

Практична робота №2. Симплексний метод розв'язання загальної задачі лінійного програмування

2025.12.08, м. Кременьчук

Створив: Огоновський О.Є.

Мета: набуття практичних навичок розв'язання задач лінійного програмування із застосуванням симплекс-методу.

1. Запис умови математично

Позначимо:

(x_1) — кількість дешифраторів (DC)

(x_2) — кількість мультиплексорів (MUX)

(x_3) — кількість шифраторів (Coder)

Обмеження за кількістю мікросхем кожного типу:

У таблиці в стовпцях DC, MUX, Coder вказано, скільки елементів **цього типу мікросхеми** потрібно для побудови одного вузла.

Отже обмеження будуться за **кількістю елементів**, а не за кількістю ІМС.

Кількість елементів K1: наявно $(2 \cdot 3 = 6)$ елементів.

Витрати елементів K1 на одиницю продукції: DC — 2, MUX — 3, Coder — 1.

Рівняння по K1:

$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 6$$

Для K2:

Наявно: $(3 \cdot 6 = 18)$ елементів.

Витрати на 1 вузол: DC — 4, MUX — 5, Coder — 5.

Рівняння по K2:

$$4x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 18$$

Для K3:

Наявно: $(10 \cdot 12 = 120)$ елементів.

Витрати на 1 вузол: DC — 10, MUX — 8, Coder — 8.

Рівняння по КЗ:

$$10x_1 + 8x_2 + 8x_3 \leq 120$$

Цільова функція (прибуток):

$$Z = 40x_1 + 45x_2 + 40x_3 \rightarrow \max$$

Усі ($x_i \geq 0$), спочатку розв'яжемо без цілочисловості.

2. Приведення до канонічної форми

Додамо змінні ($s_1, s_2, s_3 \geq 0$):

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + s_2 = 18 \\ 10x_1 + 8x_2 + 8x_3 + s_3 = 120 \\ Z - 40x_1 - 45x_2 - 40x_3 = 0 \end{cases}$$

3. Початкова симплекс-таблиця

Базис: (s_1, s_2, s_3)

Базис	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(s_1)	(s_2)	(s_3)	Розв'язок
(s_1)	2	3	1	1	0	0	6
(s_2)	4	5	5	0	1	0	18
(s_3)	10	8	8	0	0	1	120
(Z)	-40	-45	-40	0	0	0	0

4. Вибір розв'язувального стовпця

Найбільший за модулем від'ємний коефіцієнт у (Z)-рядку: (-45) у стовпці (x_2).

Вибір розв'язувального рядка:

Для (s_1): ($6/3 = 2$)

Для (s_2): ($18/5 = 3.6$)

Для (s_3) : $(120/8 = 15)$

Мінімум $(2) \rightarrow (s_1)$ виходить з базису. Розв'язувальний елемент: (3) (на перетині (s_1) та (x_2)).

5. Перша ітерація

Ділимо рядок (s_1) на 3:

Новий рядок (x_2) :

$$\left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 2\right]$$

Перетворюємо (s_2) : $(s_2 - 5 \cdot (x_2 \text{ рядок}))$:

$$4 - 5 \cdot \frac{2}{3} = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

$$5 - 5 \cdot 1 = 0$$

$$5 - 5 \cdot \frac{1}{3} = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$0 - 5 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$1 - 5 \cdot 0 = 1$$

$$0 - 5 \cdot 0 = 0$$

$$18 - 5 \cdot 2 = 8$$

Рядок (s_2) :

$$\left[\frac{2}{3}, 0, \frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, 1, 0, 8\right]$$

(s_3) : $(s_3 - 8 \cdot (x_2 \text{ рядок}))$:

$$10 - 8 \cdot \frac{2}{3} = 10 - \frac{16}{3} = \frac{14}{3}$$

$$8 - 8 \cdot 1 = 0$$

$$8 - 8 \cdot \frac{1}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$0 - 8 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$0 - 8 \cdot 0 = 0$$

$$1 - 8 \cdot 0 = 1$$

$$120 - 8 \cdot 2 = 104$$

Рядок (s_3) :

$$\left[\frac{14}{3}, 0, \frac{16}{3}, -\frac{8}{3}, 0, 1, 104\right]$$

(Z) : $(Z - (-45) \cdot (x_2 \text{ рядок}))$

$$-40 + 45 \cdot \frac{2}{3} = -40 + 30 = -10$$

$$-45 + 45 \cdot 1 = 0$$

$$-40 + 45 \cdot \frac{1}{3} = -40 + 15 = -25$$

$$0 + 45 \cdot \frac{1}{3} = 15$$

$$0 + 45 \cdot 0 = 0$$

$$0 + 45 \cdot 0 = 0$$

$$0 + 45 \cdot 2 = 90$$

Нова таблиця:

Базис	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(s_1)	(s_2)	(s_3)	Розв'язок
(x_2)	$(\frac{2}{3})$	1	$(\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3})$	0	0	2
(s_2)	$(\frac{2}{3})$	0	$(\frac{10}{3})$	$(-\frac{5}{3})$	1	0	8
(s_3)	$(\frac{14}{3})$	0	$(\frac{16}{3})$	$(-\frac{8}{3})$	0	1	104
(Z)	-10	0	-25	15	0	0	90

6. Друга ітерація

Вибір розв'язувального стовпця: серед (x_1) (-10) та (x_3) (-25) найбільший за модулем від'ємний — (x_3) .

Вибір розв'язувального рядка:

$$(x_2): (2/(1/3) = 6)$$

$$(s_2): (8/(10/3) = 8 \cdot \frac{3}{10} = 2.4)$$

$$(s_3): (104/(16/3) = 104 \cdot \frac{3}{16} = 19.5)$$

Мінімум (2.4) \rightarrow (s_2) виходить.

Розв'язувальний елемент $(\frac{10}{3})$.

Ділимо (s_2) на $(\frac{10}{3})$ (тобто множимо на $(\frac{3}{10})$):

Новий рядок (x_3) :

$$[\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5}, 0, 1, -\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{10} = -\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, 0, 8 \cdot \frac{3}{10} = 2.4]$$

Тепер перетворюємо (x_2) : $(x_2 - \frac{1}{3} \cdot (x_3 \text{ рядок}))$:

$$(x_1): \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3} - \frac{1}{15} = \frac{10}{15} - \frac{1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}\right)$$

$$(x_2): \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 1\right)$$

$$(x_3): \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 1 = 0\right)$$

$$(s_1): \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

$$(s_2): \left(0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = -\frac{1}{10}\right)$$

$$(s_3): \left(0 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 0\right)$$

$$\text{Розв'язок: } \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 2.4 = 2 - 0.8 = 1.2\right)$$

$$\text{Рядок } (s_3): \left(s_3 - \frac{16}{3} \cdot (x_3 \text{ рядок})\right):$$

$$(x_1): \left(\frac{14}{3} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{14}{3} - \frac{16}{15} = \frac{70}{15} - \frac{16}{15} = \frac{54}{15} = \frac{18}{5} = 3.6\right)$$

$$(x_2): \left(0 - \frac{16}{3} \cdot 0 = 0\right)$$

$$(x_3): \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{3} \cdot 1 = 0\right)$$

$$(s_1): \left(-\frac{8}{3} - \frac{16}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0\right)$$

$$(s_2): \left(0 - \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{10} = -\frac{16}{10} = -1.6\right)$$

$$(s_3): \left(1 - \frac{16}{3} \cdot 0 = 1\right)$$

$$\text{Розв'язок: } \left(104 - \frac{16}{3} \cdot 2.4 = 104 - 12.8 = 91.2\right)$$

$$(Z): (Z + 25 \cdot (x_3 \text{ рядок})) \text{ (бо в } Z \text{ коефіцієнт } -25, \text{ треба зробити } 0):$$

$$(x_1): \left(-10 + 25 \cdot \frac{1}{5} = -10 + 5 = -5\right)$$

$$(x_2): \left(0 + 25 \cdot 0 = 0\right)$$

$$(x_3): \left(-25 + 25 \cdot 1 = 0\right)$$

$$(s_1): \left(15 + 25 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 15 - 12.5 = 2.5\right)$$

$$(s_2): \left(0 + 25 \cdot \frac{3}{10} = 7.5\right)$$

$$(s_3): (0)$$

$$\text{Розв'язок: } (90 + 25 \cdot 2.4 = 90 + 60 = 150)$$

Нова таблиця:

Базис	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(s_1)	(s_2)	(s_3)	Розв'язок
(x_2)	0.6	1	0	0.5	-0.1	0	1.2
(x_3)	0.2	0	1	-0.5	0.3	0	2.4
(s_3)	3.6	0	0	0	-1.6	1	91.2
(Z)	-5	0	0	2.5	7.5	0	150

7. Третя ітерація

Вибір розв'язувального стовпця: є від'ємний тільки в (x_1) (-5).

