. Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Czynnościowe wprowadzenie do algorytmów działań pisemnych

Functional introduction to written methods of calculation

Szymon Sobiepanek

nr albumu 384046

praca licencjacka
kierunek: Nauczanie matematyki i informatyki
promotor: dr Magdalena Adamczak

Poznań 2020

Poznań, dnia 10.03.2020 r.

Oświadczenie

Ja, niżej podpisany **Szymon Sobiepanek** student Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu oświadczam, że przedkładaną pracę dyplomową pt: **Czynnościowe wprowadzenie do algorytmów działań pisemnych** napisałem samodzielnie. Oznacza to, że przy pisaniu pracy, poza niezbędnymi konsultacjami, nie korzystałem z pomocy innych osób, a w szczególności nie zlecałem opracowania rozprawy lub jej części innym osobom, ani nie odpisywałem tej rozprawy lub jej części od innych osób.

Oświadczam również, że egzemplarz pracy dyplomowej w wersji drukowanej jest całkowicie zgodny z egzemplarzem pracy dyplomowej w wersji elektronicznej.

Jednocześnie przyjmuję do wiadomości, że przypisanie sobie, w pracy dyplomowej, autorstwa istotnego fragmentu lub innych elementów cudzego utworu lub ustalenia naukowego stanowi podstawę stwierdzenia nieważności postępowania w sprawie nadania tytułu zawodowego.

[TAK] * - wyrażam zgodę na udostępnianie mojej pracy w czytelni Archiwum UAM

[TAK] * - wyrażam zgodę na udostępnianie mojej pracy w zakresie koniecznym do ochrony mojego prawa do autorstwa lub praw osób trzecich

(czytelny podpis studenta)

* Należy wpisać TAK w przypadku wyrażenia zgody na udostępnianie pracy w czytelni Archiwum UAM, NIE w przypadku braku zgody. Niewypełnienie pola oznacza brak zgody na udostępnianie pracy.

Czynnościowe wprowadzenie do algorytmów działań pisemnych

Streszczenie. *Praca przedstawia nauczanie algorytmów działań pisemnych, prezentując je w kontekście metody czynnościowej nauczania matematyki oraz przedstawiając możliwości i potencjalne korzyści wynikające z rozszerzenia wykonywanych ćwiczeń o działania w niedziesiętnych systemach pozycyjnych. Po krótkiej charakterystyce metody czynnościowej nauczania matematyki zaprezentowano teorię dotyczącą systemów pozycyjnych, a następnie dydaktyczne powody nauczania algorytmów działań pisemnych oraz niedziesiętych systemów pozycyjnych. W czwartym, obszernym rozdziale, przedstawiono metody proponowane przez dydaktyków matematyki oraz porównanie ich z popularnymi programami nauczania. W ostatniej części zaprezentowano zarys lekcji informatyki wprowadzającej system binarny.*

Functional introduction to written methods of calculation

Abstract. *The thesis presents the teaching of algorithms of written methods of calculation, presenting them in the context of the functional method of teaching mathematics and the possibilities and potential benefits of extending the performed exercises in non-decimal positional systems. After a brief description of the functional method of teaching mathematics, the theory of positional systems was presented, followed by didactic reasons for teaching algorithms of written methods of calculation and non-decimal positional systems. The fourth, comprehensive chapter presents the methods used by theoretics of mathematics education and compares them with popular curricula and text books. In the last part the draft of computer science lesson scenario introducing binary system is presented.*

Spis treści

Wstęp

Jednym z celów wprowadzenia działań pisemnych już na samym początku drugiego etapu edukacji jest usystematyzowanie wiedzy o systemie dziesiętnym. Niestety, dział ten często redukowany jest do przedstawienia algorytmu wykonywania działań, a za cel obiera się głównie przygotowanie uczniów do przeprowadzania obliczeń niemożliwych do przeprowadzenia w pamięci. Podejście to sprawia, że nabycie umiejętność wykonywania działań pisemnych świadczy jedynie o pamięciowym opanowaniu algorytmu, a sposób w jaki powinno kształtować myślenie matematyczne, w tym postrzeganie systemu dziesiętnego i systemów pozycyjnych w ogólności, jest często pomijany.

Algorytmy działań pisemnych przedstawiane w szkole wykonywane są naturalnie w systemie dziesiętnym. Poza systemem dziesiętnym w podstawie programowej nauczania matematyki (Minister Edukacji Narodowej, 2017) wymieniony jest jedynie system rzymski, który jest systemem addytywnym. Systemy pozycyjne inne niż dziesiętny wprowadzane są zazwyczaj jedynie jako ciekawostki. Systemy dwójkowy i niekiedy szesnastkowy wprowadzane są dopiero na lekcjach informatyki i to jedynie w niewielkim stopniu, ograniczając się najczęściej do zamiany z jednego systemu do innego. Podejście interdyscyplinarne i przedstawienie niedziesiętnych systemów pozycyjnych oraz algorytmów działań pisemnych w tych systemach mogłoby wpłynąć pozytywnie zarówno na pełniejsze zrozumienie systemu dziesiętnego jak i na pojmowanie sposobów przetwarzania danych przez komputery.

Wprowadzenie działań pisemnych w niedziesiętnych systemach pozycyjnych pozwoliłoby również na lepsze zrozumienie systemów pozycyjnych w ogólności. Mimo że pojęcie systemu pozycyjnego rzadko pojawia się w podręcznikach szkolnych, nie ulega wątpliwości, że jest ono niezwykle ważne również w nauczaniu matematyki. Zapoznanie się z systemem dziesiętnym oraz dostrzeżenie jego regularności jest jedną z kluczowych kompetencji zapisanych w podstawie programowej edukacji wczesnoszkolnej (MEN, 2017), a dalsze jej rozwijanie stanowi znaczną część edukacji matematycznej w kolejnych latach nauki.

Dobre opanowanie działań pisemnych w systemie dziesiętnym wraz z pełnym ich zrozumieniem umożliwiłoby wprowadzenie chociaż jednego z działań pisemnych w dwójkowym systemie pozycyjnym na lekcji informatyki, a dzięki temu umożliwiłoby dalsze rozbudowywanie wiedzy o działaniu komputera na niższych poziomach abstrakcji.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie propozycji rozszerzenia lekcji informatyki wprowadzającej system dwójkowy o algorytmy działań pisemnych w tym systemie, tak by osiągnąć dwa zbieżne ze sobą postulaty wymienione powyżej – pełniejsze zrozumienie algorytmów działań pisemnych oraz systemów pozycyjnych w ogólności, a także szersze omówienie systemu dwójkowego w architekturze systemów komputerowych. Podstawowym warunkiem, aby ich zrealizowanie było możliwe, jest rzetelne wprowadzenie algorytmów działań pisemnych w systemie dziesiętnym na lekcjach matematyki, stąd też część pracy poświęcona jest temu zagadnieniu. Omówione są również dydaktyczne cele wprowadzania algorytmów działań pisemnych i ich rola w nauczaniu o systemach pozycyjnych. Przedstawiona jest czynnościowa metoda nauczania matematyki, którą najczęściej realizuje się wprowadzając działania pisemne i którą stosować można na zajęciach z informatyki. Powyższe zagadnienia uzupełnione są o twierdzenia i dowody, z uwzględnieniem dowodu poprawności wykonywania jednego z algorytmów działań pisemnych w dowolnym systemie pozycyjnym, których znajomość pomoże nauczycielowi w pełnym zrozumieniu zagadnień.

W pierwszym rozdziale niniejszej pracy przedstawiono założenia nauczania czynnościowego. Rozdział ten opiera się w znacznej części na klasycznych opracowaniach autorstwa Heleny Siwek (1998) i Zofii Krygowskiej(1977).

Rozdział drugi zawiera informacje na temat systemów zapisów liczb, ze szczególnym naciskiem na podstawy teoretyczne systemów pozycyjnych oraz algorytmów wykonywania w nich działań. Zawarte w nim informacje bazują na opracowaniu Zbigniewa Semadeniego "Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci" (1973).

Krótszy, trzeci rozdział, zawiera opis dydaktycznej roli wprowadzania algorytmów działań arytmetycznych. Rozdział ten opiera się na podręczniku dla nauczycieli "Nauczanie Początkowe Matematyki" pod redakcją Zbigniewa Semadeniego (1981).

W rozdziale czwartym przedstawione są klasyczne modele wprowadzane w szkole podczas nauki wykonywania działań pisemnych w systemie dziesiętnym oraz zaprezentowane są próby uogólnienia ich do działań w systemach pozycyjnych opartych o dowolną podstawę. Rozdział ten zawiera modele z podręczników szkolnych z matematyki.

W rozdziale przedstawiam również moje doświadczenia z realizacją zagadnienia algorytmów działań pisemnych w środowisku szkolnym. W żadnym razie nie roszczę sobie prawa do ekstrapolowania na postawie sytuacji anegdotycznych do obserwacji na temat realizacji zagadnienia w całym systemie szkolnym, uważam je jednak za wartościowe i podkreślające moje motywacje przy wyborze tematu oraz pisaniu pracy.

Rozdział piąty zawiera zarys konspektu lekcji informatyki, rozbudowujący typową lekcję o systemie binarnym o wprowadzenie dodawania pisemnego i osadzenie go w architekturze systemów komputerowych.

Rozdział 1

Czynnościowe nauczanie matematyki

Metoda czynnościowego nauczania matematyki opracowana przez Zofię Krygowską (Krygowska, 1977) i rozwijana przez Helenę Siwek (Siwek, 1998) od wielu lat stosowana jest na lekcjach matematyki w polskiej szkole. Niniejsza praca nie przypadkiem zaczyna się od omówienia tej metody. Zdaje się, że obszerna podstawa programowa oraz częste problemy wychowawcze sprawiają, że nauczanie czynnościowe występuje czasem w spłyconej formie, która nie pozwala na dogłębne zrozumienie przez ucznia wymaganych zagadnień. Aby tego uniknąć, niezbędne jest przyswojenie koncepcji nauczania czynnościowego i świadome jej stosowanie przez nauczyciela. W poniższym rozdziale krótko przedstawię tę koncepcję.

