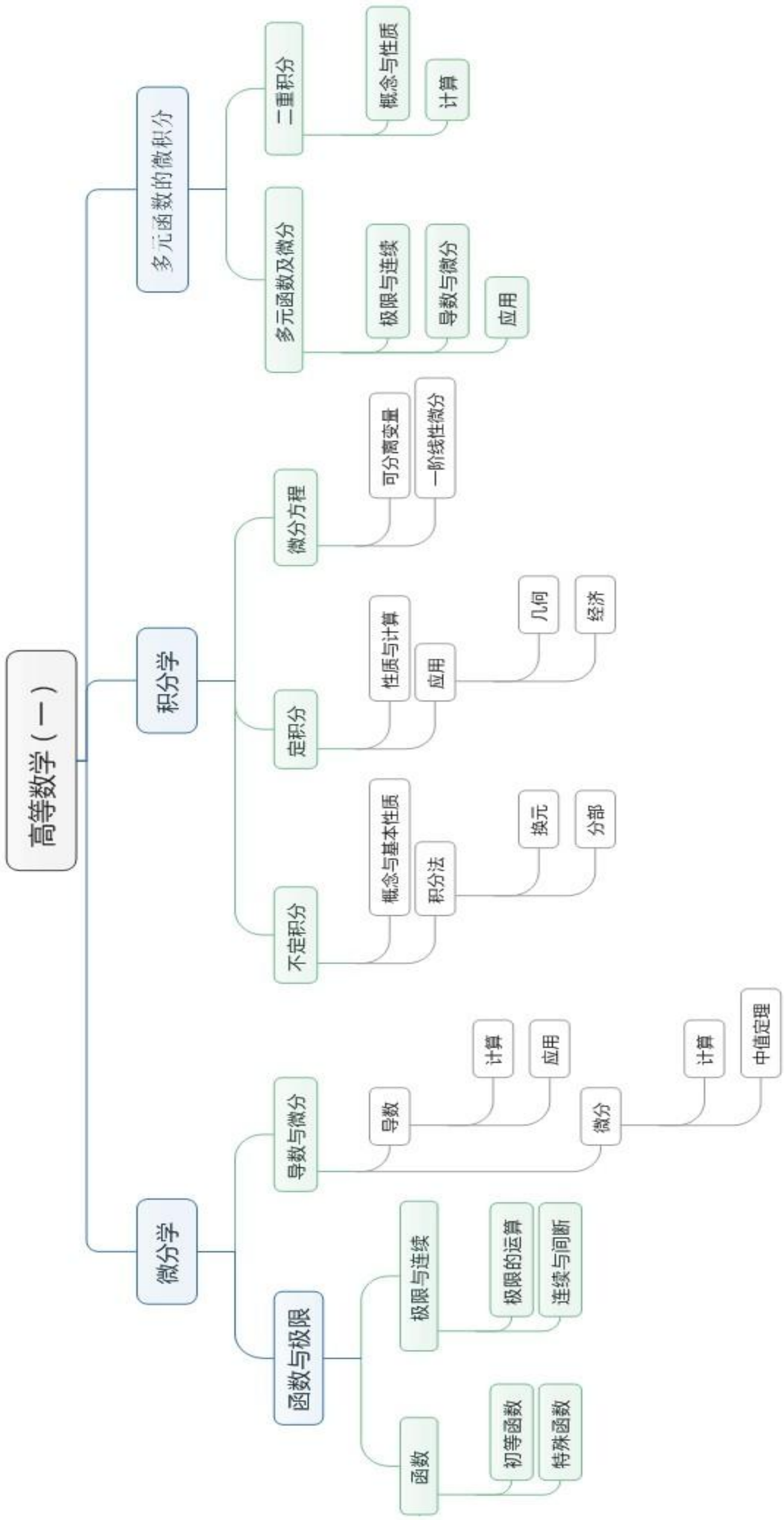
高等数学基础知识讲义

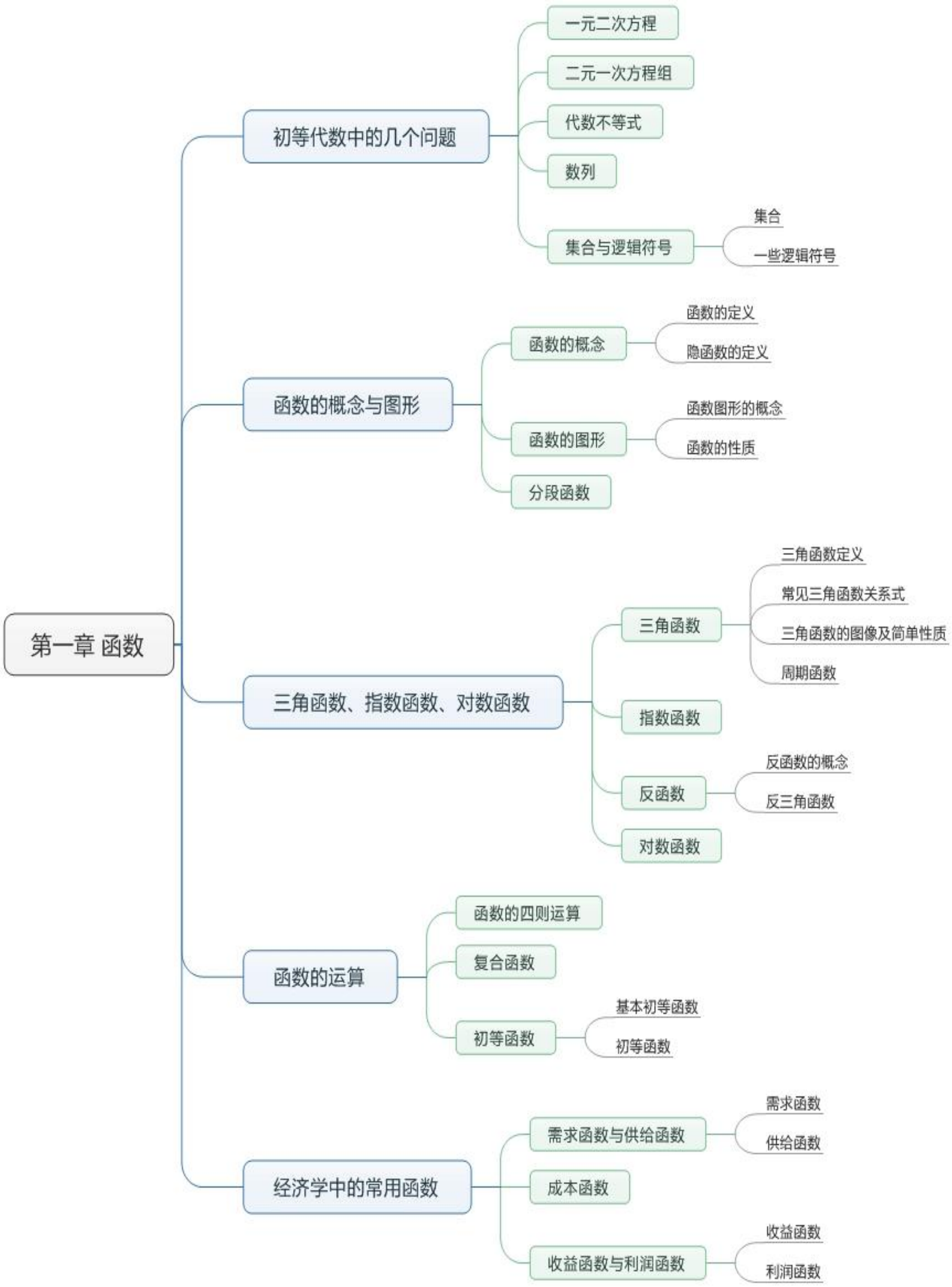
目录

教材框架图


高等数学（一）
微分学
函数与极限
函数
初等函数
特殊函数
极限与连续
极限的运算
连续与间断
导数与微分
导数
计算
应用
微分
计算
中值定理
积分学
不定积分
概念与基本性质
积分法
换元
分部
定积分
性质与计算
应用
几何
经济
微分方程
可分离变量
一阶线性微分
多元函数的微积分
多元函数及微分
极限与连续
导数与微分
应用
二重积分
概念与性质
计算

第一章 函数

框架图


第一章 函数
初等代数中的几个问题
一元二次方程
二元一次方程组
代数不等式
数列
集合与逻辑符号
集合
一些逻辑符号
函数的概念与图形
函数的概念
函数的定义
隐函数的定义
函数的图形
函数图形的概念
函数的性质
分段函数
三角函数、指数函数、对数函数
三角函数
三角函数定义
常见三角函数关系式
三角函数的图像及简单性质
周期函数
指数函数
反函数
反函数的概念
反三角函数
对数函数
函数的运算
函数的四则运算
复合函数
初等函数
基本初等函数
初等函数
经济学中的常用函数
需求函数与供给函数
需求函数
供给函数
成本函数
收益函数与利润函数
收益函数
利润函数

第一节 预备知识

1. 初等函数中的几个问题【010101】

1.1 一元二次方程（低频且易）【01010101】

未知量 x 满足的形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程称为一元二次方程，$\Delta=b^2-4ac$ 称为此方程的判别式. 由 $ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 可知：

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不同的实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

当 $\Delta=0$ 时，方程有一个二重实根 $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$；

当 $\Delta<0$ 时，方程有一对共轭虚根 $x=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$， $\bar{x}=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

根与系数之间的关系（韦达定理）：

若记一元二次方程的两个根分别为 x_1,x_2，则有 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$， $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

一元二次函数 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的图形—— xOy 平面上的一条抛物线——依据 $y=ax^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，当 $a>0$ 时，抛物线的开口朝上；当 $a<0$ 时，抛物线的开口朝下；抛物线的对称轴为垂直于 x 轴的直线 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

1.2 二元一次方程组（低频且易）【知识点编号：01010102】

两个未知函数 x,y 满足 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的方程组称为二元一次方程组. 两直线位置关系：

当 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 时，方程组有唯一解，两直线相交；

当$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$时，方程组无解，两直线平行；

当$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$时，方程组有无穷多解，两直线重合.

1.3 代数不等式（低频且易）【01010103】

（1）不等式$a>b$与$a-b>0$等价，常用不等式性质：

① 若$a>b$，$b>c$，则$a>c$.

② 若$a>b$，$k>0$，则$ka>kb$.

③ 若$a>b$，$k<0$，则$ka<kb$.

④ 若$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$，$a-d>b-c$.

（2）常见基本不等式：

① 算术平均值与几何平均值的关系：

设a,b是非负实数，则有$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，“=”当且仅当$a=b$时成立.

② 绝对值不等式

设a,b是两个任意实数，则有$|a+b|\leq|a|+|b|$，“=”当且仅当a,b同号或其中任意一个为0时成立.

③ 解不等式例

i. 一元二次不等式.

考虑不等式$ax^2+bx+c>0$，若记一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两个不同实根分别为x_1,x_2，且$x_1<x_2$，根据一元二次函数的图形可知：

当$a>0$时，这个不等式的解集是$\{x\mid x<x_1 \text{或} x>x_2\}$；当$a<0$时，它的解集是$\{x\mid x_1<x<x_2\}$. 类似地，可求解不等式$ax^2+bx+c\geq0$，$ax^2+bx+c<0$和$ax^2+bx+c\leq0$.

ii. 绝对值不等式.

不等式$|f(x)|>a>0$等价于$f(x)>a$或$f(x)<-a$；不等式$|f(x)|<a$等价于$-a<f(x)<a$.

1.4 数列（低频且易）【01010104】

将一些编上号的数按其编号（不是按数本身）从小到大放到一起就构成了一个数列. 数列一般记作 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 或 $\{a_n\}$，其中 a_n 称为数列的通项，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 称为数列的前 n 项和.

（1）等差数列

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，若 $a_{n+1} - a_n = d$ 是对所有的 n 都成立，则称 $\{a_n\}$ 为等差数列，d 称为公差. 根据等差数列的定义，等差数列的通项为 $a_n = a_1 + (n-1)d$，前 n 项和为

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}(n-1)nd,$$

且其通项满足

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k}) \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

最后一个式子说明：在等差数列中，任何一项都是其前后“对称”位置上的两项的算术平均值，这时 a_n 又称为 a_{n-k} 与 a_{n+k} 的等差中项.

（2）等比数列

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，且 $a_n \neq 0$，若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 对所有的 n 都成立，则称 $\{a_n\}$ 是等比数列，q 称为公比.

根据等比数列的定义，等比数列的通项为 $a_n = a_1 q^{n-1}$，前 n 项和为 $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$，且其通项满足

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-k} a_{n+k}} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

最后一个式子说明：在等比数列中，任何一项的绝对值都是其前后“对称”位置 的两项的几何平均值，这时 a_n 又称为 a_{n-k} 与 a_{n+k} 的等比中项.

2. 集合与逻辑符号【010102】

2.1 集合（低频且易）【01010201】

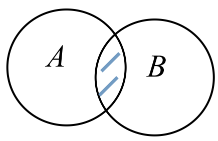
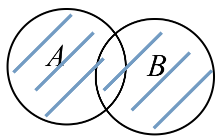
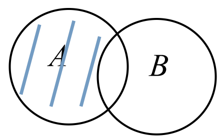
集合是指由一些确定的对象汇集的全体，其中每个对象叫做集合的元素. 一般集合用大写字母表示，元素用小写字母表示.

集合与元素的关系：元素 a 在集合 A 中，称 a 属于 A，记为 $a\in A$；元素 a 不在集合 A 中，称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$.

集合与集合的关系：

A 是 B 的子集（记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$）	集合 A 中的每个元素同时也是集合 B 的元素，称为 A 包含于 B 或 B 包含 A
两个集合相等 $A=B$	若 $A\subset B$ 及 $B\supset A$ 同时成立

集合的表述方法：列举法，描述法，图示法（韦恩图）.

A 与 B 的交集（$A\bigcap B$）	A 与 B 的并集（$A\bigcup B$）	B 在 A 中 的余集 $A\setminus B$
$\{x\mid x\in A且x\in B\}$	$\{x\mid x\in A或x\in B\}$	$\{x\mid x\in A当x\notin B\}$
		

常用集合：自然数集合 (N)，整数集合 (Z)，有理数集合 (Q)，实数集合 (R)，复数集合 (C)

（关系：前一个集合是后一个集合的子集）. 常用的实数集合 (R) 的子集：设 $a,b\in\mathrm{R}$，且 $a<b$，则

闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\le x\le b,x\in\mathrm{R}\}$；开区间：$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathrm{R}\}$；

半开半闭区间：$(a,b]=\{x\mid a<x\le b,x\in\mathrm{R}\}$，$[a,b)=\{x\mid a\le x<b,x\in\mathrm{R}\}$，

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\le b,x\in\mathrm{R}\}，[a,+\infty)=\{x\mid x\ge a,x\in\mathrm{R}\}；$$

点 a 的邻域：$U(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon),\varepsilon>0$，即以 a 为中心的开区间，也可表示为 U_a.

点 a 的去心邻域：$N(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a)\bigcup(a,a+\varepsilon),\varepsilon>0$. 点 a 的去心邻域也可表示为 N_a.

2.2 一些逻辑符号（低频且易）【01010202】

设 p,q 是两个判断，若

（1）p 成立可断定 q 也成立，则称 p 能推出 q 或说 p 蕴含 q，记作 $p\Rightarrow q$；

（2）$p\Rightarrow q$ 成立，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；

（3）$p\Rightarrow q$ 和 $q\Rightarrow p$ 同时成立，则称 p 与 q 等价或互为的充分必要条件，记作 $p\Leftrightarrow q$.

【经典例题】

1. 已知方程组$\begin{cases}x+2y=4,\\2x+ay=2a.\end{cases}$，（1）若方程组有无穷多解，求$a$的值；（2）当$a=6$时，求方程组的解.

【解析】主要考查二元一次方程组

（1）因为方程组有无穷多解，所以$\frac{1}{2}=\frac{2}{a}=\frac{4}{2a}$，解得$a=4$.

（2）当$a=6$时，原方程组变为$\begin{cases}x+2y=4,\\2x+6y=12.\end{cases}$第一个方程乘以2再与第二个方程相减，消元得$-2y=-4$，解得$y=2$，代入第一个方程得$x=0$，故$a=6$时方程组的解为$\begin{cases}x=0,\\y=2.\end{cases}$

2. 求解不等式$\left|x^2-2x-5\right|<3$.

【解析】考查不等式解法——绝对值不等式

不等式$\left|x^2-2x-5\right|<3$等价于不等式组$\begin{cases}x^2-2x-5<3,\\x^2-2x-5>-3.\end{cases}$. 由于$x^2-2x-8<0$的解集为$(-2,4)$，$x^2-2x-2>0$的解集为$\left(-\infty,1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$，所以原不等式的解集为$\left(-2,1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3},4\right)$.

3. 设$\{a_n\}$是等差数列，且$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=64$，求a_6+a_7和S_{12}.

【解析】考查等差数列性质：

（1）对任意正整数n，都有$a_{n+1}-a_n=d$（定义式）.

（2）对于任意正整数$n,m(n\geq m)$都有$a_n-a_m=(n-m)d$，（通项公式的推广式）.

（3）对于任意正整数$n(n>1)$都有$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$即$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$.

（4）对任意正整数p,q,r,s，若$p+q=r+s$，则$a_p+a_q=a_r+a_s$. 特别地，对任意正整数p,q,r若$p+q=2r$，则$a_p+a_q=2a_r$.

（5）对任意非零常数b，若数列$\{a_n\}$称等差，公差为d，则$\{ba_n\}$也成等差，且公差为bd.

（6）若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都是等差数列，$c_n=a_n+b_n$，$d_n=a_n-b_n$则$\{c_n\},\{d_n\}$都是等差数

列. 根据等差数列的性质可知$a_6+a_7=a_3+a_{10}=a_2+a_{11}$，所以

$$a_6+a_7=\frac{a_2+a_3+a_{10}+a_{11}}{2}=32，S_{12}=a_1+a_2+\cdots+a_{12}=6(a_6+a_7)=192.$$

4. 设$\{a_n\}$是一个等比数列，且$a_3=12$，$a_5=48$，求a_1,a_{10}和a_2a_6的值.

【解析】考查等比数列及其性质

性质：（1）若$m+n=r+s$，则$a_ma_n=a_ra_s$，特别当$m+n=2r$时，$a_ma_n=a_r^2$.

（2）从数列中等间距取出子项构成的新数列仍是等比数列（即，若m,n,p $(m,n,p\in \mathrm{N}^*)$构成等差数列时，a_m,a_n,a_p称等比数列）.

（3）$a_n=a_mq^{n-m}$.

我们设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$\frac{a_5}{a_3}=q^2=4$，所以$a_1=\frac{a_3}{q^2}=\frac{12}{4}=3$，

$a_{10}=a_1q^9=3\times 2^9=1536$或$a_{10}=a_1q^9=3\times(-2)^9=-1536$. 再根据等比数列的性质可知

$a_2a_6=a_3a_5=12\times 48=576$.

第二节 函数的概念与图形

1. 函数的概念【010201】

1.1 函数的定义（低频且易）【01020102】

设D是一个非空实数集，f是定义在D上的一个**对应关系**，若对任意的实数$x\in D$，都有唯一的实数$y\in \mathrm{R}$通过f与之对应，则称f是定义在D上的一个函数，记作$y=f(x),x\in D$. 其中x称为自变量，y称为因变量. 自变量的变化范围称为函数的定义域，所有函数值构成的集合$\{y\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域. 一般地，分别用D_f，Z_f表示函数f的定义域和值域.

定义域和对应关系是确定函数的两个要素. 求函数定义域的原则：当自变量具有实际背景时，其实际变化范围就是函数的定义域（自变量表示长度，时间时，其值都是非负的. 如，圆的面积函数和周长函数的定义域）；当自变量没有什么具体的实际意义时，函数的定义域就是使函数表达式中的运算有意义的那些集合.

1.2 隐函数的定义（低频且易）【01020103】

由变量x,y满足的方程确定的函数$y=f(x)$称为隐函数.

2. 函数的图形【010202】

2.1 函数图形的概念（低频且易）【01020201】

函数$y=f(x),x\in D$的**图形**指的是xOy平面上的点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$.

2.2 函数的性质（高频且易）【01020202】

函数在某个范围内的简单形态从有界性，单调性，奇偶性及周期性四个方面来刻画，这四个性质称为函数的简单特性，刻画的是函数在给定范围内的整体性质.

（1）有界性——设函数$f(x)$在D上有定义，如果存在两个实数m和M，满足条件：对D中所有的x都有不等式$m\le f(x)\le M$，则称$f(x)$在D上是有界函数，m叫做$f(x)$的下界，M叫做$f(x)$的上界.

如果对于任意$M>0$，在D中均存在x，使得$|f(x)|>M$，则称$f(x)$在D上是无界函数.

（2）单调性——设函数$f(x)$在区间D上有定义，若对与任意的$x_1,x_2\in D$且$x_1<x_2$，都

有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加，也称 $f(x)$ 是 D 上的单调增加函数，D 又称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间. 类似地可定义单调减少函数和单调减少区间.

（3）奇偶性——设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，而且 D 关于坐标原点对称. 如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 是区间 D 上的奇函数；如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 是区间 D 上的偶函数.

3. 分段函数（低频且易）【010203】

函数在其定义域内，其对应关系不能用一个数学表达式给出.

【经典例题】

1. 狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数},\\ 0, & x\text{是无理数}.\end{cases}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是两个数的集合 $\{0,1\}$.

2. 求圆的面积函数 $S=\pi r^2$ 及周长函数 $l=2\pi r$ 的定义域和值域.

【解析】考查自变量具有实际意义时，定义域，值域的求法

由于圆最小可以收缩称一个点，所以半径最小可以为零，故函数 $S=\pi r^2$ 及周长函数 $l=2\pi r$ 的定义域和值域均为 $[0,+\infty)$.

3. 讨论函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的奇偶性.

【解析】考查函数的奇偶性

由于函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

4. 函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1 & x<0\end{cases}$ 称为符号函数；函数 $[x]$ 称为取整函数，$[x]$ 的值是不大于 x 的最大整数.

