Практична робота №1. Лінійне програмування

2025.12.08,м.Кременьчук	Створив: Огоновський О.Є.

Мета: Засвоєння графічного методу розв’язку задачі лінійного програмування.

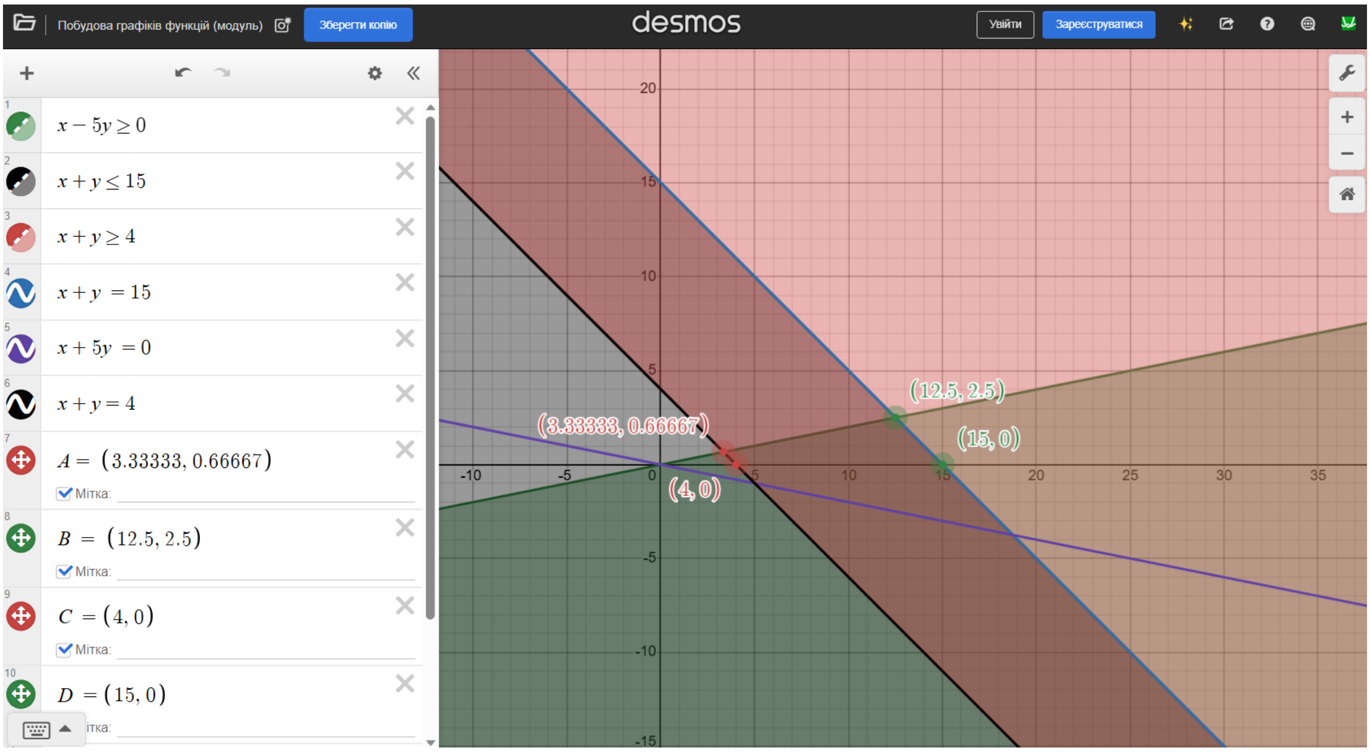
---

1. Обмеження та їх геометричний опис

Маємо систему:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \geq 0 & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 15 & (2) \\ x_1 + x_2 \geq 4 & (3) \\ x_1 \geq 0 & (4) \\ x_2 \geq 0 & (5) \end{cases}$$

1.1. Окремо намалюємо кожну пряму та півплощину:



2. Перетин усіх обмежень

Система (1)+(2)+(3)+(4)+(5):

Візьмемо $(x_2 \leq x_1/5)$ і $(4 \leq x_1 + x_2 \leq 15)$, $(x_1, x_2 \geq 0)$.

Пряма $(x_2 = x_1/5)$ і пряма $(x_1 + x_2 = 4)$ перетинаються:
$(x_1 + x_1/5 = 4)$
$((6/5)x_1 = 4)$
$(x_1 = 10/3 \approx 3.333)$, $(x_2 = (10/3)/5 = 2/3 \approx 0.667)$.
Точка $(A\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right))$.

