【2023考研】公共课-数学

第一章 极限与连续思维导图

- 极限的定义
  - 左、右极限的概念
  - $x \to x_0$
  - $x \to \infty$
- 无穷小量的比较、常见的无穷小
- 极限的性质
  - ① 唯一性
  - ② 局部有界性
  - ③ 局部保号性
- 极限存在定理：
  - ① 夹逼定理
  - ② 单调有界性准则
- 未定式的计算
  - $\frac{0}{0}$. $\frac{\infty}{\infty}$ $0\cdot\infty$
  - $\infty-\infty$
  - ∞^0. 0^0 . 1^∞
- 极限的应用 — 函数的连续性
  - 间断点

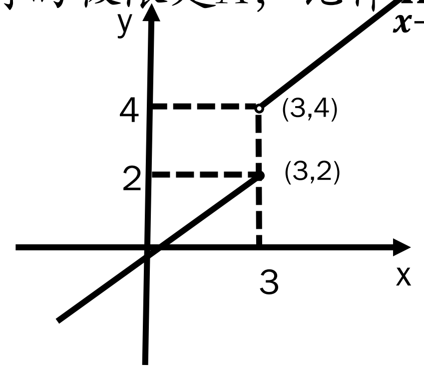
第一章　极限与连续

1. 函数在$x \to x_0$时的极限

定义： 设函数f(x)若当x无限趋近x_0时，其对应的函数值f(x)无限趋于一个确定的数A，则称函数f(x)在$x \to x_0$时的极限是A，记作$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 从左侧趋近

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 从右侧趋近



函数极限的概念

1. 数列极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow$$

对于任给的常数$\varepsilon > 0$，存在正整数N，当$n > N$时，都有$|x_n - A| < \varepsilon$恒成立

函数极限的概念

1. 数列极限

描述极限为A

描述$n \to \infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A \Leftrightarrow$

对于任给的常数$\varepsilon > 0$，存在正整数N，当$n > N$时，都有$|x_n - A| < \varepsilon$恒成立

函数极限的概念

1. 数列极限

描述极限为A

描述$n\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow$

对于任给的常数$\varepsilon > 0$，存在正整数N，当$n > N$时，都有$|x_n - A| < \varepsilon$恒成立

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$，但显然 $\frac{n}{n+1}\neq 1$

由定义可知，对 $\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$时，$\left|\frac{n}{n+1}-A\right|<\varepsilon$恒成立.

$\therefore n\to\infty$时 $\frac{n}{n+1}\to 1$

小试牛刀

收敛级数 $\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\cdots$ 的和为

________.

小试牛刀

收敛级数 $\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\cdots$ 的和为

______________.

【解析】考查数列的极限

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

【答案】1

2. 函数极限

①$\varepsilon \sim \delta$型

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow$$

对于任给的常数$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$0 < |x - a| < \delta$时，都有$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立

注意：左右极限问题

2. 函数极限

描述相应的A

①$\varepsilon \sim \delta$ 型

描述$x \to a$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow$$

对于任给的常数 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立

注意：左右极限问题

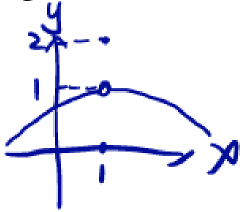
补充：① $0 < |x-a| < \delta \to \begin{cases} x \neq a \\ \text{左右逼近} \end{cases}$

$(a-\delta, a), (a, a+\delta)$ 去心邻域

eg: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{0}{x^3} = 0$

② $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 与 $f(a)$ 无关

eg



$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ 但 $f(1) = 2$

③ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$.

【例 1】$f(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$，求$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

【例 1】 $f(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$，求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

当f(x)中含有 $a^{\frac{?}{x-a}}$ 或 $a^{\frac{?}{a-x}}$ 时，要分左右极限.

