【作业】$y=\sqrt{x^2+2x+4}-x$ 求其水平渐近线。

【例 14】 $y=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-1}$ 求其水平渐近线。

$\lim\limits_{x\to\infty} y=2$ ∴ $y=2$ 为水平渐近线

【作业】 $y=\sqrt{x^2+2x+4}-x$ 求其水平渐近线。

解：$\lim\limits_{x\to\infty} y$ "$\infty-\infty$"型 令 $t=\frac{1}{x}$，$x\to\infty$，$t\to0$

∴ $\lim\limits_{t\to0^+} y=\lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{\frac{1+2t+4t^2}{t^2}}-\frac{1}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+2t+4t^2}-1}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}(2t+4t^2)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0^+}(1+2t)=1$

$\lim\limits_{t\to0^-} y=\lim\limits_{t\to0^-}\frac{\sqrt{1+2t+4t^2}+1}{-t}=+\infty$

∴ $y=1$ 为水平渐近线

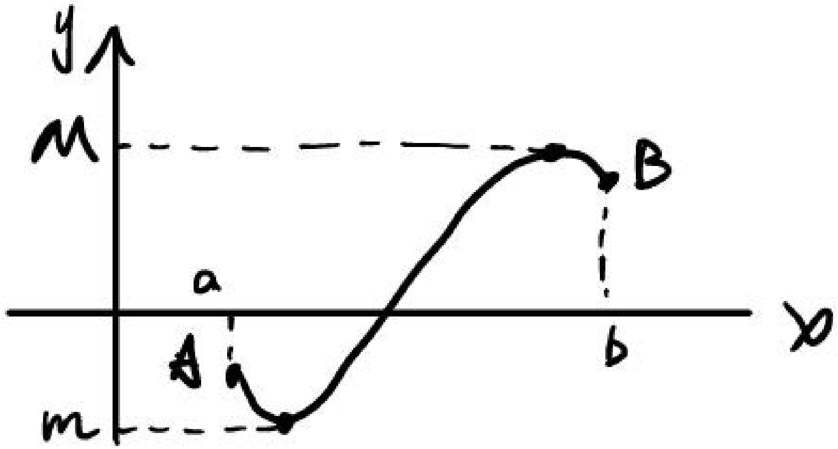
第三章 中值定理

第三章 中值定理

1. 最值定理
2. 有界定理
3. 零点定理
4. 介值定理

1. 费马引理
2. 罗尔定理
3. 拉格朗日中值定理
4. 柯西中值定理

一、仅仅涉及到 $f(x)$ 的定理



1. 最值定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

则 $f(x)$ 有最小值 m 和最大值 M

2. 有界定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

则 $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow$ 有上界也有下界 $\Leftrightarrow \exists K>0$，使 $|f(x)|\le K$

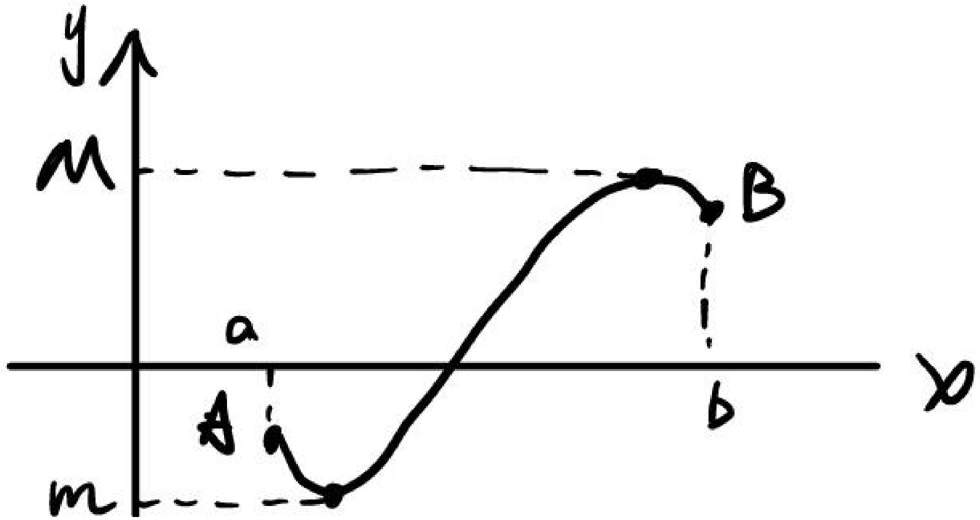
3. 零点定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$

