泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\begin{cases}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \longrightarrow \text{拉格朗日余项} \\ o\left[(x-x_0)^n\right] \longrightarrow \text{皮亚诺余项}\end{cases}$$

2、带有皮亚诺余项的麦克劳林公式

如果取 $x_0=0$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 \cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\cdot x^n+o(x^n)$

则称 $f(x)$ 为带有皮亚诺余项的麦克劳林公式。

$o(x^n)$ $x_0=0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

；

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

；

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

；

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

；

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

7. 熟记常见函数的带有皮亚诺余项的麦克劳林公式 $(x\to 0)$ $(x\to 0)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \cdots (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 \cdots \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

4、应用之一：求极限.

【例10】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

4、应用之一：求极限.

A/B型：上下同阶—展开到分子、分母相同的阶

[例10] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

解：由 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\therefore I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3} = \dfrac{1}{6} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^3)}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

A/B型：上下同阶—展开到分子、分母相同的阶

[例11] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

[改编] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x-\tan x}$

[改编] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$

[例11] $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

解：$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)$

$\therefore e^x-1-x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$\therefore I=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$

[习题] $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x\tan x}$ 解：$\frac{1}{2}$

[习题] $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$

解：$x\to0$时，$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)$

$\text{狗}\to0$时，$e^{\text{狗}}=1+\text{狗}+\frac{1}{2!}\text{狗}^2+o(\text{狗}^2)$

$x^2\to0$时，$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

【比如】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\arctan x}-1-\arctan x}{(\arctan x)\cdot\tan x}$

[例题] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arctan x}-1-\arctan x}{(\arctan x)\cdot\tan x}$

解：$e^{x}=1+x+\dfrac{x^{2}}{2!}+o(x^{2})$

$$e^{\arctan x}=1+\arctan x+\frac{1}{2}(\arctan x)^{2}+o[(\arctan x)^{2}]$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{\arctan x}-1-\arctan x}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\arctan x)^{2}}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^{2}}{x^{2}}=\frac{1}{2}$$

规则：$\dfrac{A}{B}$型：上下同阶，展开到分母次数相同

【例12】

当 $x\to 0$，$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 cx^k 为等价无穷小，求 c,k.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n})$$

A/B型：幂次最低：展开到系数不同的x最低次幂

【例12】 当 $x\to 0$，$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 cx^k 为等价无穷小，求 c, k.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!} + o(x^3).$$

$$\begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{-\frac{x^6}{8}}{9} + o\cdots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4). \end{cases}$$

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{cx^k} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{cx^k} = 1.$$

$$\therefore c = -\frac{1}{12}, \quad k = 4.$$

A/B型：幂次最低：展开到系数不同的x最低次幂