解：$x\to1^-$ 时，$x-1\to0^-$，$\frac{1}{x-1}\to-\infty$，$2^{\frac{1}{x-1}}\to0$

$x\to1^+$ 时，$x-1\to0^+$，$\frac{1}{x-1}\to+\infty$，$2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

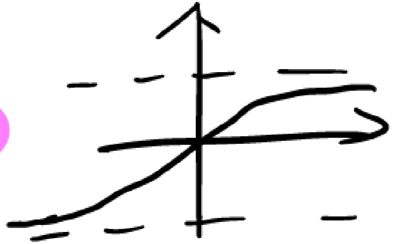
$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{-2^{\frac{1}{x-1}}}{2^{\frac{1}{x-1}}}=-1$

∴左右极限不同，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

【例 2】$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$，求 I

【例 2】$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$，求 I

当 $f(x)$ 中含有 $y=\arctan x$ 要画图，分左右



解：$x\to 0^-$，$\frac{1}{x}\to-\infty$

$x\to 0^+$，$\frac{1}{x}\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} I=\frac{0+1}{0-1}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} I=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

③ $\varepsilon \sim X$ 型

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

对于任给的常数 $\varepsilon > 0$，存在 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立

③ $\varepsilon \sim X$ 型

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

对于任给的常数 $\varepsilon > 0$，存在 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立

① 时指 $x \to +\infty$，$x \to -\infty$：

$x \to -\infty$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x < -X$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

$x \to +\infty$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x > X$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

$x \to \infty$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

无穷小量的概念

1、若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时是一个无穷小量

无穷小量：接近于0的数字

1.无穷小量的比较 $\frac{A}{B}=?$

正确顺序

$$\frac{0.001}{0.001}=1$$

$$\frac{0.0000000000001}{0.01}\approx 0$$

$$\frac{0.0005}{0.0001}=5$$

①等价无穷小

②同阶无穷小

③高阶无穷小

1.无穷小量的比较

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$， 则：

（1）当 $c=0$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的 $\boxed{}$ 无穷小量，

记作 $f(x)=o(g(x))\ \ (x\to x_0)$.

（2）当 $c=1$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的 $\boxed{}$ 无穷小量，

记作 $f(x)\sim g(x)\ \ (x\to x_0)$.

（3）当 $c\neq 0$ 且当 $c\neq 1$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的 $\boxed{}$ 无穷小量.

无穷小量与无穷大量
概念
无穷小量的比较

1.无穷小量的比较

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$， 则：

（1）当 $c=0$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的高阶无穷小量，

记作 $f(x)=o(g(x))\ \ (x\to x_0)$.

（2）当 $c=1$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量，

记作 $f(x)\sim g(x)\ \ (x\to x_0)$.

（3）当 $c\neq 0$ 且当 $c\neq 1$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量.

k 阶无穷小量

设在某极限过程 $x \to \square$ 中，函数 $\alpha(x), \beta(x)$ 都为无穷小量，并且都不为 0 .如果

$\lim\limits_{x \to \square} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$，则称当 $x \to \square$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k **阶无穷小量**.

【注】在同一极限过程下，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量也就是说 $\alpha(x)$ 与 $\beta^k(x)$（$k>0$）是同阶无穷小量.

练习题目

若$x \to 0$时函数f(x)为x^2的高阶无穷小量,则$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = (\quad)$

A.0 B.1/2 C.1 D.∞

无穷小量与无穷大量
概念
无穷小量的比较

练习题目

若$x \to 0$时函数$f(x)$为x^2的高阶无穷小量,则$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = (\quad)$

A.0　　B.1/2　　C.1　　D.∞

二、极限的性质

1. 极限的一般性质

①唯一性

②局部有界性

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在$M > 0$，$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x)| < M$

二、极限的性质

1. 极限的一般性质

①唯一性

②局部有界性

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $M>0$， $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<M$

知识补充

若f为[a,b]上连续函数则f有界

若f为(a,b) $\rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\ \exists \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\ \exists \\ f(x)\text{在}(a,b)\text{连续} \end{cases} \rightarrow$ 有界.

