Практична робота №6. Нелінійна багатовимірна безумовна оптимізація

2025.12.11,м.Кременьчук	Створив: Огоновський О.Є.

Мета: набуття навичок розв’язання задачі нелінійної безумовноїбагатовимірної оптимізації непрямим методом Ейлера і прямими (чисельними)методами: Ньютона, найшвидшого спуску, покоординатного спуску.

Задача

За допомогою зазначеного методу багатовимірної оптимізації з заданою точністю Eps визначити мінімальне значення функції цілі f(X).

Спочтку задача має бути розв’язана методом Ейлера для точного встановлення стаціонарних точок функції (таблиця 11).

Метод найскорішого спуску: $f(X) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1$ початковий вектор X 0(−1;−2), Eps = 0,1

Метод Ейлера: $f(X) = 5(x_1 - 6)^2 + 3(x_2 - 2)^3 - 6x_1x_2$

Частина 1. Метод Ейлера (для точної стаціонарної точки)

Функція: $f(X) = 5(x_1 - 6)^2 + 3(x_2 - 2)^3 - 6x_1x_2$

Знайдемо частинні похідні для методу Ейлера (рівняння для стаціонарних точок):

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 5 \cdot 2(x_1 - 6) \cdot 1 - 6x_2 = 10(x_1 - 6) - 6x_2 = 10x_1 - 60 - 6x_2$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3 \cdot 3(x_2 - 2)^2 \cdot 1 - 6x_1 = 9(x_2 - 2)^2 - 6x_1$

Рівняння для стаціонарної точки:

$$\begin{cases} 10x_1 - 60 - 6x_2 = 0 \quad (1) \\ 9(x_2 - 2)^2 - 6x_1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

З (1): $(10x_1 = 60 + 6x_2)$ → $(x_1 = 6 + 0.6x_2)$.

Підставимо в (2):

$9(x_2-2)^2-6(6+0.6x_2)=0$ $9(x_2-2)^2-36-3.6x_2=0$ $9(x_2-2)^2-3.6x_2-36=0$

Нехай $(t=x_2-2)$, тоді $(x_2=t+2)$.

$9t^2-3.6(t+2)-36=0$ $9t^2-3.6t-7.2-36=0$ $9t^2-3.6t-43.2=0$
Помножимо на 10: $90t^2-36t-432=0$ Поділимо на 18: $5t^2-2t-24=0$ $D=4+480=484$ $t=\frac{2\pm22}{10}$ $t_1=\frac{24}{10}=2.4,\quad t_2=\frac{-20}{10}=-2$

Отже: $x_2=t+2$

1. $t=2.4\quad\Rightarrow\quad x_2=4.4\quad\Rightarrow\quad x_1=6+0.6\cdot4.4=6+2.64=8.64$
2. $t=-2\quad\Rightarrow\quad x_2=0\quad\Rightarrow\quad x_1=6+0.6\cdot0=6$

Точки: $((8.64,\ 4.4))$ та $((6,\ 0))$.

Перевіримо тип: $f_{x_1x_1}=10$ $f_{x_2x_2}=18(x_2-2)$ $f_{x_1x_2}=-6$

1. Точка (8.64, 4.4): $(f_{x_2x_2}=18(4.4-2)=18\cdot2.4=43.2)$, $(f_{x_1x_1}=10)$. Визначник Гессе: $\Delta=10\cdot43.2-(-6)^2=432-36=396>0,\ f_{x_1x_1}>0\quad\Rightarrow \text{лок. мін.}$
2. Точка (6, 0): $(f_{x_2x_2}=18(0-2)=-36)$, $(f_{x_1x_1}=10)$. $\Delta=10\cdot(-36)-36=-360-36=-396<0\quad\Rightarrow \text{сідлова точка.}$

Отже, **мінімум** у $((x_1,x_2)=(8.64,\ 4.4))$.

