Capítulo 1

Relatividade Restrita

1.1 *Introdução

Pensar em como introduzir o texto.

1.2 *Postulados da Relatividade Restrita

A Relatividade Restrita baseia-se em dois postulados:

(I) As leis da física se aplicam a todos os referenciais inerciais

(II) A velocidade da luz é a mesma para todos os referenciais inerciais.

O primeiro postulado nós dá uma noção de referenciais preferenciais. Um referencial inercial é um em que um objeto inicialmente em repouso continuará em repouso. Por causa da gravidade, referenciais inerciais devem estar em queda livre, mas a Relatividade Restrita descreve eventos sem gravidade, de modo que, na prática, podemos descrever referenciais inerciais em termos de seu movimento relativo em velocidade constante.

O postulado **(I)** é uma generalização do princípio da *Invariância de Galileu*, de modo a abranger a eletrodinâmica, além da mecânica. No entanto, as equações de Maxwell referenciam explicitamente a velocidade da luz. De fato, ela é escrita em termos da permissividade elétrica ϵ_0 e a permeabilidade magnética μ_0 do vácuo, que são constantes que podem ser medidas experimentalmente. As equações de Maxwell prevêm que as ondas eletromagnéticas (incluindo a luz) possuem velocidade (no vácuo) de

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

No entanto, não há uma referência a qual referencial essa velocidade é observada. O experimento de Michelson-Morley, realizado em 1887, foi realizado a fim de mostrar que essa velocidade é em relação ao éter, de modo que nós poderíamos medir nosso próprio movimento em relação ao éter ao medirem-se as variações de c dependentes da direção. No entanto, o experimento mostrou que não há tais variações. Einstein então argumentou que não existe, portanto, éter. O postulado **(I)** junto com as equações de Maxwell então, nos leva ao postulado **(II)**.

Uma conclusão imediata que segue de ambos os postulados é que dois observadores podem não concordar na simultaneidade entre dois eventos – na verdade, eles discordam, no geral. Por exemplo, considere um trem com uma lâmpada no centro (Figura 1.1 (a))

(a) (b)

Figura 1.1: Feixes de luz partindo do centro de um trem ao mesmo tempo para (a) um observador que anda junto ao trem e (b) para um observador que vê o trem movendo-se com velocidade v para a direita.

Para um observador dentro do trem, independentemente do movimento deste, os dois feixes de luz chegarão às paredes ao mesmo tempo. No entanto, para um observador que observe o trem movendo-se para a direita, o feixe viajando para a equerda chegará primeiro (Figura 1.1 (b)). Para esse observador, o trem possui uma velocidade adicional v, mas a luz continua com a mesma velocidade c (ambos os feixes), segundo o postulado **(II)**, resultando em distâncias diferentes para serem percorridas até as paredes.

1.3 *Dilatação temporal e contração espacial

1.4 *Transformações de Lorentz

Suponha que um observador O' se move para a direita com velocidade v. Se x denota a distância de um objeto a um observador parado O, então a distância entre o objeto e O', medido por O, será $x - vt$. Mas, utilizando $\Delta x' = \gamma \Delta x$, temos que

$$x' = \gamma(x - vt). \tag{1.1}$$

Pelo postulado **(I)**, se trocarmos o papel de O e O', nada deve mudar, exceto o fato de que a velocidade relativa agora é $-v$. Por simetria, pode-se concluir então que

$$x = \gamma(x' + vt'). \tag{1.2}$$

Combinando ambas as equações, obtemos

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \tag{1.3}$$

e, pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, podemos invertê-la como

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right). \tag{1.4}$$

As equações (1.1) e (1.3) são as transformações de Lorentz de O para O' e, trocando-se v por $-v$, obtemos as inversas (1.2) e (1.4).

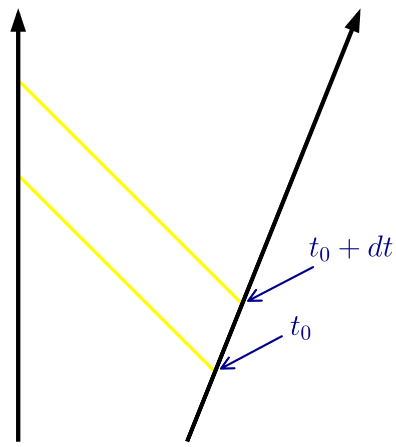

Figura 1.2: Efeito Doppler Relativístico.