则存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$

4. 介值定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

对任意 $\eta\in[m,M]$，存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\eta$

一、仅仅涉及到$f(x)$的定理



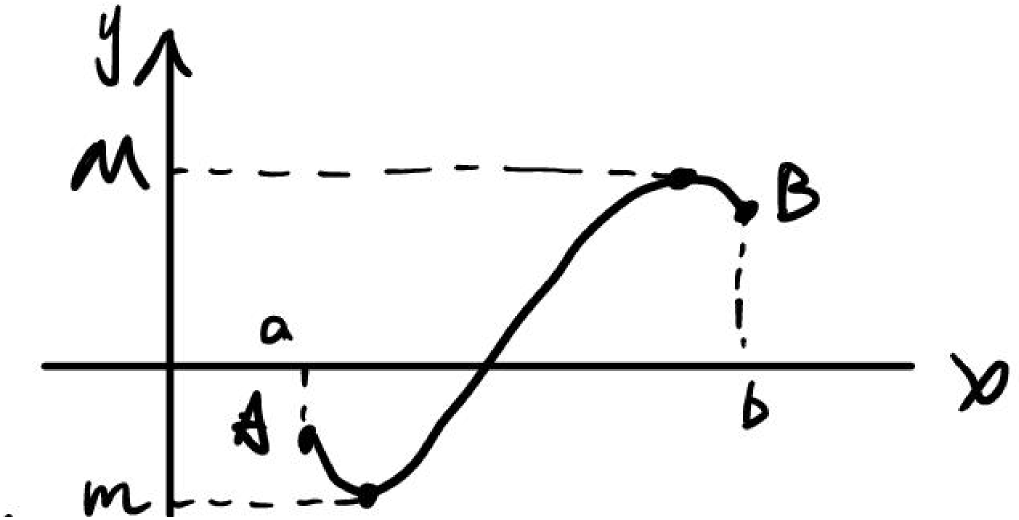
1. 最值定理 若$f(x)$在$[a,b]$连续

则$f(x)$有最小值m和最大值M

2. 有界定理 若$f(x)$在$[a,b]$连续

则$f(x)$有界$\Leftrightarrow$有上界也有下界$\Leftrightarrow \exists K>0$，使$|f(x)|\le K$

一、仅仅涉及到 $f(x)$ 的定理



3. 零点定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$

则存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$

4. 介值定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

对任意 $y\in[m,M]$，存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=y$

【解题方法】所证结论未涉及到 $f'(x)$，仅涉及 $f(x)$，并且：

① $\xi \in ($　　$)$，开区间 ⇒ 零点定理

② $\xi \in [$　　$]$，闭区间/函数和条件 ⇒ 介值定理

【例 1】$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=1-c$

分析：

解：

【例 1】 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=1-c$

分析：开区间、不涉及 $f'(x)$ → 零点定理

解：设 $g(x)=f(x)+x-1$

$g(0)=f(0)+0-1=-1$

$g(1)=f(1)+1-1=1$.

$\because g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$g(0)\cdot g(1)<0$ $\therefore$ 存在 $c\in(0,1)$ 使 $g(c)=0$

$\therefore$ 存在 $c\in(0,1)$ 使 $f(c)=1-c$ 成立，原命题得证 #

【作业】$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0, f(1)=1$, 证明对于任意的$a>0, b>0$，

存在$\xi \in (0,1)$使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

零点定理：$0\cdot 0 < 0$

让职场更自由

【作业】$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0, f(1)=1$，证明对于任意的$a>0, b>0$，存在$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