Частина 2. Метод найскорішого спуску для іншої функції

Дано: $f(X)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+6x_1$ Початкова точка $(X_0=(-1,-2))$, $(\varepsilon=0.1)$.

1. Градієнт:

$\frac{\partial f}{\partial x_1}=4x_1-2x_2+6$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}=4x_2-2x_1$ $\nabla f(X)=(4x_1-2x_2+6,\ 4x_2-2x_1)$

2. Обчислюємо градієнт у $(X_0=(-1,-2))$:

$g_0=(4(-1)-2(-2)+6,\ 4(-2)-2(-1))=(-4+4+6,\ -8+2)=(6,\ -6)$
Норма градієнта: $(\|g_0\|=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}\approx8.485>\varepsilon)$.

3. Знаходимо крок (α_0):

$X_1 = X_0 - \alpha g_0 = (-1 - 6\alpha,\ -2 + 6\alpha)$ Підставляємо в (f): $f(\alpha) = 2(-1-6\alpha)^2 + 2(-2+6\alpha)^2 - 2(-1-6\alpha)(-2+6\alpha) + 6(-1-6\alpha)$ Розглянемо покроково: $(-1 - 6\alpha)^2 = 1 + 12\alpha + 36\alpha^2$ $(-2+6\alpha)^2 = 4 - 24\alpha + 36\alpha^2$ Тоді: $2(1 + 12\alpha + 36\alpha^2) = 2 + 24\alpha + 72\alpha^2$ $2(4 - 24\alpha + 36\alpha^2) = 8 - 48\alpha + 72\alpha^2$ Сума цих двох: $(10 - 24\alpha + 144\alpha^2)$.

Далі: $(-2(-1-6\alpha)(-2+6\alpha))$: $(-1-6\alpha)(-2+6\alpha) = [(-1)(-2) + (-1)(6\alpha) + (-6\alpha)(-2) + (-6\alpha)(6\alpha)] = [2 - 6\alpha + 12\alpha - 36\alpha^2] = [2 + 6\alpha - 36\alpha^2]$ Множимо на (-2): $-4 - 12\alpha + 72\alpha^2$

Далі: $(6(-1-6\alpha) = -6 - 36\alpha)$.

Тепер складаємо всі частини $(f(\alpha))$:

Частина 1 і 2: $(10 - 24\alpha + 144\alpha^2)$
Частина 3: $(-4 - 12\alpha + 72\alpha^2)$
Частина 4: $(-6 - 36\alpha)$

Складаємо константи: $(10 - 4 - 6 = 0)$
Складаємо коефіцієнти при (α): $(-24\alpha - 12\alpha - 36\alpha = -72\alpha)$
Складаємо при (α^2): $(144\alpha^2 + 72\alpha^2 = 216\alpha^2)$

Отже: $f(\alpha) = 216\alpha^2 - 72\alpha$

4. Мінімізуємо по (α):

$$f'(\alpha) = 432\alpha - 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{72}{432} = \frac{1}{6} \approx 0.166667$$

5. Нова точка:

$x_1 = -1 - 6 \cdot \frac{1}{6} = -2$ $x_2 = -2 + 6 \cdot \frac{1}{6} = -1$ $X_1 = (-2, -1)$ Градієнт у (X_1): $g_1 = (4(-2) - 2(-1) + 6,\ 4(-1) - 2(-2)) = (-8 + 2 + 6,\ -4 + 4) = (0,\ 0)$

Норма градієнта = 0 < (ε) → алгоритм завершено.

Точка $(X_1 = (-2, -1))$ – мінімум (оскільки градієнт нульовий, і Гессе $(H = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix})$ додатно визначена).

Відповідь для методу Ейлера: $\boxed{(8.64,\ 4.4)}$ Це стаціонарна точка локального мінімуму для першої функції.

Відповідь для методу найшвидшого спуску: $\boxed{(-2,\ -1)}$ Це точка мінімуму другої функції, знайдена за одну ітерацію з $(\varepsilon = 0.1)$.