Capítulo 2

*Campos vetoriais e tensoriais

2.1 Sistemas de coordenadas no espaço euclidiano

Considerando um espaço euclidiano tridimensional equipado com um sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z) e um conjunto de vetores associados $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Seja um outro sistema de coordenadas (u, v, w) não-cartesiano. Nós podemos expressar as coordenadas cartesianas em termos destas:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \tag{2.1}$$

E, à princípio, inverter as relações e escrever u, v, w em termos de x, y, z. A equação (2.1) em notação vetorial fica:

$$\mathbf{r} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k} \tag{2.2}$$

Agora, pode-se fixar uma das coordenadas, chegando em uma superfície parametrizada pelas outras duas. Por exemplo, fazendo-se $w = w_0$, temos a superfície coordenada $\mathbf{r} = x(u, v, w_0)\,\mathbf{i} + y(u, v, w_0)\,\mathbf{j} + z(u, v, w_0)\,\mathbf{k}$ parametrizada por u, v e analogamente para as outras duas.

Fixando-se duas coordenadas (e.g. $v = v_0, w = w_0$), tem-se uma curva coordenada parametrizada em u (neste caso, dada pela interseção das superfícies coordenadas $v = v_0$ e $w = w_0$).

$$\mathbf{r} = x(u, v_0, w_0)\,\mathbf{i} + y(u, v_0, w_0)\,\mathbf{j} + z(u, v_0, w_0)\,\mathbf{k} \tag{2.3}$$

As outras curvas coordenadas são geradas da mesma maneira. Derivando-se a equação (2.3) em relação ao parâmetro u, tem-se o vetor tangente à curva coordenada. Mas isso é igual a derivar parcialmente em u a equação (2.2). Assim, os vetores tangentes às curvas coordenadas que passam por $P = (u_0, v_0, w_0)$ são

$$\boxed{\mathbf{e}_\mathrm{u} \equiv \partial\mathbf{r}/\partial u, \quad \mathbf{e}_v \equiv \partial\mathbf{r}/\partial v, \quad \mathbf{e}_w \equiv \partial\mathbf{r}/\partial w} \tag{2.4}$$

Com as derivadas tomadas em (u_0, v_0, w_0).

Sejam

$$h_1 \equiv |\mathbf{e}_u|\,, \quad h_2 \equiv |\mathbf{e}_v|\,, \quad h_3 \equiv |\mathbf{e}_w|$$

Podem-se normalizar os vetores:

$$\hat{\mathbf{e}}_u = \frac{1}{h_1}\mathbf{e}_u, \quad \hat{\mathbf{e}}_v = \frac{1}{h_2}\mathbf{e}_v, \quad \hat{\mathbf{e}}_w = \frac{1}{h_3}\mathbf{e}_w$$

O conjunto $\{\hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{u}}, \hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{v}}, \hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{w}}\}$ forma uma base em P e, assim, podemos escrever qualquer vetor λ na forma

$$\boldsymbol{\lambda} = \alpha\hat{\mathbf{e}}_u + \beta\hat{\mathbf{e}}_v + \gamma\hat{\mathbf{e}}_w$$

A terna α, β, γ compõe as coordenadas nessa base.

Outro modo de se criar uma base é com a normal das superfícies coordenadas. Invertendo as relações (2.1), temos

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \tag{2.5}$$

Assim, podemos trabalhar com cada coordenada como um campo escalar e calcular seu gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \\ \nabla v &= \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k} \\ \nabla w &= \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.6}$$

A cada ponto P, esses vetores são normais às superfícies coordenadas correspondentes, que são $u = u_0, v = v_0, w = w_0$. Assim, eles formam uma base alternativa em P. Chamamo-na de base *dual*. Para diferenciá-la da obtida anteriormente, os sufixos são sobrescritos:

$$\boxed{\mathbf{e}^u \equiv \nabla u, \quad \mathbf{e}^v \equiv \nabla v, \quad \mathbf{e}^w \equiv \nabla w} \tag{2.7}$$

Dado um campo vetorial λ, é possível escrevê-lo em ambas as bases:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \lambda^u\mathbf{e}_u + \lambda^v\mathbf{e}_v + \lambda^w\mathbf{e}_w \\ \boldsymbol{\lambda} &= \lambda_u\mathbf{e}^u + \lambda_v\mathbf{e}^v + \lambda_w\mathbf{e}^w \end{aligned} \tag{2.8}$$