【例 3】$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在（　　）有界

$A(-1,0)$　　　　$B(0,1)$　　　　$C(1,2)$　　　　$D(2,3)$

【例 3】 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在（ A ）有界

$A(-1,0)$　　$B(0,1)$　　$C(1,2)$　　$D(2,3)$

若 I 为 $[a,b]$：连续函数必有界

若 I 为 (a,b) → $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\ \exists \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\ \exists \\ f(x)\text{在}(a,b)\text{连续} \end{cases}$ → 有界.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\dfrac{\sin(-3)}{(-1)(-2)9}=\dfrac{\sin(-3)}{18}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{-\sin(-2)}{-4}=\dfrac{\sin(-2)}{4}\Rightarrow\exists.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{-\sin(-2)}{4}\Rightarrow\exists$

$\lim\limits_{x\to 1}=\infty$ X 不存在，∴带1的答案不对，∴A

③局部保号性

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

若 A>0，则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有 $f(x) > 0$

若 A<0，则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有 $f(x) < 0$

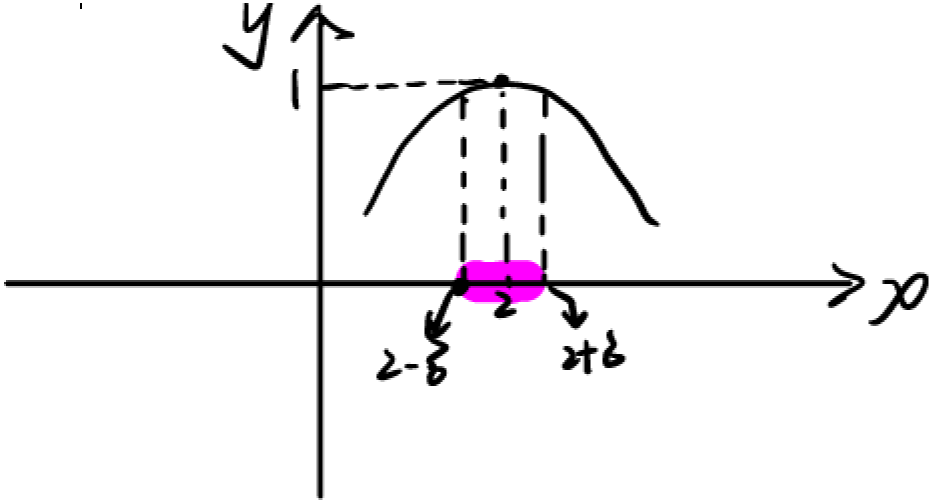
③局部保号性

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

若 $A>0$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$

若 $A<0$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) < 0$

口诀：$\begin{cases} \text{极限正，去心邻域正} \\ \text{极限负，去心邻域负} \end{cases}$



【例 4】设 $f'(0)=0$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^3}=8888$， 则 $x=0$ 是什么点?

让职场更自由

【例 4】设 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^3}=8888$，则 $x=0$ 是什么点？

解：$x\to 0$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x^3}>0$ $\begin{cases} x\to 0^+ \ (0,0+\delta) \ f'(x)>0 \\ x\to 0^- \ (0-\delta,0) \ f'(x)<0 \end{cases}$ 且 $f'(0)=0$

∴X=0为极小值点

【作业】设 $f'(1)=0$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{\sin\pi x}=1$，则 $x=1$ 是什么点？

【作业】设 $f'(1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{\sin\pi x}=1$，则 $x=1$ 是什么点？

$x\to 1$ 时 $\dfrac{f'(x)}{\sin\pi x}>0$

$$\begin{cases} x\to 1^+,\ \pi x\to\pi^+,\ \sin\pi x\to 0^-,\ f'(x)<0 \\ x\to 1^-,\ \pi x\to\pi^-,\ \sin\pi x\to 0^+,\ f'(x)>0 \\ f'(1)=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (1-\delta,1)\quad f'(x)>0 \\ (1,1+\delta)\quad f'(x)<0 \end{cases}$$

$\therefore x=1$ 为极大值点

【例 5】设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-2$，则 $x=0$ 是（　　）

A. 极大值点　　B 极小值点　　C 非极值点　　D 无法判断

【例 5】设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x} = -2$，则 $x=0$ 是（ A ）