Zofia Krygowska(Krygowska, 1977) koncepcję opisuje następująco: "*Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym, uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji, prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych. Czynnościowe nauczanie matematyki opiera się więc:*

a)na wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie,

b)na świadomym organizowaniu sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, jako swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu"

Założenia oraz cele nauczania czynnościowego matematyki

Aby w pełni zrozumieć istotę nauczania czynnościowego przytoczmy zalecenia Zofii Krygowskiej (Krygowska, 1977).:

" *a) Wiązanie treści matematycznych z wyraźnie formułowanymi schematami postępowania [. . .].*

b) Wiązanie operacji z operacjami do nich odwrotnymi.

c) Wiązanie operacji z różnych dziedzin matematyki w bardziej złożone schematy.

d) Uwzględnianie różnych ciągów operacji prowadzących do tego samego rezultatu [. . .].

e) Stawianie ucznia w sytuacjach konfliktowych, w których przyswojone mu schematy postępowania zawodzą [. . .].

f) Opis słowny operacji, którymi uczeń myśli, szczególnie w niższych klasach [. . .].

g) Algorytmizacja rozwiązania zadania z zastosowaniem różnych form zapisu (drzewa i inne organigramy) tam, gdzie to jest celowe i możliwe.

h) Właściwe i celowe wiązanie czynności konkretnych [. . .] z myślowymi operacjami [. . .].

i) Konsekwentne uczenie swobodnego posługiwania się poznanymi operacjami i przyzwyczajanie ucznia do tego, że tylko określone działanie, a nie tylko bierna kontemplacja i oczekiwanie na «natchnienie» prowadzi do rozwiązania zagadnienia [. . .].

j) Zwrócenie uwagi na to, aby stosowana symbolika miała również charakter operatywny [. . .]"

Na potrzeby pracy powyższy cytat pozbawiony jest przykładów, które zostały przedstawione do każdego z zaleceń.

Wybranie i odpowiednie przedstawienie problemów jest jednym z większych wyzwań, które stoją przed nauczycielem pragnącym w pełni realizować tę koncepcję nauczania. Nauczanie czynnościowe wyróżnia się dbałością o porządek oraz o dogłębne zrozumienie pojęć matematycznych. Istotne jest również takie kształtowanie pojęć na poziomie szkolnym, aby były one zgodne z pojęciami naukowymi. W nauczaniu czynnościowym kolejne pojęcia, definicje i twierdzenia budują strukturę wiedzy, która tworzona jest poprzez rozwiązywanie zadań, stąd też ich dobór jest niezwykle istotny. Celem nadrzędnym jest dążenie do zdobycia przez ucznia wiedzy operatywnej. Uczeń musi być świadomy w jaki sposób należy rozwiązać dany problem, unikając chaotycznych i pozbawionych uzasadnienia prób, ale także nie rozwiązywać ich schematycznie oraz bezrefleksyjnie. Istotna jest tutaj również rola nauczyciela, który musi w przemyślany sposób naprowadzić ucznia, tak aby nie pozbawić go czynnego udziału w procesie kształcenia.

Ważne jest, aby poza poznaniem pojęć matematycznych, uczniowie byli w stanie rozwiązać również zadania konstrukcyjne, umieli podejść do rozwiązania krytycznie oraz aby potrafili rozwiązywać zadania na różne sposoby. Metoda czynnościowa kładzie znaczny nacisk na rozwój umiejętności ucznia, prowokując go do doświadczania, które pełni ważną rolę w procesie nauczania.

Cele nauczania czynnościowego są zbieżne ze współczesnymi nurtami dydaktyki ogólnej, a w szczególności z zasadami kształcenia wielostronnego. Poprzez stawianie przed uczniem problemów do rozwiązania, skłania się go do podejmowania aktywności intelektualnej. Nauczanie czynnościowe eksponuje ścisłość i precyzję pojęć matematycznych. Podkreślenie operatywności matematyki sprawia, że nauczanie czynnościowe pozwala również na zmotywowanie ucznia do aktywności praktycznych. Według Heleny Siwek proces nauczania czynnościowego wzbudza również w uczniu radość z samodzielnego rozwiązywania zadania oraz pozwala na emocjonowanie się poszukiwaniem i odkrywaniem (Siwek, 1998).

O ile pobudzanie aktywności intelektualnej z pewnością realizowane jest na lekcjach matematyki, a próby pobudzania aktywności praktycznej są również raczej skuteczne, tak wzbudzanie pożądanej aktywności emocjonalnej i wywoływanie odczuć pozytywnych jest we współczesnej szkole raczej rzadkie. Badania psychiatry i neurobiologa Joahima Bauera (Bauer, 2015) wskazują, że towarzyszący uczniom strach pojawiający się w szkole podobny jest w odczuwaniu do cierpienia spowodowanego przemocą fizyczną.

Tym bardziej istotne zdaje się być wdrażanie takich metod nauczania, które sprawią, że uczniowie będą dobrze czuć się w szkolnej klasie, a dominującą emocją będzie radość związana z własnymi dokonaniami.

Nauczania czynnościowe a psychologia, pedagogika i inne metody nauczania matematyki

Nauczane czynnościowe bazuje na osiągnięciach psychologii w dziedzinie badań nad rozwojem dziecka. Dla tworzonej koncepcji znaczące były badania Jeana Piageta, w tym w szczególności wyróżnienie stadiów rozwoju intelektualnego dziecka. Powiązanie ich z poziomami rozumienia pojęć matematycznych opracowanych przez Diane van Hiele-Geldof oraz Pierra van Hiele oraz umiejscowienie ich w teorii reprezentacji Jerome Brunera pozwoliło na skonstruowanie spójnej koncepcji, mogącej skutecznie kształtować abstrakcyjne pojęcia matematyczne u uczniów na różnych poziomach edukacji. Wpływ na koncepcję czynnościową zapewne miały też idee łączenia poznania z działaniem, postulowane przez pedagogów z nurtów progresywistycznych, którego inicjatorem był John Dewey. Propagowany przez nich pogląd, że w nauczaniu stroną aktywną ma być uczeń, znajduje swoje odzwierciedlenie w koncepcji nauczania czynnościowego (Siwek, 1998).

Przedstawienie wskazanych wyżej teorii znacznie przekracza objętość niniejszej pracy. Zostały one jednak wymienione, aby osadzić metodę nauczania czynnościowego w pokrewnych dydaktyce dziedzinach.

Omawiana metoda nauczania łączy w sobie elementy innych koncepcji. Szczególnie istotna jest tutaj koncepcja nauczania realistycznego opracowana przez Hansa Freundenthala. Koncepcja ta opiera się na osadzeniu matematyki w sytuacjach rzeczywistych, a następnie, przechodząc od pojęć prostych do coraz bardziej złożonych, na budowaniu kolejnych pięter abstrakcji. Nauczanie realistyczne jest bardzo bliskie koncepcji nauczania czynnościowego, a obie metody skutecznie się uzupełniają. Główną różnicą tych koncepcji jest podkreślanie innej części procesu nauczania. Metoda czynnościowa skupia się na czynnościach wykonanych przez ucznia podczas przyswajania pojęcia matematycznego, natomiast nauczanie realistyczne kładzie nacisk na usytuowanie tych czynności w sytuacjach realnych.

Samą koncepcję nauczania czynnościowego należy odróżnić od nauczania mechanistycznego, które kładzie nacisk na wyuczenie metod i algorytmów prowadzących do rozwiązania zadania, bez dokładnego zrozumienia zastosowanych pojęć i operacji. Elementy spłycania nauczania czynnościowego do nauczania mechanistycznego można zaobserwować na niektórych lekcjach matematyki. Nauczanie czynnościowe mylone jest również z nauczaniem empirystycznym, które za główny cel stawia skuteczność w rozwiązywaniu zadań, z pominięciem oceny, czy rozwiązanie zadania w dany sposób przyniosło pozytywny skutek w postaci rozwoju intelektualnego ucznia (Siwek, 1998).

Rozdział 2

Systemy zapisu liczb naturalnych

Zanim przejdę do omówienia algorytmów działań pisemnych w systemie dziesiętnym i innych, niedziesiętnych systemach pozycyjnych, krótko omówię podstawowe systemy zapisu liczb naturalnych, a szczególności systemy pozycyjne.

Niepozycyjne systemy zapisu liczb

Najstarszym symbolem służącym do zapisu liczb było stawianie kresek, zrobienie węzłów na sznurku lub też nacięć na patyku. Oznaczenie to przeniesiono do pisma, oznaczają liczby kreskami. Dla łatwiejszego zapis kreski grupowano np. po 5 bądź po 10.

Jako interesujący fakt przytoczę przykład tradycyjnego zapisu liczb w języku japońskim oraz chińskim. Cyfrom 1, 2, 3 odpowiadają nadal znaki składające się z kresek 一、二、三.

Rozwinięciem grupowania kresek jest rzymski system zapisu liczb. Symbol V oznaczał pięć kresek, znakowi X odpowiadało 10 kresek. W przypadku gdy cyfra oznaczająca mniejszą liczbę poprzedza cyfrę oznaczającą większą jej wartość jest odejmowana od całej sumy. Liczby zapisywano więc kolejno I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX, X i tak dalej. System rzymski jest systemem addytywnym. Każdy znak ma swoją wartość, a liczbę zapisaną w ten sposób otrzymuje się sumując wartości odpowiadająca znakom. Podobne systemy występowały na innych obszarach geograficznych - w Grecji system joński, czy też system egipski.

Systemem pozycyjnym był natomiast system arabski (wynaleziony w Indiach w VIII wieku). Wartość zapisanej liczby zależy od miejsc, w których zapisano symbole.

Warto wspomnieć o występujących systemach mieszanych – systemie babilońskim oraz systemie stosowanym przez Majów. W pierwszym z nich do zapisu liczb od 1 do 59 używano symboli oznaczających jeden oraz dziesięć stosowanych addytywnie, a większe liczby zapisywano metodą pozycyjną, sześćdziesiątkową. Warto również wspomnieć o systemie sześćdziesiątkowym, który używany był powszechnie w Europie aż do XVI wieku w zapisie ułamków, a stosowany jest dotychczas w mierzeniu czasu oraz miar kątów. System stosowany przez Majów był dwudziestkowy. Prawdopodobnie system dwudziestkowy występował również w innych obszarach geograficznych, o czym świadczyć mogą jego pozostałości w językach duńskim oraz francuskim (Semadeni, 1973).

Warto zastanowić się, dlaczego w wielu systemach wyróżniono liczby pięć, dziesięć lub dwadzieścia. Przyczyn tych faktów należy szukać odpowiednio w liczbie palców w jednej kończynie, liczbie palców w kończynach górnych oraz w liczbie wszystkich palców. Do zagadnień związanych z powiązaniem liczby palców z systemem zapisu liczb powrócimy w rozdziale czwartym podczas omawiania zadań wprowadzających uczniów w teorię systemów pozycyjnych.