Capítulo 3

O espaço-tempo da relatividade geral e trajetórias de partículas

3.1 *Geodésicas

Uma geodésica num espaço Euclideano é simplesmente uma reta, que pode ser caracterizada como a menor curva que liga dois pontos. Pode-se generalizar essa definição para a geodésica de uma variedade, onde o tensor de métrica dá o comprimento de uma curva pela integral da equação **eq:ComprimentoCurvaTensorMetrica**. No entanto, essa abordagem pode trazer problemas quando podem existir curvas (ou partes delas) com comprimento nulo. Dessa forma, caracterizaremos uma reta por sua *retidão* e usaremos isso para definir geodésicas numa variedade.

Utilizando o comprimento de arco s medido de um ponto de base numa reta como parâmetro, então os vetores tangentes $\boldsymbol{\lambda} \equiv \dot{\mathbf{r}}(s)$ tem módulo constante – dado que são vetores unitários –, então, dizer que têm direção constante é o mesmo que dizer

$$d\boldsymbol{\lambda}/ds = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

Utilizando essa equação em uma base arbitraria de coordenadas u^i e sua base natural $\{\mathbf{e}_i\}$, onde $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^i \mathbf{e}_i$ e os pontos indicam derivadas em relação a s, temos

$$0 = d\boldsymbol{\lambda}/ds = d\left(\lambda^i \mathbf{e}_i\right)/ds = \dot{\lambda}^i \mathbf{e}_i + \lambda^i \dot{\mathbf{e}}_i \tag{3.2}$$

Como $\dot{\mathbf{e}}_i = \partial_j \mathbf{e}_i \dot{u}^j$ e o podemos escrever $\partial_j \mathbf{e}_i$ em termos da base $\{\mathbf{e}_i\}$, de modo que

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k \tag{3.3}$$

O que dá origem a 27 quantidades Γ^k_{ij} definidas em cada ponto no espaço. Juntando as equações (3.3) e (3.2), chegamos em

$$\left(\dot{\lambda}^i + \Gamma^i_{jk} \lambda^j \dot{u}^k\right) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

Uma vez que $\lambda^i = \dot{u}^i = du^i/ds$, chegamos que as componentes du^i/ds do vetor tangente à reta satisfazem

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \tag{3.5}$$

A fim de encontrar Γ^i_{jk} em termos de quantidades conhecidas, primeiramente notamos que

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \partial_i \mathbf{e}_j$$

de modo que $\Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k = \Gamma^k_{ji}\mathbf{e}_k$. Tomando o produto interno com $\mathbf{e}^l$, temos a propriedade simétrica:

$$\boxed{\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}} \tag{3.6}$$

Usando que $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, temos

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \partial_k \mathbf{e}_j = \Gamma^m_{ik}\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \Gamma^m_{jk}\mathbf{e}_m$$

$$\Rightarrow \partial_k g_{ij} = \Gamma^m_{ik} g_{mj} + \Gamma^m_{jk} g_{im} \tag{3.7}$$

Apenas trocando os índices, obtemos

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma^m_{ji} g_{mk} + \Gamma^m_{ki} g_{jm} \tag{3.8}$$

e

$$\partial_j g_{ki} = \Gamma^m_{kj} g_{mi} + \Gamma^m_{ij} g_{km} \tag{3.9}$$

Subtraindo-se a equação (3.9) da soma ((3.8)+(3.7)), obtemos

$$2\Gamma^m_{k_i} g_{mj} = \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}$$

que, por sua vez, ao contrair-se com $\frac{1}{2}g^{lj}$ gera

$$\boxed{\Gamma^l_{ki} = \tfrac{1}{2} g^{lj} \left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}\right)} \tag{3.10}$$

Assim, a equação (3.5) com o tensor Γ^i_{jk} dado pela equação (3.10) é a *equação geodésica* para um espaço euclidiano.

Para um parâmetro t da forma $t = As + B$, com $A \neq 0, B$ constantes, a equação geodésica possui a mesma forma indicada:

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0 \tag{3.11}$$

Os parâmetros cujas equações são dessa forma são chamados de *parâmetros afins*. Nesses casos, ds/dt é constante e, se t for pensado como o tempo, a geodésica é atravessada a velocidade constante.