【期末考试】

（2014.04—4）函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 是（　）.

A. 奇函数　　　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　　　D. 既是奇函数又是偶函数

【解析】考查函数奇偶性（知识点：01020202）

$$奇函数：f(-x)=-f(x) \qquad 偶函数：f(-x)=f(x)$$

$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x\neq -f(x)=-(\sin x+\cos x)$，$f(x)$ 非奇. 显然 $f(-x)\neq f(x)$，$f(x)$ 非偶.

【答案】 C

（2014.04—5）下列各对函数中，为同一函数的是（　）.

A. $y=\ln(x^2)$ 与 $y=2\ln|x|$　　　　B. $y=\tan(2x)$ 与 $y=2\tan x$

C. $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$　　　　D. $y=x-1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

【解析】考查函数的概念（知识点：01020102）

定义域和对应关系是确定函数的两个要素，是否为同一函数，只需判断函数的定义域是否相同.

选项 A　定义域同为 R

选项 B　$y=\tan(2x)$ 定义域为 $x\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in \mathrm{Z}$；$y=2\tan x$ 定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$

选项 C　$y=x$ 定义域为 R，$y=(\sqrt{x})^2$ 定义域为 $\{x\mid x\geq 0\}$

选项 D　$y=x-1$ 定义域为 R，$y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 定义域为 $\{x\mid x\neq -1\}$.

【答案】 A

第三节　三角函数、指数函数、对数函数

1. 三角函数【010301】

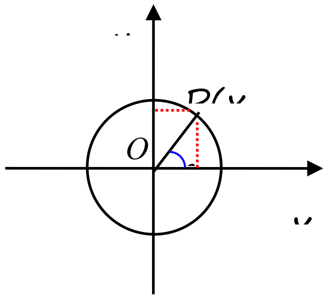
1.1 三角函数的定义（低频且易）【01030101】

三角函数的定义可以在一个圆心在原点、半径为 r 的圆上给出.

正弦函数 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$； 余弦函数 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$；

正切函数 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$； 余切函数 $\tan\theta=\dfrac{x}{y}$；

正割函数 $\sec\theta=\dfrac{r}{x}$； 余割函数 $\csc\theta=\dfrac{r}{y}$；



易见，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$，$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$，正弦函数 $\sin\theta$ 和余弦函数 $\cos\theta$ 又称为基本三角函数.

1.2 常见三角函数关系式（低频且易）【01030102】

（1）同角公式：

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,\quad \sec^2=1+\tan^2 x.$$

（2）和角公式：

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\quad \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}.$$

（3）倍角公式：

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\quad \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

（4）半角公式：

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\quad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},\quad \tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

（5）正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

其中 a,b,c 分别是三角形三个角 A,B,C 的对边.

（6）余弦函数：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

1.3 三角函数的图像及简单性质（低频且易）【01030103】

1.4 周期函数（低频且易）【01030104】

设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若存在正数 $T>0$，使得对任意的 $x\in\mathrm{R}$ 都有

$f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是一个周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 一般说的周期指的是最小正周期.

2. 指数函数（低频且易）【010302】

函数 $y=a^x(a>0,a\neq 0)$ 称为以 a 为底的指数函数，常用的以无理数 e 为底的指数函数 $y=e^x$.

指数函数的基本运算规则：$a^x a^y=a^{x+y}$，$(a^x)^y=a^{xy}$，$a^x b^x=(ab)^x$，$a^0=1$，$a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$.

3. 反函数【010303】

3.1 反函数的概念（低频且易）【01030301】

设 $f(x)$ 是定义在 D 上的一一对应函数，值域为 Z，若对应关系 g 使得对任意的 $y\in Z$，都有唯一的 $x\in D$ 与之对应，且 $f(x)=y$，则称 g 是 f 的反函数. 反函数也记作 $x=g(y)=f^{-1}(y)$. 由单调函数的定义知道，在一个区间上单调（增或减）的函数必有反函数.

3.2 反三角函数（低频且易）【01030302】

$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，在定义域上单调增加；反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$；反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；反余切函数 $y=arc\cot x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$.

4. 对数函数（低频且易）【010304】

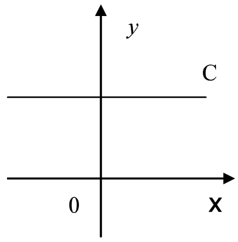
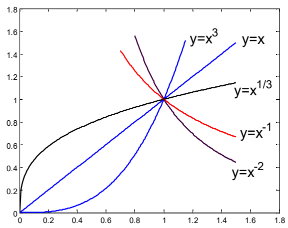
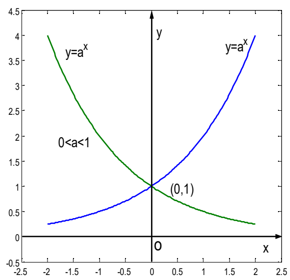
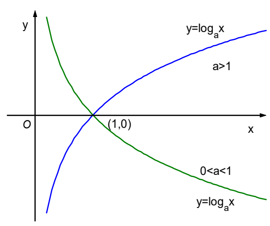
当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调且反函数存在，其反函数称为以 a 为底的对数函数，记作 $y=\log_a x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$. $\log_a x$ 读作“以 a 为底的 x 的对数”. $\log_{10} x$ 称为常用对数，记作 $\lg x$；$\log_e x$ 称为自然对数，记作 $\ln x$.

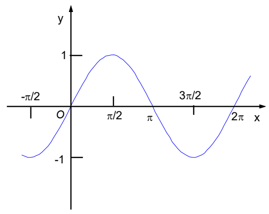
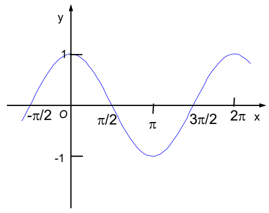
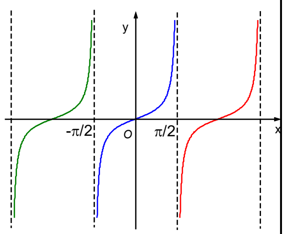
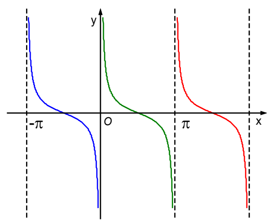
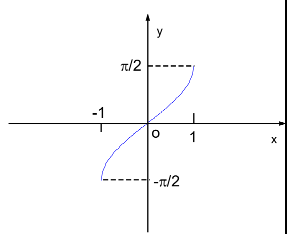
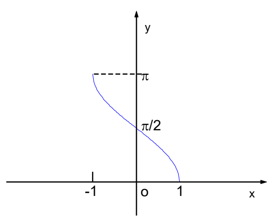
对数函数的运算法则：设 a,b,x,y 都是大于零的实数，则

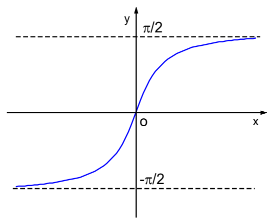
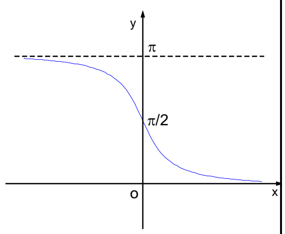
$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y\text{，}\quad \log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y\text{，}$$

$$\log_a x^r=r\log_a x\text{，}\quad \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}\text{，}\quad \log_a a=1\text{，}\quad \log_a 1=0\text{.}$$

基本初等函数的性质与图形如下表所示（ T 表周期 ）：$R=(-\infty,+\infty)$ $R^+=(0,+\infty)$

名称	表达式	定义域	图　　形	特　性
常数函数	$y=C$	R		有界，偶函数
幂函数	$y=x^\mu$	随 μ 而异，但在 R^+ 上均有定义		$\mu>0$ 时在 R^+ 单增 $\mu<0$ 时在 R^+ 单减 无界
指数函数	$y=a^x$ $a>0$ $a\neq 1$	R		$a>1$ 单增 $0<a<1$ 单减 $y>0$ 无界
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0$ $a\neq 1$	R^+		$a>1$ 单增 $0<a<1$ 单减 无界

正弦 函数	$y=\sin x$	R		奇函数 $T=2\pi$ $\lvert y\rvert\le 1$ 有界
余弦 函数	$y=\cos x$	R		偶函数 $T=2\pi$ $\lvert y\rvert\le 1$ 有界
正切 函数	$y=\tan x$	$x\ne k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $k\in Z$		奇函数 $T=\pi$ 在每个周期内单增 无界
余切 函数	$y=\cot x$	$x\ne k\pi$, $k\in Z$		奇函数 $T=\pi$ 在每个周期内单减 无界
反正弦 函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		奇函数 单增 $-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ 有界
反余 弦函 数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单减 $0\le y\le\pi$ 有界

反正切函数	$y=\arctan x$	R		奇函数 单增 $-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ 有界
反余切函数	$y=\operatorname{arc}\cot x$	R		单减 $0<y<\pi$ 有界

【经典例题】

1. 已知 $f(x)$ 是以正数 T 为周期的周期函数，$g(x)=f(ax+b)(a>0)$，试证：$g(x)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

【解析】考查周期函数

因为 T 是函数 $f(x)$ 的周期，所以 $g(x)=f(ax+b)=f(ax+b+T)$. 又因为

$$f(ax+b+T)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=g\left(x+\frac{T}{a}\right)$$

所以 $g\left(x+\dfrac{T}{a}\right)=g(x)$，即 $g(x)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

2. 求函数 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$ 的反函数.

【解析】考查反函数

求反函数的步骤是：先从函数 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再置换 x 与 y，就得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

由 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_4 x$，可得 $2(y-\dfrac{1}{2})=\log_4 x$，所以 $x=4^{2y-1}$，上式中 x 与 y 的记号互换，即得反函数为 $y=4^{2x-1}$.

【期末考试】

（2014.04—1）下列运算正确的是（　）.

A. $\ln 6+\ln 3=\ln 9$　　B. $\ln 6-\ln 3=\ln 2$

C. $(\ln 6)(\ln 3)=\ln 18$　　D. $\frac{\ln 6}{\ln 3}=\ln 2$

【解析】 考查对数函数运算规则（知识点：010304）

应用公式

$$\ln 6+\ln 3=\ln(6\cdot 3)=\ln 18，\ \ln 6-\ln 3=\ln\frac{6}{3}=\ln 2$$

【答案】 B

（2013.10—1）下列等式成立的是（　）.

A. $(e^x)^2=e^{x^2}$　　B. $(e^x)^2=e^{2x}$

C. $e^{2x}=\sqrt{e^x}$　　D. $e^x=\sqrt{e^{x^2}}$

【解析】考查指数函数运算法则（知识点：010302）

$$(e^x)^2=e^{x+x}=e^{2x}$$

【答案】B

第四节 函数运算

1. 函数的四则运算（低频且易）【010401】

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 都在 D 上有定义，$k\in R$，则对它们进行四则运算的结果还是一个函数，它们的定义域不变（除法运算时除数为0的点除外），而函数值的对应定义如下：

（1）加法运算 $(f+g)(x)=f(x)+g(x), x\in D$.

（2）数乘运算 $(kf)(x)=kf(x), x\in D$.

（3）乘法运算 $(fg)(x)=f(x)g(x), x\in D$.

（4）除法运算 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0, x\in D$.

其中等号左端括号内表示对两个函数 f,g 进行后所得的函数，它在 x 处的值等于右端的值.

2. 复合函数（高频且易）【010402】

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 其定义域分别为 D_f 和 D_g，值域分别为 Z_f 和 Z_g. 当 $Z_g \subset D_f$ 时，对于任意的 $x \in D_g$，都有唯一的 $g(x) \in Z_g \subset D_f$，从而有唯一的 $f(g(x)) \in Z_f$ 与 $x \in D_g$ 对应，这样确定一个从 D_g 到 Z_f 的函数，此函数称为函数 f 和 g 的复合函数，记作 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. 一般地，复合函数 $(f \circ g)(x)$ 的定义域是 D_g 的一个子集.

3. 初等函数【010403】

3.1 基本初等函数（低频且易）【01040301】

常见的六类函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为基本初等函数.

3.2 初等函数（低频且易）【01040302】

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算得到的函数，称为初等函数.

【经典例题】

1. 已知 $f(x)=\ln(1+x)$，$g(x)=1-\cos x$，求 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

【解析】 考查函数的四则运算

因为函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，函数 $g(x)=1-\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且当 $x=2k\pi$（k 为整数）时，$g(x)=0$，所以

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ln(1+x)}{1-\cos x}, x\in(-1,+\infty)\setminus\{2k\pi\}\text{（}k\text{ 为整数）}.$$

【期末考试】

（2014.04—3）设函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x-y}$，则 $f\left(\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{s}\right)=$ （ ）.

A. $\dfrac{1}{y-x}$　　　　B. $\dfrac{x-y}{yx}$

C. $\dfrac{1}{x-y}$　　　　D. $\dfrac{x^2y^2}{x-y}$

【解析】 考查复合函数（知识点：010402）

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x-y}$，用$\dfrac{1}{y}$代换x，$\dfrac{1}{x}$代换y，有$f\left(\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\dfrac{1}{xy}}{\dfrac{x-y}{xy}}=\dfrac{1}{x-y}$

【答案】 C

第五节 经济学中的常用函数

1. 需求函数与供给函数【010501】

1.1 需求函数（低频且易）【01050101】

商品需求量Q与其价格P之间的函数关系$Q=Q(P)$称为需求函数.一般地，需求函数是一个单调递减函数.常见几种需求函数模型如下：

（1）线性需求函数：$Q=a-bP$，其中a,b是非负函数.

（2）二次曲线需求函数：$Q=a-bP-cP^2$，其中a,b,c是非负常数.

（3）指数需求函数：$Q=Ae^{-bP}$，其中A,b是非负常数.

1.2 供给函数（低频且易）【01050102】

商品供给量S与其价格P之间的函数关系$S=S(P)$称为供给函数.一般地，供给函数是一个单调递增函数.常见的几种供给函数模型如下：

（1）线性供给函数：$S=a+bP$，其中a,b是非负函数.

（2）二次曲线供给函数：$S=a+bP+cP^2$，其中a,b,c是非负常数.

（3）指数供给函数：$S=Ae^{bP}$，其中A,b是非负常数.

当供给量与需求量相等，即$S(\overline{P})=Q(\overline{P})$时，这时的价格$\overline{P}$称为均衡价格；商品数量$\overline{S}=\overline{Q}$称为均衡数量.

2. 成本函数（低频且易）【010502】

一般地，总成本C可分为两部分，分别是固定成本C_1和可变成本C_2. C_1是一个与产品数量无关的常数，C_2与产品的数量q有关，是q的函数，记作$C_2(P)$.所以

$$\text{总成本}\ C(q)=\text{固定成本}+\text{可变成本}=C_1+C_2(q)$$

平均成本指的是总成本与产品数列之比$\dfrac{C(q)}{q}$，记作$\overline{C}(q)$. 常见的成本函数模型是：

（1）线性成本函数：$C(q)=C_1+cq$，其中c是单位产品的可变成本.

（2）二次成本函数：$C(q)=C_1+cq+cq^2$.

3. 收益函数与利润函数【010503】

3.1 收益函数（低频且易）【01050301】

收益指的是售出商品得到的总收入，等于出售单价与售出总量的乘积，即总收益函数$R=R(q)=qP(q)$，其中R表示收益, q表示售出的商品总量，$P(q)$是商品的单价与售出量的关系，是该商品的价格函数. 平均收益函数为$\overline{R}=\dfrac{R(q)}{q}=P(q)$.

3.2 利润函数（低频且易）【01050302】

在供需平衡时,某种产品获得的总利润等于出售该产品获得的总收益与生产该产品所付出的总成本之差，即总利润函数 $L=L(q)=R(q)-C(q)$，其中L表示总利润，q表示产品数量. 平均利润函数为$\overline{L}=\overline{L}(q)=\dfrac{L(q)}{q}$，当$L=L(q)=R(q)-C(q)>0$时，是有盈余生产；当$L=L(q)=R(q)-C(q)<0$时，是有亏损生产；当$L=L(q)=R(q)-C(q)=0$时，是有无盈余生产，无盈余生产时的产量$q_0$称为无盈亏点.

【经典例题】

1. 已知某商品的需求量Q和供给量S与其价格P满足的关系式分别为$Q^2-20Q-P+99=0$和$3S^2+P-123=0$，求该商品的市场均衡价格与均衡数量.

【解析】考查需求函数和供给函数

令$Q=S$，由$Q^2-20Q-P+99=0$与$3S^2+P-123=0$，得$5S+\dfrac{1}{3}P=35$.

由$3S^2+P-123=0$与$5S+\dfrac{1}{3}P=35$，解得$S=-1$（舍）和$S=6$.

当$S=6$时，解得$P=15$. 故均衡价格为 15，均衡数量为 6.

2. 已知生产某商品的总成本为$C(q)=20+2q+\dfrac{1}{2}q^2$（万元）. 若每售出一件该商品的收入

是 20 万元，求生产 20 件该商品时的总利润和平均利润.

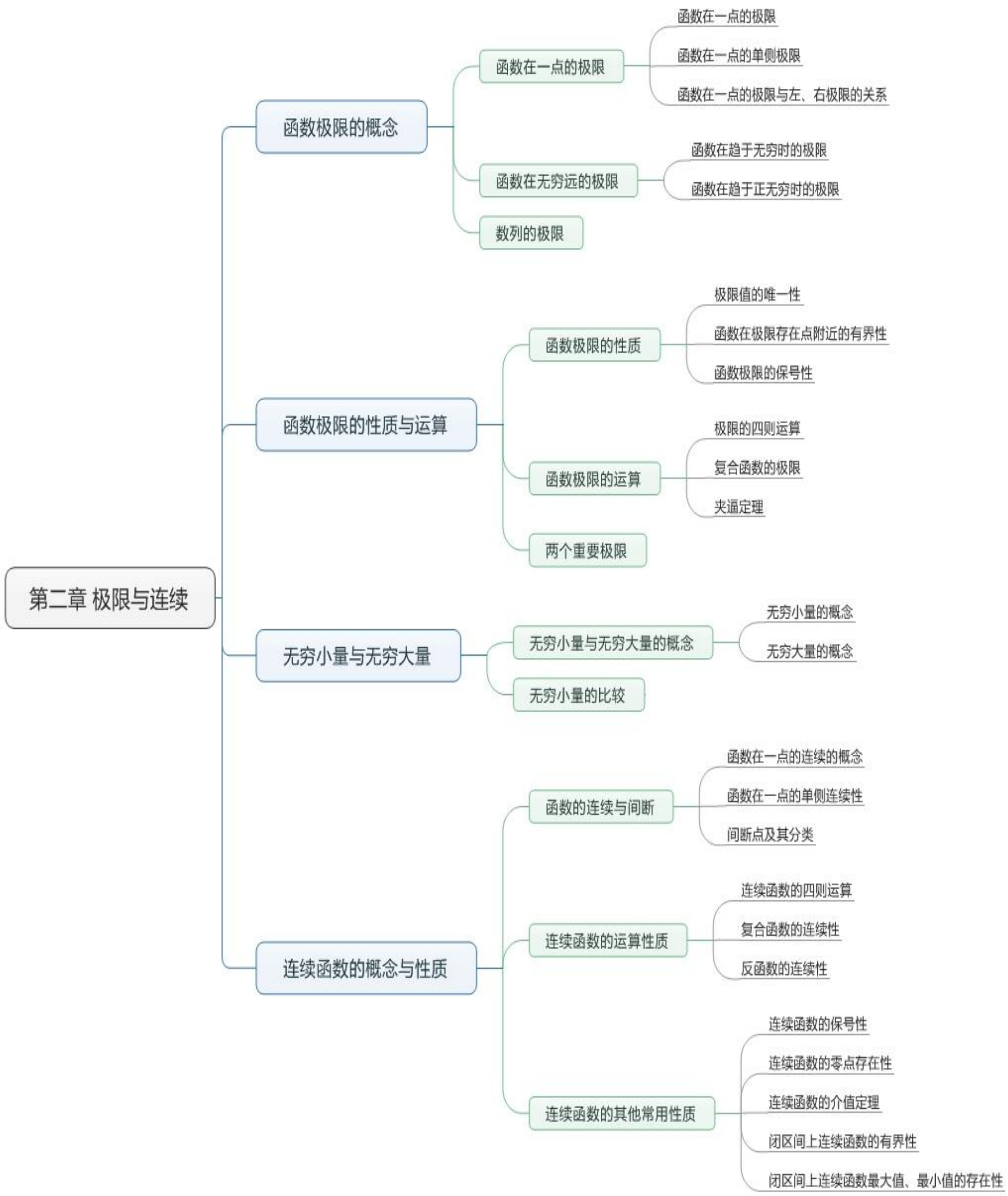
【解析】 收益与利润函数

总利润 $L(q)=R(q)-C(q)=20q-(20+2q+\frac{1}{2}q^2)=18q-\frac{1}{2}q^2-20$，

所求总利润为 $L(20)=140$（万元）；平均利润为 $\overline{L}(20)=7$（万元）.

第二章 极限与连续

框架图



考情分析

本章历年考核分值 15-20 分，题型以选择题、简单计算和计算题为主，本章重点为：极限的概念和性质，极限的运算法则，两个重要极限，无穷小量的概念及其阶的比较，函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.本章常见考试题型：

1、求函数或数列的极限、函数极限的性质、极限的运算法则.

2、两个重要极限.

3、考查分段函数在间断点处极限是否存在，函数是否连续.

4、函数的连续与间断.

5、无穷小量的阶的比较.

