Практична робота №2. Асимптотична складність алгоритмів. Інші нотації

2025.09.25,м.Кременьчук	Створив: Огоновський О.Є.

Мета: набути практичних навичок у розв’язанні задач на оцінку асимптотичної складності алгоритмів у Ω, Θ, o, θ, ω-нотаціях.

Завдання 1

Маємо дві функції $f(n) = 4n^3 - 12n + 9, g(n) = n^3$. Довести, що f(n) = Ω($g(n)$)

За визначенням $f(n) = \Omega(g(n))$ якщо існують константи c > 0 та $n_0 in \mathbb{N}$ такі, що:

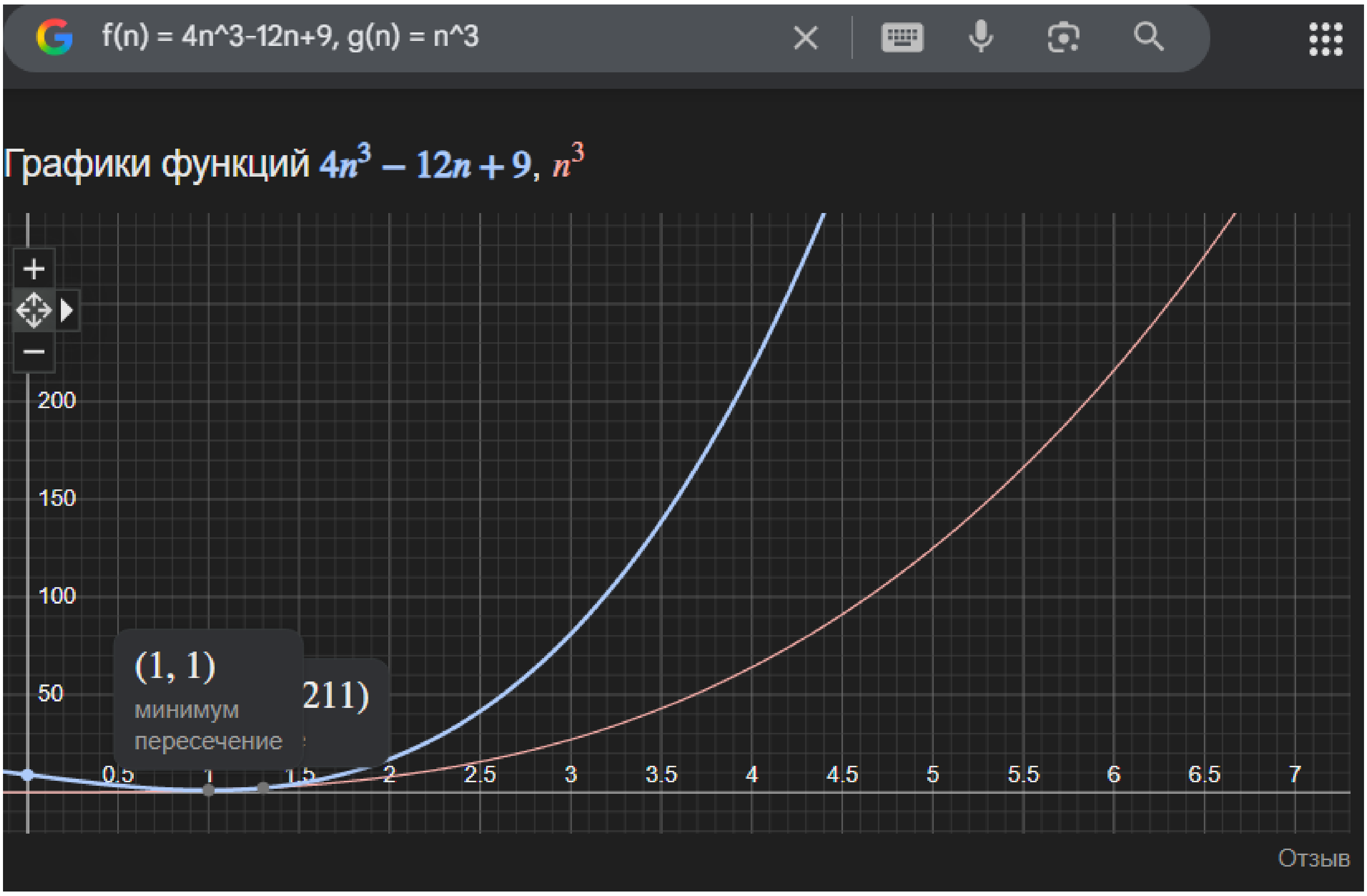
$f(n) > cg(n)$ для всіх $n \geq n_0$

Розглянемо $f(n)$:
$f(n) = 4n^3 - 12n + 9 = n^3 + (3n^3 - 12n) + 9$

Зауважимо, що $3n^3 - 12n = 3n(n^2 - 4) > 0$ для $n > 2$