A equação (3.11) é um sistema de equações diferenciais de segunda ordem cuja solução geral $u^i(t)$ gera as geodésicas do espaço euclidiano em qualquer sistemas de coordenadas que estivermos utilizando.

Utilizando esses resultados, podemos definir uma *geodésica afim* como uma variedade Rimanniana ou pseudo-Rimanniana como uma curva $x^a(u)$ dada satisfazendo

$$\boxed{\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0} \tag{3.12}$$

Onde Γ^a_{bc} é dado por $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}\right)$. Essas quantidades são chamadas de *coeficientes de conexão*. Em uma geodésica afim, o módulo do vetor tangente $\dot{x}^a$ permanece constante e, caso a geodésica não seja nula, o parâmetro afim é dado pelo comprimento de arco s por $u = As + B$ onde $A \neq 0, B$ são constantes. Em uma geodésica nula, os vetores tangentes satisfazem $g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0$ e o comprimento de arco não pode ser utilizado como parâmetro.

Escrever sobre Lagrangiana

3.2 *Transporte paralelo

Seja γ uma curva no espaço euclidiano tridimensional dado parametricamente por $u^i(t)$ e seja P_0 com parâmetro t_0 ser o ponto inicial dessa curva onde é dado um vetor $\boldsymbol{\lambda}_0$. Pode-se pensar em transportar $\boldsymbol{\lambda}_0$ ao longo de γ sem nenhuma mudança em seu comprimento ou direção, de modo a obter um vetor paralelo $\boldsymbol{\lambda}(t)$ em cada ponto da curva. O resultado é um campo vetorial paralelo ao longo de γ gerado pelo *transporte paralelo* de $\boldsymbol{\lambda}_0$. Como não há mudanças em sua direção e sentido, o vetor satisfaz a equação diferencial

$$d\boldsymbol{\lambda}/dt = \mathbf{0} \tag{3.13}$$

que é idêntica à equação (3.1). Assim, fazendo as mesmas modificações e, à partir da equação (3.4), chegamos que as componentes do vetor satisfazem

$$\dot{\lambda}^i + \Gamma^i_{jk}\lambda^j\dot{u}^k = 0 \tag{3.14}$$

em que os coeficientes de conexão são dados pela equação (3.10).

CRIAR AMBIENTE DE EXEMPLO Considere uma esfera de raio a, com coordenadas $u^1 \equiv \theta$, $u^2 \equiv \phi$, onde θ, ϕ são os ângulos polares usuais das coordenadas esféricas, com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Então,

$$[g_{AB}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

e seus únicos coeficientes de conexão não nulos são (FAZER EXERCÍCIO 2.1.5 E CITAR AQUI)

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta$$

Se transportarmos um vetor $\boldsymbol{\lambda}$ paralelamente ao longo do círculo de latitude γ dado por $\theta = \theta_0$, começando e terminando no ponto P_0 onde $\phi = 0$ (veja figura 3.1). O círculo é dado parametricamente por

$$u^A(t) = \theta_0\delta^A_1 + t\delta^A_2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

de modo que $\dot{u}^A = \delta^A_2$ e a equação de transporte paralelo (citar?) se torna $\dot{\lambda}^A + \Gamma^A_{B2}\lambda^B = 0$, que é equivalente ao par

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^1 - \sin\theta_0\cos\theta_0\lambda^2 = 0 \\ \dot{\lambda}^2 + \cot\theta_0\lambda^1 = 0 \end{cases}. \tag{3.15}$$

Considere que $\boldsymbol{\lambda}$ inicialmente seja um vetor unitário e faça um ângulo α ao leste do sul. Assim,

$$\lambda^1(0) = a^{-1}\cos\alpha, \quad \lambda^2(0) = (a\sin\theta_0)^{-1}\sin\alpha, \tag{3.16}$$

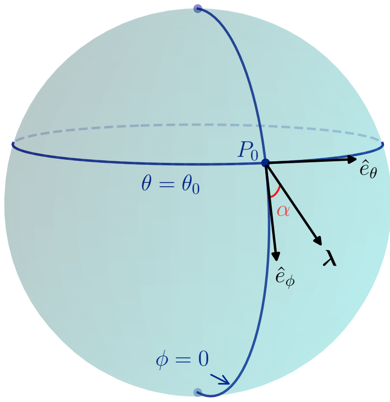

Figura 3.1: Transporte paralelo ao longo de uma circunferência de latitude γ

como pode-se perceber pelo fato de que

$$g_{AB}\lambda^A(0)\lambda^B(0) = (a^2)(a^{-1}\cos\alpha)^2 + (a^2\sin^2\theta)(a\sin\theta)^{-2}\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

e

$$g_{AB}\lambda^A(0)S^B = g_{AB}\lambda^A(0)a^{-1}\delta_1^B = g_{A1}\lambda^A(0)a^{-1} = a^2(a^{-1}\cos\alpha)a^{-1} = \cos\alpha$$

onde $S^A \equiv a^{-1}\delta_1^A$ é o vetor unitário que aponta para o sul em P_0