第一节 函数极限的概念

1. 函数在 $x \to x_0$ 时的极限【020101】

1.1 函数在一点的极限（低频且易）【02010101】

定义1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 N_{x_0} 内有定义，A 是一个常数.若对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in N_{x_0}$ 且 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限是 A，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

1.2 函数在一点的单侧极限（低频且易）【02010102】

（1）函数在一点的左极限

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左侧附近有定义，若当 $x < x_0$ 且“无限趋于” x_0 时，其对应的函数值 $f(x)$ “无限趋于”一个确定的常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限是 A，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

（2）函数在一点的右极限

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的右侧附近有定义，若当 $x > x_0$ 且“无限趋于” x_0 时，其对应的函数值 $f(x)$ “无限趋于”一个确定的常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限是 A，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

上述定义 3 中的“ x_0 的左侧附近”指的是“以 x_0 为右顶点的一个开区间，即

$(x_0-\delta, x_0)(\delta>0)$". 类似可理解"$x_0$的右侧附近".

1.3 函数在一点的极限与左、右极限的关系（低频且易）【02010103】

定理 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A，且 \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

2. 函数在无穷远的极限【020102】

2.1 函数在 $x\to\infty$ 的极限（低频且易）【02010201】

定义4 设函数在无穷远处有定义，A 是一个常数. 若对于任意的 $\varepsilon>0$，都存在 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限是 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. 通俗地说，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的含义就是当 $|x|$ 无限增大时，与对应的函数值 $f(x)$ 无限趋于常数 A.

定义4中"函数在无穷远处有定义"指：存在大于零的数 M，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$ 内有定义.

2.2 函数在 $x\to+\infty$ 的极限（低频且易）【02010202】

定义5 设函数在正无穷远处有定义，A 是一个常数. 若对于任意的 $\varepsilon>0$，都存在 $X>0$，使得当 $x>X$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的极限是 A，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

定义5中"函数在正无穷远处有定义"指的是：存在大于零的数 M，函数 $f(x)$ 在 $(M,+\infty)$ 内有定义.

定理2 设函数 $f(x)$ 在无穷远处有定义，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是：

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A，且 \lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

3. 数列的极限（低频且易）【020103】

设 $\{a_n\}$ 是一个无穷数列，当下标 n 越来越大时，其对应的值 a_n 越来越接近一个常数 A，而且可以无限接近，我们称数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$.

因为下标 n 只有一种变化趋势 $n\to+\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$ 一般可表示为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$.

当极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在时，称数列$\{a_n\}$收敛；当极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$不存在时，称数列$\{a_n\}$发散.

【经典例题】

1. 求符号函数$\operatorname{sgn}(x)$在$x=0$点的左、右极限.

【解析】考查单侧函数概念

因为 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$，所以当$x<0$且无限趋于 0 时$\operatorname{sgn}(x)$无限趋于-1，当$x>0$且无限趋于 0 时$\operatorname{sgn}(x)$无限趋于 1，故

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1.$$

2. 设$f(x)=\arctan x$，求$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$及$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$的值，并说明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$是否存在.

【解析】 考查左、右极限的关系，如何判定极限的存在性

根据$f(x)=\arctan x$的性质，易知：当$x\to+\infty$时，$f(x)=\arctan x$无限趋于$\dfrac{\pi}{2}$；当$x\to-\infty$时，$f(x)=\arctan x$无限趋于$-\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2}$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在.

3. 设$a_n=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

【解析】 考查数列的极限

因为

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

所以当$n\to\infty$时，$a_n=1-\dfrac{1}{n+1}$无限趋于 1，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

【注】数列可以看做是一类特殊的函数，即整标函数$f(n)=a_n$，所以数列$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$本质上是函数极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$的一个特例.

【期末考试】

（2013.04—6）收敛级数 $\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\cdots$ 的和为

__________.

【解析】考查数列的极限（知识点：020103）

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$

【答案】1

第二节 函数极限的性质与运算

1. 函数极限的性质【020201】

1.1 极限值的唯一性（低频且易）【02020101】

定理 1 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则其值唯一. 定理 1 说明，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.

二级知识点：函数在极限存在点附近的有界性（低频且易）【02020102】

定理2 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内有界.

函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内有界指的是：存在 $M>0$，$\delta>0$，使得对任意的 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 都有 $|f(x)|<M$. 定理2说明：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，存在 $M>0$，$X>0$ 使得对任意的 $x\in(-\infty,X)\cup(X,+\infty)$，都有 $|f(x)|<M$. 定理2反映的是极限存在点附近函数的局部有界性，对数列来说，结论为：

定理3 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，则数列 $\{a_n\}$ 有界. 定理3说明，数列有界是数列收敛的必要条件.

1.2 函数极限的保号性（低频且易）【02020103】

定理4 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内大于零；若在 x_0 的一个去心邻域内 $f(x)\geq 0$，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geq 0$.

定理4说明，利用极限值的正、负号，可得到函数在极限点附近（除去极限点）的正、

负号；另一方面说明，极限值的正、负号不能与函数极限点附近（除去极限点）的值的正负号相反.

注意：当函数 $f(x)$ 满足：在 x_0 的一个去心邻域内 $f(x)>0$，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在时，结论仍为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$，而不是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$.

2. 函数极限的运算【020202】

2.1 极限的四则运算（低频且易）【02020201】

定理5 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，则

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB\left(\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=kA, k\in R\right)$.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

定理5说明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在同一极限过程下的极限都存在，那么它们的和、差、积、商（分母极限不等于零）在同一极限过程下的极限也存在，且其极限值为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 极限值的和、差、积、商.

2.2 复合函数的极限（低频且易）【02020202】

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))\overset{u=g(x)}{=}\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

2.3 夹逼定理（低频且易）【02020203】

定理6 设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内满足：

（1）夹条件：$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$；

（2）逼条件：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

定理6 称为夹逼定理，是微积分中判断极限存在的基本方法之一，是导出两个重要极限的基础. 微积分中判断极限存在的另一个常用结论是单调有界收敛定理，对数列极限可以写成如下形式：

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\leq a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 且有上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；若数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_n \ge a_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$且有下界，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

3. 两个重要极限（高频且易）【020203】

3.1 重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$（低频且易）【02020301】

3.2 重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$（高频且易）【02020302】

【经典例题】

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$.

【解析】考查极限的四则运算

因为$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$，所以不能直接利用除法运算求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$. 由于

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$，$x^2-1=(x-1)(x+1)$，所以$\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\dfrac{x+2}{x+1}(x\ne 1)$. 从而

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.

2. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

【解析】考查夹逼定理

当$x\ne 0$时，因为$-|x|\le x\sin\dfrac{1}{x}\le |x|$, 且$\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

3. 利用单调有界收敛定理，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$存在.

【解析】考查单调有界收敛定理

记$a_n=\dfrac{n+1}{n}$，则$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n+2}{n+1}-\dfrac{n+1}{n}=-\dfrac{1}{n(n+1)}<0$，且$a_n=\dfrac{n+1}{n}>1$. 由单调有界

收敛定理，知极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$存在.

4. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

【解析】 考查重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}.$$

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x$.

【解析】考查重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}\right]^m = e^m.$$

【期末考试】

（2014.04—11）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+2}{5x^3+1}$.

【解析】 考查极限的运算（知识点：020202）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+2}{5x^3+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+3x^2+2}{x^3}}{\frac{5x^3+1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}{5+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{5}.$$

（2014.04—11） 已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$=$e^2$，求常数 k 的值

【解析】 考查重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$（知识点：02020302）

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k = e^2$$

从而，知 $k=2$， $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\frac{1}{\frac{1}{2x}})^{\frac{1}{2x}}\right]^2=\mathrm{e}^2$，所以 $a=2$.

【答案】D

第三节 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量的概念【020301】

1.1 无穷小量的概念（低频且易）【02030101】

定义1 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是一个无穷小量，记作

$$f(x)=o(1)\quad (x\to x_0)$$

$f(x)=o(1)\quad (x\to x_0)$ 指的是：当 x 无限趋于 x_0 时，其对应的函数值无限趋于0.

说明：一个函数 $f(x)$ 是否是无穷小量，一定要指明极限过程.

1.2 无穷大量的概念（低频考点）【02030102】

定义2 若函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $x\to x_0$ 时是一个无穷小量，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是一个无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

当 x 无限趋于 x_0 时，若 $\dfrac{1}{f(x)}>0$ 且无限趋于0，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是一个正无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

当 x 无限趋于 x_0 时，若 $\dfrac{1}{f(x)}<0$ 且无限趋于0，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是一个负无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

从无穷大量的定义可看出：无穷大量的倒数是同一极限过程中的无穷小量，非零无穷小的倒数是同一极限过程下的无穷大量.

无穷大运算的结论：

（1）有界变量与无穷大量之和是无穷大量；

（2）两个无穷大量之积是无穷大量；

（3）有限个无穷大量之积是无穷大量.

2. 无穷小量的比较（高频且易）【020302】

定理 1 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，则：

（1）当 $c=0$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的高阶无穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))$ $(x\to x_0)$.

（2）当 $c\neq 0$ 且当 $c\neq 1$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量.

（3）当 $c=1$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量，记作 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$.

常用等价无穷小量：$\sin x\sim x$， $\tan x\sim x$， $\arcsin x\sim x$， $\arctan x\sim x$， $\ln(1+x)\sim x$， $e^x-1\sim x$， $a^x-1\sim x\ln a$， $1-\cos x\sim \dfrac{x^2}{2}$， …

【经典例题】

1. 证明 $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}(x\to 0)$.

【解析】考查无穷小量的比较

因为 $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}\cdot\dfrac{1}{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$， 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}=1$，

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=1，即 \sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}(x\to 0).$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

【解析】考查运用常用等价无穷小量求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3\cos x}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

【期末考试】

（2014.04—6）设函数 $f(x)=2x^2$，$g(x)=\sin x$，则当 $x\to 0$ 时（　）.

A. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量

B. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小量

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价的无穷小量

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量

【解析】考查无穷小量的比较及常用等价无穷小量（知识点：020302）

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x=2\cdot\lim_{x\to 0}x=0$$

由高阶无穷小量定义可知，$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量.

【答案】 A

第四节 连续函数的概念与性质

1. 函数的连续与间断【020401】

1.1 函数在一点连续的概念（低频且易）【02040101】

定义1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 及其附近有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，x_0 称为函数 $f(x)$ 的连续点. 一般地，$\Delta x=x-x_0$ 称为自变量的改变量，

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的改变量. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续指的是：当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\Delta f(x_0)\to 0$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0.$$

注：连续性是函数的一种点性质，函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否连续与它在其他点处是否连续没有关系.

1.2 函数在一点的单侧连续性（低频且易）【02040102】

定义2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 及其左侧附近有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续；设函数 $f(x)$ 在 x_0 及其右侧附近有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

左连续与右连续统称为单侧连续. 对于分段函数，在其分段点处首先要讨论它的单侧连续性；对区间 $[a,b]$ 上的函数，在区间端点也要首先讨论他的单侧连续性. 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都连续，称其在该区间内连续. 用 $C(a,b)$ 表示所在区间 (a,b) 内的连续函数. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 用 $C[a,b]$ 表示所有在区间 $[a,b]$ 上连续的函数.

定理1 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是： $f(x)$ 在 x_0 处既是左连续的，又是右连续的.

1.3 间断点及其分类（高频且易）【02040103】

定义3 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点. 根据函数在间断点处左、右连续的情况, 可将间断点分类：

（1）第一类间断点

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限均存在, 但不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 在第一类间断点中，可分为可去间断点和跳跃间断点.

（2）第二类间断点

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限中至少有一个不存在时，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二间断点.

分类如图:

间断点
- 第一类间断点
  - 可去间断点—左、右极限均存在，且相等
  - 跳跃间断点—左、右极限均存在，但不相等
- 第二类间断点—左、右极限至少有一个不存在

2. 连续函数的运算性质（高频考点）【020402】

2.1 连续函数的四则运算（高频考点）【02040201】

定理 2 若函数 $f(x)$， $g(x)$ 均在 x_0 处连续, 则 $f(x)+g(x)$， $f(x)-g(x)$， $f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x)\neq 0$）均在 x_0 处连续.

2.2 复合函数的连续性（低频考点）【02040202】

定理3 若函数 $g(x)$ 在 x_0 处连续, $f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处连续.

2.3 反函数的连续性（低频考点）【02040203】

定理4 若函数 $g(x)$ 在 x_0 处连续, $f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处连续.

3. 连续函数的其他常用性质（低频考点）【020403】

3.1 连续函数的保号性（低频考点）【02040301】

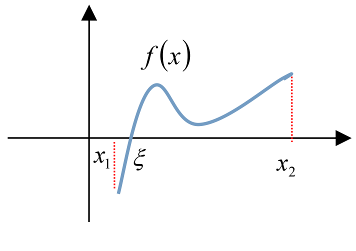
定理 5 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且 $f(x_0)>0$，则在 x_0 附近 $f(x)>0$.

定理说明 连续函数在一点处函数值的正、负号可以确定它在这一点附近的正、负号，保号性是一个局部性质，不能推广到函数的整个定义域上.

3.2 连续函数的零点存在性（低频考点）【02040302】

定理 6 若函数 $f(x)$ 连续, 且存在两点 x_1,x_2 使得 $f(x_1)f(x_2)<0$，则至少存在介于 x_1,x_2 之间的一个点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

从几何上讲, 本定理指出：当连续曲线上既存在位于 x 轴上方的点，又存在位于 x 轴下方的点时，在这两点之间曲线至少要与 x 轴相交一次.



3.3 连续函数的介值定理（低频考点）【02040303】

定理 7 若函数 $f(x)$ 连续，且存在两点 x_1, x_2 使得 $f(x_1) < f(x_2)$，则对于任意满足条件 $f(x_1) < \mu < f(x_2)$ 的实数 μ，至少存在介于 x_1, x_2 之间的一个点 ξ，使得 $f(\xi) = \mu$.

3.4 闭区间上连续函数的有界性（低频考点）【02040304】

定理 8 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 即存在 $M > 0$，使得对任意的 $x \in [a,b]$，都有 $|f(x)| < M$ 成立.

3.5 闭区间上连续函数的最大值、最小值的存在性（低频考点）【02040305】

定理 9 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi, \eta \in [a,b]$，使得对任意的 $x \in [a,b]$，都有 $f(\xi) \le f(x) \ge f(\eta)$ 成立. 即 $f(\xi)$ 是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值，$f(\eta)$ 是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值. 注意，最值的存在性对于开区间上的连续函数而言未必成立.

【经典例题】

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0, \\ x^2+1, & x > 0, \end{cases}$ 判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的单侧连续性.

【解析】考查函数的连续定义，单侧连续定义

因为 $f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(x+1) = 1$，

所以 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续.

又因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x^2+1) = 1$，所以 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续.

2. 证明方程 $2^x + x = 0$ 在区间 $(-1,0)$ 内存在唯一实根.

【解析】 考查连续函数零点存在性定理

记 $f(x) = 2^x + x$，则 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上连续. 又 $f(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$，$f(0) = 1 > 0$，所以存在 $\xi \in (-1,0)$，使得 $f(\xi) = 0$，即方程 $2^x + x = 0$ 在区间 $(-1,0)$ 内存在实根 ξ. 因为函数 $f(x) = 2^x + x$ 单调增加，所以 ξ 是方程 $2^x + x = 0$ 在区间 $(-1,0)$ 内的唯一实根.

【期末考试】

（2014.04—7）7 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+a, x<2\\ b, & x=2\\ x+2, & x>2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续，则（　）.

A. $a=1,b=4$　　B. $a=0,b=4$

C. $a=1,b=5$　　D. $a=0,b=5$

【解析】 考查分段函数的连续性（知识点：02040103）

由函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，可知

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2}f(x)=b$$

即 $3\cdot 2^2-4\cdot 2+a=2+2=b$，解得 a=0，b=4.

【答案】 B

（2013.10—4）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x-q}$ 的所有间断点是（　）.

A. $x=0$　　B. $x=11$

C. $x=0,x=-1$　　D. $x=0,x=1$

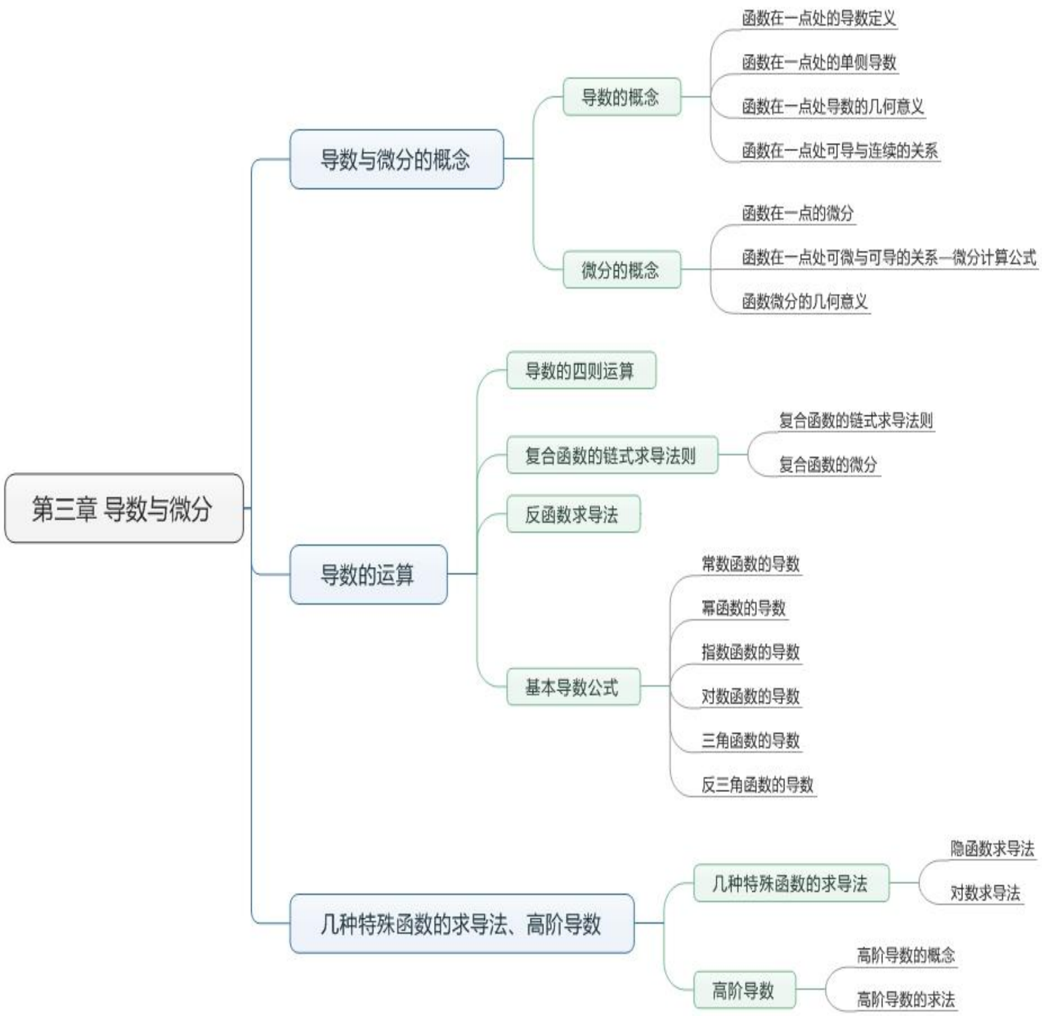
【解析】考查函数间断点的分类（知识点：020103）

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x-1}=+\infty,\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x-1}=+\infty.$$

【答案】D

第三章 导数与微分

框架图



考情分析

本章历年考核分值 14-18 分，题型以选择题、简单计算和计算题为主，本章重点为：导数的概念及其几何意义和作为变化率的实际意义，各种求导法则和基本初等函数的导数和微分公式；重点掌握复合函数的求导法则，隐函数求导法.本章常见考试题型：

1、导数的几何意义.

2、讨论分段函数分段点的连续性与可导性.

3、求函数的导数：复合函数求导， 隐含数求导，参数方程求导.

第一节 导数与微分的概念

1. 导数的概念【030101】

1.1 函数在一点处的导数定义（低频且易）【03010101】

定义1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（$x_0+\Delta x$ 也在该邻域内）时，相应地函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；若 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$ 等.

常用的导数定义式还有：$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

注：（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在；若极限不存在,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

（2）若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ (这时导数是不存在的),为叙述方便,我们称 $f(x)$ 在点 x_0 的可导为无穷大.

（3）若令 $x=x_0+\Delta x$,则 $\Delta x\to 0$ 时,有 $x\to x_0$，

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

这是导数定义的另一种形式,说明导数也可简述为差商的极限.

（4）导数 $y'|_{x=x_0}$ 是函数在点 x_0 处的变化率,它反应了函数随自变量的变化而变化的快慢程度.

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导. 对于任一 $x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导函数值. 构成的这个新的函数称为原函数 $y=f(x)$ 的导函数,记作 $y',f'(x),\dfrac{dy}{dx},\dfrac{df(x)}{dx}$.

把常用导数定义式中的 x_0 换成 x，得到导函数定义式

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{或} f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

注：（1）虽然 x 可取区间 I 内的任意数值，但在极限过程中, x 是常数, $\Delta x,h$ 是变量. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值,即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$. 导函数 $f'(x)$ 简称导数， $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 在 x_0 处的导数或导数 $f'(x)$ 在 x_0 处的值.

（2） $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}\neq\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

（3）导数与导函数的区别与联系

区别: 求一个函数的导数，就是求导函数；求一个函数在给定点的导数，就是求导函数值.

联系: 都称为导数,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的函数值.

1.2 函数在一点处的单侧导数（低频且易）【03010102】

定义2 根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 的定义，导数

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

是一个极限，而极限存在的充要条件是左、右极限都存在且相等，因此 $f'(x_0)$ 存在即 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是左、右极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{及} \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

都存在且相等. 这两个极限分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数,记作 $f_-^{'}(x)$ 及

$f_+^{'}(x)$，即

$$f_-^{'}(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\quad f_+^{'}(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

可导的充要条件：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导且 $f'(x_0)=A \Leftrightarrow f_-^{'}(x_0)=f_+^{'}(x_0)=A$.

左导数和右导数统称为单侧导数. 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f_+^{'}(a)$ 及 $f_-^{'}(b)$ 都存在，就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

注意区分下面两组符号:

$f_-^{'}(x_0)$、$f_+^{'}(x_0)$ 表示在 x_0 点的左、右导数；$f'(x_0^-)$、$f'(x_0^+)$ 表示导函数在 x_0 点的左、右极限.