Pozycyjne systemy zapisu liczb

Poza systemem dziesiętnym powszechnie stosowane są obecnie systemy dwójkowy oraz szesnastkowy. Przyczyną tego faktu jest postępująca informatyzacja oraz łatwość z jaką możemy przełożyć system dwójkowy na zmianę napięcia elektrycznego oraz konstrukcje układów logicznych w procesorach. Chociaż system dwójkowy jest ukryty przed przeciętnym użytkownikiem komputera, jest on stosowany explicite przez programistów, np. przy stosowaniu masek bitowych. System szesnastkowy stosowany jest przez twórców stron internetowych oraz grafików do zapisu składowych wartości kolorów.

Przejdźmy teraz do omówienia podstaw teoretycznych systemów pozycyjnych o dowolnej podstawie.

Niech g będzie dowolną liczbą naturalną, taką że $g > 1$. Nazwijmy ją podstawą systemu liczbowego (np. w przypadku systemu dziesiętnego $g = 10$, w systemie dwójkowym $g = 2$). Cyframi nazwiemy dowolne znaki służące do oznaczenia liczb 0,1,2,...,g-1. W systemie dziesiętnym służą nam cyfry 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, w systemie dwójkowym cyfry 0,1, w systemie szesnastkowym przyjęło się używanie cyfr 0 - 9 oraz pierwszych sześciu liter alfabetu, A,B,C,D,E,F.

W systemie pozycyjnym o podstawie g jednostkami kolejnego rzędu są więc liczby $1, g, g^2, g^3, \ldots, g^n, \ldots$

Wiemy, że w systemie dziesiętnym każdą liczbę naturalną możemy zapisać za pomocą cyfr $0, 1, 2, \ldots, 9$. Np liczba 121 to jedna setka, dwie dziesiątki oraz jedna jednostka, czyli:

$121 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 1.$

Uogólniając, każdą liczbę w systemie dziesiętnym zapisujemy w postaci:

$c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + c_1 10^1 + c_0 10^0$

gdzie $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$ równe jest jednej z liczb $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Udowodnijmy, że rozwinięcie takie istnieje dla każdej liczby naturalnej z wyłączeniem 0 oraz dla dowolnej liczby naturalnej g, będącej postawą systemu liczbowego spełniającej warunek $g > 1$. Prześledzenie tego dowodu może być jednocześnie kształcącym ćwiczeniem. Stanowi również teoretyczną podstawę, na której oparty jest algorytm pozwalający ustalić zapis liczby w dowolnym systemie pozycyjnym. Przedstawienie tego algorytmów jest jednym z elementów lekcji, której konspekt zawarto w ostatnim rozdziale.

Twierdzenie: Każda niezerowa liczba naturalna m może być zapisana w postaci
$m = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + \ldots + c_1 g^1 + c_0 g^0$,
gdzie $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$ są równe $0, 1, .., g-1$ oraz $c_n \neq 0$.

Dowód: Dzieląc liczbę m przez g otrzymamy wynik a_1 oraz resztę c_0. Następnie dzielić będziemy a_k przez g otrzymując wynik $a_k + 1$ oraz resztę c_k, rozpoczynając od $k = 1$, dopóki nie otrzymamy wyniku $a_n < g$.

Zauważmy, że $a_n \neq 0$. Wówczas przyjmiemy $c_n = a_n$, stąd $c_n < g$, ponadto każda z liczb $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ jest mniejsza od g. Mamy:

(1) $m = a_1 g + c_0$,

(2) $a_1 = a_2 g + c_1$,

(3) $a_2 = a_3 g + c_2$,

$\ldots$

(n-1) $a_{n-1} = a_n g + c_{n-1}$

(n) $a_n = c_n$.

Po kolejnych podstawieniach wartości z (k) do (k-1) iterując po k od n do 2 otrzymujemy: $m = a_1 g + c_0$

$= (a_2 g + c_1) g + c_0 = a_2 g^2 + c_1 g + c_0$

$\ldots$

$= c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + \ldots + c_1 g^1 + c_0 g^0$

c.b.d.o.

Z powyższego dowodu można w łatwy sposób wywnioskować algorytm, który przedstawię na przykładzie zamiany liczby 161 w systemie dziesiętnym na liczbę w systemie dwójkowym.

Liczbę 161 dzielimy przez dwa otrzymując liczbę $a_1 = 80$ oraz resztę $c_0 = 1$. Następnie $a_1 = 80$ dzielimy kolejny raz przez dwa otrzymując $a_2 = 40$ oraz $c_1 = 0$. Kolejno: $a_2 = 20, c_1 = 0; a_3 = 10, c_2 = 0; a_4 = 5, c_3 = 0; a_5 = 2, c_4 = 1; a_6 = 1, c_5 = 0$. Ponieważ $a_6 = 1 < 2 = g, c_6 = a_6 = 1$. Otrzymujemy zatem $161 = 1010001_2$

Algorytmy działań pisemnych w systemach pozycyjnych o dowolnej podstawie

Aby przybliżyć czytelnikowi przedstawioną wyżej definicję systemu pozycyjnego przytoczę przykład w jaki sposób możemy formalnie opisać wykonywanie pewnych operacji w systemie o danej podstawie. Ze względu na temat pracy przedstawionym przykładem będzie algorytm dodawania pisemnego. Przyjmijmy m i p:

$m = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + \ldots + c_1 g^1 + c_0 g^0$

oraz

$p = b_k g^k + b_{k-1} g^{k-1} + \ldots + b_1 g^1 + b_0 g^0$,

gdzie $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0, b_k, b_{k-1}, \ldots, b_0$ są liczbami równymi $0, 1, 2, \ldots, g-1$, oraz $c_n > 0$ oraz $b_k > 0$.

Udowodnijmy, że istnieją liczby naturalne $a_0, ..., a_m$ mniejsze od g oraz $a_m \neq 0$ takie, że $m + p = a_m g^m + a_{m-1} g^{m-1} + ... + a_1 g^1 + a_0 g^0$.

Rozważmy dwa przypadki:

1) Przyjmijmy że $n = k$. Wówczas:

$m+p = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + \ldots + c_1 g^1 + c_0 g^0 + b_n g^n + b_{n-1} g^{n-1} + \ldots + b_1 g^1 + b_0 g^0 = (c_n + b_n) g^n + (c_{n-1} + b_{n-1}) g^{n-1} + \ldots + (c_0 + b_0) g^0$

Jeżeli $c_0 + b_0 < g$ to jest to ostatnia cyfra a_0 w liczbie $m + p$ to $c_0 + b_0$. Jeżeli $c_0 + b_0 \geqslant g$, to ostatnią cyfrą jest $c_0 + b_0 \breve{\ } g$ ponieważ $0 \geqslant c_0 + b_0 \breve{\ } g \geqslant g - 1$. W tej sytuacji g jednostek niższego rzędu zamieniamy na 1 jednostkę wyższego rzędu:

$(c_1 + b_1) g^1 + (c_0 + b_0) g^0 = (c_1 + b_1 + 1) g^1 + (c_0 + b_0 - g) g^0$

Te same działania wykonujemy z kolejnymi cyframi, iterując od 0 do n. Pozwoli to nam zapisać daną sumę w określonym systemie pozycyjnym.

2) Jeżeli $n \neq k$.

Bez straty ogólności przyjmijmy $n > k$. Wówczas:

$m + p = c_n g^n + ... + c_{k+1} g^{k+1} + c_k g^k + c_{k-1} g^{k-1} + ... c_1 g + c_0 + 0 \cdot g^n + ... + 0 \cdot g_{k+1} + b_k g^k + b_{k-1} g^{k-1} + b_1 g + b_0$

gdzie rozumować możemy tak jak w sytuacji poprzedniej.

Zatem z pomocą algorytmu jesteśmy w stanie wyznaczyć $a_m, ..., a_0$ zgodnie z założeniem c.b.d.o.

Przebieg algorytmów innych działań wykonywanych pisemnie oraz dowody dotyczące zagadnień systemów pozycyjnych można znaleźć szerzej w "Nauczaniu współczesnym dzieci" (Semadeni, 1973) dokąd odsyłam czytelnika.

Po wprowadzeniu teoretycznym do systemów pozycyjnych omówmy dydaktyczną roli algorytmów pisemnego wykonywania działań, w tym ich roli w nauczaniu o systemach pozycyjnych.

Rozdział 3

Dydaktyczna rola algorytmów pisemnego wykonywania działań

Aby rozważyć dydaktyczną rolę algorytmów działań pisemnych, należy odróżnić cel ich wprowadzania oraz cel nauczania ich stosowania.

Wprowadzenie algorytmów w postaci metody odkrytej i zaakceptowanej przez uczniów w wyniku wspólnych działań pod kierunkiem nauczyciela kształci inwencje i aktywność. Obserwowanie wykonywanych czynności, a następnie przełożenie ich na opis słowny oraz powiązanie z operacjami myślowymi realizuje postulaty nauczania czynnościowego. Warto podkreślić, że aby cel ten zrealizować opanowanie algorytmów powinno być końcowym etapem kształcenia umiejętność rachunkowych.

Nauczanie stosowania algorytmów działań pisemnych ma prowadzić do sprawnego wykonywania działań na liczbach, których uczniowie nie są w stanie wykonać w pamięci oraz szerzej - do sprawnego wykonywania algorytmów. Przygotowuje do dyscypliny oraz ścisłego przestrzegania reguł kosztem własnej inwencji. Poza poznaniem oraz nabyciem umiejętności stosowania algorytmów pisemnego wykonywania czterech działań arytmetycznych istotny jest też szerszy kontekst, czyli umiejętność stosowania algorytmów w ogóle. W zinformatyzowanym świecie, w którym programowanie wymienia się jako czwartą podstawową umiejętność, zdolność zrozumienia, stosowania poznanych algorytmów, a w dalszej perspektywie samodzielnego tworzenia algorytmów zdają się być szczególnie istotne.