Assim, temos um problema de valor inicial consistindo nas equações (3.15) com condições iniciais (3.16). Substituindo a primeira equação de (3.15) na derivada da segunda, chegamos em

$$\ddot{\lambda}^2 + \cot\theta_0(\sin\theta_0\cos\theta_0\lambda^2) = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{\lambda}^2 + \omega^2\lambda^2 = 0, \quad \text{onde} \quad \omega = \cos\theta_0,$$

cuja solução é da forma $\lambda^2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Derivando e substituindo na segunda equação de (3.15), temos

$$\lambda^1 = -\tan\theta_0\dot{\lambda}^2 = -\tan\theta_0(-\omega A\sin(\omega t + \varphi)) = A\sin\theta_0\sin(\omega t + \varphi).$$

Aplicando-se as condições iniciais (3.16):

$$\begin{cases} A\sin\theta_0\sin\varphi = a^{-1}\cos\alpha \\ A\cos\varphi = (a\sin\theta_0)^{-1}\sin\alpha \end{cases}$$

chegamos nas soluções $\varphi = \pi/2 - \alpha$ e $A = (a\sin\theta_0)^{-1}$. Substituindo na solução e utilizando $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$, chegamos na solução:

$$\begin{cases} \lambda^1 = a^{-1}\cos(\alpha - \omega t) \\ \lambda^2 = (a\sin\theta_0)^{-1}\sin(\alpha - \omega t) \end{cases} \tag{3.17}$$

Ao completar-se o caminho γ, o vetor obtido por transporte paralelo possui componentes

$$\begin{cases} \lambda^1(2\pi) = a^{-1}\cos(\alpha - 2\pi w) \\ \lambda^2(2\pi) = (a\sin\theta_0)^{-1}\sin(\alpha - 2\pi\omega) \end{cases}$$

Pode-se perceber que $g_{AB}\lambda^A(2\pi)\lambda^B(2\pi) = 1$, então $\lambda^A(2\pi)$ é um vetor unitário, como deveria ser, mas sua direção muda (a não ser que $\omega = 0$, como no equador). Como

$$\begin{aligned} g_{AB}\lambda^A(0)\lambda^B(2\pi) &= \cos\alpha\cos(\alpha - 2\pi\omega) + \sin\alpha\sin(\alpha - 2\pi\omega) \\ &= \cos(\alpha - (\alpha - 2\pi\omega)) \\ &= \cos 2\pi\omega, \end{aligned}$$

temos que o vetor final faz um ângulo $2\pi\omega$ com o inicial.

3.3 *Diferenciação absoluta e covariante

Considere um campo vetorial $\lambda^a(u)$ definido ao longo de uma curva γ dado parametricamente por $x^a(u)$. As N quantidades $d\lambda^a/du$ não são componentes de um vetor. Para ver isso, utilizamos um outro sistema de coordenadas e olhamos para as correspondentes quantidades $d\lambda^{a'}/du$ para ver como elas se relacionam com as originais. Elas são dadas por

$$d\lambda^{a'}/du = d\left(X^{a'}_b\lambda^b\right)/du = X^{a'}_b\left(d\lambda^b/du\right) + X^{a'}_{bc}\left(dx^c/du\right)\lambda^b \tag{3.18}$$

Se $d\lambda^a/du$ fossem componentes de vetor, o termo $X^{a'}_{bc} \equiv \partial^2 x^{a'}/\partial x^b\partial x^c$ não existiria. O motivo da presença desse termo está na definição da derivada utilizada:

$$\frac{d\lambda^a}{du} \equiv \lim_{\delta u\to 0}\frac{\lambda^a(u+\delta u) - \lambda^a(u)}{\delta u} \tag{3.19}$$

Aqui, tiramos a diferença de componentes em *pontos diferentes* de γ. Uma vez que, em geral, as transformações de coeficientes dependem na posição, temos que $\left(X^{a'}_b\right)_u \neq \left(X^{a'}_b\right)_{u+\delta u}$, o que significa que as diferenças de componentes não são componentes de um vetor. No limite, a diferença de $\left(X^{a'}_b\right)_u$ e $\left(X^{a'}_b\right)_{u+\delta u}$ aparece como $X^{a'}_{bc}$. Para resolver esse problema, precisamos tomar a diferença entre as componentes no mesmo ponto de γ, e podemos fazer isso com a noção de transporte paralelo introduzida anteriormente.

