讲义 P16.

(例1). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{(x\ln(1+x)-x^2)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan x-1-\sin x}{(x\ln(1+x)-x^2)\cdot 2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{2x\cdot(-\frac{1}{2}x^2)}$$

$\tan x-\sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$

$x-\ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{-x^3}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

[例2]: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\ln(1+x)-1}{x^2}$ 已知条件: $f(0)=f'(0)=f''(0)=1$.

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-\frac{1}{1+x}}{2x}$ (洛必达法则)

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)+1}{2}$

$= \dfrac{f''(0)+1}{2}$

$= 1$

[例3] $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_1^x t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\ dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})} \sim x$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}$

$= \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}(e^t-1)-\frac{1}{t}$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1}{2t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$$