Dla potrzeb niniejszej pracy przytoczę i omówię definicję algorytmu. Algorytm to przepis postępowania, przedstawiony w postaci szczegółowego planu, zawierający kolejne czynności mające prowadzić do rozwiązania zagadnienia danego typu. Przytoczmy również warunki, które dany plan czynności musi spełniać by uznać go za algorytm. Dany plan musi przedstawiać czynności wykonywane krok po kroku, musi być jednoznaczny i powtarzalny oraz musi być skończony. Zbigniew Semadeni (Semadeni, 1981) formułuje dwa kolejne wymogi, które dany algorytm musi spełniać, by móc go stosować w praktyce. Musi być jasno wskazane dla jakich typów zagadnień dany algorytm może być stosowany i w jakich warunkach gwarantowane jest uzyskanie poprawnej odpowiedzi. Powinien być określony poziom elementarności oraz stopień szczegółowości. Ten ostatni warunek jest szczególnie istotny przy wprowadzaniu algorytmów w trakcie lekcji matematyki. Należy mieć pewność, że uczniowie zrozumieją każdy z opisanych kroków. Istotne jest też to, że nie zawsze zwiększenie elementarności ułatwia uczniom opanowanie algorytmu. Zwiększenie liczby kroków oraz zbyt proste czynności wymienione jako kroki algorytmu mogą zniechęcić ucznia.

Nie bez przyczyny algorytmy działań pisemnych wprowadzane są dopiero po opanowaniu wykonywania działań w pamięci w zakresie 100 w klasach 1-3. Mimo iż liczenie pisemne jest prostsze, celowo wprowadza się je dopiero po uzyskaniu umiejętności wykonywania działań w zwykły sposób. Jako uzasadnienie tego faktu przytoczę opinię Aliny Szemińskiej (Szemińska, 1981) osadzoną w badanach psychologicznych: "*Im wcześniej jakaś czynność jest zautomatyzowana, tym mniej bierze w niej udział świadomość. Badania dotyczące niepowodzeń w nauce matematyki wskazują, że zasadniczą przyczyną trudności, zwłaszcza w klasach początkowych, było zastępowanie rozumienia przez mechaniczne wykonywanie zapamiętanych schematów postępowania*".

W tym kontekście warto również przytoczyć opinię, że długotrwałe ćwiczenie powtarzalnych czynności, takich jak algorytmy działań pisemnych, prowadzi do „przetrenowania”: w pewnym momencie zwiększa się liczba popełnianych błędów (Semadeni, 1981).

Wprowadzenie działań pisemnych po zakończeniu edukacji wczesnoszkolnej można również uzasadnić dojrzałością dzieci do nauki powtarzalnych czynności. Niektóre dzieci niechętnie wykonują obliczenia według ścisłych reguł, nauczanie tego typu metod może być łatwiejsze w II etapie edukacji.

Wcześniejsze wprowadzenie algorytmów działań pisemnych mogłoby skutkować zbyt wczesnym zautomatyzowaniem rachunków. Uczniowie muszą być należycie przygotowani i opanować pojęciowo działania arytmetyczne, muszą mieć czas na wykonanie zadań mających zachęcić ich do szukania własnych metod przeprowadzanie obliczeń. Opanowania działań pisemnych jest końcowym etapem rozwoju sprawności rachunkowych.

Podsumowując powyższe akapity, podczas rozważań na temat wprowadzenia algorytmów działań pisemnych należy mieć na uwadze, że głównym celem kształcenia jest harmonijny rozwój osobowości ucznia (Semadeni, 1981). Aby go osiągnąć, należy pobudzać ucznia do aktywności, kreatywności oraz rozwijania sprawności i swobody rozumowania. Z drugiej jednak strony, należy również wdrożyć ucznia, tak aby w razie potrzeby był przygotowany do działań, które wymagają przestrzegania reguł, dyscypliny oraz staranności, nawet jeżeli działania te są żmudne oraz nużące.

Zdaje się, że przyjęło się kładzenie nacisku na drugi z tych aspektów. Być może należało by więc, zgodnie z tematem niniejszej pracy, położyć większy nacisk na nauczanie czynnościowe, a nie mechanistyczne.

Istotnym pytaniem pozostaje jeszcze kwestia zasadności wprowadzania działań w systemach. Jak już wspomniano, system dwójkowy oraz system szesnastkowy pojawiają się na lekcjach informatyki już w szkole podstawowej w ograniczonym stopniu, jako zagadnie oderwane niejako od matematyki. Proponowane w pracy podejście interdyscyplinarne i wprowadzenie algorytmów działań pisemnych może sprawić, że uczniowie zaczną postrzegać te przedmioty jako komplementarne. Ponadto Zbigniew Semadeni (Semadeni, 1981) argumentuje, że ćwiczenia w niedziesiętnych systemach pozycyjnych mogą ograniczyć podświadomą identyfikację liczby z jej zapisem dziesiętnym, które występuje zarówno wśród uczniów jak i osób dorosłych. Znajomość innych systemów pozycyjnych pozwala też na pełniejsze zrozumienie systemu pozycyjnego. Wprowadzenie niedziesiętnych systemów pozycyjnych pozwala również na wykonanie zadań będących pretekstem do kształcących ćwiczeń. Po omówieniu dydaktycznych celów wprowadzania algorytmów wykonywania działań arytmetycznych, przejdźmy do omówienia modeli oraz zadań mogących służyć do wprowadzenia ich metodą czynnościową.

Rozdział 4

Wprowadzanie algorytmów działań pisemnych na lekcjach matematyki

Rozdział rozpocznę od przedstawienia modeli i zadań przedstawianych przez literaturę i podręczniki dla nauczycieli. Następnie przedstawię to samo zagadnienie bazując na dostępnych podręcznikach szkolnych. Kolejnym poruszonym tematem będzie refleksja na temat realizacji zagadnień w środowisku szkolnym. Opiszę również moje własne doświadczenia z modelami i zadaniami, zdobyte przede wszystkim podczas zajęć indywidualnych z uczniami.

Klasyczna metoda wprowadzania algorytmów działań pisemnych

W "Nauczaniu początkowym matematyki" (Semadeni, Puchalska, 1981) proponowane jest aby każdą lekcję wprowadzającą kolejne działanie wykonywane za pomocą algorytmów pisemnych zaczynać od obliczeń dotyczących sytuacji wymagających płacenia. Używając umownych pieniędzy jako naturalnego sposobu przedstawienia liczby jako sumy jedności, dziesiątek, setek ... przedstawiamy znacznie bardziej przystępny dla uczniów schemat rozumowania, niż prezentując formalny zapis zamiany jednostek odpowiednich rzędów. Ćwiczenia takie wzmagają również motywację uczniów, którzy zazwyczaj bardziej interesują się, gdy na lekcji pojawia się temat pieniędzy. Warto też pamiętać, aby przykłady nie były zbyt trudne, tak by uczniowie mogli je w pełni zrozumieć, ale również nie mogą być na tyle łatwe, by uczniowie mogli obliczyć je w pamięci.

Proponowana metoda zakłada, że każdy z uczniów dysponuje własnym zestawem nominałów 1, 10 i 100 i na nich przedstawia opisaną sytaucję. Następnie opowiada jakich czynności dokonał podczas operacji. Kolejnym krokiem jest zapisanie rachunku w rzędach systemu dziesiętnego, a następnie zapisanie ich w prostej, klasycznej postaci. Warto zwrócić uwagę, że niemal bezpośrednio możemy znaleźć tutaj odwołanie do poziomów myślenia van Hiele'a. Najpierw uczeń operuję na poziomie wzrokowym, wykonując czynności potrzebne do wykonania zadania. Następnie operując na poziomie opisowym podsumowuje słownie wykonane czynności. Ostatecznie posługuje się stricte abstrakcyjnym zapisem działania operując na poziomie logicznym.

Autorzy (Semadeni, Puchalska, 1981) kładą wyraźny nacisk na przedstawienie algorytmu w możliwie pełnej postaci, tak by uczeń poprzez wykonywane czynności rozumiał działania matematyczne reprezentowane przez kolejne wykonywane kroki, a nie jedynie wykonywał polecone działania.

Metodę przedstawię zgodnie z przyjętą kolejnością, od dodawania, poprzez odejmowanie i mnożenie, aż do dzielenia.

W przypadku dodawania, proponowane jest rozpoczęcie od dwóch liczb trzycyfrowych. Oba składniki sumy przedstawiamy za pomocą pieniędzy, a następnie uczniowie układają je, a następnie łączą razem. Kluczowym momentem jest wymiana na wyższe nominały. Następnie uczniowie odczytują uzyskaną sumę. Kolejnym krokiem jest opowiedzenie przez uczniów, jakie czynności zostały przez nich wykonane oraz zapisanie wyników obserwacji w tabeli (pomijając nazwę waluty, np. "złote"):

	S	D	J
	1	4	8
+	6	2	5
	7	6	13

W tym momencie suma przedstawiona jest w postaci 7 setek, 6 dziesiątek i 13 jedności. Uczniowie przypominają sobie kolejną wykonaną czynność - zamiana 10 jedności na 1 dziesiątkę. Uczniowie ścierają jedynkę w kolumnie jedności i dopisują ją w kolumnie dziesiątek. W "Nauczaniu początkowym matematyki" sugerowane jest zapisanie dodatkowej dziesiątki pod uzyskaną dotychczas 6:

	S	D	J
	1	4	8
+	6	2	5
	7	6	3
+		1	
	7	7	3

Po dodaniu liczby dziesiątek uczniowie otrzymują wynik. Po uzyskaniu wprawy przez uczniów, możemy zachęcić ich do zastąpienia zapisywania tabeli i jedynie wyobrażania sobie jej, a same cyfry w wyniku pisać pod odpowiadającymi miejscami w składnikach. Warto zachęcić uczniów do zapisywania "małej 1", należy jednak zwrócić uwagę by zapis dokonywany był we właściwym miejscu.

Stopniowo można zachęcać uczniów do pomijania zapisu małej jedynki. Warto jednak przeprowadzić analogiczne dodawanie bez użycia algorytmu w celu dostrzeżenia zależności, na których algorytm się opiera i potwierdzenie jego poprawności.

$148 + 625 = 100 + 600 + 40 + 20 + 8 + 5 = 700 + 60 + 13 = 700 + 60 + 10 + 3 = 700 + 70 + 3 = 773$

Kolejnym przedstawionym algorytmem będzie odejmowanie pisemne.

Przy odejmowaniu również stosujemy monety i banknoty. Podejście to sprawi, że zamiana jedności wyższego rzędu na 10 jednostek rzędu niższego powinno być dla uczniów naturalne.

Przedstawiając liczbę za pomocą odpowiednich nominałów, a następnie próbując zabrać z nich odpowiednią kwotę, przy dobraniu odpowiednich liczb uczeń zmuszony będzie rozmienić pieniądze. Możemy umówić się, że zaczynamy od jedności. Aby przekonać uczniów o zasadności tego podejścia można zaproponować uczniom swobodne wybór kolejności przeprowadzenia odejmowania w rzędach. Trafne dobranie odjemnej i odjemnika np. 613 - 377 i przeprowadzenie działania. Niechybnie pojawią się kłopoty, które rozwiać może sugestia nauczyciela, aby działania rozpoczynać od mniejszych nominałów. Po wykonaniu operacji na pieniądzach i analizy wykonanych czynności, wraz z uczniami sporządzamy tabelkę.