Seja P o ponto em γ com parâmetro u e Q um ponto na vizinhança com parâmetro $u+\delta u$. Então, $\lambda^a(u+\delta u)$ é um vetor em Q, assim como o vetor $\bar\lambda^a$ obtido pelo transporte paralelo de $\lambda^a(u)$ de P até Q. Desse modo, a diferença $\lambda^a(u+\delta u) - \bar\lambda^a$ é um vetor em Q e, portanto, o quociente $\left(\lambda^a(u+\delta u) - \bar\lambda^a\right)/\delta u$ também o é. É o limite desse quociente (ao passo que $\delta u \to 0$) que chamamos da *derivada absoluta* $D\lambda^a/du$ de $\lambda^a(u)$ ao longo de γ. Mas

$$\lambda^a(u+\delta u) \approx \lambda^a(u) + \frac{d\lambda^a}{du}\delta u$$

E, da equação **eq:AproximacaoTransporteParalelo**, tiramos

$$\bar\lambda^a \approx \lambda^a(u) - \Gamma^a_{bc}\lambda^b(u)\delta x^c$$

Assim,

$$\frac{\lambda^a(u+\delta u) - \bar\lambda^a}{\delta u} \approx \frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma^a_{bc}\lambda^b(u)\frac{\delta x^c}{\delta u}$$

Quando $\delta u \to 0$, o ponto Q tende ao ponto P e o limite do quociente é

$$\boxed{\frac{D\lambda^a}{du} \equiv \frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma^a_{bc}\lambda^b \frac{dx^c}{du}} \tag{3.20}$$

Onde todas as quantidades são avaliadas no mesmo ponto P em γ. Assim, a derivada absoluta de um campo vetorial ao longo de uma curva não depende apenas de sua derivada total (que não gera um campo vetorial), mas dos coeficientes de conexão Γ^a_{bc}

mostrar que a derivada absoluta é campo vetorial (a partir da eq. 2.43)

3.4 *Coordenadas geodésicas

3.5 *O espaço-tempo da Relatividade Geral

O espaço-tempo da Relatividade Restrita é uma variedade pseudo-Riemanniana quadridimensional com um sistema global de coordenadas no qual o tensor de métrica é da forma

$$[\eta_{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esses sistemas de coordenadas são chamados de Cartesianos. Eles estão relacionados com as coordenadas mais familiares t, x, y, z por $x^0 \equiv ct, x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$, onde c é a velocidade da luz.

Um dos requerimentos do espaço-tempo da Relatividade Geral é que, localmente, ele deve ser próximo do espaço-tempo da Relatividade Restrita. Como explicado na seção 3.4, podemos construir um sistema de coordenadas em torno de qualquer ponto P no espaço-tempo da Relatividade Geral no qual $(\Gamma^\mu_{\nu\sigma})_P = 0$ e $(x^\mu)_P = (0, 0, 0, 0)$. Isso significa que $(\partial_\sigma g_{\mu\nu})_P = 0$. Desse modo, para pontos próximos de P onde as coordenadas (x^μ) são pequenas, o teorema de Taylor nos diz

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} \left(\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}\right)_P x^\alpha x^\beta \tag{3.21}$$

3.6 Leis de Newton

A primeira lei de Newton diz que "Todo corpo continua seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele". De fato, em um referencial inercial onde podem-se desconsiderar os coeficientes de conexão $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$, a equação geodésica se reduz a $d^2x^\mu/d\tau^2 = 0$. Para velocidades não relativísticas, temos que $d\tau/dt \approx 1$, o que resulta em $d^2x^i/dt^2 = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, que é a equação de movimento newtoniana de uma partícula livre de forças.