1° $\xi \to x$ ：$f(x)=\dfrac{a}{a+b}$

2° $g(x)=f(x)-\dfrac{a}{a+b}$

3° $\begin{cases} g(0)=f(0)-\dfrac{a}{a+b}=-\dfrac{a}{a+b} \\ g(1)=f(1)-\dfrac{a}{a+b}=1-\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{b}{a+b} \end{cases}$

4° $g(0)\cdot g(1)=-\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{b}{a+b}$

$=\dfrac{-ab}{(a+b)^2}<0$

$\exists\, \xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$

$f(\xi)-\dfrac{a}{a+b}=0$ 即 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

【作业】$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0, f(1)=1$，证明对于任意的$a>0, b>0$，

存在$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

分析：开区间＋无$f'(x)$ → 零点定理

解：设 $g(x)=f(x)-\dfrac{a}{a+b}$ $g(0)=f(0)-\dfrac{a}{a+b}=-\dfrac{a}{a+b}$ $g(1)=f(1)-\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{b}{a+b}$

∵ $g(x)$在$[0,1]$上连续 且 $g(0)\cdot g(1)<0$ ∴ $\exists\xi\in(0,1)$使 $g(\xi)=0$

∴ $\exists\xi\in(0,1)$使 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$ ∴原命题得证

【例 2】$f(x)$在$[0,4]$上连续，$f(0)+2f(2)+3f(3)=6$，求证$\xi\in[0,4]$使得$f(\xi)=1$

分析：

【解题方法】所证结论未涉及到$f'(x)$，仅涉及$f(x)$，并且：

① $\xi\in($　　$)$，开区间 ⇒ 零点定理

② $\xi\in[$　　$]$，闭区间/函数和条件 ⇒ 介值定理

【例 2】 $f(x)$在$[0,4]$上连续， $f(0)+2f(2)+3f(3)=6$，求证$\xi\in[0,4]$使得$f(\xi)=1$

分析：

4. 介值定理 若$f(x)$在$[a,b]$连续
对任意$y\in[m,M]$，存在$\xi\in[a,b]$使$f(\xi)=y$

【例 2】 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续， $f(0)+2f(2)+3f(3)=6$, 求证 $\xi\in[0,2]$ 使得 $f(\xi)=1$

分析：闭区间+函数和 $\longrightarrow$ 介值定理

> 4. 介值定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续
> 对任意 $y\in[m,M]$，存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=y$

解：$\because$ $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，由最值定理，必 $\exists\, M, m$

$m\le f(0)\le M$, $m\le f(1)\le M$, $m\le f(3)\le M$

$\therefore\ 6m\le f(0)+2f(2)+3f(3)\le 6M$

$\therefore\ 6m\le 6\le 6M$ $\quad\therefore\ m\le 1\le M$

由介值定理，必存在 $\xi\in[0,2]$ 使得

$f(\xi)=1$

二、涉及到 $f'(x)$ 的定理

1. 费马定理　可导极值导为0

①极值点的定义——对于函数 $f(x)$

如果 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，称 x_0 为极大值点，$f(x_0)$ 为极大值

如果 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\ge f(x_0)$，称 x_0 为极小值点，$f(x_0)$ 为极小值

②费马定理：

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且取极值 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

二、涉及到 $f'(x)$ 的定理

1. 费马定理 可导极值导为0

①极值点的定义——对于函数 $f(x)$

如果 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，称 x_0 为极大值点，$f(x_0)$ 为极大值

如果 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\ge f(x_0)$，称 x_0 为极小值点，$f(x_0)$ 为极小值

②费马定理：

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且取极值 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

证明：不妨设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且取极大值，当 $x\to x_0$ 时，有 $f(x)\le f(x_0)$

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$　　$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$　$\because f'(x_0)$ 存在

$\therefore f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$　$\therefore f'(x_0)=0$

③重要结论

两个重要结论

$f(x)$可导且x_0为极值点 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $f'(x_0)=0$

x_0为极值点 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $f'(x_0)=0$或不存在

两个重要结论

- $f(x)$可导且x_0为极值点、 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ $f'(x_0)=0$