A. 极大值点　　B 极小值点　　C 非极值点　　D 无法判断

$x\to 0$ $\dfrac{f(x)}{1-\cos x} < 0$

$$\begin{cases} x\to 0^-, \cos x \to 1^-, 1-\cos x \to 0^+, f(x)<0 \\ x\to 0^+, \cos x \to 1^-, 1-\cos x \to 0^+, f(x)<0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} \times 1-\cos x}_{-2\times \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = f(0)} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$f(0)=0$

$\therefore x=0$ 为极大值点

2. 极限的存在性质（用于计算数列极限）

①夹逼定理

如果 $a_n \le b_n \le c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

2. 极限的存在性质（用于计算数列极限）

①夹逼定理

如果 $a_n \le b_n \le c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

分析 $\begin{cases} \text{分子分母次数不齐} \longrightarrow \text{夹逼定理} \\ \text{分子分母次数齐} \longrightarrow \text{定积分定义} \end{cases}$

【例 6】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

【例 6】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

$$\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}\cdots\frac{n}{n^2+n}\leq I\leq\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+1}\cdots\frac{n}{n^2+n}$$

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\leq I\leq\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\text{左侧}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+n)}=\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\text{右侧}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore$ 由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}I=\frac{1}{2}$

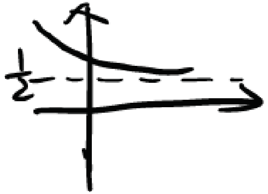
②单调有界准则

有界的概念：如果对于a_n，$\exists M>0$，使得$|a_n|\le M$，则称该数列有界。

②单调有界准则

1)有界的概念：如果对于a_n，$\exists M>0$，使得$|a_n|\le M$，则称该数列有界。

有上界1



有下界$\frac{1}{2}$

2)上界和下界：
$(M>0)$
$\begin{cases} a_n \le M & \text{上界} \\ a_n \ge -M & \text{下界} \end{cases}$

若$\{a_n\}$有界 $\Longleftrightarrow$ 有上界和下界

3)结论：若$\{a_n\}$为↑数列$\begin{cases} \text{无上界} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \text{有上界} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \text{存在} \end{cases}$

若$\{a_n\}$为↓数列$\begin{cases} \text{无下界} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \text{有下界} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \text{存在} \end{cases}$

单调有界准则

是否存在，如果存在，请求出

【例 7】$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n}(n=1,2,3\ldots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

① 单调性
② 找界
③ 求极限

是否存在，如果存在，请求出

【例 7】$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{1+a_n}(n=1,2,3\ldots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

① 单调性
② 找界
③ 求极限

是否存在，如果存在，请求出

【例 7】$a_1=1$， $a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{1+a_n}(n=1,2,3\ldots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

① 单调性
② 找界
③ 求极限

【例 7】$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n}(n=1,2,3\dots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

补充：数学归纳法

①证单调性

1) $a_1=1$ $a_2=1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$ $a_2>a_1$

2)假设当 $n=k$, $k\in N^*$时, $a_k>a_{k-1}$ 恒成立

3)当 $n=k+1$时 $a_{k+1}-a_k=1+\frac{a_k}{1+a_k}-1-\frac{a_{k-1}}{1+a_{k-1}}$

$$=\frac{a_k\cdot a_{k-1}+a_k-a_{k-1}-a_k\cdot a_{k-1}}{(1+a_k)(1+a_{k-1})}$$

$$=\frac{a_k-a_{k-1}}{(1+a_k)(1+a_{k-1})}$$

∵ $a_k-a_{k-1}>0$ $1+a_k>0$ $1+a_{k-1}>0$

∴ $a_{k+1}-a_k>0$ $a_{k+1}>a_k$

4)综上所述，由数学归纳法 $a_{n+1}>a_n$ 恒成立

∴$\{a_n\}$单调递增数列

②找界限

$a_{n+1}=1+\frac{a_n}{a_n+1}<1+1=2$

∴$\{a_n\}$有上界 2

③求极限。

左右各取 $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{a_n+1}\right)$$

$$I=1+\frac{I}{1+I}$$

解得：$I_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $I_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍)