	5	11	8
	6	1	8
-	5	2	5
		9	3

Oczywiście, po nabraniu wprawy przez uczniów, zachęcamy ich do rezygnacji z tabelki i zapisu w kratkach.

Aby upewnić się, ze wykonane działanie jest poprawne, warto przekonywać uczniów do sprawdzenia go przez dodawanie. Działanie to ma tę dodatkową zaletę, że uczniowie spostrzec mogą jak "pożyczane" wartość w odejmowaniu stają się "dopisanymi" jednościami w dodawaniu. Warto wspomnieć, że przeprowadzając to ćwiczenie realizujemy postulat nauczania czynnościowego o łączenie czynności z działaniem do niej odwrotnym.

Szczególną uwagę uczniów należy również zwrócić na przypadki, w których w odjemnej występuje jedno lub więcej zer.

	5	9	10
	6	0	0
-	5	2	5
		7	5

Mnożenie sposobem pisemnym wprowadzamy dwuetapowo. Rozpoczniemy od mnożenie liczby wielocyformwej przez liczbę jednocyfrową.

Samo mnożenie przez liczbę jednocyfrową również rozbijmy na etapy, zgodnie z zalecaniami (Semadeni, Sierocka, 1981)

a) manipulacje konkretami (np. tekturowymi imitacjami monet)

b) sprowadzanie mnożenia do wielokrotnego dodawania w tabelce lub w "słupku"

c) stosowanie prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania

d) przedstawianie rachunków w odpowiednich rzędach tabelki

e) zapisanie rachunków w słupku pełnym, bez żadnych skrótów

f) zapisywanie rachunków w słupku z małymi cyferkami pomocniczymi

g) zapisywanie rachunków w słupku skróconym

Wytłumaczenie mnożenia omówmy na przykładzie działania $347 \cdot 4$. Uczeń rozpocznie od policzenia posiadanych nominałów jednostkowych $4 \cdot 7$, dziesiątek $4 \cdot 4$

oraz setek $4 \cdot 3$. Następnie zamieni 20 jedności na 2 dziesiątki, 10 dziesiątek na jedną setkę oraz 10 setek na tysiąc.

Kolejnym krokiem (etap b) będzie przeprowadzanie tego działania dodając pisemnie liczbę 347 cztery razy i porównując wykonane zamiany z czynnościami wykonanymi w etapie a. W etapie c należy przeprowadzić obliczenia: $347 \cdot 4 = (300+40+7) \cdot 4 = 300 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 1200 + 160 + 28 = 1388$.

Etap d będzie bardziej skomplikowany. Uczeń rozpocznie pracę od narysowania tabelki:

	S	D	J
	3	4	7
·			4

Następnie, zapiszę odpowiednią wartości wynikające z przemnożenia $4 \cdot 7$, $4 \cdot 4$ oraz $4 \cdot 3$, pamiętając, że mnoży kolejno przez cyfry oznaczające jedności, dziesiątki oraz setki.:

	T	S	D	J
		3	4	7
·				4
			2	8
		1	6	0
	1	2	0	0

Następnie dodaje uzyskane składniki.

	T	S	D	J
		3	4	7
·				4
			2	8
		1	6	0
+	1	2	0	0
	1	3	8	8

W kolejnym etapie opuszczamy rysowanie tabelki, przy czym należy podkreślić wagę starannego zapisu "w kratkach", aby w kolejnym etapie uprościć go do formy z pomocniczymi cyframi:

	T	S	D	J
		3	4	7
·				4
	$_1$	$_1$	$_2$	
	1	3	8	8

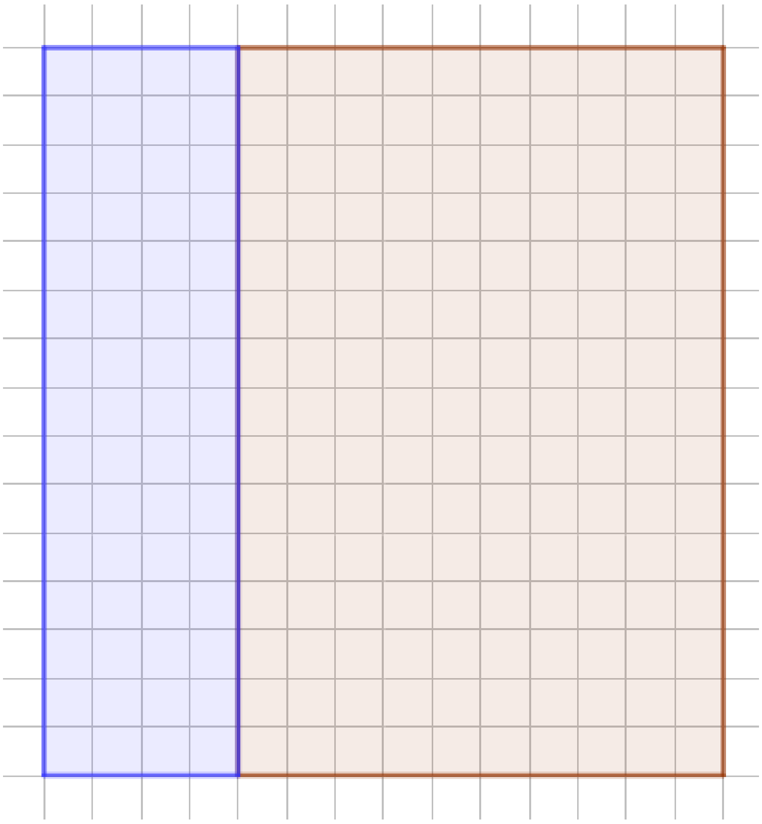
Uczniowie, którzy dobrze przyswoją tę metodę mogą opuścić zapisywanie cyfr pomocniczych.

Kolejnym zagadnieniem jakie należy przedstawić uczniom jest mnożenie przez pełne dziesiątki. Należy postępować analogicznie jak przy wprowadzaniu mnożenia liczb przez liczbę jednocyfrową, z pominięciem etapu a, który z przyczyn praktycznych mógłby być zbyt kłopotliwy.

Mając dobrze opanowane mnożenie przez liczbę jednocyfrową, nauczyciel może przejść do wprowadzania mnożenie przez liczby wielocyfrowe. Finalny krok wprowadzenia mnożenia pisemnego to zestawienie posiadanych przez ucznia umiejętności i odpowiednie przedstawienie problemu. Mnożenie dwóch liczb niedziesiętnych dwucyfrowych mniejszych niż 20 możemy przedstawić formalnie, wykorzystując rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$15 \cdot 14 = 15 \cdot 10 + 15 \cdot 4$

lub też za pomocą obrazka poglądowego:



Mnożenie sprowadziło się do przeprowadzenia dwóch mnożeń, które uczniowie są w stanie wykonać:

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 5 \\ \cdot & 1 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 0 \end{array}$$

oraz

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 5 \\ \cdot & & 4 \\ \hline & 6 & 0 \end{array}$$

A następnie do dodania do siebie uzyskanych liczb:

$$\begin{array}{rrrr} & & 6 & 0 \\ + & 1 & 5 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Policzenie tego w jednym "słupku" przedstawiamy jako wspólny zapis tych czynności.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 5 \\
\cdot & & 1 & 4 \\
\hline
 & & 6 & 0 \\
+ & 1 & 5 & 0 \\
\hline
 & 2 & 1 & 0
\end{array}
$$

Autorzy (Semadeni, Puchalska, 1981) sugerują, żeby zero przy wyniku mnożenia $15 \cdot 10$ z początku zapisywać, a możliwość jego pominięcia przedstawić uczniom dopiero w momencie kiedy sami stwierdzą, że jest dla nich oczywisty zapis bez zera.

Podobnie sugerowane też jest, aby mnożenie przez liczby z zerem w środku zapisywać w przedstawiony poniżej sposób.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 1 & 3 \\
\cdot & & & 1 & 0 & 4 \\
\hline
 & & & 5 & 5 & 2 \\
 & & 0 & 0 & 0 & \\
+ & 1 & 1 & 3 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 8 & 5 & 2
\end{array}
$$

Dopiero po spostrzeżeniu przez uczniów, że zero występujące w środku liczby przez którą mnożymy generuje nam wierszy wypełniony zerami możemy umówić się, że jego zapis można pominąć.

Ostatnim z algorytmów jest algorytm dzielenia pisemnego. Jego wprowadzenie również rozłożymy na etapy. W pierwszej części wprowadzenia zapoznamy uczniów z dzieleniem przez liczbę jednocyfrową. Wprowadzenie tego działania opiszę na przykładzie 723 : 3. Ważnym jest, by pierwsze działanie wprowadzane dla uczniów było dostatecznie łatwe. Tłumaczenie rozłożymy na poszczególne kroki. W pierwszym z nich rozdamy uczniom kwotę 723 reprezentowaną przez 7 setek, 2 dziesiątki i 3 jedności w fikcyjnej walucie. Następnie kwotę tę uczniowie będą musieli rozdzielić na 3 równe części. Kluczowym momentem będzie tu zamiana 1 setki na 10 dziesiątek. Po wykonaniu tych czynności należy wspólnie z uczniami opisać je słownie, po to by następnie zapisać te operacje za pomocą symboli matematycznych: $723 : 3 = 600 : 3 + 123 : 3 = 200 + 123 : 3$

$123 : 3 = 120 : 3 + 3 : 3 = 40 + 1$

$723 : 3 = 200 + 40 + 1$

Następnie wspólnie z uczniami zamieniamy ten zapis na zapis w "słupku". Podczas wykonywania kolejnych kroków algorytmu odwołujemy się do czynności wykonanych wcześniej - rozmieniania i rozdzielania nominałów. Końcowym efektem jest oczywiście zapis:

	2	4	1	
	7	2	3	: 3
-		6		
		1	2	
	-	1	2	
				3
			-	3
				0

Przykład, który przedstawiamy uczniom jako pierwszy powinien być tak dobrany, aby cyfra setek była wyższa od dzielnika. Przykłady które nie spełniają tego warunku wprowadzamy w kolejnym etapie. Po upewnieniu się, że uczniowie rozumieją algorytm dzielenia przez liczbą jednocyfrową wprowadzić możemy dzielenie przez liczby wielocyfrowe. Aby ułatwić uczniom zadanie, możemy poprzedzić dzielenie wypisaniem wielokrotności dzielnika.