  左箭头反例：$y=x^3$在$x=0$处$f'(0)=0$，但不是极值点

- x_0为极值点、 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ $f'(x_0)=0$或不存在

  左箭头反例：$y=\begin{cases}-2x, & x<0\\ 3x, & x\geq 0\end{cases}$ $f'_-(0)=-2$ $f'_+(0)=3$

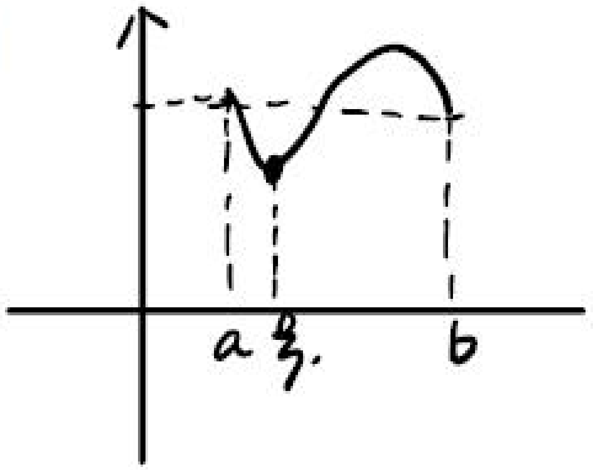
  $\therefore f'(0)$不存在，但是$x=0$为极小值点

2.罗尔定理

罗尔定理找相等

如果 $f(x)$ 满足下列条件

$$\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导 \\ f(a)=f(b) \end{cases}$$



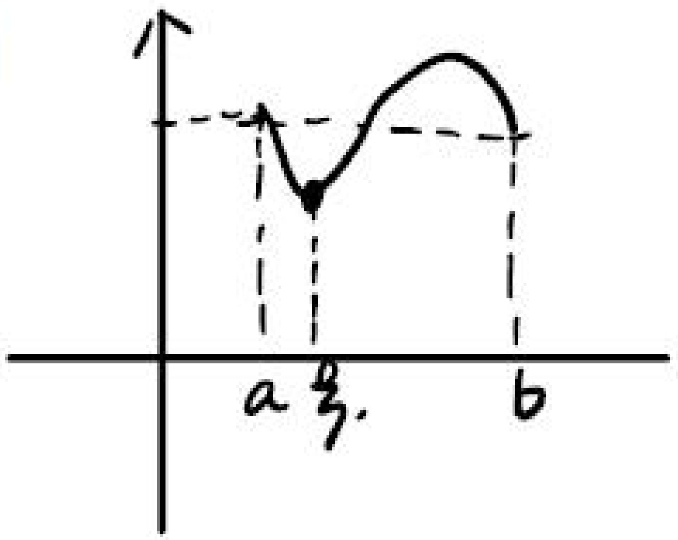
则 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

2. 罗尔定理

罗尔定理找相等

如果 $f(x)$ 满足下列条件

$$
\begin{cases}
\text{在}[a,b]\text{上连续} \\
\text{在}(a,b)\text{上可导} \\
f(a)=f(b)
\end{cases}
$$



则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

罗尔定理：可导相等存在导为零

证明前分析：由图象发现必有一点 ξ 使 $f'(\xi)=0$（斜率为0）

证明：$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由最值定理，必存在 m, M

$\therefore m, M$ 至少有1个位于 (a,b) 内

设 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 $f(\xi)=M$. $\Rightarrow f'(\xi)=0$ 或不存在