∴ $I=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. 特殊极限（无穷小）的性质

①无穷小之和为（　　　　），无穷小相乘为（　　　　），无穷小×常数为（　　）

②无穷小×有界

3. 特殊极限（无穷小）的性质

①无穷小之和为（无穷小），无穷小相乘为（无穷小），无穷小×常数为（无穷小）

$\lim_{x\to 0}(x+\sin x)=0$　　$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin x\cdot\arctan x=0$　　$\lim_{x\to 0} 8x^3=0$

②无穷小×有界

无穷小×有界变量＝无穷小

eg: $\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$

$\because |\sin\frac{1}{x}|\le 1$，有界

$\therefore I=0$

3. 无穷小

①定义：$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow \alpha(x)$ 为 $x\to a$ 的无穷小

②常见无穷小

当 $x\to 0$：$\sin x\sim x$

$\tan x\sim x$

$\arcsin x\sim x$

$\arctan x\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$

当 $x\to 1$ 时：$\ln x\sim x-1$.

$e^x-1\sim x$.

$a^x-1\sim x\ln a$

$(1+bx)^a-1\sim abx$

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim \frac{x}{n}$

$\log_a(1+x)\sim \frac{1}{\ln a}x$.

补充记忆：$\tan x-\sin x\sim \frac{1}{2}x^3$

$x-\sin x\sim \frac{1}{6}x^3$.

$\tan x-x\sim \frac{1}{3}x^3$.

$x-\ln(1+x)\sim \frac{x^2}{2}$.

※常见等价无穷小

※等价无穷小替换

若 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$

则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} = A$

eg: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

【注意】只有在乘除法可以使用，加减法不可以进行替换！！！

三、未定式的计算

1. $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\bullet\infty$

2. $\infty-\infty$

3. ∞^{0}，0^{0}，1^{∞}

三、未定式的计算

1. $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0 \bullet \infty$

方法：

三、未定式的计算

1. $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\bullet\infty$ → $\begin{cases} \frac{0}{\frac{1}{\infty}}\text{型} \Rightarrow \frac{0}{0}\text{型} \\ \frac{\infty}{\frac{1}{0}}\text{型} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}\text{型} \end{cases}$

方法：①通用方法：洛必达法则

1) 若 $\lim f(x)=0$ 且 $\lim g(x)=0$

或 $\lim f(x)=\infty$ 且 $\lim g(x)=\infty$

2) 且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\exists$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

3) 隐含条件：$f(x)$、$g(x)$均可导且比值存在

若不存在，则洛必达法则失效 > 能不能用，用了再说

eg: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

②$\frac{0}{0}$型专用：等价无穷小替换原则

③$\frac{\infty}{\infty}$型专用 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} \cdots b_0}{a_n x^m + a_{m-1}x^{m-1} \cdots a_0} = \begin{cases} 0, & n<m \\ \infty, & n>m \\ \frac{b_n}{a_n}, & n=m \end{cases}$

eg $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-3x+7}{2x^2+7} = 2$

$\frac{\infty}{\infty}$

求函数极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2}{5x^3+1}$.

$\frac{\infty}{\infty}$

求函数极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+2}{5x^3+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+2}{5x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+3x^2+2}{x^3}}{\frac{5x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}{5+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{5}.$$

解题技巧：趋于无穷时，当分子分母最高次幂相等&分母的最高次幂大于分子的最高次幂时，同除以最高次幂既得解。

【例3】求函数极限：$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$.

$\frac{0}{0}$ 【例3】求函数极限：$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2\mathrm{x}-3}$.

【解析】：正确答案为：3/2.

解题技巧：趋于某一具体数时，须化简求解。

练习： 求函数极限：$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + \mathrm{x} - 2}{x^2 - 1}$.

练习： 求函数极限：$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+\mathrm{x}-2}{x^2-1}$.

【解析】：正确答案为：3/2.