Omówione powyżej metody, szerzej skomentowane i dokładniej opisane, możemy znaleźć w podręcznikach dla nauczycieli. Przytoczono je na potrzeby niniejszej pracy tak, by móc uwypuklić zastosowanie w nich zaleceń nauczania czynnościowego. Powyższe metody w znacznej mierze bazują na wiązaniu czynności konkretnych z myślowymi operacjami oraz kładą nacisk na słowny opis operacji. Prezentowane są również różne formy zapisu - działania obliczane za pomocą algorytmów zapisywane są poprzez ciąg operacji na liczbach. Pojawia się również wiązanie operacji z operacjami do nich odwrotnymi. Interesującym ćwiczeniem, nieuwzględnionym w powyższych metodach, a zgodnym z zaleceniami czynnościowego nauczania matematyki byłoby zadanie, w którym operacje wykonane na banknotach należałoby przedstawić w postaci schematu.

Co istotne, powyższe metody nauczania o algorytmach działań w systemie dziesiętnym można w łatwy sposób zaadoptować do wykonywania ich w dowolnym systemie pozycyjnym. Wystarczy przedstawić uczniom inną fikcyjną walutę w której nominały odpowiadają kolejnym potęgom podstawy danego systemu.

Przy ich wprowadzaniu warto zastanowić się nad powodem powszechnego stosowania sytemu dziesiętnego. Aby skłonić uczniów do zastanowienia możemy poprosić 3 uczniów aby wspólnie pokazali liczbę 3 cyfrową. To ćwiczenie może naprowadzić ich na powiązanie liczby palców z podstawą systemu dziesiętnego.

W proponowanej metodzie możemy zastąpić monety obiektami i pojemnikami, tak by liczba zapakowanych elementów stanowiła potęgę podstawy danej liczby. Przedmiotami takimi mogą być pudełka wypełnione żetonami, cukierkami lub podobnym zamiennikiem. Ideą ich zastosowania jest zapakowanie obiektów po $g-1$ dla systemu pozycyjnego o podstawie g. Następnie zapakowanie pudełek do większych opakowań, również po $g-1$. Tak przygotowane podwójnie opakowane obiekty zastąpić nam mogą banknoty o nominale g^2, pojedynczo opakowane traktujemy jak nominały o wartości g a pojedyncze obiekty jak nominały jednostkowe. Przyjęta metoda może być dla uczniów nieco łatwiejsza od poprzedniej, ponieważ nie zawiera elementu rozmieniania, który może być niezrozumiały dla uczniów nie posługujących się pieniędzmi na co dzień.

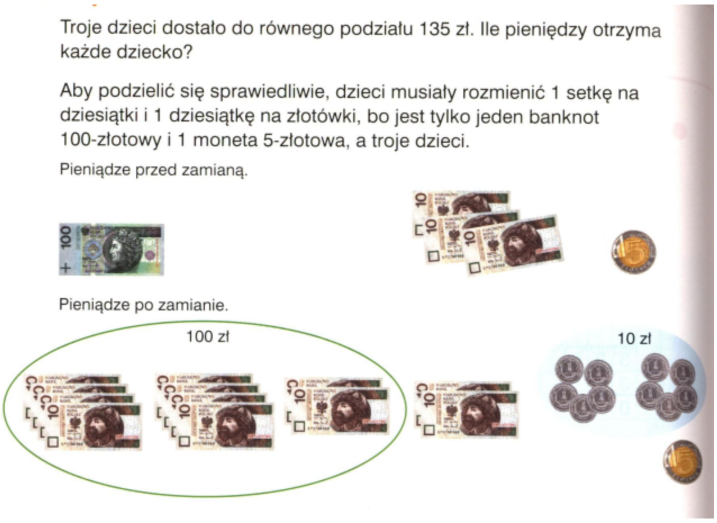
Wprowadzając algorytmy działań pisemych w pewnych systemach pozycyjnych możemy zastosować również kształty reprezentujące figury geometryczne - system piątkowy pomogą wprowadzić trójkąty równoboczne (każdy trójkąt równoboczny możemy podzielić na 4 mniejsze trójkąty równoboczne). Kształcące może być też zastosowane klocków Cuisenaire'a.

Algorytmy działań pisemnych w podręcznikach szkolnych

Omówmy teraz sposób, w jaki algorytmy pisemne wprowadzane są w programach nauczania i podręcznikach. Działania pisemne pojawiają się w klasie 4 szkoły podstawowej. Podręcznik "Matematyka z plusem" pieniądze stosuje do przedstawienia działań dodawania i odejmowania, prezentując jeden przykład z ich zastosowaniem. Pozostałe działania nie są osadzone w sytuacjach realnych bądź wyobrażonych. Dodatkowy temat poświęcony jest mnożeniu przez liczby postaci $x \cdot 10^n$.

Rysunek 1. "Matematyka z plusem, podręcznik dla 4 klasy szkoły podstawowej" s. 90

Podobnie ma się to w przypadku podręcznika "Matematyka wokół nas", z tym że wykorzystanie pieniędzy pojawia się również w przykładzie dotyczącym dzielenia pisemnego. Istotny jest fakt, że podręcznik dla nauczyciela wskazuje użycie zabawkowych pieniędzy jako konieczne podczas lekcji dotyczących odejmowania i dzielenia.

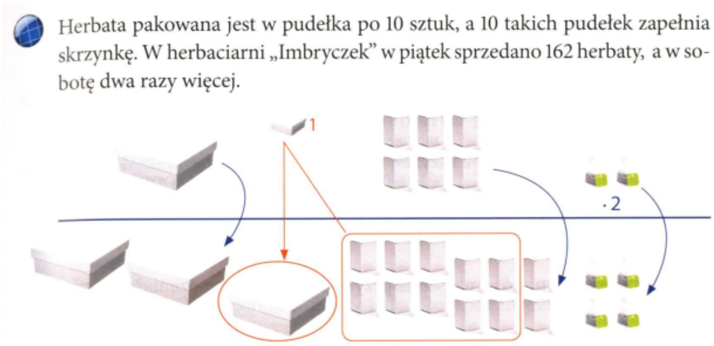


Rysunek 2. "Matematyka wokół nas, podręcznik dla 4 klasy szkoły podstawowej" s. 114

Na wyróżnienie zasługuje podręcznik "Matematyka z kluczem". Każde z działań prezentowane jest razem z przykładami przedstawionymi na pieniądzach, pokazując co najmniej dwa przykłady do każdego z działań. Podobne podejście zaprezentowane jest w "Matematyce z pomysłem". Tam też każde z działań jest dość dobrze wyjaśnione za pomocą pieniędzy. Ze zdziwieniem spostrzegłem jednak, że jest to jedyny podręcznik, gdzie w przykładzie zastosowano inny nominał niż ten będący potęgą 10. Budzi to pewną wątpliwość. W klasycznej metodzie z zastosowaniem pieniędzy liczba banknotów odpowiada liczbie określającą liczbę jednej z potęg liczby 10. Funkcji tej nie spełni banknot dwudziestozłotowy.

Rysunek 3. "Matematyka z pomysłem, podręcznik dla 4 klasy szkoły podstawowej" s. 29

"Matematyka z pomysłem" warta jest zainteresowania, ponieważ jako jedyny z analizowanych podręczników przedstawia inny niż oparty na pieniądzach przykład. Zawarto tam przykłady różnych opakowań zawierających kolejno 10 i 100 obiektów, w tym przykład herbaty pakowanej po 10, a następnie po 100 sztuk. Jest to ciekawe zastosowanie odkryte przeze mnie podczas opracowywania materiałów do niniejszej pracy, którego nie miałem jeszcze okazji zastosować w praktyce.



Rysunek 4. "Matematyka z pomysłem, podręcznik dla 4 klasy szkoły podstawowej" s. 31

Odnośnie zadań pojawiających się w podręcznikach, poza typowymi "słupkami" do obliczenia prezentowane są proste zadania tekstowe, w których występują liczby na tyle duże, że trudno byłoby je uczniom policzyć w pamięci, muszą je zatem rozwiązać za pomocą algorytmów działań pisemnych. Zastosowane zagadnienia będące przykładami sytuacji z życia, z lekcji historii lub geografii mają na celu podkreślenie operatywnego charakteru zdobytej wiedzy oraz korzyści wynikających z zastosowania poznanych algorytmów.

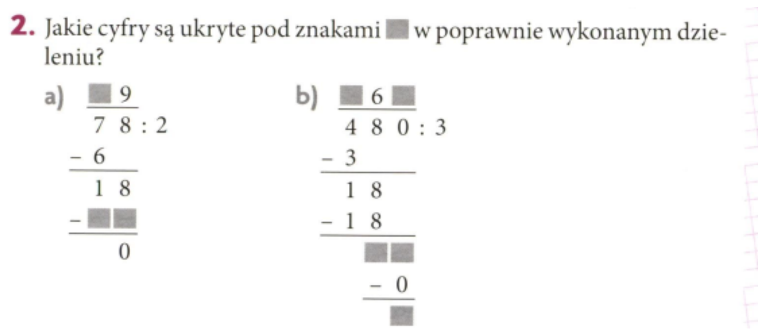
Najpopularniejsze nazwiska w Polsce z podziałem na płeć

lp.	nazwiska kobiet	liczba	lp.	nazwiska mężczyzn	liczba
1.	Nowak	137 745	1.	Nowak	136 769
2.	Kowalska	88 571	2.	Kowalski	87 826
3.	Wiśniewska	69 594	3.	Wiśniewski	68 880
4.	Wójcik	62 831	4.	Wójcik	62 376
5.	Kowalczyk	61 235	5.	Kowalczyk	61 238
6.	Kamińska	60 234	6.	Kamiński	59 295
7.	Lewandowska	59 107	7.	Lewandowski	58 036
8.	Dąbrowska	58 901	8.	Dąbrowski	57 325
9.	Zielińska	58 122	9.	Zieliński	57 081
10.	Szymańska	57 073	9.	Szymański	55 884

a) Oblicz, ile osób o nazwisku Nowak mieszkało w Polsce w grudniu 2013 roku.

Rysunek 5. "Matematyka z plusem, podręcznik dla 4 klasy szkoły podstawowej" s. 97

Często pojawiają się zadania nieco trudniejsze, w których uczniowie muszą uzupełnić kratki w wykonywanych działaniach. Zadania tego typu stanowić mogą dodatkowy bodziec, który pozwoli uczniom wyjść poza zastosowanie algorytmu i skłonić do zrozumienia idei stojących za działaniami pisemnymi.