1.3 函数在一点处导数的几何意义（高频且易）【03010103】

几何意义：函数在一点处的导数定义可看出，$f'(x_0)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率，故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的

切线方程为 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

过切点且与曲线在该点的切线垂直的直线称为曲线在该点的法线. 当 $f'(x)\neq 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的

法线方程为 $y=f(x_0)+\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

两条曲线在点 (x_0,y_0) 处相切指的是它们在该点的切线重合，即它们在 x_0 处不仅函数值相等，导数值也相等.

补充：导数的物理意义: 非均匀变化量的瞬时变化率.

（1）变速直线运动: 路程对时间的导数为物体的瞬时速度, $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{ds}{dt}$.

（2）交流电路: 电量对时间的导数为电流的强度, $i(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta t}=\dfrac{dq}{dt}$.

（3）非均匀的物体: 质量对长度(面积,体积)的导数为物体的线(面,体)密度.

1.4 函数在一点处可导与连续的关系（高频考点）【知识点编号：03010104】

定理 1 若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 那么函数在该点处必连续. 定理 1 表明: 函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件, 但不是充分条件, 即函数在某点连续却不一定可导;

若不连续一定不可导.

判断可导性 $\begin{cases} \text{不连续一定不可导} \\ \text{连续} \begin{cases} \text{直接用定义} \\ \text{看左右导数是否存在且相等} \end{cases} \end{cases}$

补充：根据定义求导数步骤:（1） 求增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$；

（2） 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$；

（3） 取极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. 微分的概念【030102】

2.1 函数在一点处的微分（低频考点）【03010201】

定义3 设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在这个区间内，如果增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 可表示为 $y = A\Delta x + o(\Delta x)$. 其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 dy，即 $dy = A\Delta x$.

2.2 函数在一点处微分与可导的关系——微分计算公式（低频且易）【03010202】

定理2 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$，其中 $dx = \Delta x$.

2.3 函数微分的几何意义（低频且易）【03010203】

【经典例题】

1. 用定义求函数 $f(x) = \ln x$ 在 $x(x>0)$ 处的导数.

【解析】 考查用导数定义求导数

因为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \dfrac{1}{x}$

所以函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x(x>0)$ 处可导，且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

2. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\in[0,1],\\ x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ 在 $x=1$ 处不可导.

【解析】考查函数可导的充要条件

因为

$$f_-^{'}(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2},$$

$$f_+^{'}(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

所以 $f_-^{'}(1)\neq f_+^{'}(1)$，故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

3. 求曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程和法线方程.

【解析】考查导数的几何意义

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2$，所以 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=1}=3$，故曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 的切线方程为 $y=1+3(x-1)$，即 $y=3x-2$；曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 的法线方程为 $y=1-\dfrac{1}{3}(x-1)$，即

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}.$$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq0,\\ ax+b, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b 的值.

【解析】考查函数可导与连续的关系

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b)=b$， $f(0)=0$，所以 $b=0$. 又因为

$$\lim_{x\to0^+}f(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax+b-0}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax}{x}=a,$$

所以 $a=0$.

5. 求函数 $y=x^3$ 的微分.

【解析】考查函数微分

因为$\Delta y=\left(x+\Delta x\right)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta x\right)^3$，且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3x\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta x\right)^3}{\Delta x}=0$，所以

$\Delta y=3x^2\Delta x+o\left(x\right)$，故$dy=3x^2\Delta x$.

【期末考试】

（2014.04—17）求抛物线$y=x^2$上一点，使该点的切线平行于直线$y=4x-3$.

【解析】考查导数几何意义（知识点：03010103）

直线$y=4x-3$的斜率为$y'=\left(4x-3\right)'=4$，由两条直线平行，知斜率相等.

因此，$y=x^2$的切线斜率为$y'=\left(x^2\right)'=2x=4$，得$x=2$.

此时，$y=x^2=2^2=4$，即抛物线上点$\left(2,4\right)$的切线平行于直线$y=4x-3$.

（2013.04—2） 设函数$f\left(x\right)$ f（x）满足$f\left(1\right)=0$，$f'\left(1\right)=2$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)}{\Delta x}$=（ ）.

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 不存在

【解析】考查导数定义并求极限（知识点：03010101）

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f\left(1\right)}{\Delta x}=f'\left(1\right)=2$$

【答案】 C

（2013.04—9）设函数$y=e^{3x}+2\sqrt{x}+2$，则微分$dy=$__________.

【解析】考查函数的微分（知识点：030102）

$$\frac{dy}{dx}=3e^{3x}+\frac{1}{\sqrt{x}}，\ dy=\left(3e^{3x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

【答案】$\left(3e^{3x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

第二节 导数的运算

1. 导数的四则运算（高频且易）【030201】

定理1 若函数 $f(x),g(x)$ 在 x_0 处可导，则其和、差、积、商构成的函数均在 x_0 处可导，且：

导数运算法则
（1）$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；（2）$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)\pm f(x)g'(x)$； （3）$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq 0)$

记法：积法则, 商法则, 都是前导后不导，前不导后导，但积法则中间是加号，商法则中间是减号.

2. 复合函数的链式求导法则（高频且易）【030202】

2.1 链式求导法则（高频且易）【03020201】

定理2 设函数 $y=f(g(x))$ 是函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合. 若 $g(x)$ 在 x_0 处可导，$f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处可导，则函数 $y=f(g(x))$ 关于 x 在 x_0 处的导数为

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=f'(u_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

2.2 复合函数的微分（低频且易）【03020202】

已知函数 $y=f(u)$ 可导，利用微分计算公式，得 $dy=f'(u)du$. 若函数 $u=g(x)$ 可微，且复合函数 $f(g(x))$ 有意义, 则根据复合函数的链式求导法则及微分计算公式，可知 $y=f(g(x))$ 的微分是

$$dy=\frac{dy}{dx}dx=f'(g(x))g'(x)dx=f'(u)du.$$

对于函数 $y=f(u)$，无论变量 u 是自变量还是中间变量，都有 $dy=f'(u)du$ 成立. 这个性质称为一阶微分形式的不变性.

3. 反函数求导法（低频且易）【030203】

定理 3 设函数 f,g 互为反函数，若 $f'(x_0)$ 存在且不为零，则 $g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可

导，且 $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$. 也可用下式表示，$\left[f^{-1}(x)\right]'=\dfrac{1}{f'(y)}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

4. 基本导数公式（高频且易）【030204】

基本初等函数的求导公式称为基本导数公式. 见下表：

函数名称	导数	微分
常数函数	$(C)'=0$（C 表示常数）	
幂函数	$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}(\mu\in Q^*)$	$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx(\mu\in Q^*)$
三角函数	$(\sin x)'=\cos x$；$(\cos x)'=-\sin x$ $(\tan x)'=\sec^2 x$；$(\cot x)'=-\csc^2 x$ $(\sec x)'=\sec x\tan x$；$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$d(\sin x)=\cos xdx$；$d(\cos x)=-\sin xdx$ $d(\tan x)=\sec^2 xdx$；$d(\cot x)=-\csc^2 xdx$ $d(\sec x)=\sec x\tan xdx$；$d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$
指数函数	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a(a>0)$；$(e^x)'=e^x$	$d(a^x)=a^x\cdot\ln adx(a>0)$；$d(e^x)=e^xdx$
对数函数	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0且a\neq1)$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx(a>0且a\neq1)$；$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$
反三角函数	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；$(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$；$d(\operatorname{arc}\cot x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$ $d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$； $d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

【经典例题】

1. 求函数 $y=\sec x$ 的导数.

【解析】考查导数四则运算—**商**的运算法则，加强对四则运算和基本导数公式的记忆

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{0\cdot\cos x-1\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

2. 求函数 $y=x^\alpha$ 的导数.

【解析】考查复合函数链式求导法则

因为 $(e^x)'=e^x$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以

$$(x^\alpha)'=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^\alpha\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

3. 设 $y=e^{\sin(\ln x)}$，求 dy 及 $\frac{dy}{dx}$.

【解析】考查一阶微分形式不变性.

由一阶微分形式的不变性，得

$$d\left[e^{\sin(\ln x)}\right]=e^{\sin(\ln x)}d\left[\sin(\ln x)\right]=e^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)d(\ln x)=e^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx,$$

所以 $dy=e^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx,\frac{dy}{dx}=e^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}$.

4. 求函数 $y=\log_a x$ 的导数.

【解析】考查反函数求导公式

因为 $y=\log_a x$，所以 $x=a^y$. 根据反函数求导公式, 得 $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{\left(a^y\right)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$.

【期末考试】

（2014.04—12）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=1$，$f'(x)=2$. 用导数定义求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$.

【解析】考查用导数定义，基本初等函数求导公式（知识点：030204）

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x)-f(x)}{x}=f'(0)=1'=0$$

（2013.10—5）设函数 $f(x)=\arctan\left(x^2\right)$，则导数 $f'(1)=$（　）.

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

【解析】考查复合函数求导法则（知识点：03020201）

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$，$f'(1)=\frac{2}{1+1^2}=1$

【答案】C

第二节 几种特殊函数的求导法、高阶导数

1. 几种特殊函数的求导法则（【030301】

1.1 隐函数求导法（低频且易）【03030101】

由方程所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数（也可参考二级知识点：01020103），$y=f(x)$ 形式称为显函数.

$$F(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x) \quad \text{隐函数的显化}$$

分类：（1）隐函数显化后，按显函数的求导法则进行计算；

（2）隐函数不易显化或不能显化，用复合函数求导法则直接将方程两边对自变量 x 求导.

1.2 对数求导法（低频且易）【03030102】

步骤：（1）在方程两边取以 e 为底的对数；（2）利用隐函数求导法则求出导数.

适用范围：多个函数相乘和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

一般地，$f(x)=u(x)^{v(x)}(u(x)>0)$ 的导数为：

$$\ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x)\Rightarrow f'(x)=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right].$$

2. 高阶导数【030302】

2.1 高阶导数的概念（低频且易）【03030201】

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，即 $y''=(y')'$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数，$\cdots$，一般地，$(n-1)$ 阶的导数叫做 n 阶导数，分别记作 $y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}$ 或 $\frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}$.

注：函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 若函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数. 俗话说：高阶导数就是多次接连地求导数.

2.2 高阶导数的求法（低频且易）【03030202】

若函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都在 x 处具有 n 阶导数，则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}，\ (uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\qquad（莱布尼茨公式）.$$

【经典例题】

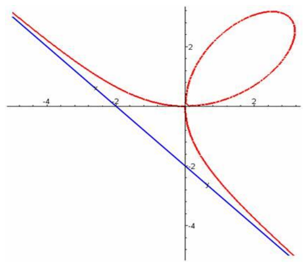
1. 求笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=9xy$ 在点 $(2,4)$ 处的切线方程与法线方程.

【解析】考查隐函数求导法和导数的几何意义

方程在点 (x,y) 附近确定了 y 是 x 的函数.

在方程 $x^3+y^3=9xy$ 两边关于变量 x 求导，将 y 看作是中间变量，得

$$3x^2+3y^2y'=9y+9xy'.$$



将 $x=2,y=4$ 代入上式，得

$12+48y'=36+18y'$，解得 $y'=\dfrac{4}{5}$.

于是笛卡儿叶形线在点 $(2,4)$ 处的切线方程为 $y-4=\dfrac{4}{5}(x-2)$，

即 $y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{12}{5}$；

法线方程为 $y-4=-\dfrac{5}{4}(x-2)$，即 $y=-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{13}{2}$.

2. 求函数 $y=x^{x^2}$ 的导数.

【解析】考查对数求导法.

因为 $y=x^{x^2}$，所以 $\ln y=x^2\ln x$.

两端关于变量 x 求导，将 y 看作是中间变量，得 $\dfrac{1}{y}y'=2x\ln x+x$，$y'=x^{x^2}(2x\ln x+x)$.

3. 求函数 $f(x)=\sin x$ 的 n 阶导数.

【解析】 考查高阶导数

由 $f(x)=\sin x$，得 $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f''(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\times\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$f'''(x)=\cos\left(x+2\times\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\times\dfrac{\pi}{2}\right)$，

归纳得，$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. 类似地，可求 $(\cos x)^n=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

【期末考试】

（2014.04—2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，则导数 $f'(x)=$（　）.

A. $\frac{1}{x}$　　　　B. $-\frac{1}{x}$

C. $\frac{1}{x^2}$　　　　D. $-\frac{1}{x^2}$

【解析】考查隐函数求导法、基本初等函数导数公式（知识点：03030101）

令 $\frac{1}{x}=u$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(u)=\frac{1}{u}$，即 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x \overset{令u=\frac{1}{x}}{\Rightarrow} f(u)=\frac{1}{u}$

从而，知 $f(x)=\frac{1}{x}$；$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

【答案】 D

（2013.10—17）已知函数 $y=f(\sin x)$，且 f 具有二阶导数，求 y''.

【解析】考查函数的二阶导数，复合函数求导（知识点：03030202）

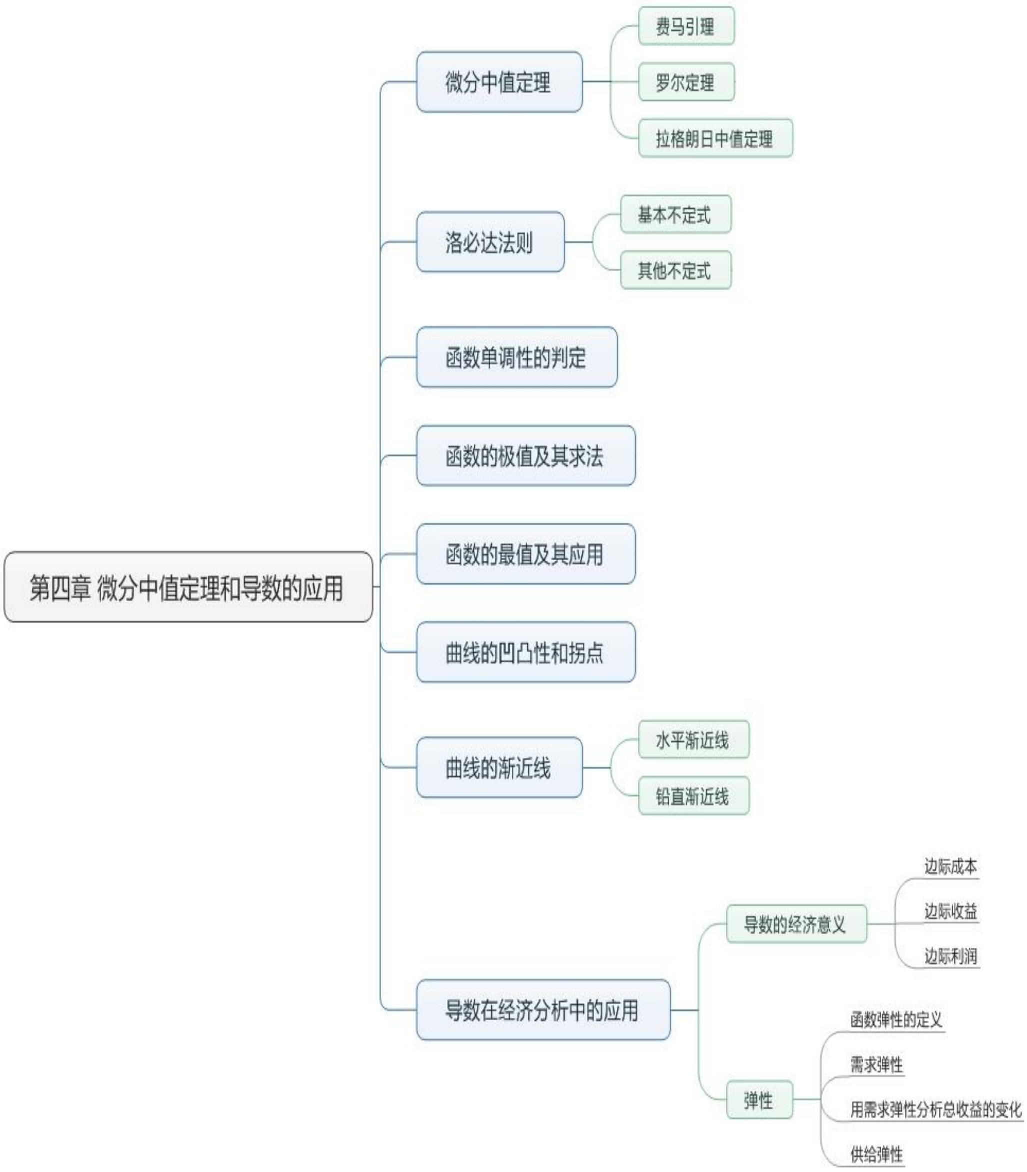
$y'=f'(\sin x)\bullet(\sin x)'=f'(\sin x)\bullet\cos x$，

$y''=\left[f'(\sin x)\right]'\bullet\cos x+f'(\sin x)\bullet(\cos x)'=\left[f''(\sin x)\bullet\cos x\right]\bullet\cos x+f'(\sin x)(-\sin x)$

$=f''(\sin x)\cos^2 x-f'(\sin x)\sin x$

第四章 微分中值定理和导数的应用

框架图



考情分析

本章历年考核分值16-20分，题型以选择题、简单计算和计算题为主，本章重点是拉格朗日中值定理，洛必达法则，函数单调性的判定，函数极值、最值的求法和实际应用,重点掌握函数最值的应用，弹性函数.本章常见考试题型：

1、讨论函数的单调性和凹凸性，求曲线的拐点.

2、求闭区间上连续函数的函数的极值、最值.

3、求曲线的水平渐近线和铅直渐近线.

4、实际问题求最值.

第一节 微分中值定理

1. 罗尔定理（低频且易）【040101】

费马引理 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，并且在x_0处可导，若对任意的$x \in U(x_0)$，有$f(x) \le f(x_0)$ （或$f(x) \ge f(x_0)$），那么$f'(x_0)=0$.

费马定义了驻点，称导数等于零的点为函数的驻点（或稳定点、临界点）.

罗尔定理 若函数$f(x)$满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）在区间端点处的函数值相等，即$f(a)=f(b)$，

那么在(a,b)内至少有一点ξ $(a<\xi<b)$，使得$f'(\xi)=0$.

2. 拉格朗日中值定理（低频且易）【040102】

拉格朗日中值定理 若函数$f(x)$满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导，

那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$成立.

罗尔定理是拉格朗日中值定理当$f(a)=f(b)$时的特殊情形.

推论1 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

推论2 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点的导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都相等，则这两个函数在区间 (a,b) 内之多相差一个常数，即

$$f(x)=g(x)+C, x\in(a,b).$$

这里 C 是一个确定的常数.

【经典例题】

1. 判断函数 $f(x)=x(2x-1)(x-2)$ 的导数方程 $f'(x)=0$ 有几个不同的实根.

【解析】考查罗尔定理

由于 $f(x)$ 为多项式函数，故 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上连续，在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 内可导，且 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)=0$.

根据罗尔定理，在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内至少存在一点 ξ_1，使得 $f'(\xi_1)=0$，即 ξ_1 为 $f'(x)=0$ 的一个实根；在 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 内至少存在一点 ξ_2. 使得 $f'(\xi_2)=0$，即 ξ_2 为 $f'(x)=0$ 的一个实根.

又 $f'(x)=0$ 为一元二次方程，至多有两个实根，故方程 $f'(x)=0$ 有两个不同实根.

2. 证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$.

【解析】考查拉格朗日中值定理

当 $x=\pm1$ 时，等式显然成立.

当 $x\in(-1,1)$ 时，设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$. 由于

$$f'(x)=(\arcsin x)'+(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0.$$

所以 $f(x)=C, x\in(-1,1)$. 又因为 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，故

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1].$$

第二节 洛必达法则

1. 基本不定式“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限（高频且难）【040201】

讨论 $x \to a$ 时，未定式“$\frac{0}{0}$”的情形.

定理1 设函数 $f(x), F(x)$ 满足条件：

（1）当 $x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

（2）在点 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），

则 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$.

讨论 $x \to \infty$ 时，未定式“$\frac{\infty}{\infty}$”的情形.

定理2 设函数 $f(x), F(x)$ 满足条件：

（1）当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

（2）当 $|x| > N$ 时 $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在，且 $F'(x) \neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），

则 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$.

上面的定理中将分子、分母分别求导再求极限的方法称为洛必达法则.

使用洛必达法则时，必须注意：

（1）$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}$ 必须是“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式.

（2）若 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 还是“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式，且函数 $f'(x)$, $F'(x)$ 仍满足定理中 $f(x)$, $F(x)$ 满足的条件，则可以继续使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

（3）若无法判定 $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 的极限状态，或能判定它的极限振荡而不存在，则洛必达法则失效.

（4）把定理中的 $x\to x_0$ 换成 $x\to x_0^-, x\to x_0^+$， $x\to-\infty, x\to+\infty$，只需把定理中的条件（2）做对应修改，定理仍成立.

2. 其他不定式—“$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$”型的极限（高频考点）【040201】

先将不定式“$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$”变为基本的不定式“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，再用洛必达法则来计算.

【经典例题】

1. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ 的极限.

【解析】考查洛必达法则——“$\frac{0}{0}$”

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=2.$$

2. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\tan5x)}{\ln(\tan3x)}$.

【解析】考查洛必达法则——“$\frac{\infty}{\infty}$”

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\tan5x)}{\ln(\tan3x)}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{5\sec^2 5x}{\tan5x}}{\frac{3\sec^2 3x}{\tan3x}}=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\tan3x}{\tan5x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 5x}=1.$$

【期末考试】

（2014.04—18）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$.

【解析】考查洛必达法则（知识点：040201）

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2}\right]=\frac{1}{2}$$

第三节 函数单调性的判定

1. 单调性判断定理（高频且难）【0403】

定理1 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

（1）若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减小；

注意: （1）若把判定法中的闭区间换成其他各种区间（包括无穷区间），那么结论也成立.

（2）若在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$（或 $f'(x)\leq 0$），且等号仅在个别点处成立，结论仍然成立.