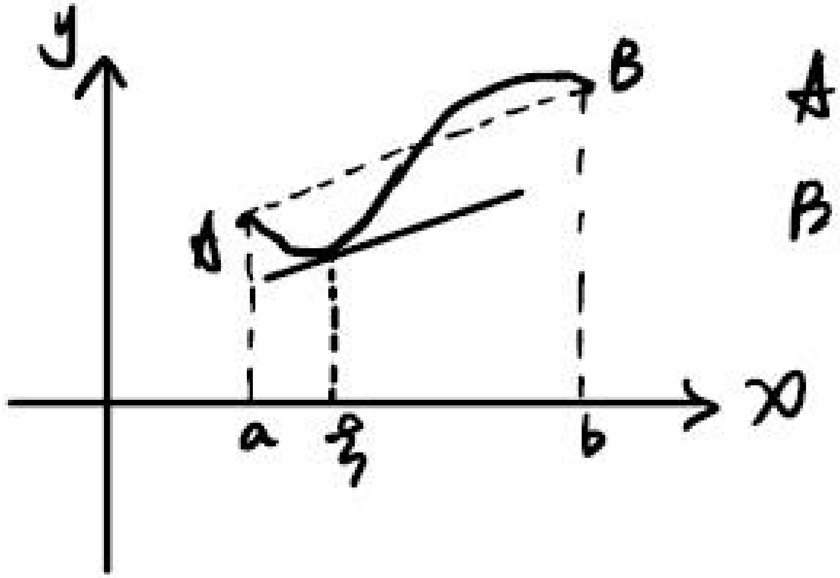
$\because f(x)$ 在 (a,b) 上可导 $\therefore$ 由费马定理 $f'(\xi)=0$

费马定理：可导极值导为0

3. 拉格朗日中值定理

如果 $f(x)$ 满足下列条件

$$\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导 \end{cases}$$



$A(a, f(a))$

$B(b, f(b))$

则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明过程：构造函数=曲线-直线

拉格朗日中值定理证明过程：构造函数=曲线-直线

拉格朗日中值定理证明过程：构造函数=曲线-直线

证明前分析：由图易知必定有 $f'(\xi)=k_{AB}$（导不是相似值）

直线AB：$y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$　　波浪线：$y=f(x)$

证明：构造函数 = 曲线 − 直线

$$= f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$$

$$= f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)\text{在}[a,b]\text{连续}\\ \varphi(x)\text{在}(a,b)\text{可导}\\ \varphi(a)=\varphi(b)=0\end{array}\right. \xRightarrow{\text{罗尔定理}} \exists\,\xi\in(a,b)\text{ 使 }\varphi'(\xi)=0$$

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad \varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

∴拉格朗日中值得证.

证明前分析：由图像中必有 $f'(\xi)=k_{AB}$（ξ不是唯一值）

割线AB：$y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$　　波浪线：$y=f(x)$

证明：构造函数=曲线－直线

$$=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$$

$$=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)\text{在}[a,b]\text{连续}\\ \varphi(x)\text{在}(a,b)\text{可导}\\ \varphi(a)=\varphi(b)=0\end{array}\right. \xrightarrow{\text{罗尔定理}} \exists\xi\in(a,b)\text{ 使 }\varphi'(\xi)=0$$

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad \varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\therefore$ 拉格朗日中值得证.

注意：

① 若$f(a)=f(b)$，拉格朗日中值定理退化为罗尔

② $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

③ 做题方法 $\left\{\begin{array}{l}f(b)-f(a)\longrightarrow\text{拉格朗日}\\ f(a)\cdot f(b)\cdot f(c)\longrightarrow 2\text{次拉格朗日}\end{array}\right.$

证明过程：构造函数=曲线-直线

4. 柯西中值定理

如果 $f(x)$、$g(x)$ 满足下列条件

$$\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导 \\ g'(x)\neq 0 \end{cases}$$

则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证明前分析：

- 用两次拉格朗日，相除不行！ $\Longrightarrow$ ξ 不同
- 令 $g(x)=x$，退化为拉格朗日

“$g(x) \xrightarrow{\text{退化}} x$”

$g(x) \xleftarrow{\text{推广}} x$

拉格朗日中值定理证明的升级

"曲线-直线"构造.