2. Jakie cyfry są ukryte pod znakami ■ w poprawnie wykonanym dzieleniu?

a)
```
 ■ 9
 7 8 : 2
-6
 1 8
-■ ■
   0
```

b)
```
 ■ 6 ■
 4 8 0 : 3
-3
 1 8
-1 8
   ■ ■
   - 0
     ■
```

Rysunek 6. Podręcznik "Matematyka z pomysłem, podręcznik dla 4 klasy szkoły podstawowej" s. 48

Obserwacje z praktyk i zajęć indywidualnych

Obserwacje poczynione podczas zajęć indywidualnych z uczniami z różnych poziomów edukacji świadczą o tym, że podczas pierwszych lat edukacji matematycznej nie przyswoili sobie algorytmów działań pisemnych. Jako skrajny przykład podam tu absolwenta liceum ogólnokształcącego, który mimo zdanej matury nadal ma problem z wykonaniem działań pisemnych. Wyciągając wnioski z mojej subiektywnej obserwacji spostrzegłem, że uczniowie często bezskutecznie próbują wykonać wyuczone kroki, a w przypadku niepowodzenia pomóc nie jest w stanie żadna próba analizy postępowania. Jedyną pomocą pozwalającą kontynuować obliczenia jest podanie kolejnego kroku algorytmu, a odwołanie do operacji stojących za wykonywanym algorytmem jedynie bardziej konfunduje ucznia. Spostrzeżenia z praktyk oraz z rozmów ze znajomymi nauczycielami potwierdzają, że działania pisemne nie są wprowadzane z należytą starannością. Używanie pieniędzy lub ich zastępników ma miejsce bardzo rzadko. Klasyczna lekcja wprowadzająca działania pisemne sprowadza się do zaprezentowania kilku przykładów i omówienia przeprowadzanego algorytmu. Następnie działania wykonywane są przez uczniów z pomocą nauczyciela przy tablicy do końca jednostki lekcyjnej, a dalsze przykłady wykonywane są w domu, lub też zadawane jako zadania domowe, a następnie kontynuowane na lekcjach ćwiczeniowych.

Podczas wspomnianych wcześniej zajęć indywidualnych, napotykając problem z działaniami pisemnymi, próbowałem odwoływać się do polecanych i opisanych powyżej metod. Najczęściej decydowałem się na stosowanie monet 1 zł, 10 gr oraz jednogroszówek. Użycie tych monet wiązało się dla mnie z dwoma problemami. Pierwsza kwestia dotyczyła rozmieniania pieniędzy. Odnosiłem wrażenie, że zwyczajnie zajmowało za dużo czasu. Problem ten można by zapewne łatwo rozwiązać przygotowując wcześniej odpowiednio podzielone monety. Możliwe też, że czas na nie poświęcony nie jest wcale marnowany, a moje wrażenie wynika z tego, że tłumaczenie algorytmów na monetach stosowałem jako pomoc podczas wykonywania zadań, w których wykonanie zadania pisemnego stanowiło jedynie część większej całości. Z rozmienianiem pieniędzy wiąże się też inna kwestia. Odniosłem wrażenie, że dla uczniów nie wydaję się ono też aż tak intuicyjne, jeżeli nie operują pieniędzmi na co dzień. Rozmienienie złotówki na 10 monet dziesięciogroszowych może być wtedy kwestią nieoczywistą, co może utrudniać i zaburzać zrozumienie operacji. Wraz z rozpowszechnieniem płatności kartą uwaga ta wydaje się być istotna. Kolejną kwestią trudną dla dziecka był jego naturalny sprzeciw - "czemu nie użyjemy innych nominałów - np. 50 gr?". Odpowiedź, że stosujemy je tylko ćwiczebnie, nie była satysfakcjonująca dla ucznia. Podsumowując moje doświadczenie, chciałbym dodać jeszcze jeden, dość oczywisty wniosek, że odwoływanie się do metod dotyczących poziomu obserwacji znacznie lepiej sprawdzało się u ucznia klasy 5 niż uczniów starszych.

Chociaż z pozoru zadania dotyczące algorytmów działań pisemnym wydawać się mogą zajęciem typowo szkolnym, sądzę, że kreatywny nauczyciel z powodzeniem może znaleźć ich zastosowanie podczas zajęć terenowych. Semadeni (Semadeni, 1973) wprost pisze o wykorzystaniu patyczków łączonych w pęczki jako naturalnym sposobie wprowadzającym zagadnienie systemów pozycyjnych i w dalszej perspektywie pokazywania na nich zasad działania algorytmów działań pisemnych. Nauczyciel chcący się jednak wykazać większą inwencją może spróbować wykreować sytuację (np. podczas gry terenowej), gdy zespoły uczniów zmuszone są komunikować się za pomocą kodów (np. zapalając i gasząc światło). Nietrudno wyobrazić sobie zadanie, w którym uczniowie sprawnie posługujący się niedziesiętnym systemem pozycyjnym używają go do przekazania informacji. Wielokrotne zastosowanie tego sposobu transmisji danych oraz odpowiednia konstrukcja zadania może skłonić uczniów do wykonania działań w tym systemie. Zadanie może prezentować się następująco:

W pewnym górzystym regionie doszło do awarii elektrowni. Na skutek braku prądu w wioskach otaczających centralne miasto wiele osób zachorowało. W pewnym miasteczku usytuowanym w centrum obszaru znajduje się skład leków, z którego leki transportowane są do okolicznych wiosek, z którymi niestety nie ma łączności. Na wypadek takiej sytuacji jeszcze przed katastrofą ustalono, że wioski komunikować się mają za pomocą sygnalizacji świetlnej, korzystając również z 3 kolorowych przeźroczy. Wcielając się w mieszkańców, ustalcie sposób komunikacji, a następnie udajcie się do punktów na mapie oznaczonych jako wioski. Znalezione tam informację nadajcie do "miasta".

Tak skonstruowane zadanie powinno pozwolić uczniom na swobodę w wyborze systemu kodowania, a posiadana wiedza być może skłoni ich do zastosowania sytemu czwórkowego. Niestety nie miałem okazji zrealizować tego zadania w praktyce. Do próby przeprowadzenia go zachęcam czytelnika.

Rozdział 5

Propozycja wprowadzania algorytmów działań pisemnych na lekcjach informatyki

System binarny wprowadzany jest zazwyczaj w 7 klasie (Migra, 2017). Najczęściej jest to jedyna lekcja poświęcona działaniu komputera na niższych poziomach abstrakcji, umiejscowiona razem z tematami dotyczącymi sprzętu komputerowego w osobnym dziale. Przeprowadzając lekcję wprowadzającą system dwójkowy, bazując na programie nauczania WSiP (Jochemczyk, 2017), niełatwo było połączyć zagadnienie systemu dwójkowego w jedną strukturę z działem poświęconym kwestiom stricte technicznym.

Lekcja wprowadzająca zagadnienie systemu binarnego jest idealną przestrzenią, aby przedstawić sposób w jaki zupełnie zwyczajne dla użytkownika komputera działania zamieniane są na sygnały elektryczne przetwarzane przez komputer. Przedstawienie algorytmu dodawania pisemnego wykonywanego przez procesor jako jedną z podstawowym operacji może sprawić, że uczniowie w bardziej świadomy sposób podejdą do działania komputera.

Zarys konspektu lekcji

Przejdźmy do przedstawienia zarysu konspektu lekcji wprowadzającej system binarny oraz algorytm dodawania w systemie dwójkowym.

Temat: Jak liczy komputer?

Klasa: VII

Czas: 45 minut

Treści Programowe: Uczeń przedstawia sposoby reprezentowania w komputerze wartości logicznych, liczb naturalnych (system binarny), znaków (kody ASCII) i tekstów.

Cel: Poznanie systemu dwójkowego i jego zastosowania w informatyce.

Cele operacyjne lekcji: Uczeń umie:

- określić role systemu binarnego w informatyce

- zapisać liczbę w systemie binarnym
- wykonać dodawanie pisemne na liczbach w systemie binarnym

Metody pracy: wykład połączony z pokazem, indywidualna praca z komputerem.

Środki dydaktyczne: tablica, kartki i długopisy do przeprowadzenia obliczeń, tabela ASCII w formie elektronicznej (opcjonalnie), płytka prototypowa (opcjonalnie)

Przebieg: Aby wprowadzić uczniów w lekcje, nauczyciel zapisuje na tablicy następujące napisy

Rysunek 7. Zapis na tablicy

Kluczowym zagadnieniem w tej części lekcji jest spostrzeżenie, że pewne zapisy możemy interpretować na różne sposoby. Następnie nauczyciel w formie dialogu z uczniami doprowadza do odczytania napisów od lewej do prawej. Uczniowie prawdopodobnie ostatni z napisów odczytają jako literę i, bądź też jako rzymską cyfrę jeden. Możliwe, że pojawią się obie te odpowiedzi, jeżeli nie, to sugestia drugiej interpretacji padnie ze strony nauczyciela. Środkowy napis odczytamy jako angielskie słowo oznaczające dane. Przy odczytaniu zapisu 1101 (jako jeden, jeden, zero, jeden) nauczyciel zatrzymuje się i nawiązując do celów lekcji oznajmia, że dzisiaj zajmiemy się tym, jak zapis taki interpretuje komputer.

W kolejnym kroku nauczyciel zapisuje na kartce liczbę trzycyfrową, a następnie prosi trzech uczniów o spojrzenie na kartkę i zaprezentowanie klasie tej liczby. W naturalny sposób uczniowie skłonni będą do pokazania jej na palcach obu dłoni, tak, żeby liczba palców pokazana przez ucznia odpowiadała kolejno liczbie jedności, dziesiątek i setek. Nauczyciel zadaje pytanie - jak wyglądałby system zapisu liczby gdybyśmy zamiast 10 palców mieli tylko 2 i zamiast dysponować cyframi od 0 do 9 dysponowalibyśmy tylko 0 i 1? Rozpisujemy w kolumnie liczby od 1 do 9, a następnie zadajemy pytanie, czy mamy cyfrę reprezentującą 10. Odpowiedz jest oczywista, zamiast takiej cyfry zapisujemy dwie 1 i 0. Kolejną zapisujemy jako 1 i 1. Następnie wspólnie z uczniami, do liczb od 1 do 11 zapisujemy ich dwójkowe odpowiedniki, stosując tą samą logikę - jeżeli nie możemy zwiększyć liczby jedności zamieniamy ją na zero i zwiększamy cyfrę dziesiątek, odpowiednio wykonując to zadanie dla kolejnych cyfr na kolejnych pozycjach w liczbie. Rozpisane liczby zapisujemy tak, by móc osadzić je w tabeli:

10	**1**		**8**	**4**	**2**	**1**
1	1		1	0	1	1
1	0		1	0	1	0
0	9		1	0	0	1
0	8		1	0	0	0
0	7		0	1	1	1
0	6		0	1	1	0
0	5		0	1	0	1
0	4		0	1	0	0
0	3		0	0	1	1
0	2		0	0	1	0
0	1		0	0	0	1

Przedstawiamy uczniom działanie systemu binarnego odnosząc się do sytemu dziesiętnego. W systemie dziesiętnym kolejne cyfry odpowiadają liczbie kolejnych potęg 10, tak w przypadku systemu binarnego są to kolejne potęgi 2.