A segunda lei de Newton é comumente escrita na equação 3-vetorial:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{p}$ é o momento linear e $\mathbf{F}$ é a força aplicada. Sua generalização para a Relatividade Geral é dada pela equação **eq:SegundaLeiDeNewtonGeneralizada**.

Já a terceira lei deve ser tratada com cuidado. Ela diz que "A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.". Para a Relatividade Geral, a ideia de força gravitacional é substituída pela ideia de que um corpo massivo curva o espaço-tempo a seu redor. É importante notar que essa abordagem ignora a curvatura produzida pela partícula seguindo a geodésica, ou seja, ela é uma partícula teste e não se considera seus efeitos sobre o corpo produzindo o campo gravitacional.

3.7 *Potencial gravitacional e a geodésica

Suponha um sistema de coordenadas no qual o tensor de métrica é dado por

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.22}$$

onde $h_{\mu\nu}$ é pequeno mas não desprezível. Além disso, considere que o campo gravitacional, expresso por $h_{\mu\nu}$ é quasi-estático, isto é, $\partial_0 h_{\mu\nu} \equiv c^{-1}\partial h_{\mu\nu}/\partial t \ll \partial_i h_{\mu\nu} (i = 1, 2, 3)$.

Se, em vez de utilizarmos o tempo próprio τ como parâmetro, mas a coordenada do tempo t, definida por $x^0 \equiv ct$, então a equação de geodésica que dá a trajetória de uma partícula livre é da forma

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt} = h(t)\frac{dx^\mu}{dt} \tag{3.23}$$

Onde

$$h(t) \equiv -\frac{d^2t}{d\tau^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-2} = \frac{d^2\tau}{dt^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-1} \tag{3.24}$$

prova no caderno de exercícios, pg. 4 [trocar s por τ]

Dividindo-se por c^2, a parte espacial da equação (3.23) pode ser escrita como

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} + 2\Gamma^i_{0j}\left(\frac{1}{c}\frac{dx^j}{dt}\right) + \Gamma^i_{jk}\left(\frac{1}{c}\frac{dx^j}{dt}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{dx^k}{dt}\right) = \frac{1}{c}h(t)\left(\frac{1}{c}\frac{dx^i}{dt}\right). \tag{3.25}$$

O último termo da esquerda pode ser ignorado, por estarmos tratando velocidades baixas.

Se definirmos $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}h_{\sigma\rho}$, então temos que, para aproximações de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ e $h^{\mu\nu}$,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\left(\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\sigma}\right) \tag{3.26}$$

Demonstração. Suponha que $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}$, onde $f^{\mu\nu}$ é pequeno. Então,

$$\delta^\mu_\nu = g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} = \left(\eta^{\mu\sigma} + f^{\mu\sigma}\right)\left(\eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}\right) \approx \eta^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu} + \eta^{\mu\sigma}h_{\sigma\nu} + f^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu}$$

$$\Rightarrow f^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu} = \left(\delta^\mu_\nu - \eta^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu}\right) - \eta^{\mu\sigma}h_{\sigma\nu} = -\eta^{\mu\sigma}h_{\sigma\nu}$$

Contraindo-se com $\eta^{\nu\rho}$, chegamos em

$$f^{\mu\rho} = -h^{\mu\rho} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Note, também, que abaixando-se o primeiro índice dos coeficientes de conexão, chegamos em $\Gamma_{\rho\nu\sigma} = g_{\rho\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g_{\rho\mu}g^{\mu\kappa}(\partial_\nu g_{\sigma\kappa} + \partial_\sigma g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\sigma}\right)$. Contraindo-se com $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, temos

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\nu\sigma} = \tfrac{1}{2}(\eta^{\mu\rho} - h^{\mu\rho})(\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\sigma}) \approx \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\left(\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\sigma}\right)$$

□

Assim, desconsiderando-se os valores $\partial_0 h_{\mu\nu}$ ao somá-los com $\partial_i h_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\Gamma^{i}_{00} &= \tfrac{1}{2}\eta^{i\rho}\left(\partial_0 h_{0\rho} + \partial_0 h_{0\rho} - \partial_\rho h_{00}\right) = \tfrac{1}{2}\eta^{i\rho}\left(\partial_0 h_{0\rho} + \partial_0 h_0 - \partial_\rho h_{00}\right)\\ &\approx -\tfrac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00} = \tfrac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Gamma^{i}_{0j} &= \tfrac{1}{2}\eta^{i\rho}\left(\partial_0 h_{j\rho} + \partial_j h_{0\rho} - \partial_\rho h_{0j}\right)\\ &\approx -\tfrac{1}{2}\delta^{ik}\left(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}\right)\end{aligned}$$