для всіх $n \geq 3$ маємо $3n^3 - 12 \geq 0$, а тому $f(n) = n^3 + (3n^3 - 12n) + 9 \geq n^3 + 9 \geq 1 \cdot n^3$

Отже можна вяти c = 1 та $n_0 = 3$. тому $f(n) \geq cg(n)$ для всіх $n \geq n_0$, тобто $f(n) = \Omega(g(n))$



Видно що для $n \geq 3$ синя крива лежить вище червоної

Завдання 6

Нехай $f(n) = 6n^3 - 9n^2 + 12n$ і $g(n) = n^3$. Довести, що f(n) = Ω($g(n)$).

Розкладаємо: $f(n) = 6n^3 - 9n^2 + 12n = n^3 + (5n^3 - 9n^2 + 12)$

Розглянемо додатковий множник:

$$5n^3 - 9n^2 + 12n = n(5n^2 - 9n + 12)$$

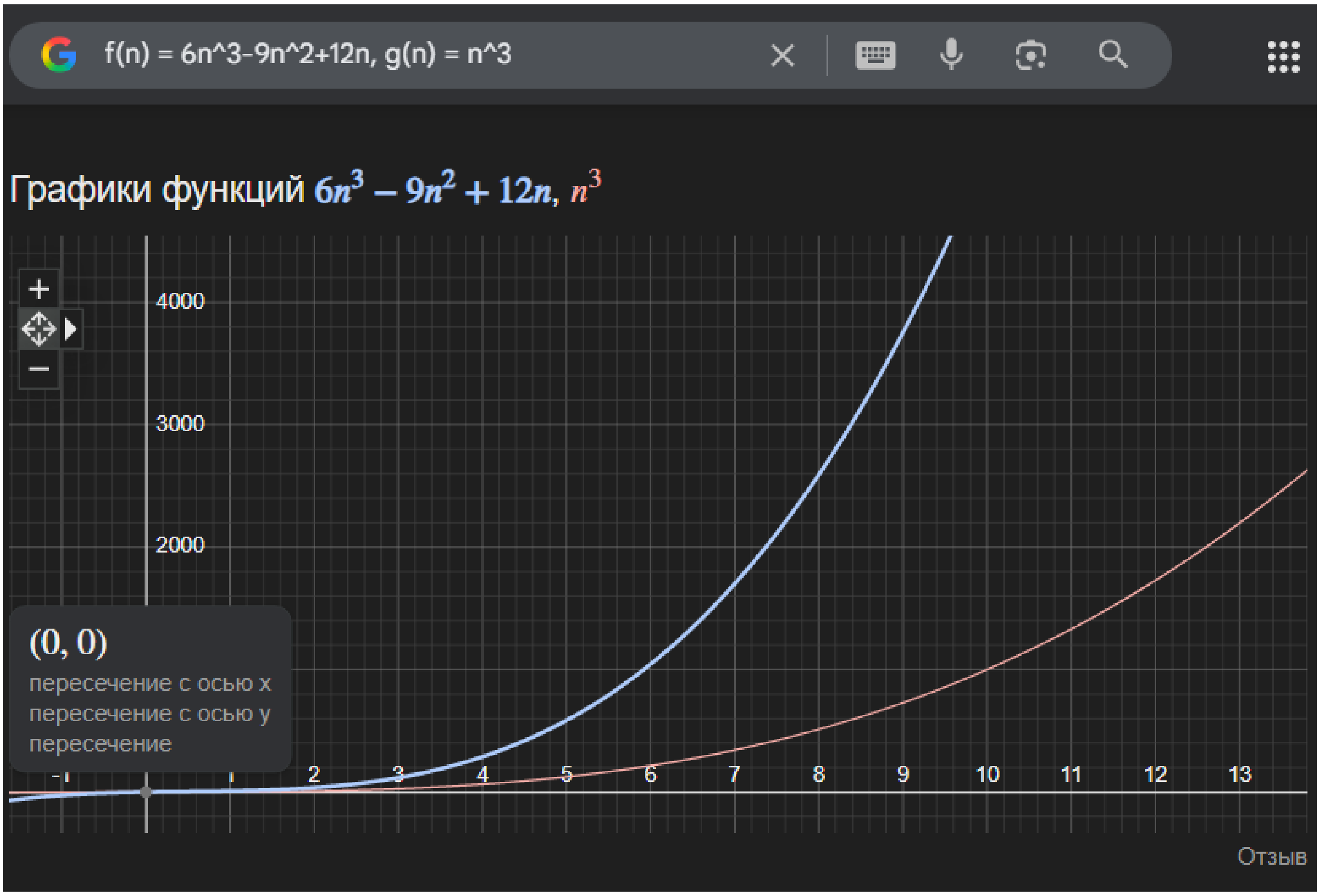
Квадратний тричлен 5n^3 - 9n + 12 має дискримінант:

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12 = 81 - 240 = -159 < 0$$

тому для всіх $n \in \mathbb{R}$ цей тричлен додатний. Отже для всіх натуральних $n \geq 1$ $5n^3 - 9n^2 + 12n \geq 0$

$$f(n) = n^3 + (5n^3 - 9n^2 + 12n) \geq n^3$$

можемо взяти c = 1 і $n_0 = 1$. Тому $f(n) \geq cg(n)$для всіх $n \geq n_0$, тобто $f(n) = \Omega(g(n))$



Синя крива завжди вище червоної вже з n = 1

Контрольні питання

1. Що таке асимптотична складність алгоритму? Асимптотична складність — це спосіб оцінки ефективності алгоритму шляхом аналізу того,як час виконання (часова складність) або обсяг пам'яті (просторова складність) змінюються зі збільшенням розміру вхідних даних.

2. Які інші нотації, крім O-нотації, використовуються для вираження асимптотичної складності? Основні нотації:

    - O (велике O) - асимптотична верхня межа
    - Ω - асимптотична нижня межа
    - Θ - Коли одночасно є й верхня, й нижня межа
    - o (меленьке o) - функція росте строго повільніше
    - ω (маленька %\omega$) - функція росту строго швидше

3. Як визначити асимптотичну складність алгоритму за допомогою символів Θ і Ω ?

- Ω: $f(n) = \Omega(g(n))$ означає - існують c > 0 і n_0 такі, що для всіх $n \geq n_0$ виконано $f(n) \geq cg(n)$. Тобто g(n) - асимптотична нижня межа для $f(n)$.
- Θ: $f(n) = \Theta(g(n))$ означає - існують $c_1, c_2 > 0$ і n_0 такі, що $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ для всіх $n \geq n_0$. Тобто f і g зростають однаково за порядком

4. Яка різниця між O-нотацією, Θ-нотацією і Ω-нотацією?

- O(g(n)) - стверджує, що f(n) не перевищує (в асимптотичному сенсі) сталого кратного від g(n) (верхня оцінка).
- Ω(g(n)) - стверджує, що f(n) не менша (в асимптотичному сенсі) від сталого кратного g(n) (нижня оцінка).
- Θ(g(n)) - означає одночасно $f(n) = O(g(n))$ і $f(n) = \Omega(g(n))$; тобто g є і верхньою, і нижньою межею — точний порядок росту.

5. Які основні властивості інших нотацій, таких як o (маленька o), ω(маленька омега)

- f(n) = o(g(n)) означає $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Тобто f зростає строго повільніше за g
- f(n) = ω (g(n)) означає $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$. Тоді f зростая строго швидше.

  Властивості:
- якщо $f = \Theta(g)$ то $f = O(g)$ і $f = \Omega(g)$.
- якщо $f = o(g)$, то $f = O(g)$
- якщо $f = \omega(g)$ то $f = \Omega(g)$