Następnie możemy wprowadzić algorytm, za pomocą którego ustalimy, jak zapisać daną liczbę w systemie binarnym. Aby to zrobić, rozdajemy uczniom podzielonym na grupy tę samą liczbę 13 słomek oraz gumki recepturki. Algorytm przebiega następująco: w pierwszym kroku grupujemy słomki po 2, a nieparzystą słomkę odkładamy. Następnie 6 grup słomek łączymy po 2 w 3 grupy po 4 słomki, a z powstałych 3 pęków słomek 2 łączymy słomką. W ten sposób otrzymaliśmy 1 pęk 8 słomek, pęk 4 słomek oraz pozostałą 1 słomkę. Zapisujemy to w tabeli:

8	**4**	**2**	**1**
1	1		1

Następnie uzupełniamy puste miejsca zerem.

8	**4**	**2**	**1**
1	1	0	1

Następnie zapisujemy uzyskaną liczbę:

1101_2

Tłumaczymy uczniom, że dla ustalenia spójnego zapisu dla liczb binarnych podpisujemy je małą 2 w nawiasach.

Po ustaleniu wyniku wspólnie z uczniami ustalamy słowny opis wykonanych czynności, kierując uczniów na spostrzeżenie, że łączenie w grupy po 2 to formalnie dzielenie z resztą. Wspólnie z uczniami zapisujemy kolejne działania w postaci tabeli dzieleń z resztą.

13	1
6	0
3	1
1	1

Następnie zadajemy uczniom ćwiczenie zamiany liczby 20 na system binarny, udostępniając im słomki w razie potrzeby. Na tablicy jeden z uczniów zapisuje przeprowadzone działania:

20	0
10	0
5	1
2	0
1	1

Kolejnym elementem będzie dodanie obliczonych liczb znanym algorytmem działań pisemnych. Oczywiście uczulić musimy uczniów na to, że wykonujemy działania w systemie dwójkowym. Otrzymujemy działanie:

$$\begin{array}{rcccccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ + & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Zadanie powinno być proste dla uczniów, jest ono jednak kluczowe w lekcji. Jeżeli uczniowie dobrze rozumieją algorytm dodawania pisemnego i jego modyfikacje bez problemu powinni zrozumieć tabele dla różnych możliwych cyfr:

$$\begin{array}{rc} & 0 \\ + & 0 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} & 1 \\ + & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} & 0 \\ + & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} & & 1 \\ + & & 1 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

Zwróćmy uwagę, że pojawić się może również jedynka przeniesiona z wykonywania obliczeń dla poprzedzających cyfr.

$$\begin{array}{rc} & {\scriptstyle 1} \\ & 0 \\ + & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} & & {\scriptstyle 1} \\ & & 1 \\ + & & 0 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} & & {\scriptstyle 1} \\ & & 0 \\ + & & 1 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} & & {\scriptstyle 1} \\ & & 1 \\ + & & 1 \\ \hline & 1 & 1 \end{array}$$

Uczniowie klasy VII, mający już za sobą wstęp do programowania, powinni zorientować się, że działanie dodawania sprowadzamy do wykonania szeregu operacji przyjmujących na wejściu 3 wartości 1 lub 0, a na wyjściu 2 wartości dwójkowe. Sama operacja to dopasowanie wejściowych bitów do jednego z 8 warunków. W tym momencie w naturalny sposób możemy nawiązać do przyczyn stosowania systemu binarnego w architekturze komputerów. Są one najprostsze do przeniesienia na układy w procesorze.

W tym momencie lekcji, zależnie od preferencji, zdolności i poziomu zrozumienia tematu przez uczniów możemy kontynuować lekcję na różne sposoby. Z pewnością kształcącym zadaniem będzie powtórzenie operacji zapisu liczby w systemie dwójkowym oraz przeprowadzenie kolejnego dodawania. Interesującym ćwiczeniem będzie wykonanie odejmowania w systemie binarnym. Warto również rozważyć zadanie oparte na tabeli ASCII, w którym uczniowie próbują zapisać swoje imię za pomocą liczb interpretowanych jako znaki w kodowaniu ASCII. Jeżeli uczniowie są zainteresowani, a nauczyciel posiada odpowiedni sprzęt i wiedzę, kształcące będzie przedstawienie układu dodającego wykonanego na płytce prototypowej.

Oczywiście powyższy konspekt należy rozbudować i skonkretyzować przed realizacją go w klasie, a przede wszystkim dopasować do umiejętności uczniów. Realizacja go w warunkach szkolnych może przysporzyć trudności jeżeli uczniowie nie pamiętają, bądź nie rozumieją algorytmu działań pisemnych, bądź też nie mają dobrej intuicji dotyczącej działania systemu dziesiętnego. Przeprowadzenie lekcji, poza osiągnięciem wypisanych celów, może pomóc uczniom zrozumieć działanie niedziesiętnych systemów pozycyjnych, a w szerszym kontekście powiązanie między matematyką a informatyką.

Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiłem możliwe sposoby nauczania algorytmów działań pisemnych, prezentując je w kontekście metody czynnościowej nauczania matematyki oraz pokazałem możliwości i potencjalne korzyści wynikające z rozszerzenia wykonywanych ćwiczeń o działania w niedziesiętnych systemach pozycyjnych. Pracę tę pisałem z intencją popularyzacji traktowania algorytmów działań pisemnych jako metody poznania matematyki i informatyki, oraz sposobu na rozwijanie uczniów, a nie jako cel w sam w sobie. Idea ta zgodna jest z zasadami szkoły progresywistycznej, ale także osadzona jest mocno w dynamicznie rozwijającej się neurodydaktyce. Opierając się na przeczytanej literaturze, mogę stwierdzić, że przedstawione podejście może pozwolić na pełniejsze zrozumienie, a w konsekwencji również na poprawne obliczenia wykonywane za pomocą algorytmów działań pisemnych. Poruszając zagadnienie przedstawiania w szkole niedziesiętnych systemów pozycyjnych chciałem również postawić pytanie o zasadność twardego rozdziału przedmiotów szkolnych i przedstawić pewną zaletę podejścia interdyscyplinarnego. Kolejną kwestią, która może wynikać z poruszonych zagadnień, jest pytanie, czy warto zastanowić się nad zwiększeniem podstawy programowej o zagadnienia komplementarne, stawiając rozwinięcie podstawowych pojęć matematycznych nad prezentowaną ich liczbę. Ostatecznie dwa postawione powyżej pytania mogą skłaniać do refleksji nad zasadnością sztywnej podstawy programowej. Poruszone teraz kwestie zdecydowanie wykraczają poza obszar niniejszej pracy, ale przede wszystkim ponad kompetencje oraz przygotowanie zarówno praktyczne jak i teoretyczne autora, a wspomniane są w celu wywołania refleksji u czytelnika.

Bibliografia

1) Bauer J., Co z tą szkołą? : siedem perspektyw dla uczniów, nauczycieli i rodziców, Słupsk: Dobra Literatura, 2015
2) Braun M., Mańkowska A., Paszyńska M., Matematyka z kluczem, podręcznik dla klasy 4 szkoły podstawowej, część 1, Warszawa: Nowa Era, 2013
3) Dobrowolska M., Matematyka 4 z plusem : podręcznik dla klasy czwartej szkoły podstawowej, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2017
4) Dobrowolska M., Matematyka 4 z plusem : podręcznik dla klasy czwartej szkoły podstawowej : wersja dla nauczyciela, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2017
5) Dubiecka-Kruk B., Gleirscher A., Matematyka z pomysłem, podręcznik dla klasy 4 szkoły podstawowej, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2014
6) Jochemczyk W., Krajewska-Kranas I., Kranas W., Samulska A., Wyczółkowski M., Program Nauczania Informatyki W Klasach 4-8 Szkoły Podstawowej, Dostępne: https://www.wsip.pl/upload/2017/03/Informatyka_SP_4_8_kl_4_8_Program_nauczania.pdf?x75237 (dostęp 4.03.2020)
7) Koba G., Program nauczania. Teraz bajty. Informatyka dla szkoły podstawowej. Klasy VII-VIII, Dostępne: https://www.migra.pl/?a=programy_nauczania&opcja=show&bookId=70 (dostęp 4.03.2020)
8) Krygowska Z., Zarys dydaktyki matematyki, Część 1,2,3, Warszawa: Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, 1977
9) Lewicka H., Kowalczyk M., Matematyka wokół nas 4 : podręcznik : szkoła podstawowa, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2017
10) Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym (Dz.U. 2017 poz. 356)
11) Podstawy programowa wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. 2016 poz. 895)

12) Semadeni Z., Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci, Warszawa: Polskie Wydawnictwo Naukowe, 1973
13) Semadeni Z., Puchalska E., Algorytmy dodawania i odejmowania pisemnego, W: Z. Semadeni (red.) Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela (t. 3, s. 241-252), Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1981
14) Semadeni Z., Sierocka J., Algorytm dzielenia pisemnego, W: Z. Semadeni (red.) Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela (t. 3, s. 266-277), Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1981
15) Semadeni Z., Sierocka J., Algorytm mnożenia pisemnego, W: Z. Semadeni (red.) Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela (t. 3, s. 254-266), Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1981
16) Siwek H., Czynnościowe nauczanie matematyki, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1998
17) Szemińska A., Rozwój pojęć matematycznych u dziecka, W: Z. Semadeni (red.) Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela (t. 1, s. 112-250), Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1981

Prace wygenerowano korzystając z programu pdflatex oraz klasy praca-dyplomowa.cls autorstwa dr. Paweła Mleczko <pml@amu.edu.pl> objętą licencją Creative Commons BY-NC-SA szczegóły: http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/pl/legalcode