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

升级 $x\to g(x)$ $b\to g(b)$ $a\to g(a)$

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

罗尔定理 $\left.\begin{array}{l}\varphi(a)=0\\ \varphi(b)=0\end{array}\right\}$ $\therefore \varphi'(\xi)=0$ 即柯西中值定理

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)=0 \text{ 即 } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

#

三、定理的应用

1. 结论中证明 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的问题

方法：由零点定理/介值定理到罗尔定理

零点定理 ( ) 开区间

介值定理 [ ] 闭区间/区间和

$\Rightarrow$ 罗尔定理

【例 3】$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)上可导，$f(a)\bullet f(b)>0$，$f(a)\bullet f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，求证存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$成立。

【例 3】$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)上可导，$f(a)\cdot f(b)>0$，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，求证 自由

存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$成立。

分析： 零点定理，找区间！

解：$f(a)\cdot f(b)>0$，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ $\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$

零点定理

1° $f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ $\therefore \exists\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，使$f(\xi_1)=0$

2° $f(x)$在$[a,b]$连续，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$ $\therefore \exists\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$使$f(\xi_2)=0$

3° $f(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$连续，(ξ_1,ξ_2)可导 且$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

罗尔定理：可导相等存导零

由罗尔定理，必定存在ξ 使$f'(\xi)=0$

让职场更自由

【例 4】 $f(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$上可导， $f(0)=1$，$f(1)+2f(2)=3$

证明存在$\xi\in(0,2)$使得$f'(\xi)=0$。

【例 4】$f(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$上可导，$f(0)=1$，$f(1)+2f(2)=3$

证明存在$\xi\in(0,2)$使得$f'(\xi)=0$。

分析：

函数和——介值定理[a，b]

开区间——零点定理（a，b）

【例 4】 $f(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$上可导，$f(0)=1$，$f(1)+2f(2)=3$

证明存在$\xi\in(0,2)$使得$f'(\xi)=0$。

分析：

函数和——介值定理[a，b]；　　开区间——零点定理（a，b）

解：$f(x)$在$[0,2]$连续 ∴存在 m，M ∴ $3m\le f(1)+2f(2)\le 3M$ ∴ $m\le 1\le M$

由介值定理，必存在 $c\in(0,2)$使 $f(c)=1$

$f(x)$在$[0,2]$连续，$(0,2)$可导 $f(0)=f(c)=1$

∴ $\exists\xi\in(0,c)$使 $f'(\xi)=0$ #

【作业】$f(x)$在$[-1,1]$上三阶可导，$f(x)$是奇函数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f'(1)=1$，证明存在$\xi\in(-1,1)$使得$f'''(\xi)=0$。

【作业】$f(x)$在$[-1,1]$上三阶可导，$f(x)$是奇函数，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，证明存在$\xi\in(-1,1)$使得$f'''(\xi)=0$。补充条件 $f'(1)=1$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A \Rightarrow f(a)=b \quad f'(a)=A}$$

1° $\because f(0)=0$ $\boxed{f'(0)=1}$

2° $f(x)$为奇函数，$\therefore f'(x)$为偶函数 $\boxed{\therefore f'(1)=1,\ f'(-1)=1}$

3° $f'(x)$在$[-1,0]$连续，$f'(x)$在$(-1,0)$可导 $f'(-1)=f'(0)$

$\therefore \exists \xi_1\in(-1,0)$ 使 $f''(\xi_1)=0$。

4° 同理可证 $\exists \xi_2\in(0,1)$ 使 $f''(\xi_2)=0$

5° 在(ξ_1,ξ_2)之间，由罗尔定理 可知 $\exists f'''(\xi)=0$

b.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A.$ $\Rightarrow f(a)=?$ $f'(a)=A.$

1° $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x-0}=1.$ $f(0)=0$ ✓ $f'(0)=1.$ ✓

$f'(-1)=f'(1).$

2° $f(x)$ 奇. $f'(x)$ 偶. 由 $f'(1)=1.$ $\therefore f'(-1)=1.$ $f'(0)=1.$

罗尔 罗尔

$f''(\xi_1)=0$ $f''(\xi_2)=0$

罗尔定理 $f'''(\xi_3)=0$

2. 结论中仅有ξ，没有a,b。

方法一：还原法

【例 5】$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，$f(1)=0$，证明存在$\xi\in(0,1)$使得

$\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$

2. 结论中仅有ξ，没有a,b。

方法一：还原法 $[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

【例 5】$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，$f(1)=0$，证明存在$\xi\in(0,1)$使得

$\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$

第一步：将$\xi\to x$ $xf'(x)+2f(x)=0$ ∴ $\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{2}{x}=0$