判定函数 $f(x)$ 单调性的步骤：

（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）求 $f'(x)$，找出 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点，这些点将定义域分成若干小区间.

（3）列表，由 $f'(x)$ 在各个小区间内的符号确定函数 $f(x)$ 的单调性.

【经典例题】

1. 确定函数 $f(x)=x^3-3x$ 的单调区间.

【解析】考查函数单调性及其单调区间.

函数 $f(x)=x^3-3x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，又 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$, 令

$f'(x)=0$，得 $x=-1, x=1$.

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

【期末考试】

（2014.04—10）设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则下列结论正确的是（　）

A. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少　　B. $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内单调减少

C. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加　　D. $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内单调增加

【解析】考查函数单调性的判别和单调区间（知识点：0403）

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内单调增加，当 $x\in(e,+\infty)$，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内单调减少.

【答案】 D

第四节 函数的极值及其求法

1. 函数的极值及其求法（高频且难）【0404】

定义1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内的任一 x，有 $f(x)<f(x_0)$ （或 $f(x)>f(x_0)$）. 则称函数 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）. 函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点.

定理1（可导函数取极值的必要条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

定理2（第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内可导.

（1）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处

取得极小值；

（3）若 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

判定函数极值的一般步骤：

（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域.

（2）求 $f'(x)$，找出定义域内 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点，这些点将定义域分成若干区间.

（3）列表，由 $f'(x)$ 在上述点两侧的符号，确定其是否为极值点，是极大值点还是极小值点.

（4）求出极值.

定理3（第二充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

【经典例题】

1. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

【解析】考查函数极值的求法.

函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，且 $f'=0$，得驻点 $x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$.

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	非极值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	非极值	$\nearrow$

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$.

【期末考试】

（2014.04—9）已知函数 $y=a\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$（其中 a 为常数）在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处取得极值，则 $a=$（　）.

A. 0　　　　　　B. 1

C. 2　　　　　　D. 3

【解析】考查函数的极值（知识点：0404）

$$y'=-a\sin x-\sin 2x，\quad y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=-a\sin\frac{\pi}{2}-\sin\pi=-a-0，\quad a=0$$

【答案】 A

（2013.10—7）已知函数 $f(x)=ax^2-4x+1$ 在 $x=2$ 处取得极值，则常数 $a=$（　）.

A. 0　　　　　　B. 1

C. 2　　　　　　D. 3

【解析】考查函数极值（知识点：0405）

$$f'(x)=2ax-4,\ f'(2)=4a-4=0，a=1$$

【答案】B

第五节 函数的最值及其应用

1. 函数的最值及其应用（低频且易）【0405】

定义1 函数的最值是指其在某区间上的最大值和最小值，最值是整体性概念. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则根据闭区间上连续函数的性质，它一定能取得最大值和最小值.

取得最值的位置——对于可导函数 $f(x)$ 而言，其在区间 $[a,b]$ 上的最值要么在区间端点取得，要么在区间 (a,b) 内的点 x_0 取得，这时有 $f'(x_0)=0$.

求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最值的步骤如下：

（1）求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点，记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

（2）计算函数值 $f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)$.

（3）函数值 $f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)$ 中的最大者为最大值，最小者为最小值.

【经典例题】

1. 从半径为R的圆形铁片上截下圆心角为θ的扇形，做称一个圆锥形的漏斗. 问θ取多大时，漏斗的容积最大？

【解析】考查函数最值的应用

设所做漏斗的底面半径为r，高为h，则

$$2\pi r = R\theta, r = \sqrt{R^2 - h^2},$$

漏斗的容积V为

$$V = \frac{1}{3}\pi r h = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - h^2\right)h, 0 < h < R.$$

由$V' = \frac{1}{3}\pi R^2 - \pi h^2$，令$V' = 0$，得唯一驻点$h = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

由$V'' = -2\pi h$，知$V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) < 0$. 故当$h = \frac{R}{\sqrt{3}}$时，$V(h)$取得最大值，此时

$$\theta = \frac{2\pi\sqrt{R^2 - h^2}}{R}\bigg|_{h=\frac{R}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}\pi.$$

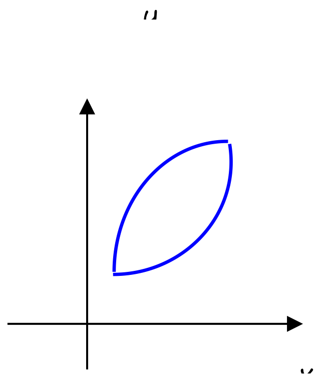
因此，当$\theta = \frac{2}{3}\sqrt{6}\pi$时，漏斗的容积最大.

第六节 曲线的凹凸性和拐点

1. 曲线的凹凸性和拐点（高频且难）【0406】

定义1 设函数$f(x)$在区间(a,b)内连续. 若对任意$x_1, x_2 \in (a,b)$，恒有

$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, 则称$f(x)$在区间$(a,b)$内是凹的；



若对任意$x_1, x_2 \in (a,b)$，恒有$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$，

则称$f(x)$在区间(a,b)内是凸的.

若$f(x)$在区间(a,b)内具有一阶导数，则有下面的性质：

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有一阶导数，若曲线 $y=f(x)$ 位于其每一点处切线的上方，则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是凹的；若曲线 $y=f(x)$ 位于其每一点处切线的下方，则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是凸的.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有二阶导数，则可利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性.

定理1 设函数在区间内具有二阶导数.

（1）若当 $x\in(a,b)$ 时 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的；

（2）若当 $x\in(a,b)$ 时 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的.

定义2 设 M 为曲线 $y=f(x)$ 上一点，若曲线在点 M 的两侧有不同的凹凸性，则点 M 称为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

判别拐点的必要条件：

定理2（拐点的必要条件）若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有二阶导数，且 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

判别拐点的两个充分条件：

定理3 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有二阶导数，且 $f''(x_0)=0$. 若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号，则 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧同号，则 $(x_0,f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 对于 $f''(x)$ 不存在的点 $(x_0,f(x_0))$ 也可能是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 注意，极值点、驻点是指 x 轴上的点，而拐点是指曲线上的点.

判别曲线的凹凸性与拐点的一般步骤如下：

（1）确定函数的定义域.

（2）求 $f''(x)$，并找出 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，这些点将定义域分成若干小区间.

（3）列表，由 $f''(x)$ 在上述点两侧的符号确定曲线的凹凸性与拐点.

【经典例题】

1. 求曲线$y=x^4-2x^3+1$的凹凸区间与拐点.

【解析】考查函数凹凸性判定及拐点.

曲线对应函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$y'=4x^3-6x^2，\quad y''=12x^2-12x=12x(x-1).$$

令$y''=0$，得$x_1=0$，$x_2=1$.

列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	$\cup$	拐点	$\cap$	拐点	$\cup$

注：表中符号“$\cup$”表示凹，“$\cap$”表示凸.

所以，曲线$y=x^4-2x^3+1$在$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$内是凹的，在$(0,1)$内是凸的；曲线的拐点为$(0,1)$和$(1,0)$.

【期末考试】

（2014.04—14）14. 求曲线$y=x^3-3x^2-1$的拐点.

【解析】考查函数求导，凹凸性判别，拐点（知识点：0406）

曲线对应函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$y'=3x^2-6x$，$y''=6x-6$.

令 $y''=0$，即$6x-6=0$，得$x=1$. 此时，$y=1^3-3\times1^1-1=-3$，

列表如下：（可省略）

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	−	0	+
y	$\cap$	拐点	$\cup$

当 $x<1$， $y''=6x-6<0$，当 $x>1$ 时， $y''=6x-6>0$，因此点 $(1,-3)$ 是曲线的拐点.

第七节 曲线的渐近线

定义1 当曲线 $y=f(x)$ 上的一个动点 P 沿着曲线趋于无穷远时，若动点 P 与某定直线的距离 l 趋于零，则直线 l 称为曲线 $y=f(x)$ 的**渐近线.**

1. 水平渐近线（高频且易）【040701】

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时，有水平渐近线 $y=b$.

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时，有水平渐近线 $y=b$.

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时，有水平渐近线 $y=a$.

2. 铅直渐近线（高频考点）【040702】

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$， 则曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线 $x=x_0$.

铅直渐近线又叫垂直渐近线.

【经典例题】

1. 求曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

【解析】考查 $y=\arctan x$ 水平渐近线求法

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, 所以直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\arctan x$ 在 $x\to+\infty$ 时的水平渐近线.

又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

所以直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\arctan x$ 在 $x\to-\infty$ 时的水平渐近线.

2. 求曲线 $y=\dfrac{x}{x-2}+3$ 的水平渐近线和铅直渐近线.

【解析】考查铅直渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}-3\right)=4$， $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x}{x-2}+3\right)=\infty$，所以直线 $y=4$ 为曲线 $y=\dfrac{x}{x-2}+3$ 的水

平渐近线，直线 $x=2$ 为曲线 $y=\dfrac{x}{x-2}+3$ 的铅直渐近线.

【期末考试】

（2013.10—19）求曲线 $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ 的水平和铅直渐近线.

【解析】考查曲线的渐近线（知识点：040701）

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1}=1$，水平渐近线为：$y=1$.

令 $x+2=0$，得：$x=-2$. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+3}{x+2}=\infty$, 铅直渐近线为：$x=-2$

第八节 导数在经济分析中的应用

1. 导数的经济意义【040801】

若函数 $y=f(x)$ 可导，则称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数，$f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**边际函数值**. 在经济学中，边际概念反映一种经济变量 y 相对于另一种经济变量 x 的变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

1.1 边际成本（高频且易）【04080101】

设 $C(q)$ 表示生产某种产品 q 个单位的总成本. 平均成本 $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}$ 表示生产 q 个单位产品时, 平均每单位产品的成本. $C'(q)$ 表示产量为 q 时的边际成本.

1.2 边际收益（高频且易）【04080102】

设 $R(q)$ 表示销售某种商品 q 个单位的总收益. 平均收益 $\overline{R}(q)=\dfrac{R(q)}{q}$ 表示销售 q 个单位商品时, 平均每单位商品的收益. $R'(q)$ 表示销量为 q 时的边际收益.

1.3 边际利润（高频且易）【04080103】

设 $L(q)=R(q)-C(q)$ 表示生产或销售 q 个单位某种商品的总利润.

平均利润 $\overline{L}(q)=\dfrac{L(q)}{q}$ 表示生产或销售 q 个单位商品时，平均每单位商品的利润.

$L'(q)$ 表示产量或销售为 q 时的边际利润.

2. 弹性（低频且易）【040802】

2.1 函数弹性的定义（低频且易）【04080201】

定义1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，函数的相对改变量 $\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{y_0}$ 与自变量的相对改变量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y}{y_0}\Big/\frac{\Delta x}{x_0}$ 称为函数在点 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 两点间的弹性. 当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{y_0}\Big/\frac{\Delta x}{x_0}$ 的极限值 $\frac{x_0}{f(x_0)}f'(x_0)$ 称为函数在点 x_0 处的弹性，记作

$$\frac{Ey}{Ex}\Big|_{x=x_0} \text{ 或 } \frac{E}{Ex}f(x)\Big|_{x=x_0}, \text{即，} \frac{Ey}{Ex}\Big|_{x=x_0}=\frac{x_0}{f(x_0)}f'(x_0).$$

2.2 需求弹性（低频且易）【04080202】

定义2 已知某商品的需求函数 $Q=f(p)$ 在点 p_0 处可导，p 表示价格，Q 表示需求量. $\frac{\Delta Q}{Q_0}\Big/\frac{\Delta p}{p_0}$ 称为该商品在 p_0 与 $p_0+\Delta p$ 两点间的需求弹性，$\lim\limits_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta Q}{Q_0}\Big/\frac{\Delta p}{p_0}$ $=\frac{p_0}{f(p_0)}f'(p_0)$ 称为该商品在 p_0 处的需求弹性，记作 $\eta(p)\big|_{p=p_0}=\eta(p_0)=\frac{p_0}{f(p_0)}f'(p_0)$.

一般而言，需求量 Q 是价格 p 的减函数，因此 $\eta(p_0)$ 一般是负值.

2.3 用需求弹性分析总收益的变化（低频且易）【04080203】

总收益 R 是商品价格 p 与销售量 Q 的乘积，即 $R(p)=pQ(p)$，所以

$$R'(p)=Q(p)+pQ'(p)=Q(p)\left[1+\frac{p}{Q(p)}Q'(p)\right]=Q(p)(1+\eta).$$

（1）若 $|\eta(p_0)|<1$，即低弹性，则 $R'(p)>0$，即 $R(p)$ 单调增加. 价格上涨，总收益增加；价格下跌，总收益减少.

（2）若 $|\eta(p_0)|>1$，即高弹性，则 $R'(p)<0$，即 $R(p)$ 单调减少. 价格上涨，总收益减少；价格下跌，总收益增加.

（3）若 $|\eta(p_0)|=1$，即单位弹性，则 $R'(p)=0$，此时价格的改变对总收益的影响不大.

2.4 供给弹性（低频且易）【04080204】

定义3 已知某商品的供给函数$Q=g(p)$在点p_0处可导，p表示价格，Q表示供应量. $\dfrac{\Delta Q}{Q_0}\Big/\dfrac{\Delta p}{p_0}$称为该商品在$p_0$与$p_0+\Delta p$两点间的供给弹性，$\lim\limits_{\Delta p\to 0}\dfrac{\Delta Q}{Q_0}\Big/\dfrac{\Delta p}{p_0}=\dfrac{p_0}{g(p_0)}g'(p_0)$称为该商品在$p_0$处的供给弹性，记作$\varepsilon(p)|_{p=p_0}=\varepsilon(p_0)=\dfrac{p_0}{g(p_0)}g'(p_0)$. 一般而言，供给量$Q$是价格$p$的增函数，因此$\varepsilon(p_0)$一般是正值.

【经典例题】

1. 设生产某商品的固定成本为20 000元，没生产1个单位产品，成本增加100元，总收益函数为$R(q)=400q-\dfrac{1}{2}q^2$. 设产销平衡，试求边际成本、边际收益及边际利润.

【解析】考查边际函数——边际成本、边际收益、边际利润.

总成本函数$C(q)=20000+100q$，

边际成本$C'(q)=100$；

总收益函数$R(q)=400q-\dfrac{1}{2}q^2$，

边际收益$R'(q)=400-q$；

总利润函数$L(q)=R(q)-C(q)=-\dfrac{1}{2}q^2+300q-20000$，

边际利润$L'(q)=R'(q)-C'(q)=-q+300$.

2. 已知某厂生产一种产品q件的总成本函数为$C(q)=1200+2q$（万元），需求函数为$p=\dfrac{100}{\sqrt{q}}$，其中p为产品的价格. 设需求量等于产量.

（1）求需求对价格的弹性；

（2）产量q为多少时总利润最大？并求最大总利润.

【解析】考查弹性、边际函数

（1）需求价格的弹性为

$$\frac{Eq}{Ep}=\frac{p}{f(p)}f'(p)=\frac{p}{\frac{10000}{p^2}}\left(\frac{10000}{p^2}\right)'=\frac{p}{\frac{10000}{p^2}}\cdot\frac{-2\times10000}{p^3}=-2$$

（2）总利润 $L(q)=R(q)-C(q)=pq-C(q)=\frac{100}{\sqrt{q}}q-1200-2q=100\sqrt{q}-1200-2q$，

$L'(q)=\frac{100}{2\sqrt{q}}-2$. 令 $L'(q)=0$，得 $q=625$（件），$L(625)=50$（万元）. 因为 $L''(625)<0$，

锁头当产量为625件时总利润最大，最大总利润为50万元.

【期末考试】

（2014.04—21）设某厂生产收音机 Q 台时的总成本为 $C(Q)=2000+10Q$ (元)，销售价格为 $P=800-Q$ (元)，假定产销平衡.

(1)求利润函数 $L(Q)$；

(2)问该厂生产多少台时可获得最大利润?并求获得最大利润时的价格.

【解析】考查边际函数、弹性（知识点：0408）

（1）求利润函数

$$L(Q)=PQ-C=(800-Q)Q-(2000+10Q)=-Q^2+790Q-2000$$

（2）$L'(Q)=\left(-Q^2+790Q-2000\right)'=-2Q+790$，

令 $L'(Q)=0$，即 $-2Q+790=0$，

解得 $Q=395$（台）

$$L''(Q)=[L'(Q)]'=(-2Q+790)'=-2<0,$$

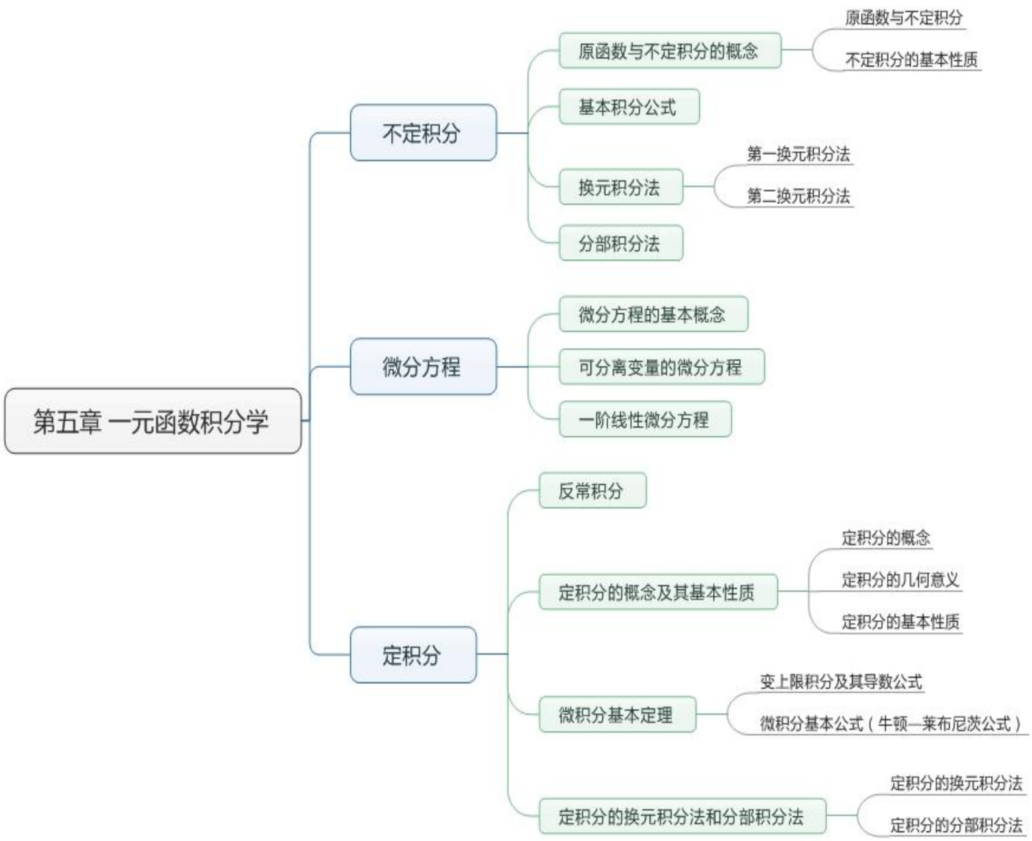
因此 $Q=395$ 是极大值点，由于 $Q=395$ 是唯一的驻点，因此 $Q=395$ 时，$L(Q)$ 取最大值.

也就是产量为 395 台时，该公式可获得最大利润.

获得最大利润的价格 $P=800-Q=800-395=405$（元）.

第五章 一元函数积分学

框架图



考情分析

本章历年考核分值大约在 25 分左右，题型以选择题、计算题为主，本章重点是不定积分的概念，不定积分的运算，定积分的概念和性质，变上限积分求导公式和牛顿—莱布尼茨公式，定积分的应用.难点在求不定积分和定积分的应用.本章常见考试题型：

1、不定积分的概念与计算.

2、定积分的计算.

3、定积分计算平面图形的面积.

4、定积分计算旋转体的体积.

5、无穷限反常积分.

6、微分方程.

第一节 原函数与不定积分的概念

1. 原函数与不定积分【050101】

1.1 原函数的定义（高频且易）【05010101】

定义1 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数，若存在函数 $F(x)$，对于任意的 $x \in I$，都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

原函数存在定理1 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$，使对任一 $x \in I$ 都有 $F'(x)=f(x)$. 简单的说：连续函数一定有原函数.

定理2 若 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数，则

（1）$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数. 其中 C 为任意常数. 说明：若 $f(x)$ 在区间 I 有一个原函数 $F(x)$，则 $f(x)$ 必有无穷多个原函数，且其在 I 上的全体原函数可以表示为 $F(x)+C$，其中 C 为任意常数.

（2）$f(x)$ 在区间 I 上任意两个原函数之间至多相差一个常数.

1.2 不定积分的定义（高频且易）【05010102】

定义2 在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)dx$；其中记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被

积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量. 说明：若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的不定积分，即

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

从而不定积分 $\int f(x)dx$ 可表示 $f(x)$ 的任意一个原函数. 若 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，也称 $y=F(x)$ 的图形为 $f(x)$ 的一条积分曲线. 曲线族 $y=F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的积分曲线族.

2. 不定积分的基本性质（高频且易）【050102】

（1）设 k 是不为零的常数，则 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

（2）$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

（3）$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$ 或 $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$.

（4）$\int F'(x)dx = F(x)+C$.

性质（3）与（4）说明不定积分与导数（或微分）互为逆运算.

【经典例题】

1. 设曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 (x,y) 处的切线斜率为 $3x^2$，且曲线过点 $(1,2)$，求 $f(x)$.

【解析】考查不定积分及导数的几何意义

由题设，得 $f'(x)=3x^2$，所以 $f(x)=\int 3x^2dx = x^3+C$.

由于曲线 $y=f(x)$ 过点 $(1,2)$，所以 $f(1)=2$，即 $1+C=2$，得 $C=1$，所以 $f(x)=x^3+1$.

2. 已知 $\int f(x)e^{x^2}dx = -e^{x^2}+C$，求 $f(x)$.