【例 8】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^2 \bullet \ln(1+x)}$

【例 8】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\bullet\ln(1+x)}$

分析：$\frac{0}{0}$ 型

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^2\cdot\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^2\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

用到了等价无穷小替换： $\ln(1+x)\sim x$ $\quad\sin x\sim x$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

【例 9】$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x^3}$

【例 9】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3}$

分析：$\frac{0}{0}$型 / 提取 $e^{\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}\left(\dfrac{e^{\tan x}}{e^{\sin x}}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

用到了等价无穷小替换：$e^x-1\sim x$

（1）$C' = 0$（C 为常数）

（2）$(x^n)' = nx^{n-1}$

（3）$(\sin x)' = \cos x$

（4）$(\cos x)' = -\sin x$

（5）$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

（6）$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

（7）$(e^x)' = e^x$

（8）$(a^x)' = a^x \ln a$

（9）$(\tan x)' = \sec^2 x$

[自己总结的,考试直接背下来]

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

（10）$(\cot x)' = -\csc^2 x$

（11）$(\sec x)' = \sec x \tan x$

（12）$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

（13）$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（14）$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（15）$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

（16）$(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

【例 10】 $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln x \bullet \ln(1-x)$

【例 10】 $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln x \bullet \ln(1-x)$

【例 10】 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

分析：$\begin{cases} x\to1^-,\ \ln x\to0\ \ \ln(1-x)\to\infty \\ 换元更舒服，令\ t=x-1 \end{cases}$ ∴ "$0\cdot\infty$型" $\begin{cases} 转为\ \frac{0}{0}\ 型 \\ 转为\ \frac{\infty}{\infty}\ 型 \end{cases}$

解：法一：令 $t=x-1$，$x\to1^-$，$t\to0^-$ 且 $x=t+1$

∴ $\lim\limits_{t\to0^-}\ln(t+1)\cdot\ln(-t)$

无穷小替换

$=\lim\limits_{t\to0^-}t\cdot\ln(-t)=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{\ln(-t)}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{\frac{-1}{-t}}{-t^{-2}}=\lim\limits_{t\to0^-}(-t)=0$

倒为分母　　洛必达

补充：当 $x\to0$ 时，$\ln(x+1)\sim x$，令 $t=x+1$

当 $t\to1$ 时，$\ln t\sim t-1$ → $\boxed{当\ x\to1\ 时，\ln x\sim x-1}$

法二：$x\to1^-$ 时，$\ln x\sim x-1$

∴ $I=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)\cdot\ln(1-x)$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{-1}{1-x}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0$

2. ∞ - ∞

方法：有分母，则通分。没有分母，倒代换。

【例 11】$\lim\limits_{x \to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$

2. $\infty - \infty$

方法：有分母，则通分。没有分母，倒代换。

【例 11】$\lim\limits_{x \to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$

2. ∞ - ∞

方法：有分母，则通分。没有分母，倒代换。

【例 11】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

分析：∞−∞型，有分母，则通分

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$

法1：洛必达 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{6x^2}=-\frac{1}{3}$

法2：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x+x)(\sin x-x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+1}{1}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=2\times\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{3}$

【例 12】 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x})$

【例 12】 $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

分析：$\infty-\infty$型，有分母，通分

解：$\lim_{x\to0}\frac{xe^x+x^2e^x-e^x+1}{(e^x-1)\cdot x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x+x^2e^x-e^x+1}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x+e^x+2xe^x+x^2\cdot e^x-e^x}{2x}$

$=\lim_{x\to0}e^x\cdot\frac{(3x+x^2)}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3+x}{2}$

$=\frac{3}{2}$

【例 13】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$

【例 13】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$

分析：$x\to+\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to 1$ $\therefore \infty-\infty$型

解：令 $t=\frac{1}{x}$ $\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t^2}(e^t-1)-\frac{1}{t}\right]$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}$$

3. ∞^0，0^0，1^∞

$$u^v = e^{v \cdot \ln u}$$

($x \to 1$时, $\ln x \sim x-1$)

对于1^∞，特别的$u^v = e^{v \cdot \ln u} = e^{v \cdot (u-1)}$

【例 14】 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$

【例 14】$\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$ 　∞^0 型

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{1+x^2}+2x}{(x+\sqrt{1+x^2})\cdot 2\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)\cdot 2\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=e^0$$

$$=1$$

【例 15】 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$

【例 15】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

分析：$x\to\frac{\pi}{4}$时，$\tan x\to 1$，$\frac{1}{\cos x-\sin x}\to\infty$ ∴ 1^{∞}型