第二步：还原 $[\ln f(x)]'+[\ln x^2]'=0$ ∴ $[\ln f(x)+\ln x^2]'=0$

∴ $[\ln f(x)\cdot x^2]'=0$

第三步：得辅助函数 $\varphi(x)=x^2\cdot f(x)$

解：设$\varphi(x)=x^2f(x)$，$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$

∴$\exists\xi\in(0,1)$使$\varphi'(\xi)=0$ $\varphi'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$ ∴$\varphi'(\xi)=0$ 可得 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$

【例 6】$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$

使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

【例 6】$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

分析：① $f'(x)+f(x)\cdot g'(x)=0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)=0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+\ln e^{g(x)}=0$

② $[\ln f(x)]'+[\ln e^{g(x)}]'=0$ ③ $\varphi(x)=f(x)\cdot e^{g(x)}$

解：$\varphi(x)=f(x)\cdot e^{g(x)}$ $\varphi(a)=0$ $\varphi(b)=0$ $\varphi'(x)=f'(x)e^{g(x)}+f(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)$

由罗尔定理可知$\exists\xi\in(a,b)$使$\varphi'(\xi)=0$ $\therefore f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0$

$\because e^{g(\xi)}\neq 0$ $\therefore f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$ 成立

【作业】$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)-2f(\xi)=0$

【作业】$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)-2f(\xi)=0$

分析：构造分析法

解：令 $\varphi(x)=f(x)\cdot e^{-2x}$ $\quad \varphi'(x)=f'(x)\cdot e^{-2x}+f(x)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)$

由罗尔定理，$\exists\ \xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$

$\therefore f'(\xi)\cdot e^{-2\xi}+f(\xi)\cdot e^{-2\xi}(-2)=0$

$\because e^{-2\xi}\neq 0$ $\quad \therefore f'(\xi)-2f(\xi)=0$

方法二：分组法

【例 7】$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，$f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，证明

①存在$c\in(0,1)$使得$f(c)=c$

②存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)-f(\xi)=1-\xi$

【例 7】$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明

①存在$c\in(0,1)$使得$f(c)=c$

②存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)-f(\xi)=1-\xi$

①分析：开区间，不涉及$f'(x)$ ⇒ 零点定理

解：令$g(x)=f(x)-x$，$g(0)=f(0)=0$　$g(1)=f(1)-1=-\frac{1}{2}$

$g(0)\cdot g(1)<0$ ∴ $\exists\, c\in(0,1)$使$g(c)=0$　∴ $f(c)-c=0$

$f(c)=c$

方法二：分组法

【例 7】$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明

①存在$c\in(0,1)$使得$f(c)=c$

②存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)-f(\xi)=1-\xi$

适当分组

② 分析：仅有 ξ，添加 $f(x)$，但无法还原

1° $\xi \to x$ $\quad f'(x) - f(x) = 1 - x$

2° 适当分组 $\quad f'(x) - 1 = f(x) - x \qquad f'(x) - 1 - [f(x) - x] = 0$

3° 还原 $\quad [f(x) - 1]' - [f(x) - x] = 0 \quad$ 令 $h(x) = f(x) - x$

$$\therefore \frac{h'(x)}{h(x)} - 1 = 0 \qquad \therefore [\ln h(x)]' - [\ln e^x]' = 0$$

解：令 $\varphi(x) = \dfrac{h(x)}{e^x} = \dfrac{f(x) - x}{e^x} \qquad \varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) \neq 0 \quad \varphi(c) = 0$

$\therefore \exists \xi \in (0, c)$ 使 $\varphi'(\xi) = 0$，$\therefore f'(\xi) - f(\xi) - 1 + \xi = 0$ 成立

3. 结论中有ξ，有a,b。

方法一：若ξ和a,b可以分离

$$\xrightarrow[\text{的一侧}]{\text{在}ab} \begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \to \text{拉格朗日} \\ \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \to \text{柯西.} \end{cases}$$

【例 8】$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，证明存在$\xi \in (a,b)$使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

3. 结论中有ξ，有a,b。

方法一：若ξ和a,b可以分离 $\xRightarrow[\text{的一侧}]{\text{在}ab}$ $\begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \to \text{拉格朗日} \\ \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \to \text{柯西} \end{cases}$

【例 8】$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$使得

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

分析：$\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln a-\ln b}=\xi\cdot f'(\xi)$ → 柯西.