【解析】考查不定积分的基本性质

因为 $\int f(x)e^{x^2}dx = -e^{x^2}+C$，所以 $\dfrac{d}{dx}\int f(x)e^{x^2}dx = \dfrac{d}{dx}\left(e^{x^2}+C\right)$，故 $f(x)e^{x^2} = -2xe^{x^2}$，所以 $f(x)=-2x$.

【期末考试】

（2013.10—9）若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，则下列选项正确的是（　）.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = g(x)+C$　　　　B. $\int g(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = g(x)$　　　　D. $\int g(x)\mathrm{d}x = f(x)$

【解析】考查原函数与不定积分定义（知识点：050101）

$f'(x)=g(x)$

【答案】B

第二节　基本积分公式

1. 不定积分基本积分公式（高频且易）【0502】

$\int kdx = kx+C$（k 是常数）； $\int \cos xdx=\sin x+C$； $\int \sin xdx=-\cos x+C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\int \sec^2 xdx=\tan x+C$； $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\int \csc^2 xdx=-\cot x+C$
$\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C(\mu\neq -1)$； $\int \frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$	$\int e^x dx=e^x+C$；$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$； $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$	$\int \sec x\tan xdx=\sec x+C$；$\int \csc x\cot xdx=-\csc x+C$

【经典例题】

1. 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

【解析】考查不定积分计算公式

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int \frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}dx=\int dx-\int \frac{1}{1+x^2}dx=x-\arctan x+C.$$

2. 设生产 x 个单位产品时的边际成本 $C'(x)=9x^2-4x+1$，固定成本为50，求总成本函数 $C(x)$.

【解析】考查导数的经济意义和不定积分的计算

总成本函数为

$$C(x)=\int C'(x)dx=\int(9x^2-4x+1)dx=3x^3-2x^2+x+C_1.$$

由于固定成本为50，所以$C(0)=50$，得$C_1=50$，故总成本函数为

$$C(x)=3x^3-2x^2+x+50.$$

【期末考试】

（2013.10—15）求不定积分$\int(3\mathrm{e}^x+\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x.$

【解析】考查不定积分性质及其基本积分公式（知识点：0502）

$$\int(3\mathrm{e}^x+\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=\int 3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^x+\arctan x+\frac{1}{x}+\mathrm{C}$$

第三节　换元积分法

1. 第一换元积分法（高频且难）【0503】

定义1 把复合函数的微分法反过来用于求不定积分，利用中间变量的代换，得到复合函数的积分法，称为换元积分法，简称换元法. 设$f(u)$具有原函数$F(u)$，即$F'(u)=f(u)$，$\int f(u)du=F(u)+C$，若u是中间变量：$u=\varphi(x)$，且设$\varphi(x)$可微，则根据复合函数微分法，有$dF[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$，从而有：

定理1 设函数$f(u)$有原函数$F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}=F[\varphi(x)]+C$$

此公式称为第一换元积分法或第一换元积分公式.

第一换元积分法的基本思路：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)\overset{u=\varphi(x)}{=}\int f(u)du=F[\varphi(x)]+C.$$

若$\int f(u)du=F(u)+C$，则在用第一换元积分法求不定积分时，凑微分形式有：
（1）$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C(a\neq 0)$

（2） $\int f(x^{\alpha})x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}\int f(x^{\alpha})d(x^{\alpha})=\frac{1}{\alpha}F(x^{\alpha})+C(\alpha\neq 0)$
（3） $\int f(e^{x})e^{x}dx=\int f(e^{x})d(e^{x})=F(e^{x})+C$
（4） $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x=F(\ln x)+C$
（5） $\int f(\sin x)\cos xdx=\int f(\sin x)d(\sin x)=F(\sin x)+C$
（6） $\int f(\cos x)\sin xdx=-\int f(\cos x)d(\cos x)=-F(\cos x)+C$
（7） $\int f(\tan x)\sec^2 xdx=\int f(\tan x)d(\tan x)=F(\tan x)+C$
（8） $\int f(\cot x)\csc^2 xdx=-\int f(\cot x)d(\cot x)=-F(\cot x)+C$
（9） $\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x)=F(\arctan x)+C$
（10） $\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)=F(\arcsin x)+C$

另外添加几个常用积分公式:

$\int \tan xdx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$； $\int \cot xdx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$
$\int \sec xdx=\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert+C$； $\int \csc xdx=\ln\lvert\csc x-\cot x\rvert+C$
$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$； $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$； $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$

补充：有理函数不定积分求法

函数类型	积分方法
有理函数 $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$	先将 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 化成整式及部分最简分式知和，再逐一积分： $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln\lvert x-a\rvert+C$

	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}$ $=\frac{M}{2}\ln\left\|x^2+px+q\right\|+\frac{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C \quad \left(p^2-4q<0\right)$

2. 第二换元积分法（高频且难）【050302】

定理2 设 $x=\psi(t)$ 是单调、可微的，且 $\psi'(t)\neq 0$. 又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式 $\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}=F\left[\psi^{-1}(x)\right]+C$，此公式称为第二换元积分法或第二换元积分公式，其中 $\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

第二换元法的基本思路：$\int g(x)dx \overset{x=\psi(t)}{=} \int g[\psi(t)]\psi'(t)dt=G(t)+C=G\left[\psi^{-1}(x)\right]+C$（其中 C 为任意常数）. 当被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 时，通过换元公式 $\sqrt[n]{ax+b}=t$，去掉根号.

【经典例题】

1. 求不定积分 $\int \cos^3 xdx$

【解析】考查凑微分

$$\int \cos^3 xdx=\int \cos^2 xd\sin x=\int\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

2. 求不定积分 $\int \frac{2x^2-x}{x+1}dx$

【解析】考查有理函数求不定积分

$$\int \frac{2x^2-x}{x+1}dx=\int\left(2x-3+\frac{3}{x+1}\right)dx=2\int xdx-3\int dx+3\int \frac{1}{x+1}d(x+1)=x^2-3x+3\ln|x+1|+C$$

3. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

【解析】考查含根式的不定积分计算

设 $\sqrt{1+e^x}=t$，则

$e^x = t^2 - 1, x = \ln\left(t^2 - 1\right), dx = \dfrac{2t}{t^2 - 1}dt$，

故

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{2}{t^2-1}dt = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \int \frac{1}{t-1}d(t-1) - \int \frac{1}{t+1}d(t+1)$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C = 2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right) - x + C.$$

第四节 分部积分法

1. 分部积分法（低频且难）【0504】

定理1 设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 的导数都存在且连续，则

$$\int u(x)v'(x)dxx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

上述公式称为分部积分公式. 利用分部积分公式求不定积分的方法称为分部积分法.

分部积分法选取 u 的一般原则：设 $\int f(x)dx$，其中 $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$.

（1）$dv = \psi(x)dx$；$\int \psi(x)dx$ 易积分，v 易求得；（2）$\int vdu$ 要比 $\int udv$ 易积出.

分部积分法选 u 特例

$$\left.\begin{aligned}&（1）\left.\begin{aligned}&\int x^n e^{\alpha x}dx\\&\int x^n \sin xdx\end{aligned}\right\}\ 设\ u = x^n\\&（2）\int x^n \ln xdx \quad 设\ u = \ln x\end{aligned}\right\}\ dv = x^n dx$$

（3）$\int x^n \arcsin xdx$ 设 $u = \arcsin x$

分部积分法选 u 优先原则——“对反代三指”法（或称为“LIATE”法）

选 u 的优先顺序 ↓

L	对数函数
I	反三角函数
A	代数函数
T	三角函数
E	指数函数

【经典例题】

1．求不定积分 $\int x\sin 2xdx$

【解析】考查分部积分法

设 $u=x,dv=\sin 2xdx=d\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$，则 $v=-\frac{1}{2}\cos 2x$. 利用分部积分公式，得

$$\int x\sin 2xdx=\int xd\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int \cos 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\int \cos 2xd(2x)$$

$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

2．求不定积分 $\int x^2e^xdx$.

【解析】考查两次分部积分求不定积分

$$\int x^2e^xdx=\int x^2d(e^x)=x^2e^x-\int e^xdx^2=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2\int xde^x$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

3．设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x\ln x$ ，求：$\int xf(x)dx$

【解析】考查分部积分和换元法求不定积分

因为 $f(x)$ 的一个原函数为 $x\ln x$ ，所以 $f(x)=(x\ln x)'$ ，故

$$\int xf(x)dx=\int x(x\ln x)'dx=x\cdot x\ln x-\int x\ln xdx=x^2\ln x-\frac{1}{2}\int \ln xd(x^2)$$

$$=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C.$$

第五节 微分方程初步

1．微分方程的基本函数【0505】

1.1 微分方程的一般概念（低频且易）【050502】

定义1 凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，称为微分方程.

未知函数都是一元函数，这种微分方程称为常微分方程，简称为微分方程.

定义2 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

定义3 满足微分方程的函数，称为微分方程的解.

定义4 若微分方程的解中所含独立任意常数的个数等于微分方程的阶,则此解称为微分方程的通解.

定义5 用来确定微分方程通解中任意常数的数量称为定解条件（或初始条件）.

定义6 满足初始条件的解称为微分方程的特解.

定义7 求微分方程满足初始条件的问题，称为初值问题.

定义8 微分方程通解的图形称为该方程的积分曲线族, 微分方程特解的图形称为该方程的积分曲线.

2. 可分离变量的微分方程（高频且难）【050502】

定义 9 若一个一阶微分方程能写称 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式，就说，能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 dy，另一端只含 x 的函数和 dx，则称原方程为可分离变量的微分方程. 这种将微分方程中的变量分离开后，然后求解的方程称为分离变量法.

3. 一阶线性微分方程（低频且难）【050503】

定义 10 形如 $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ 的微分方程称为一阶线性微分方程，其中 $a(x),b(x)$ 与 $c(x)$ 是已知函数. 当 $c(x)$ 恒为零时，$a(x)y' + b(x)y = 0$ 称为一阶齐次线性微分方程;当 $c(x)$ 不恒为零时，$a(x)y' + b(x)y = c(x)$ 称为一阶非齐次线性微分方程.

一般地，一阶齐次线性微分方程表示为 $y' + P(x)y = 0$，一阶非齐次线性微分方程表示为 $y' + P(x)y = Q(x)$ 其中 $P(x),Q(x)$ 是已知函数.

一阶齐次线性微分方程 $y + P(x)y = 0$ 的通解：$y = Ce^{-\int P(x)dx}$，其中 $C = \pm C_1$ 为任意常数（因为 $y = 0$ 也是微分方程的解，所以 C 可为 0）.

一阶非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为：

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C\right].$$

【经典例题】

1. 求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解.

【解析】考查可分离变量的微分方程

当$y\neq 0$时，分离变量，得$\frac{dy}{y}=2xdx$. 两边不定积分$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$，

即得通解$\ln|y|=x^2+C_1$，从而$|y|=e^{x^2+C_1}=e^{C_1}e^{x^2}$，即$y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$，而$\pm e^{C_1}$是任意非零常数，把它记作$C$. 当$y=0$时，微分方程成立，即$y=0$也是微分方程的解，而这个解恰好对应$C=0$的情形，于是便得方程的通解为$y=Ce^{x^2}$，其中$C$为任意常数.

2. 求微分方程$y'+y=x$满足初始条件$y|_{x=0}=1$的解.

【解析】考查一阶非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$.

由题，知$P(x)=1,Q(x)=x$. 由通解公式得

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]=e^{-\int dx}\left(\int xe^{\int dx}+C\right)=e^{-x}\left(\int xe^{x}dx+C\right)$$

$$=e^{-x}\left(xe^{x}-e^{x}+C\right)=x-1+Ce^{-x}.$$

【期末考试】

（2014.04—15）求微分方程$\mathrm{e}^{y}y'-\mathrm{e}^{3x}=0$的通解.

【解析】考查可分离变量的微分方程（知识点：050502）

$\mathrm{e}^{y}y'-\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\mathrm{e}^{3x}=0$,则有$\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$，对方程两边同时积分

$\int\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\int\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x\Rightarrow\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\frac{1}{3}C\Rightarrow 3\mathrm{e}^{y}=\mathrm{e}^{3x}+C$（$C$为任意常数）.

第六节 定积分的概念及其性质

1. 定积分的概念（低频且易）【050602】

定义1 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，用区间(a,b)内任意$n-1$个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间$[a,b]$分成n个小区间，小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

在每个小区间上任取一点$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，作和

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，令$\lambda \to 0$，若极限

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

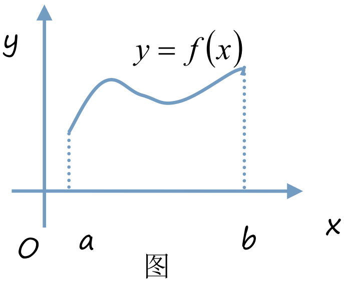
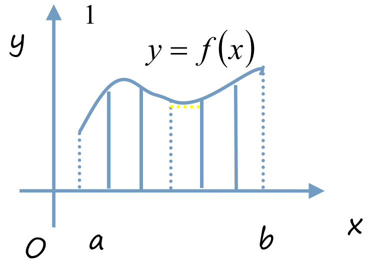


图 1



存在，则称此极限值为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，

记作$\int_a^b f(x)dx$，即，$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. 这时称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，

其中$f(x)$称为被积函数，x称为积分变量，$f(x)dx$称为被积表达式，b称为积分上限，a称为积分下限.

定积分可表示下面两个具体问题：

（1）曲边梯形面积A是函数$y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$在$[a,b]$上的定积分，即$A = \int_a^b f(x)dx$.

（2）产量从0到Q的可变成本，是边际成本函数$f(q)$在产量区间$[0,Q]$上的定积分，即$C_v = \int_0^Q f(q)dq$.

注意：（1）定积分$\int_a^b f(x)dx$的值是一个常数，其大小只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，但与积分变量的x符号无关，所以改变函数自变量的字母不改变定积分的值，即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du .$$

（2）若函数$y = f(x)$在区间$[a,b]$上恒等于1，则$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a$.

（3）由定积分定义，可知$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$，$\int_a^a f(x)dx = 0$

（4）极限过程是$\lambda \to 0$，而不仅仅只是$n \to \infty$：前者是无限细分的过程，后者是分店无限增大加的过程。无限细分，分点必然要无限增加，但分点无限增加，并不能保证无

限细分.

（5）关于函数的可积性，有几个重要结论：可见函数必有界；有限闭区间$[a,b]$上的连续函数可积；有限闭区间$[a,b]$上的单调函数可积；在有限闭区间$[a,b]$上只有有限个间断点的有界函数可积.

2. 定积分的几何意义（低频且易）【050603】

根据被积函数的不同情况，定积分的几何意义：

（1）若 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上连续且非负，即 $f(x)\geq 0$，此时 $\int_a^b f(x)dx$ 是由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A，即

$$\int_a^b f(x)=A$$

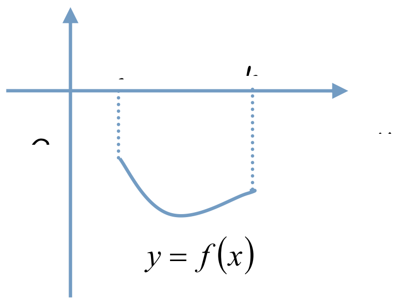


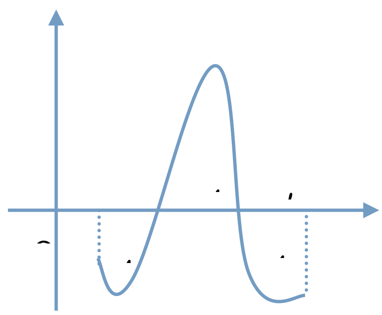
图2

（2）若 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上连续且非负，即 $f(x)\leq 0$，此时 $\int_a^b f(x)dx$ 是由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形面积的相反数$-A$（图2），即

$$\int_a^b f(x)=-A.$$

（3）若 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上连续，其取值既有正值又有负值，此时 $\int_a^b f(x)dx$ 是由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形面积的代数和，即

$$\int_a^b f(x)dx=-A_1+A_2-A_3.$$



图

3. 定积分的基本性质（低频且易）【050604】

性质1 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$.

性质2 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ （k 为常数）.

性质3（积分区间的可加性）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

性质4（比较定理）设在区间$[a,b]$上有 $f(x)\leq g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

推论1 设在区间$[a,b]$上有 $f(x)\geq 0$，则 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

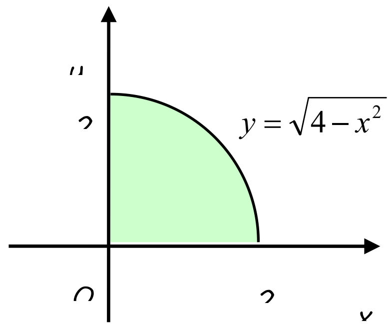
推论2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

性质5（估值定理）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$.

性质6（积分中值定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi(a \le \xi \le b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

【经典例题】



1. 计算定积分 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

【解析】考查定积分的几何意义.

在区间 $[0,2]$ 上，曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 是圆周 $x^2+y^2=4$ 的 $\dfrac{1}{4}$ 部分，所以定积分 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ 是半径为2的圆面积的 $\dfrac{1}{4}$. 即, $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \dfrac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi$.

2. 估计定积分的取值范围.

【解析】考查估值定理

设 $f(x)=e^{-\sin x}$，则 $f'(x)=-e^{-\sin x}\cos x$. 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内，$f'(x)<0$，函数 $f(x)=e^{-\sin x}$ 单调减少，故其最大、最小值分别为

$$M=f(0)=e^{-\sin 0}=1, m=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{e},$$

由估值定理，得 $\dfrac{\pi}{2e} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}dx \le \dfrac{\pi}{2}$.

【期末考试】

（2013.04—17）利用定积分的性质，比较三个数 1、e 及 $\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x$ 的大小.

【解析】考查定积分的性质——比较定理（知识点：050604）

因为在区间$\left[0,1\right]$上恒有$1\le e^{x^2}\le e$，所以由定积分的性质得$1\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e$

第七节 微积分基本定理

1. 变上限积分及其导数公式（低频且难）【050701】

定义1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，则任给$x\in[a,b]$，定积分$\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上定义了一个函数，称为积分上限函数（或变上限积分），记作$\Phi(x)$，即$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a\le x\le b)$.

若$f(t)\ge 0(t\in[a,b])$，则$\Phi(x)$表示区间$[a,x]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积.

定理1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，则积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$是$[a,b]$上的连续函数.

定理2（微积分基本定理）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导，且导数为$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt(a\le x\le b)$ $(a\le x\le b)$，即$\Phi(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

推论1 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$在$[a,b]$上必存在原函数.

即，积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

推论2 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，$u=\varphi(x)$在$[a,b]$上可导，且$u\in[a,b]$，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt=f[\varphi(x)]\varphi'(x)\quad(a\le x\le b).$$

2. 微积分基本公式（牛顿—莱布尼茨公式）（低频且难）【050702】

定理 3 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

此公式称为牛顿—莱布尼茨公式，可简记为$F(a)-F(b)=F(x)|_a^b$.

【经典例题】

1. 求函数的导数：设 $G(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$，求 $G'(x)$.

【解析】考查积分区间可加性，微积分基本定理

利用积分区间可加性，得

$$G(x)=\int_x^a\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt+\int_a^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt=-\int_a^x\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt+\int_a^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt\text{，}$$

所以

$$G'(x)=-\left(\int_a^x\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt\right)'+\left(\int_a^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^4}}\cdot\left(x^2\right)'$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

2. 设 $f(x)=x^2-\int_0^1 f(x)dx$，计算 $\int_0^1 f(x)dx$，并求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】考查微积分基本公式——牛顿—莱布尼茨公式

由定积分的值是一个常数，设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $f(x)=x^2-A$.

对上式两边从 0 到 1 求定积分，得 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 Adx$，

即 $A=\frac{1}{3}x^3\,|_0^1-A$，解得 $A=\frac{1}{6}$，所以

$$\int_0^1 f(x)dx=A=\frac{1}{6},f(x)=x^2-A=x^2-\frac{1}{6}.$$

第八节 定积分的换元积分法和分部积分法

1. 定积分的换元积分法（高频且难）【050801】

定理 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

（1）$\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上单调，且具有连续导数 $\varphi'(t)$；

（2）当 t 在 $[a,b]$ 上变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi'(t))\varphi'(t)dt$$

则称为定积分的**换元积分公式**.

2. 定积分的分部积分法（低频且难）【050802】

定理 2 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx .$$

上式称为定积分的分部积分公式.

【经典例题】

1. 计算定积分：$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

【解析】考查定积分的换元积分法

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x) = -\arctan(\cos x)\big|_0^{\pi}$$

$$= -[\arctan(\cos\pi)-\arctan(\cos 0)]$$

$$= -[\arctan(-1)-\arctan 1]$$

$$= -\left[\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

2. 设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数，证明：

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$；

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

【解析】考查定积分的换元积分，积分区间的可加性

根据积分区间的可加性，有

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx .$$

对 $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ 作变量代换，令 $x=-t$，则 $dx=-dt$，有

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx ,$$

所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$$

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，故

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 .$$

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，故

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx .$$

3. 设 $f(x)=\int_{\pi}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$，计算 $\int_{0}^{\pi} f(x)dx$.

【解析】考查积分上限函数的导数公式

由积分上限函数的导数公式，得 $f'(x)=\frac{\sin x}{x}$，且 $f(\pi)=0$，所以

$$\int_{0}^{\pi} f(x)dx = xf(x)|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} xdf(x) = [\pi f(\pi)-0] - \int_{0}^{\pi} xf'(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{\pi} xf'(x)dx = -\int_{0}^{\pi} \sin xdx = \cos x|_{0}^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2 .$$

【期末考试】

（2014.04—19）计算定积分 $\mathrm{I}=\int_{0}^{2}\frac{x}{2+x^{2}}\mathrm{d}x$.