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}(\tan x-1)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x-\sin x)\cdot\cos x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos x}}$$

$$=e^{-\sqrt{2}}$$

【作业】$\lim\limits_{x\to 0}(\arctan x)^{\ln(1-x)}$。提示：换元法令$t=\arctan x$来简化。

【作业】$\lim_{x\to 0}(\arctan x)^{\ln(1-x)}$。提示：换元法令 $t=\arctan x$ 来简化。

分析：$x\to 0$ $\arctan x\to 0$ $\ln(1-x)\to 0$ $\therefore 0^0$ 型

$$I=e^{\lim_{x\to 0}\ln(1-x)\cdot\ln(\arctan x)}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}(-x)\cdot\ln(\arctan x)}$$

法1：令 $t=\arctan x$，$x\to 0$，$t\to 0$

$$I=e^{\lim_{t\to 0}(-\tan t)\cdot\ln t}$$

$$=e^{\lim_{t\to 0}(-t)\cdot\ln t}$$

$$=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{-\frac{1}{t}}}=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}}}=1$$

法2：$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\arctan x)}{-\frac{1}{x}}}$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\arctan x)\cdot(1+x^2)}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}}=e^0=1$$

三、极限的应用——函数的连续性

1. 间断点（不连续的点）的来源：

无定义点、分段函数分段点

2. 连续的定义

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续。

左连续：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 记为 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$

右连续：$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 记为 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$

20. 已知函数$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$在点$x=0$处连续，求$a$的值。

20. 已知函数$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$在点$x=0$处连续，求$a$的值。

本题考察连续的定义：设函数$f(x)$在x_0点附近有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的充分必要条件是：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{且} \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

$$a=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^2=e^2$$

3. 间断点的定义

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某去心邻域有定义

记：① $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$　② $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$　③ $f(x_0)$

①②均存在
- ①=②≠③　可去间断点
- ①≠②　跳跃间断点

可去间断点、跳跃间断点 → 第一类间断点

①②至少一个不存在 → 第二类间断点

3. 间断点及其分类

（1）第一类间断点

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限均存在，但不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 在第一类间断点中，可分为可去间断点和跳跃间断点.

（2）第二类间断点

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限中至少有一个不存在时，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二间断点.

一般分母等于0的点

3. 间断点及其分类

间断点
- 第一类间断点
  - 可去间断点—左、右极限均存在，且相等
  - 跳跃间断点—左、右极限均存在，但不相等
- 第二类间断点—左、右极限至少有一个不存在　一般分母等于0的点

一般分母等于0的点

函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}$ 的所有间断点是（　　）.

A. $x=0$

B. $x=11$

C. $x=0,x=-1$

D. $x=0,x=1$

一般分母等于0的点

【解析】考查函数间断点的分类

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}=+\infty.$$

【答案】D

19. 函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$ 的间断点是（　　　　）

A:x=1，x=2

B:x=3

C:x=1，x=2，x=3

D:无间断点

19. 函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$ 的间断点是（ ）

A:x=1，x=2

B:x=3

C:x=1，x=2，x=3

D:无间断点

答案： A

解析： $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\neq 0$，所以间断点是x=1，x=2

【例 16】$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\bullet e^{\frac{1}{x}}$ 求其间断点及类型

【例 16】$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\bullet e^{\frac{1}{x}}$ 求其间断点及类型

【例 16】$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\bullet e^{\frac{1}{x}}$ 求其间断点及类型

【例 16】$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\bullet e^{\frac{1}{x}}$ 求其间断点及类型

无定义点：$x=1, x=-1, x=0$　　分段点：无

解：对于$x=0$而言　① $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-2\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=-\infty$

② $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-2\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$

①②中至少有1个不存在，故为第二类间断点

对于$x=1$而言　① $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\frac{e}{2}$

② $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=e\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=e\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{2x}=-\frac{e}{2}$

①=②≠③ ∴可去间断点

对于$x=-1$而言　① $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\frac{1}{e}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{1}{e}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2}{x^2-1}=+\infty$

② $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$

①②都不存在 ∴$x=-1$为第二类间断点