解：令$g(x)=\ln x$ 由柯西中值定理

$\exists\,\xi\in(a,b)$ $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}$

$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=f'(\xi)\cdot\xi$.

∴原命题得证

方法二：若ξ和a,b无法分离 凑——某东西的导数=0构造辅助函数

由

【例 9】$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$g'(x)\neq 0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使得$\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

方法二：若 ξ 和 a,b 无法分离 → 换！→ (函数)$'=0$ → 辅助函数

【例 9】$f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，$g'(x)\neq 0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

分析：ξ、ab 无法分离 → 换.

① $\xi \to x$ $\quad [f(x)-f(a)]g'(x) = f'(x)[g(b)-g(x)]$

② 去分母再移项 $\quad f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x) = f(a)\cdot g'(x)+g(b)\cdot f'(x)$

$$[f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)-g(b)f(x)]'=0$$

解：令 $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)-g(b)\cdot f(x)$

$\varphi(a)=-g(b)\cdot f(a)$ $\quad \varphi(b)=-g(b)\cdot f(a)$ $\quad \varphi(a)=\varphi(b)$

由罗尔定理，∃ $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$

∴ 整理得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ #

4. 结论中有 ξ、η

(强化班讲)

一、泰勒公式

1、设函数$f(x)$在包含x_0的某区间(a,b)内有$n+1$阶导数，则对任一$x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$，其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$，ξ是位于x_0与x之间的某个值。

上面的表达式称为拉格朗日型余项。

四、初识泰勒

1、泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\begin{cases}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \longrightarrow \text{拉格朗日余项} \\ o\left[(x-x_0)^n\right] \longrightarrow \text{皮亚诺余项}\end{cases}$$

2、带有皮亚诺余项的麦克劳林公式

如果取 $x_0=0$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2\cdots\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\cdot x^n+o(x^n)$

则称 $f(x)$ 为带有皮亚诺余项的麦克劳林公式。

$o(x^n)$　　$x_0=0$

熟记:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

4、应用之一：求极限.

【例1】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

A/B型：上下同阶—展开到分子、分母相同的阶

4.应用之一：求极限.

[例10] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解：由 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\therefore I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}$

A/B型：上下同阶—展开到分子、分母相同的阶

[例11] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1-x}{x^{2}}$

[习编] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1-x}{x-\tan x}$

[习编] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{2}}-1-x^{2}}{x^{4}}$

【例11】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

解：$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+o(x^2)$

$\therefore e^x-1-x=\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$\therefore I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

【习题】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x\tan x}$ 解：$\dfrac{1}{2}$

【习题】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$

解：$x\to0$时，$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+o(x^2)$

$\square\to0$时，$e^{\square}=1+\square+\dfrac{1}{2!}\square^2+o(\square^2)$

$x^2\to0$时，$e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

【旧解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\arctan x}-1-\arctan x}{(\arctan x)\cdot\tan x}$

【旧版】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arctan x}-1-\arctan x}{(\arctan x)\cdot\tan x}$

解：$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$

$e^{\arctan x}=1+\arctan x+\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+o[(\arctan x)^2]$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arctan x}-1-\arctan x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(\arctan x)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

规则：$\dfrac{A}{B}$型：上下同阶，展开到分母次数相同

[例12] 当$x\to 0$，$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$与$cx^k$为等价无穷小，求$c$、$k$？

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}+o(x^{2n})$$

A/B型：幂次最低：展开到系数不同的x最低次幂

[例1.2] 当 $x\to 0$，$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 cx^k 为等价无穷小，求 c, k？

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\therefore e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!}+o(x^6)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{cx^k}=\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{cx^k}=1$$

$$\therefore c=-\frac{1}{12}\quad k=4$$

A/B型：幂次最低：展开到系数不同的x最低次幂