【解析】考查定积分的换元积分法（知识点：050801）

$$\mathrm{I}=\int_{0}^{2}\frac{x}{2+x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{1}{2+x^{2}}\mathrm{d}x^{2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{1}{2+x^{2}}\mathrm{d}(2+x^{2})=\frac{1}{2}\ln\left(2+x^{2}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+2^{2}}{2+0^{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$$

第九节 反常积分

1. 反常积分（高频且难）【0509】

定义 1 设 $f(x)$ 是无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的连续函数，记号 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$，称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分（简称无穷积分）.

若对任意的 $b>a$，极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$ 存在，则称反常积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，极限值定义为该反常积分的值，即

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx .$$

若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$ 不存在，$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 则称反常积分发散，此时 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 只是一个符号，无数值意义.类似地，可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$ 的反常积分.

定义 2 设是无穷区间上 $(-\infty,b]$ 的连续函数，记号 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$，称为函数在无穷区间

$\left(-\infty,b\right]$上的**反常积分**（简称无穷积分）.

若对任意的$a<b$，极限$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx$存在，则称反常积分$\int_{-\infty}^b f\left(x\right)dx$收敛，且$\int_{-\infty}^b f\left(x\right)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx$. 若极限不存在，则称反常积分发散.

定义 3 设是无穷区间上$\left(-\infty,+\infty\right)$的连续函数，记号$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx$，称为函数$f\left(x\right)$在无穷区间$\left(-\infty,+\infty\right)$内的反常积分（简称无穷积分）.

若对任意常数c，反常积分$\int_{-\infty}^{c}f\left(x\right)dx$与$\int_{c}^{+\infty}f\left(x\right)dx$均收敛，则称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx$收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{c}f\left(x\right)dx+\int_{c}^{+\infty}f\left(x\right)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f\left(x\right)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f\left(x\right)dx.$$

否则，称反常积分发散.

【经典例题】

1. 设p为常数，讨论反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\left(a>0\right)$的敛散性.

【解析】考查反常积分敛散性判断

当$p=1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\,|_a^{+\infty}=+\infty$，所以$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散.

当$p\neq1$时，

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1,\end{cases}$$

所以当$p\leq1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散；当$p>1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛，其值为$\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

同类地，讨论反常积分$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx$的敛散性.（课下练习）

【提醒】当$p\leq1$时，$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx$发散；当$p>1$时，$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx$收敛，其值为$\frac{1}{p-1}$.

【期末考试】

（2013.04—14）设函数$f\left(x\right)$在（$-\infty,+\infty$）上连续，且对任意的 x，有$\int_2^x tf(t)\mathrm{d}t=5x^3-40$，则$f\left(x\right)=$ _______.

【解析】考查反常积分及其求导（知识点：0509）

对两边分别求导，$xf\left(x\right)=15x^2, f\left(x\right)=15x$

【答案】$15x$

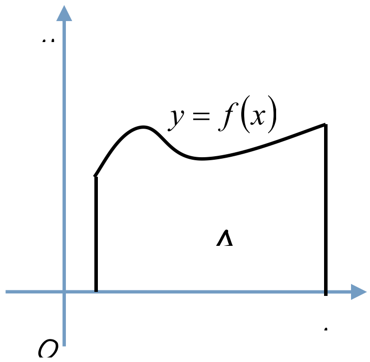
第十节 定积分的应用

1. 平面图形的面积（高频且难）【051001】

利用定积分求平面图形的面积主要分为以下几种情形：

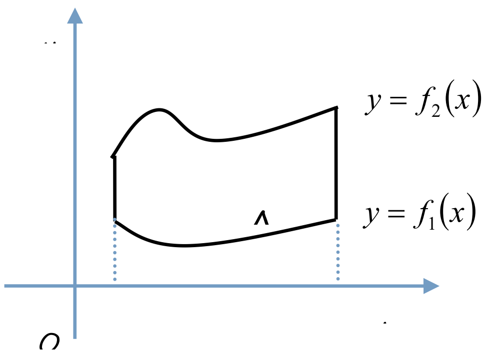
（1）由连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$ 以及直线 $x=a, x=b$ 和 x 轴所围成的平面曲线的面积为

$$A=\int_a^b f(x)dx$$



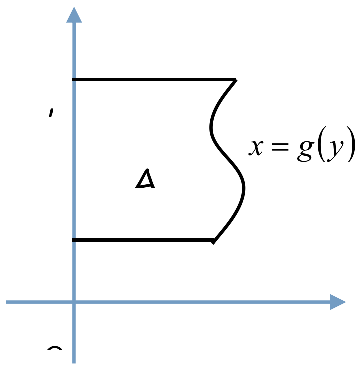
（2）由连续曲线 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$（$f_2(x)\geq f_1(x)$）以及直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的图形的面积为

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx.$$



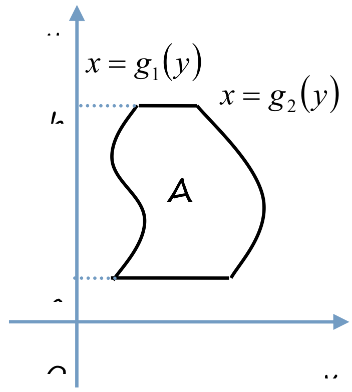
（3）由连续曲线 $x=g(y)(g(y)\geq 0)$ 和直线 $y=a$， $y=b$ 及 y 轴所围成的平面图形的面积为

$$A=\int_a^b g(y)dy.$$



（4）由连续曲线 $x=g_1(y)$ 和 $x=g_2(y)$ $\left(g_2(y)\geq g_1(y)\right)$ 以及直线 $y=a$ 和 $y=b$ 所围成的平面图形的面积为

$$A=\int_a^b\left[g_2(x)-g_1(x)\right]dx.$$

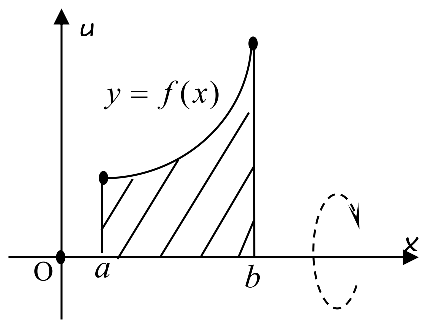


2. 旋转体的体积（高频且难）【051002】

利用定积分求旋转体的体积分以下几种情形：

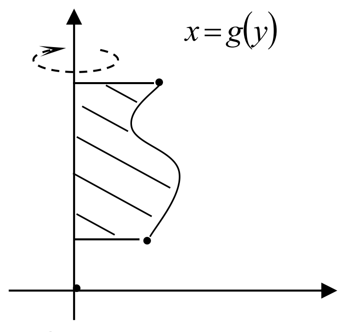
（1）由连续曲线 $y=f(x)$ 以及直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$



（2）由连续曲线 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$（$f_2(x)\geq f_1(x)\geq 0$）以及直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为

$$V_x=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx.$$



（3）由连续曲线 $x=g(y)$ 以及直线 $y=a,y=b$ 和 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体体积为

$$V_y=\pi\int_a^b g^2(y)dy$$

（4）由连续曲线 $x=g_1(y)$ 和 $x=g_2(y)$ $\left(g_2(y)\geq g_1(y)\geq 0\right)$ 以及直线 $y=a$ 和 $y=b$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转所得的旋转体体积为

$$V_y=\pi\int_a^b\left[g_2^2(y)-g_1^2(y)\right]dy.$$

3. 由边际函数求总函数（低频且难）【051003】

当固定成本为C_0，边际成本为$C'(Q)$，边际收益为$R'(Q)$，且产销平衡，即产量、需求量与销量均为Q时：总成本函数为$C(Q)=\int_0^Q C'(t)dt+C_0$；总收益函数为

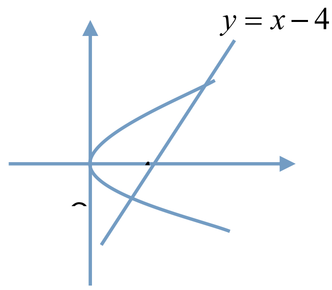
$R(Q)=\int_0^Q R'(t)dt$；

总利润函数为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=\int_0^Q [R'(t)-C'(t)]dt-C_0.$$

【经典例题】

1. 求由曲线$y^2=2x$及直线$y=x-4$所围成的平面图形面积.



【解析】考查定积分应用——平面图形的面积

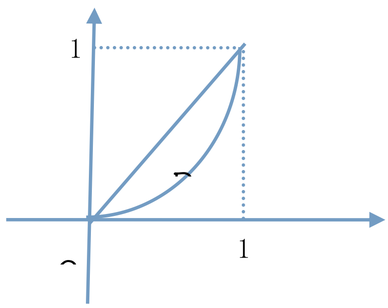
解方程组$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$得曲线$y^2=2x$与直线$y=x-4$的交点是$(2,-2)$和$(8,4)$.

选择y为积分变量，则所求平面图形的面积（如图）为

$$A=\int_{-2}^4\left[(y+4)-\frac{y^2}{2}\right]dy=\left(\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_{-2}^4=18$$

2. 已知D是由曲线$y=x^2$与直线$y=x$所围成的平面图形，求D分别绕x轴和y轴旋转所得的旋转体的体积.

【解析】考查旋转体的体积



平面图形D绕x轴旋转所得旋转体的体积为

$V_x=\pi\int_0^1\left[x^2-\left(x^2\right)^2\right]dx=\pi\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx$

$=\pi\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{2}{15}\pi$.

平面图形D绕y轴旋转所得旋转体的体积为

$V_y=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{y}\right)^2-y^2\right]dy=\pi\int_0^1\left(y-y^2\right)dx=\pi\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}\pi$.

3. 若某厂产品的边际收益为$R'(x)=20-2x$，求：

（1）总收益函数；

（2）当某厂产品的销售量由 10 个单位减少到 5 个单位时，收益的变化量.

【解析】考查已知边际函数求总函数

（1）总收益函数为$R(x)=\int_0^x R'(t)dt=\int_0^x(20-2t)dt=20t-t^2\|_0^t=20x-x^2$.

（2）设产品的销售量由 10 个单位减少到 5 个单位时，收益的变化量为ΔR，则

$$\Delta R=\int_{10}^5 R'(x)dx=\int_{10}^5(20-2x)dx=\left(20x-x^2\right)\|_{10}^5=-25$$

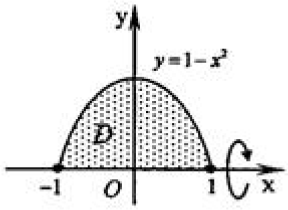
或

$$\Delta R=R(5)-R(10)=-25,$$

所以，当产品的销售量由 10 个单位减少到 5 个单位时，该厂的总收益减少 25 个单位.

【期末考试】

（2014.04—22）设D是由抛物线$y=1-x^2$与x轴所围成的平面区域,如图所示. 求:(1) D的面积A；



(2) D绕A轴旋转一周所得的旋转体体积V_x.

【解析】考查定积分的应用，曲面面积和旋转体的体积

（1）由图可以看出，区域D是简单的上下结构，D的面积为

$$A=\int_{-1}^1\left(1-x^2-0\right)\mathrm{d}x=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left[(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]=\frac{4}{3}$$

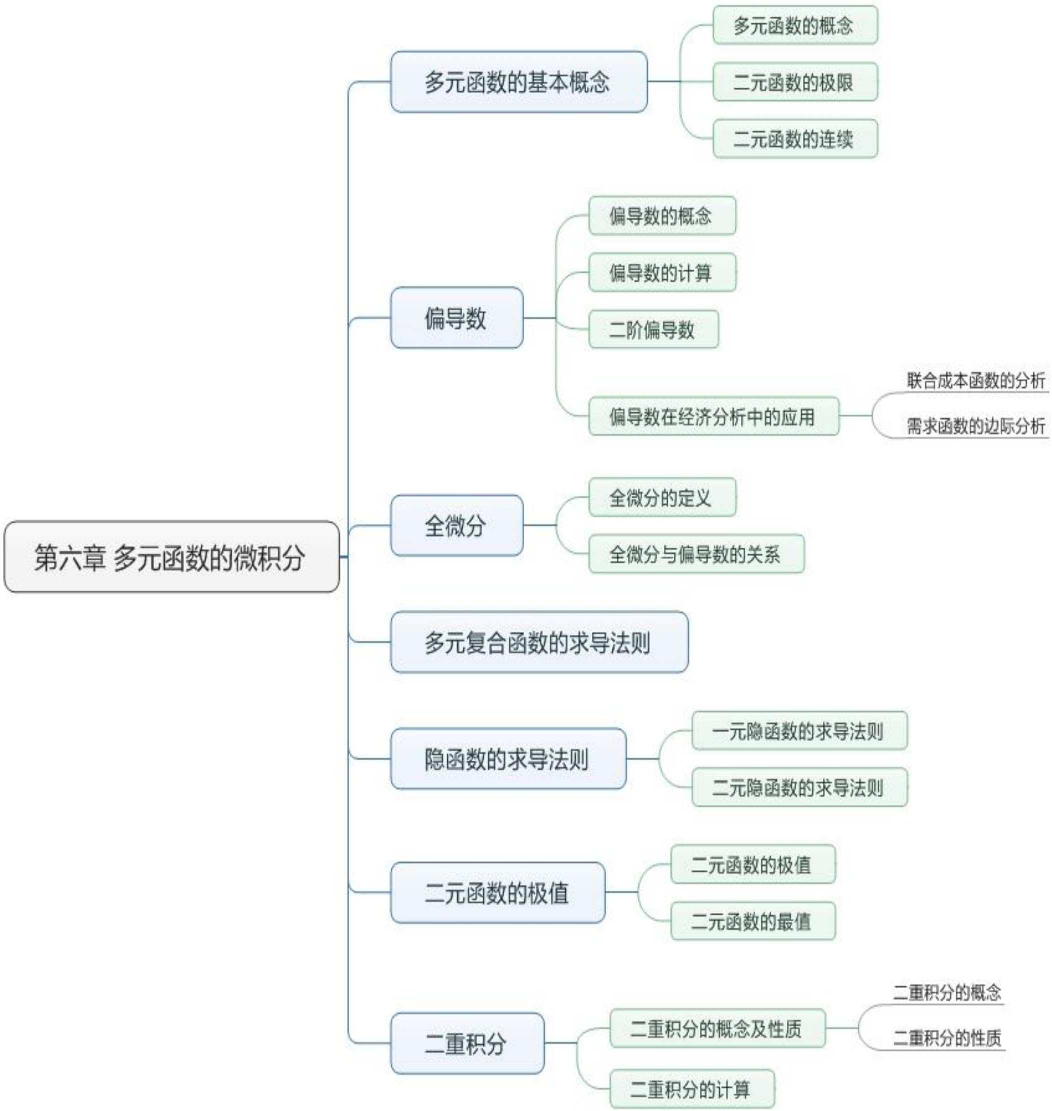
(2) D绕x轴旋转一周所得的旋转体体积

$$V_x=\pi\int_{-1}^1\left[\left(1-x^2\right)^2-0^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^1\left(x^4-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^1$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{1^5}{5}-\frac{2}{3}\times1^3+1\right)-\left[\frac{(-1)^5}{5}-\frac{2}{3}\times(-1)^3+(-1)\right]\right\}=\frac{16}{15}\pi$$

第六章 多元函数微积分

框架图



考情分析

本章历年考核分值 15 分左右，题型以计算题为主，本章重点是偏微分和全微分的概念及其计算，复合函数求导法则，二重积分的计算.难点是复合函数求导，二重积分的计算.本章常见考试题型：

1、求函数的偏导数和全微分.

2、对复合函数和隐函数求导，二阶偏导数.

3、求二元函数的极值.

4、求二重积分的概念和计算.

第一节 多元函数的基本概念

1. 多元函数的概念（低频且易）【060102】

定义 1 设有三个变量 x,y 和 z，如果当变量 x,y 在某一区域 D 内任取一组值时，变量 z 按照一定的法则 f 都有唯一的数值与之对应，则称 f 是 D 上的二元函数，记为 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$. 其中变量 x,y 称为自变量，变量 z 称为因变量，x,y 的取值区域称为二元函数的定义域.

对于 D 上任意一点 (x_0,y_0)，对应的因变量 z 的取值 $z_0=f(x_0,y_0)$ 称为函数在点 (x_0,y_0) 处的函数值，函数值的全体称为该二元函数的值域.类似地，可定义有三个自变量 x,y,z 和因变量 u 的三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数. 一般地，我们将二元及二元以上的函数统称为多元函数.

2. 二元函数的极限（低频且易）【060103】

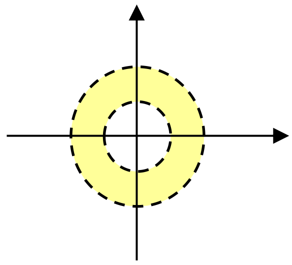
定义 2 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，若当该去心邻域中任意一点 $P(x,y)$ 以及任何方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 趋于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x,y)$ 在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$. 二元函数的极限又称为**二重极限.**

3. 二元函数的连续（低频且难）【060104】

定义 3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的连续点. 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

【经典例题】

1. 求函数 $z=f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域，并计算 $f(1,-1)$.



【解析】考查多元函数的概念

因为 $4-x^2-y^2>0$，且 $x^2+y^2-1>0$，即

$$x^2+y^2<4，且\ x^2+y^2>1$$

所以函数 $f(x,y)$ 的定义域为 $D=\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$，它是 xOy 平面上以原点为中心，内圆半径为 1，外圆半径为 2 的圆环开区域，如图.

$$f(1,-1)=\frac{1}{\sqrt{4-1^2-(-1)^2}}+\ln\left[1^2+(-1)^2-1\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{\sin(4x+4y)}$.

【解析】考查二重极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{\sin(4x+4y)}\overset{x+y=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin 4t}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{4t}{\sin 4t}=\frac{1}{4}$$

3. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{2}{x-y}$ 的间断点.

【解析】考查二元函数的连续

当 $x-y=0$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{2}{x-y}$ 没有定义，所以直线 $x=y$ 上的点都是函数 $f(x,y)$ 的间断点.

第二节 偏导数

1. 偏导数的概念（低频且易）【060201】

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，当 y 固定为 y_0，而 x 从 x_0 改变到 $x_0+\Delta x(\Delta x\neq 0)$ 时，相应的函数值 $z=f(x,y)$ 的改变量 $\Delta_x z$ 为

$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$.

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$f_x'(x_0,y_0)，或 z_x'|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，或 \frac{\partial f}{\partial x}|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，或 \frac{\partial z}{\partial x}|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

类似地，当 x 固定为 x_0，而 y 从 y_0 改变到 $y_0+\Delta y(\Delta y\neq 0)$ 时，相应的函数 $z=f(x,y)$ 的改变量 $\Delta_y z$

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记为

$$f_y'(x_0,y_0)，或 z_y'|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，或 \frac{\partial f}{\partial y}|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，或 \frac{\partial z}{\partial y}|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上每一点 (x,y) 处关于 x 的偏导数都存在，这个偏导数也是区域 D 上的二元的函数，称它为函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导函数，记作 $f_x'(x,y)$，或 z_x'，或 $\frac{\partial f}{\partial x}$，或 $\frac{\partial z}{\partial x}$. 类似地，可定义函数 $z=f(x,y)$ 关于 y 的偏导数，记作 $f_y'(x,y)$，或 z_y'，或 $\frac{\partial f}{\partial y}$，或 $\frac{\partial z}{\partial y}$. 偏导函数简称为偏导数.

2. 偏导数的计算（高频且难）【060202】

3. 二阶偏导数（低频且难）【060203】

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$，通常它们在区域 D 内都是 x,y 的函数.

若这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，其中

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)$ 关于 x 的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的二阶偏导数，记作 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 或 $f_{xx}''(x,y)$，即，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$ 关于 y 的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 关于 y 的二阶偏导数，记作 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 或 $f_{yy}''(x,y)$，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$；$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)$ 关于 y 的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 先对 x 后对 y 的二阶混合偏导数，记作 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 或 $f_{xy}''(x,y)$，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$；$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$ 关于 x 的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 先对 y 后对 x 的二阶混合偏导数，记作 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 或 $f_{yx}''(x,y)$，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

关于偏导数的几点说明：

1. 偏导数是一个整体记号，不能拆分；
2. 求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求.

偏导数存在与连续的关系：一元函数在某点可导 $\Rightarrow$ 连续，多元函数在某点偏导数存在 $\xRightarrow{\text{不一定}}$ 连续

4. 偏导数在经济分析中的应用【060204】

4.1 联合成本函数的分析（低频且易）【06020401】

定义 3 设某单位生成甲、乙两种产品，产量分别为 x,y 时的成本函数为 $C=C(x,y)$，称为联合成本函数. 当乙产品的产量保持不变，甲种产品的产量 x 取得增量 Δx 时成本函数 $C(x,y)$ 对于产量 x 的增量为 $C(x+\Delta x,y)-C(x,y)$，于是得成本对的变化率为

$$C_x'(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x,y)-C(x,y)}{\Delta x}.$$

类似地，当甲产品的产量保持不变，乙种产品的产量 y 取得增量 Δy 时成本函数 $C(x,y)$ 对于产量 y 的增量为 $C(x+\Delta x,y)-C(x,y)$，于是得成本对的变化率为

$$C_y^{'}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{C(x,y+\Delta y)-C(x,y)}{\Delta y}.$$

$C_x^{'}(x,y)$ 称为关于甲种产品的边际成本，它的经济意义为：当乙种产品的产量在 y 处固定不变，甲种产品的产量在 x 的基础上再生产一个单位产品时成本所增加数额的近似值，即

$$C_x^{'}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x,y)-C(x,y)}{\Delta x}\approx C(x+1,y)-C(x,y).$$

类似地，$C_y^{'}(x,y)$ 称为关于乙种产品的边际成本，它的经济意义为：当甲种产品的产量在 x 处固定不变，乙种产品的产量在 y 的基础上再生产一个单位产品时成本所增加数额的近似值，即

$$C_y^{'}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{C(x,y+\Delta y)-C(x,y)}{\Delta y}\approx C(x,y+1)-C(x,y).$$

4.2 需求函数的边际分析（低频考点）【06020402】

设 Q_1 和 Q_2 分别为两种相关产品甲、乙的需求量，p_1 和 p_2 分别为商品甲和商品乙的价格，y 为消费者的收入. 需求函数可表示为 $Q_1=Q_1(p_1,p_2,y)$，$Q_2=Q_2(p_1,p_2,y)$，则需求量 Q_1 和 Q_2 关于价格 p_1 和 p_2 及消费者收入 y 的偏导数分别为

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p_1},\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_2},\ \frac{\partial Q_1}{\partial y},\ \frac{\partial Q_2}{\partial p_1},\ \frac{\partial Q_2}{\partial p_2},\ \frac{\partial Q_2}{\partial y},$$

其中 $\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}$ 称为商品甲的需求函数关于 p_1 的边际需求，它表示当商品乙的价格 p_2 及消费者的收入 y 固定时，商品甲的价格变化一个单位时商品甲的需求量的近似改变量.

