



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نام و نام خانوادگی: محمد سبحان سخایی

شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۹۲۵۳

موضوع: ارتباط بین حوزه زمان و فرکانس

سیستم‌های کنترل خطی

نام استاد: جناب آقای دکتر تقی‌رادی

پاییز ۱۴۰۳

تعریف حوزه زمان:

در حوزه زمان، سیگنال‌ها تغییرات یک کمیت (مانند ولتاژ، جریان، دما و غیره) را نسبت به زمان نشان می‌دهند. این تغییرات به صورت تابعی از زمان هستند، یعنی برای هر زمان خاص مقداری از کمیت را داریم. مثلاً، یک موج سینوسی در حوزه زمان می‌تواند به صورت تغییرات ولتاژ یک پالس الکتریکی در طول زمان باشد.

تعریف حوزه فرکانس:

در حوزه فرکانس، سیگنال‌ها به صورت ترکیبی از فرکانس‌های مختلف (با دامنه و فاز مشخص) نمایش داده می‌شوند. این نمایش به ما این امکان را می‌دهد که بدانیم سیگنال از چه فرکانس‌هایی تشکیل شده است و این فرکانس‌ها چقدر بر هم تاثیر می‌گذارند. برای مثال همان موج سینوسی در حوزه فرکانس، یک نقطه خاص را نشان می‌دهد که بیانگر فرکانس این موج است. حال با توجه به دامنه‌ای که این سیگنال در حوزه زمان داشته است می‌توان پی برد که این فرکانس خاص با چه دامنه‌ای تقویت می‌شود.

ارتباط بین حوزه زمان و فرکانس:

فرکانس را نمی‌توان به عنوان یک بعد مستقل در نظر گرفت. دلایلی موجود می‌باشند که این ادعا را رد می‌نمایند که مهم‌ترین این دلایل بحث تعریف ابعاد می‌باشد. در واقع ابعاد به صورت مستقل از یکدیگر تعریف می‌شوند. در فیزیک معمولاً سه بعد فضایی و یک بعد زمانی داریم. فرکانس یک ویژگی است که به رفتار نوسانات و تغییرات در زمان اشاره دارد و نمی‌تواند به عنوان یک بعد مستقل در نظر گرفته شود. در حقیقت فرکانس به تعداد نوسانات در واحد زمان مربوط می‌شود و بنابراین به طور مستقیم به بعد زمان وابسته است و رابطه‌ای بین این دو حوزه برقرار است. می‌توان گفت که فرکانس یک خاصیت نوسانات است که در یک بستر زمانی عمل می‌کند. حال که ارتباطی بین این دو فضا برقرار است لازم است تا درک شهودی از این ارتباط به دست آوریم که این کار را ابتدا با بیان مثال و سپس با توجه به مفاهیمی مانند تغییرات سرعت سیگنال در حوزه زمان و قطب انجام می‌دهیم. چرا که فرمول‌های ریاضی مربوطه (تبدیل فوری و تبدیل لاپلاس) به خوبی در ریاضیات بیانگر این موضوع می‌باشند.

مثال ۱: اگر صدای یک موسیقی را ضبط کنید، حوزه زمان نشان می‌دهد که شکل موج صدا در طول زمان چگونه تغییر می‌کند و حوزه فرکانس آن نشان می‌دهد که سیگنال در چه فرکانس‌هایی قوی یا ضعیف است. حوزه فرکانس برای ما مشخص می‌کند سیگنال موسیقی چه تعداد نت (فرکانس) دارد و هر کدام چه قدرتی دارند.

اکنون برای آنکه ارتباط بین این دو حوزه مشهودتر شود به بررسی حالات زیر می‌پردازیم:

۱) تغییرات سریع در حوزه زمان: اگر یک سیگنال تغییرات سریعی در زمان داشته باشد (مثلاً دارای پیک‌های ناگهانی یا نویز باشد)، در حوزه فرکانس به صورت اجزای فرکانسی با دامنه‌های بزرگ‌تر در فرکانس‌های بالا ظاهر می‌شود.

۲) تغییرات آهسته در حوزه زمان: اگر سیگنال تغییرات آهسته و نرمی داشته باشد، اجزای فرکانسی آن بیشتر در فرکانس‌های پایین متمرکز خواهند بود.

در واقع می‌توان گفت که نرخ تغییرات سیگنال در حوزه زمان و اینکه سیگنال چه مقدار تغییر در یک بازه زمانی می‌کند را می‌توان از حوزه فرکانس متوجه شد.

اکنون از طریق قطب‌های موجود در تابع تبدیل یک سیستم می‌خواهیم ارتباط بین این دو حوزه را بررسی نماییم:

قطب‌های سیستم

قطب‌های یک سیستم کنترلی به نقاطی گفته می‌شود که مخرج تابع تبدیل در آن نقاط برابر با صفر شود. قطب‌ها به نوعی نمایان‌گر رفتار دینامیکی سیستم هستند و می‌توانند تأثیر زیادی بر روی پایداری و پاسخ سیستم داشته باشند. در واقع اگر ما قطب‌های تابع تبدیل یک سیستم را مشخص نماییم، وارون آن مقدار برابر با ثابت زمانی سیستم ما خواهد بود. بنابراین این موضوع باز در پیچه دیگری از ارتباط بین این دو حوزه را برای ما می‌گشاید. حال بررسی دقیق‌تری انجام خواهیم داد:

۱) اگر قطب‌ها نزدیک به صفر باشند: نزدیک بودن قطب‌ها به صفر به معنای این است که قسمت حقیقی قطب‌ها، که نشان‌دهنده سرعت پاسخ سیستم است، کوچک است یا به سمت صفر میل می‌کند (در واقع ثابت زمانی بزرگی ایجاد می‌شود). این ویژگی باعث می‌شود تا پاسخ دینامیکی سیستم کندتر شود. در واقع سیستم نسبت به ورودی‌هایی که به آن وارد می‌شوند، با تأخیر بیشتری واکنش نشان می‌دهد. همچنین نزدیک بودن به صفر می‌تواند به معنای این باشد که سیستم به سمت نقطه‌ای در نزدیک صفر حرکت می‌کند، که به طور خاص می‌تواند نشان‌دهنده نیاز به زمان بیشتری برای بازگشت به حالت ماندگار باشد. این سیستم‌ها برای کاربردهایی که نیاز به پاسخ سریع دارند، مناسب نیستند. اما نقطه قوت این سیستم‌ها این است که مقاومت بیشتری در برابر نوسانات و تغییرات ناگهانی نشان می‌دهند.

۲) اگر قطب‌ها از صفر دور باشند: دور بودن قطب‌ها از صفر به معنای فاصله زیاد قسمت حقیقی قطب‌ها از مبنا (محور واقعی) (یعنی صفر) است که این نشان‌دهنده پاسخ سریع سیستم است (در واقع دور بودن قطب از مبنا محور حقیقی بیانگر ثابت زمانی کوچک است. چون اندازه وارون قطب بیانگر ثابت زمانی سیستم است). در حقیقت در این سیستم‌ها زمان پاسخ به ورودی کاهش می‌یابد و سیستم به ورودی با سرعت بیشتری واکنش نشان می‌دهد.

همچنین سیستم به سرعت نیز به حالت ماندگار خواهد رسید چرا که ترم گذرای آن داری ثابت زمانی کوچکی است. تا به اینجا در حد توان تلاش کردیم تا ارتباط بین حوزه زمان و فرکانس را توضیح دهیم. اکنون به بیان ویژگی‌هایی می‌پردازیم که باعث می‌شود تا از حوزه فرکانس استفاده نماییم:

برتری‌های نمایش سیستم‌ها در حوزه فرکانس نسبت به حوزه زمان

بررسی پایداری سیستم‌ها: بررسی پایداری در حوزه زمان نیازمند تحلیل پاسخ زمانی سیستم به ورودی‌های خاص است، که گاهی پیچیده و زمان‌بر است. در مقابل، در حوزه فرکانس، پایداری با بررسی محل قطب‌های تابع تبدیل (در لاپلاس) به سادگی قابل تشخیص است. این ابزارها امکان تعیین پایداری سیستم را به روشی سریع‌تر و دقیق‌تر فراهم می‌کنند.

رفتار گذرا و دائمی سیستم‌ها: در حوزه فرکانس، می‌توان به‌طور مستقیم رفتار گذرا و دائمی سیستم را با استفاده از موقعیت قطب‌ها در صفحه مختلط بررسی کرد. این تحلیل‌ها در حوزه زمان نیاز به حل‌های پیچیده دارند، در حالی که در حوزه فرکانس به سادگی قابل تشخیص است.

در تکنیک‌های فشرده سازی و پردازش سیگنال از تبدیل فوریه استفاده می‌نماییم تا اطلاعات سیگنال را در حوزه فرکانس به گونه‌ای سازماندهی کنیم که امکان فشرده‌سازی یا حذف مولفه‌های غیرضروری فراهم شود. در تشخیص نویز و اغتشاشات و حذف آنها فضای فرکانسی بسیار مفیدتر و کمک‌کننده‌تر از فضای زمان است. به راحتی می‌توان نویزها که دارای فرکانس بالایی می‌باشند را شناسایی و آنها را حذف نمود که این موضوع در واقع در بحث طراحی فیلتر نیز کمک کننده می‌باشد.

تفاوت بین تبدیل لاپلاس و فوریه

تبدیل فوریه بیشتر برای تحلیل سیگنال‌های پایا استفاده می‌شود. تبدیل فوریه همانند یک آنالیزگر فرکانس است که سیگنال‌ها را به اجزای فرکانسی خالص تجزیه می‌کند. در واقع تبدیل فوریه نشان می‌دهد که هرکدام از فرکانس‌های سیگنال چه نقشی در سیگنال دارند. تبدیل لاپلاس به دلیل داشتن بخش حقیقی و موهومی در متغیر s برای سیگنال‌ها ناپایا و گذرا مناسب است. تبدیل لاپلاس را می‌توان مانند یک آنالیزگر کلی تصور کرد که هم رفتار فرکانسی و هم رفتار زمانی سیستم را تحلیل می‌کند. به این معنا که می‌توانید بررسی کنید سیستم با چه سرعتی به ورودی‌ها پاسخ می‌دهد و آیا سیستم به مرور زمان پایدار یا ناپایدار می‌شود. در تبدیل فوریه، تنها قسمت موهومی (فرکانس زاویه‌ای ω) وجود دارد، اما در تبدیل لاپلاس، متغیر s شامل دو بخش حقیقی و موهومی است. بخش حقیقی مربوط به تحلیل گذرا و پایداری سیستم و بخش موهومی مربوط به تحلیل فرکانسی است.