Пряма $(x_2 = x_1/5)$ і пряма $(x_1 + x_2 = 15)$ перетинаються:
$(x_1 + x_1/5 = 15)$
$((6/5)x_1 = 15)$
$(x_1 = 75/6 = 25/2 = 12.5)$, $(x_2 = (12.5)/5 = 2.5)$.
Точка $(B\left(\frac{25}{2}, \frac{5}{2}\right))$.

Окремо перетин $(x_1 + x_2 = 4)$ з $(x_2 = 0)$ — точка $(C(4, 0))$. Але чи належить вона області $(x_1 \geq 5x_2)$

$(x_2 = 0)$ завжди задовольняє $(x_1 \geq 0)$. Але обмеження (1) дає $(x_2 \leq x_1/5)$, при $(x_2 = 0)$ це $(0 \leq x_1/5)$, тобто $(x_1 \geq 0)$ (і так є). Точка (C) належить.

Отже вершини багатокутника розв'язків:

1. $(A\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right))$ — перетин (1) і (3)
2. $(B\left(\frac{25}{2}, \frac{5}{2}\right))$ — перетин (1) і (2)
3. $(C(4, 0))$ — перетин (3) і $(x_2 = 0)$ (з умови $(x_1 \geq 5x_2)$ перевірено)
4. $(D(15, 0))$ — перетин (2) і $(x_2 = 0)$ (з умови $(x_1 \geq 5x_2)$ перевірено)

Чи замкнений багатокутник? Перевіримо ребра:
Від C до D: відрізок $(x_2 = 0, 4 \leq x_1 \leq 15)$
Від D до B: відрізок на $(x_1 + x_2 = 15)$ від $(x_2 = 0)$ до $(x_2 = 2.5)$
Від B до A: відрізок на $(x_1 - 5x_2 = 0)$ від $(x_1 = 12.5)$ до $(x_1 = 10/3)$
Від A до C: відрізок на $(x_1 + x_2 = 4)$ від $(x_1 = 10/3)$ до $(x_1 = 4)$

Бачимо, що (x_1) спадає від D до B до A, потім зростає до C і до D. Замкнений.

---

3. Цільова функція

$F = x_1 - 5x_2$

Градієнт $(\nabla F = (1, -5))$.
Лінії рівня: $(x_1 - 5x_2 = const)$ — ті ж самі, що і пряма (1), але тепер рухаємо паралельно їй.

Оскільки обмеження (1) каже $(x_1 - 5x_2 \geq 0)$, тобто $(F \geq 0)$ у всій допустимій області.

У точці A: $(x_1 - 5x_2 = \frac{10}{3} - 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} - \frac{10}{3} = 0)$.
У точці B: $(\frac{25}{2} - 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} = 0)$.

Тобто вся пряма $(x_1 - 5x_2 = 0)$ від A до B — це ребро багатокутника, і на цьому ребрі $(F = 0)$.

У точці C: $(F = 4 - 0 = 4)$.
У точці D: $(F = 15 - 0 = 15)$.

Напрям зростання (F) — це напрям вектора (1,-5). Подивимось на точку C (4,0): якщо рухатися вздовж $(x_2 = 0)$ до D, то (F) зростає від 4 до 15. Якщо рухатися від C до A вздовж $(x_1 + x_2 = 4)$, то (x_2) зростає, (x_1) спадає — $(F = x_1 - 5x_2)$ швидко спадає до 0.

Мінімум (F) на області:
Оскільки $(F \geq 0)$ за обмеженням (1), і на ребрі A–B досягається 0, то мінімум $(F = 0)$ на всьому відрізку A–B.

Максимум: найбільше (F) на вершинах C (4) і D (15). На стороні C–D лінійно зростає з (x_1).
Максимум у вершині D: $(F = 15)$.

Тобто максимум справді в точці D.

---

4. Відповідь

$$\boxed{\min F = 0,\ \max F = 15}$$

Мінімум досягається на всьому відрізку між $(A\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right))$ і $(B\left(\frac{25}{2}, \frac{5}{2}\right))$ (ребро $(x_1 - 5x_2 = 0)$ всередині багатокутника).

Максимум досягається в точці $(D(15, 0))$.