$\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}$ 称为商品甲的需求函数关于 p_2 的边际需求，它表示当商品乙的价格 p_1 及消费者的收入 y 固定时，商品甲的价格变化一个单位时商品甲的需求量的近似改变量.

$\frac{\partial Q_1}{\partial y}$ 称为商品甲的需求函数关于消费者 y 的边际需求，它表示当 p_1，p_2 固定时，消费者的收入 y 变化一个单位时商品甲的需求量的近似改变量. 其余的偏导数可做类似解释.

在一般情况下，若 p_2，y 固定而 p_1 上升时，商品甲的需求量 Q_1 将减少，于是有 $\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}<0$. 类似地，有 $\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}<0$. 当 p_1,p_2 固定而消费者的收入 y 增加时，一般 Q_1 将增大，于是有 $\frac{\partial Q_1}{\partial y}>0$. 同样地，有 $\frac{\partial Q_2}{\partial y}>0$. 但是 $\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}$ 和 $\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}$ 可以是正的，也可以是负的. 若 $\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}>0$，$\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}>0$，则称甲和乙为互相竞争的商品（或互相替代的商品）. 若 $\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}<0$，$\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}<0$，则称商品甲和乙是互相补充的商品.

【经典例题】

1. 设 $f(x,y)=x\ln(x+\ln y)$，求 $f_x^{'}(1,e),f_y^{'}(1,e)$.

【解析】考查偏导数的计算

把 y 看成常数，利用乘积的求导法则，对 x 求导，得 $f_x^{'}(x,y)=\ln(x+\ln y)+\frac{x}{x+\ln y}$，

将 $(1,e)$ 代入，得 $f_x^{'}(1,e)=\ln(1+\ln e)+\frac{1}{1+\ln e}=\ln 2+\frac{1}{2}$.

把 x 看成常数，对 y 求导，得 $f_y^{'}(x,y)=x\cdot\frac{1}{x+\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{xy+y\ln y}$，

将 $(1,e)$ 代入，得

$$f_y^{'}(1,e)=\frac{1}{1\cdot e+e\ln e}=\frac{1}{2e}\cdot$$

2. 证明：函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

【解析】考查二阶偏导数

由于 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$z_x^{'}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$z''_{xx}=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

利用函数关于 x,y 的对称性，得 $z''_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0.$$

3. 设某两种商品的价格分别为 p_1 和 p_2，这两种相关商品的需求函数分别为

$Q_1=e^{p_2-2p_1},Q_2=e^{p_1-2p_2}$

求边际需求函数.

【解析】考查偏微分在经济分析中的应用

边际需求函数为

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}=-2e^{p_2-2p_1},\quad \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}=e^{p_2-2p_1},$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}=-2e^{p_1-2p_2},\quad \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}=e^{p_1-2p_2}.$$

因为 $\dfrac{\partial Q_1}{\partial p_2}>0,\dfrac{\partial Q_2}{\partial p_1}>0$，所以这两种商品为互相代替的商品.

【期末考试】

（2013.10—10）设函数 $Z=\ln\left(x^2+y^2\right)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ =（　）.

A. $\dfrac{2(x+y)}{x^2+y^2}$　　B. $\dfrac{2(x-y)}{x^2+y^2}$

C. $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$　　D. $\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

【解析】考查偏导数的计算（知识点：060202）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2\left(x+y\right)}{x^2+y^2}$$

【答案】A

第三节 全微分

1. 全微分的定义（低频且难）【060301】

定义 1 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量可表示为

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**可微**，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**全微分**，记为 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

2. 全微分与偏导数的关系（低频且难）【060302】

定理 1 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，且两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，此时有 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$. 定理 1 说明：二元函数偏导数存在是可微的必要条件，但不是充分条件.

定理 2 若函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微. 定理 2 给出了二元函数可微的充分条件. 下面给出二元函数可微的充要条件：

$$f(x,y)\text{在点}(x_0,y_0)\text{处可微}\Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-\left[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y\right]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

二元函数的可微性、偏导数存在和连续之间的关系如下：

$$\begin{tikzcd}
 & & f(x,y)\text{连续} \\
f_x'(x,y)\text{与}f_y'(x,y)\text{存在且连续} \arrow[r, Rightarrow] & f(x,y)\text{可微} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & f_x'(x,y)\text{与}f_y'(x,y)\text{存在}
\end{tikzcd}$$

【经典例题】

1. 求函数 $z=x^2+2x^3y^2+3y^3$ 在点 $(1,-1)$ 处的全微分.

【解析】考查全微分定义

因为 $f_x'(x,y)=2x+6x^2y^2$， $f_y'(x,y)=4x^3y+9y^2$，所以

$f_x^{'}(1,-1)=2\times1+6\times1^2\times(-1)^2=8$， $f_y^{'}(1,-1)=4\times1^3\times(-1)+9\times(-1)^2=5$，故

$$dz\big|_{\substack{x=1\\y=-1}}=f_x^{'}(1,-1)dx+f_y^{'}(1,-1)dy=8dx+5dy\ .$$

【期末考试】

（2013.04—19）设函数 $f(x,y)=x^y$， 求全微分 $df\,|_{(1,1)}$.

【解析】考查全微分定义（知识点：060301）

$f_x(1,1)=yx^{y-1}\Big|_{(1,1)}=1, f_y(1,1)=x^y\ln x\Big|_{(1,1)}=0,$ 故$\mathrm{d}f\Big|_{(1,1)}=f_x(1,1)\mathrm{d}x+f_y(1,1)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$.

第四节 多元复合函数的求导法则

1. 复合函数求导法则（高频且易）【0604】

基本型：设 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 构成复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}，\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

变型一：设 $z=f(u,v)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$ 构成复合函数 $z=f(u(t),v(t))$，则

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot u'(t)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot v'(t).$$

变型二：设 $z=f(u)$，$u=u(x,y)$ 构成复合函数 $z=f(u(x,y))$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$.

【经典例题】

1. 设 $z=f(2x-y,xy)$，且函数 f 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解析】考查多元复合函数求导法则

令 $u=2x-y,v=xy$，则 $z=f(u,v)$. 由复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u^{'}(u,v)\cdot 2+f_v^{'}(u,v)\cdot y=2f_u^{'}(u,v)+yf_v^{'}(u,v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_u^{'}(u,v)\cdot(-1)+f_v^{'}(u,v)\cdot x=-f_u^{'}(u,v)+xf_v^{'}(u,v).$$

【期末考试】

（2013.04—15）设函数 $Z=xy^2+\sin\frac{x}{y}$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$=_________.

【解析】考查复合函数求导（知识点：0604）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}$$

【答案】$-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}$

第五节 隐函数的求导法则

1. 一元隐函数的求导法则（低频且易）【060501】

设函数 $F(x,y)$ 可微，若函数 $y=y(x)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 确定，则 y 对 x 的导数

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x^{'}}{F_y^{'}}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0\right).$$

2. 二元隐函数的求导法则（低频且难）【060502】

由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的二元隐函数 $z=z(x,y)$，若函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 的某邻域内存在连续的偏导数 $F_x^{'}(x,y,z)$，$F_y^{'}(x,y,z)$，$F_z^{'}(x,y,z)$，且 $F_z^{'}(x,y,z)\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x^{'}(x,y,z)}{F_z^{'}(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y^{'}(x,y,z)}{F_z^{'}(x,y,z)}.$$

【经典例题】

1．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)-\dfrac{1}{y-x}=1$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$.

【解析】考查一元隐函数求导法则

设 $F(x,y)=\sin(xy)-\dfrac{1}{y-x}-1$，则

$$F_x^{'}=y\cos(xy)-\frac{1}{(y-x)^2}, \quad F_y^{'}=x\cos(xy)-\frac{1}{(y-x)^2}$$

将 $x=0$ 代入方程 $\sin(xy)-\dfrac{1}{y-x}=1$，得 $y=-1$. 因为

$$F_x^{'}(0,-1)=(-1)\cdot\cos 0-\frac{1}{(-1-0)^2}=-2\,,\ F_y^{'}(0,-1)=0\cdot\cos 0-\frac{1}{(-1-0)^2}=1$$

所以

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=-\frac{F_x^{'}(0,-1)}{F_y^{'}(0,-1)}=2\,.$$

2．设方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定了二元隐函数，求全微分 dz .

【解析】考查二元隐函数的求导法则

设 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{z}-\ln z+\ln y$，则 $F_x^{'}=\dfrac{1}{z}$， $F_y^{'}=\dfrac{1}{y}$， $F_z^{'}=-\dfrac{x}{z^2}-\dfrac{1}{z}=-\dfrac{x+z}{z^2}$，

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y^{'}}{F_z^{'}}=-\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z^2}{y(x+z)},$$

故

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{z}{y(x+z)}(ydx+zdy).$$

【期末考试】

（2014.04—23）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(2x+3y-5z)=2x+3y-5z$ 所确定的隐函

数，求证 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

【解析】考查二元隐函数的求导法则（知识点：060502）

证：令 $F(x,y,z)=2x+3y-5z-2\sin(2x+3y-5z)$, 则

$$F_x'(x,y,z)=\left(2x\right)_x'+\left(3y\right)_x'-\left(5z\right)_x'-\left[2\sin(2x+3y-5z)\right]_x'=2-4\cos\left(2x+3y-5z\right)$$

$$F_y'(x,y,z)=\left(2x\right)_y'+\left(3y\right)_y'-\left(5z\right)_y'-\left[2\sin(2x+3y-5z)\right]_y'=3-6\cos\left(2x+3y-5z\right)$$

$$F_z'(x,y,z)=\left(2x\right)_z'+\left(3y\right)_z'-\left(5z\right)_z'-\left[2\sin(2x+3y-5z)\right]_y'=-5+10\cos\left(2x+3y-5z\right)$$

从而 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{2-4\cos\left(2x+3y-5z\right)}{-5+10\cos\left(2x+3y-5z\right)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{3-6\cos\left(2x+3y-5z\right)}{-5+10\cos\left(2x+3y-5z\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2-4\cos\left(2x+3y-5z\right)}{5+10\cos\left(2x+3y-5z\right)}-\frac{3-6\cos\left(2x+3y-5z\right)}{-5+10\cos\left(2x+3y-5z\right)}=\frac{-5+10\cos\left(2x+3y-5z\right)}{-5+10\cos\left(2x+3y-5z\right)}=1$$

原题得证.

第六节 二元函数的极值

1. 二元函数的极值（低频且难）【060601】

定义 1 设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 的某个邻域内有定义，对于该邻域内异于点 $\left(x_0,y_0\right)$ 的任何点 $\left(x,y\right)$，若都有 $f\left(x,y\right)<f\left(x_0,y_0\right)$，则称 $f\left(x_0,y_0\right)$ 为函数 $f\left(x,y\right)$ 的极大值；若都有 $f\left(x,y\right)>f\left(x_0,y_0\right)$，

则称 $f\left(x_0,y_0\right)$ 为函数 $f\left(x,y\right)$ 的极小值. 极大值与极小值统称为极值，使函数取得极值的点 $\left(x_0,y_0\right)$ 称为极值点.

定理 1（极值存在的必要条件）设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处有极值，且函数在该点的一阶偏导数存在，则 $f_x'\left(x_0,y_0\right)=0$，$f_y'\left(x_0,y_0\right)=0$. 使偏导数 $f_x'\left(x_0,y_0\right)=0$，$f_y'\left(x_0,y_0\right)=0$ 同时成立的函数 $f\left(x,y\right)$ 是驻点.

定理 2（极值存在的充分条件）设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 的邻域内有连续的二阶

偏导数，且点(x_0,y_0)为函数$z=f(x,y)$的驻点，记$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则：

（1）当$B^2-AC<0$，且$A<0$时，$f(x_0,y_0)$是函数$f(x,y)$的极大值.

（2）当$B^2-AC<0$，且$A>0$时，$f(x_0,y_0)$是函数$f(x,y)$的极小值.

（3）当$B^2-AC>0$时，$f(x_0,y_0)$不是函数$f(x,y)$的极值.

2. 二元函数的最值（低频且难）【060602】

定义 2 设函数$z=f(x,y)$在某区域D上有定义，对于该区域D上的任何点(x,y)，若都有$f(x,y)\le f(x_0,y_0)$，则称$f(x_0,y_0)$为函数$f(x,y)$在区域D上的最大值；若都有

$f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$，

则称$f(x_0,y_0)$为函数$f(x,y)$在区域D上的最小值.

最大值与最小值统称为最值，使函数取最值的点(x_0,y_0)称为最值点.

【经典例题】

1. 求函数$f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5$的极值.

【解析】考查二元函数的极值

因为$f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5$，所以$f'_x(x,y)=-2x+6, f'_y(x,y)=3y^2-12$.

令$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$ 解得驻点$(3,2)$和$(3,-2)$. 根据

$f''_{xx}(x,y)=-2, f''_{xy}(x,y)=0, f''_{yy}(x,y)=6y$

列表讨论如下：

(x_0,y_0)	A	B	C	B^2-AC	判断$f(x_0,y_0)$
$(3,2)$	-2	0	12	24	$f(3,2)$不是极值
$(3,-2)$	-2	0	12	-24	$f(3,-2)=30$为极大值

2. 设Q_1,Q_2分别为商品A,B的需求量，它们的需求函数为$Q_1=8-P_1+2P_2$，

$Q_2 = 10 + 2P_1 - 5P_2$，

总成本函数为 $C = 3Q_1 + 2Q_2$，其中 P_1 和 P_2 分别为商品 A 和 B 的价格（单位：万元）。试问价格 P_1 和 P_2 取何值时可使利润最大？并求最大利润.

【解析】考查二元函数的最值在实际中的应用

根据题意，总收益函数为 $R = P_1Q_1 + P_2Q_2$，总利润函数为

$$
\begin{aligned}
L = R - C &= P_1Q_1 + P_2Q_2 - (3Q_1 + 2Q_2) = (P_1 - 3)Q_1 + (P_2 - 3)Q_2 \\
&= (P_1 - 3)(8 - P_1 + 2P_2) + (P_2 - 2)(10 + 2P_1 - 5P_2).
\end{aligned}
$$

由

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial P_1} = (8 - P_1 + 2P_2) + (P_1 - 3)\cdot(-1) + 2(P_2 - 2) = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial P_2} = 2(P_1 - 3) + (10 + 2P_1 - 5P_2) + (P_2 - 2)\cdot(-5) = 0,
\end{cases}
$$

即

$$
\begin{cases}
-2P_1 + 4P_2 + 7 = 0, \\
4P_1 - 10P_2 + 14 = 0,
\end{cases}
$$

解得 $P_1 = \dfrac{63}{2}, P_2 = 14$. 由于 $\left(\dfrac{63}{2}, 14\right)$ 是唯一的驻点，且该实际问题存在最大利润，所以当取价格 $P_1 = \dfrac{63}{2}, P_2 = 14$ 时可获得最大利润 $L = 164.25$ 万元.

第七节 二重积分

1. 二重积分的概念及性质【知 060701】

1.1 二重积分的概念（低频且难）【06070101】

定义 1 设二元函数 $z = f(x, y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的有界二元函数，将区域 D 任意分割成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$，并仍以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积，d_i 为区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径，$i = 1,2,\cdots,n$，$d = \max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i (i = 1,2,\cdots,n)$，并求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\text{，}$$

当$d \to 0$时，若极限$\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，则称函数$z=f(x,y)$在区域$D$上可积，称此极限值为函数$z=f(z,y)$在区域$D$上的二重积分，记作$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，即

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，其中，$f(x,y)$称为被积函数，“$\iint$ ”称为二重积分符号，D称为积分区域，$d\sigma$称为面积元素，x,y称为积分变量.

定理1 若二元函数$z=f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则二元连续函数

$z=f(x,y)\geq 0$，则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$的值等于以积分区域$D$为底，以连续曲面

$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积V，即$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=V$.

1.2 二重积分的性质（低频且难）【06070102】

假定函数在D上可积：

性质1 若在区域D上有$f(x,y)\equiv 1$，S是D上的面积，则$\iint\limits_D d\sigma=S$.

性质2 常数因子可提到积分号外面，即$\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$（$k$为常数）.

性质3 函数的代数和的积分等于各个函数积分的代数和，即

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma+\iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

性质4（二重积分的积分区域可加性）若在区域D被一条连续曲线分成D_1和D_2，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

性质5（比较定理）若在区域D上有$f(x,y)\geq 0$，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\geq 0$. 特别地，

$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right|\leq\iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$.

性质6（估值性质）设M,m分别是函数$f(x,y)$在有界闭区域D上的最大值与最小值，S是D的面积，则$m\cdot S\leq\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\leq M\cdot S$.

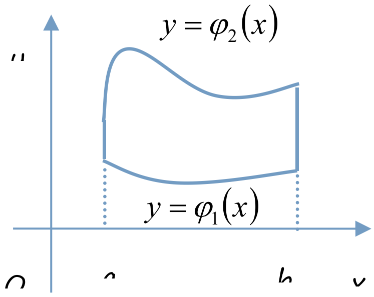
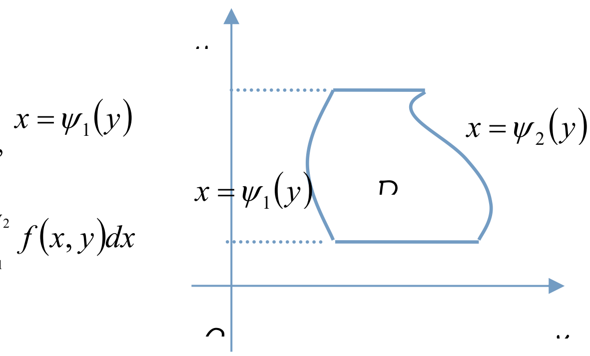
性质7（二重积分的中值定理）设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，S是区域D的

面积，则 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S$.

积分中值定理的几何意义：在区域 D 上以曲面 $z=f(x,y)(f(x,y\geq 0))$ 为顶的曲顶柱体的体积，等于区域 D 上以某一点 (ξ,η) 的函数值 $f(\xi,\eta)$ 为高的平顶柱体的体积.

2. 二重积分的计算（高频且难）【060702】

二重积分的计算，可归结为化二重积分为两个有序的定积分，即二次积分.

区域 D 类型	累次积分结果
X 型	$D:\begin{cases}a\leq x\leq b,\\ \varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x),\end{cases}$ $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)dy$ 
Y 型	$D:\begin{cases}c\leq x\leq d,\\ \psi_1(x)\leq x\leq \psi_2(x),\end{cases}$ $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)dx$ 
非 X 型非 Y 型	先划分 D，使每一子块成 X 型或 Y 型，再化为累次积分.

【经典例题】

1. 估计二重积分 $\iint\limits_D (5+x^2+y^2)d\sigma$ 的取值范围，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$.

【解析】考查二重积分的性质

在积分区域 D 内，被积函数 $5\leq 5+x^2+y^2\leq 9$，积分区域 D 的面积为 4π ，所以

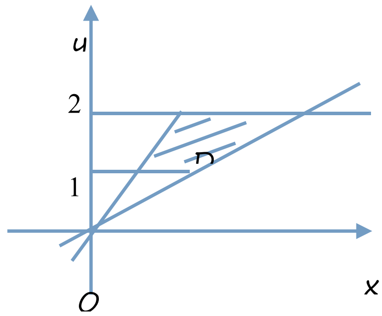
$$5\times 4\pi \leq \iint\limits_D (5+x^2+y^2)d\sigma \leq 9\times 4\pi ,$$

即

$$20\pi \leq \iint\limits_D (5+x^2+y^2)d\sigma \leq 36\pi .$$

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D \left(x^2-2y\right)dxdy$，其中区域 D 由直线 $y=x, y=\dfrac{x}{2}, y=1$ 和 $y=2$ 围成.

【解析】考查二重积分的计算



画出区域 D 的草图.

$$D:\begin{cases}1\le y\le 2,\\ y\le x\le 2y,\end{cases}$$

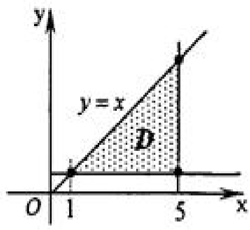
是 $Y-$型区域，所以二重积分可化为先对 x 后对 y 的二次积分，即

$$\iint\limits_D \left(x^2-2y\right)dxdy=\int_1^2 dy\int_y^{2y}\left(x^2-2y\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{3}x^3-2yx\right)\Big|_y^{2y}dy$$

$$=\int_1^2\left(\frac{7}{3}y^3-2y^2\right)dy=\left(\frac{7}{12}y^4-\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_1^2=\frac{49}{12}.$$

【期末考试】

（2014.04—20）计算二重积分 $I=\iint\limits_D \dfrac{1}{y\ln x}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$ 及 $x=5$ 所围成的平面区域，如图所示.



【解析】考查二重积分计算及其二重积分的几何意义（知识点：060702）

由图可以看出 x 的取值范围为 $1\le x\le 5$，二重积分可以化为

$$I=\iint\limits_D \frac{1}{y\ln x}dxdy=\int_1^5\frac{1}{\ln x}dx\int_1^x\frac{1}{y}dy=\int_1^5\left(\frac{1}{\ln x}\cdot\ln|y|\,\Big|_1^x\right)dx=\int_1^5\frac{1}{\ln x}\left(\ln x-\ln 1\right)dx=\int_1^5 dx=4$$

.