Вибір розв'язувального рядка:

$$(x_2): (1.2/0.6 = 2)$$

$$(x_3): (2.4/0.2 = 12)$$

$$(s_3): (91.2/3.6 = 25.33)$$

Мінімум $(2) \rightarrow (x_2)$ виходить. Розв'язувальний елемент (0.6) .

Ділимо (x_2) на 0.6:

$$(x_1): (0.6/0.6 = 1)$$

$$(x_2): (1/0.6 = 5/3)$$

$$(x_3): (0/0.6 = 0)$$

$$(s_1): (0.5/0.6 = 5/6)$$

$$(s_2): (-0.1/0.6 = -1/6)$$

$$(s_3): (0)$$

$$\text{Розв'язок: } (1.2/0.6 = 2)$$

Новий рядок (x_1) :

$$[1, 5/3, 0, 5/6, -1/6, 0, 2]$$

Перетворюємо $(x_3) : (x_3 - 0.2 \cdot (x_1 \text{ рядок}))$:

$$(x_1): (0.2 - 0.2 \cdot 1 = 0)$$

$$(x_2): (0 - 0.2 \cdot (5/3) = -1/3)$$

$$(x_3): (1 - 0.2 \cdot 0 = 1)$$

$$(s_1): (-0.5 - 0.2 \cdot (5/6) = -0.5 - 1/6 = -2/3)$$

$$(s_2): (0.3 - 0.2 \cdot (-1/6) = 0.3 + 1/30 = 1/3 + 1/30 = 11/30)? \text{ Краще в десяткових:}$$

$$(0.3 + 0.03333 = 0.33333) \text{ (тобто } (1/3))$$

$$(s_3): (0)$$

$$\text{Розв'язок: } (2.4 - 0.2 \cdot 2 = 2.0)$$

Рядок $(s_3): (s_3 - 3.6 \cdot (x_1 \text{ рядок}))$:

$$(x_1): (3.6 - 3.6 \cdot 1 = 0)$$

$$(x_2): (0 - 3.6 \cdot (5/3) = -6)$$

$$(x_3): (0)$$

$$(s_1): (0 - 3.6 \cdot (5/6) = -3)$$

$$(s_2): (-1.6 - 3.6 \cdot (-1/6) = -1.6 + 0.6 = -1)$$

$$(s_3): (1)$$

$$\text{Розв'язок: } (91.2 - 3.6 \cdot 2 = 91.2 - 7.2 = 84)$$

$$(Z): (Z + 5 \cdot (x_1 \text{ рядок})):$$

$$(x_1): (-5 + 5 \cdot 1 = 0)$$

$$(x_2): (0 + 5 \cdot (5/3) = 25/3 \approx 8.333)$$

$$(x_3): (0)$$

$$(s_1): (2.5 + 5 \cdot (5/6) = 2.5 + 25/6 \approx 2.5 + 4.1667 = 6.6667)$$

$$(s_2): (7.5 + 5 \cdot (-1/6) = 7.5 - 5/6 \approx 7.5 - 0.8333 = 6.6667)$$

$$(s_3): (0)$$

$$\text{Розв'язок: } (150 + 5 \cdot 2 = 160)$$

Фінальна таблиця:

Базис	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(s_1)	(s_2)	(s_3)	Розв'язок
(x_1)	1	$(5/3)$	0	$(5/6)$	$(-1/6)$	0	2
(x_3)	0	$(-1/3)$	1	$(-2/3)$	$(1/3)$	0	2
(s_3)	0	(-6)	0	(-3)	(-1)	1	84
(Z)	0	$(25/3 \approx 8.333)$	0	$(20/3 \approx 6.667)$	$(20/3 \approx 6.667)$	0	160

У (Z) -рядку всі коефіцієнти при змінних $(x_j \geq 0) \rightarrow$ оптимум.

8. Розв'язок

$$(x_1 = 2) \text{ (DC)}$$

$$(x_3 = 2) \text{ (Coder)}$$

$$(x_2 = 0) \text{ (MUX)}$$

$$(s_3 = 84) \text{ (залишок елементів K3)}$$

$$(s_1 = s_2 = 0) \text{ (обмеження K1 та K2 використані повністю)}$$

Максимальна вартість:

$$Z_{\max} = 40 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 45 \cdot 0 = 160$$

Відповідь:

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 2, Z_{\max} = 160$$

Виробляти 2 дешифратори та 2 шифратори, мультиплексорів не виробляти.