Assim, aproximamos todos os termos do lado esquerdo da equação (3.25). Analogamente, negligenciando produtos de $c^{-1}dx^i/dt$, temos que, a partir de

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

que

$$d\tau/dt \approx \left(g_{00}\left(d(ct)/dt\right)^2 c^{-2}\right)^{1/2} = (1 + h_{00})^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}h_{00}$$

Assim,

$$d^2\tau/dt^2 = \tfrac{1}{2}ch_{00,0} \Rightarrow \frac{1}{c}h(t) = \tfrac{1}{2}h_{00,0}\left(1 - \tfrac{1}{2}h_{00}\right) = \tfrac{1}{2}h_{00,0},$$

a partir da equação (3.24).

Assim, o lado direito da equação (3.25) pode ser desprezado e, então, a aproximação em primeira ordem nos dá

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} - \delta^{ik}\left(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}\right)\frac{1}{c}\frac{dx^j}{dt} = 0$$

Introduzindo a massa m da partícula e rearranjando os termos, temos

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -m\delta^{ij}\partial_j\left(\tfrac{1}{2}c^2h_{00}\right) + mc\delta^{ik}\left(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}\right)\frac{dx^j}{dt} \tag{3.27}$$

Analisando esse resultado em termos da segunda lei de Newton, o lado esquerdo da equação é a massa vezes a aceleração da partícula, então o lado direito é a "força gravitacional" atuando sobre ela. O primeiro termo é a força $-m\nabla V$ gerado pelo potencial $V \equiv \frac{1}{2}c^2h_{00}$, ao passo que o segundo termo depende da velocidade e indica um termo rotacional. Se definirmos um sistema de coordenadas em que $\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}$ é não-rotacional, temos que, para uma partícula em velocidades baixas em um sistema inercial, não-rotacional, em que vale a condição quasi-estática, vale que

$$d^2x^i/dt^2 = -\delta^{ij}\partial_j V, \tag{3.28}$$

com

$$V \equiv \tfrac{1}{2}c^2 h_{00} + V_0. \tag{3.29}$$

Essa é a equação de movimento newtoniana de uma partícula se movendo em um potencial gravitacional V dado por (3.29). Isso nos dá

$$g_{00} = 1 + 2(V - V_0)/c^2.$$

Escolhendo $V_0 = 0$ de modo que $g_{00} = 1$ quando $V = 0$, de modo a retornarmos ao caso plano, temos que

$$\boxed{g_{00} = 1 + 2V/c^2} \tag{3.30}$$

é a relação entre g_{00} e o potencial newtoniano V para essa aproximação.

3.8 Lei da gravitação universal de Newton

A solução de Schwarzschild é uma solução exata das equações de campo da Relatividade Geral e pode-se interpretá-la como representando o campo produzido por um corpo massivo. Como deduzido no capítulo 4, seu elemento de linha é

$$c^2d\tau^2 = \left(1 - 2GM/rc^2\right)c^2dt^2 - \left(1 - 2GM/rc^2\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2,$$

onde M é a massa do corpo e G a constante gravitacional. Para pequenos valores de GM/rc^2 isso se aproxima do elemento de linha do espaço-tempo plano em coordenadas esféricas, onde r é a distância radial. Se definirmos as coordenadas

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv r\sin\theta\cos\phi, \quad x^2 \equiv r\sin\theta\sin\phi, \quad x^3 \equiv r\cos\theta,$$

obtemos um elemento de linha cujo tensor de métrica tenha a forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, em que, para valores grandes de rc^2/GM, as quantidades $h_{\mu\nu}$ são pequenas e $g_{00} = 1 - 2GM/rc^2$. Isso nos dá $h_{00} = -2GM/rc^2$ e, de acordo com os resultados da seção 3.7, um potencial newtoniano $V = -GM/r$. A versão vetorial da equação (3.28) é

$$md^2\mathbf{r}/dt^2 = -m\nabla V = -GMmr^{-2}\hat{\mathbf{r}},$$

onde $\mathbf{r} \equiv (x^1, x^2, x^3)$, m é a massa da partícula de teste e $\hat{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Esse resultado corrobora com o esperado ao aplicar-se a segunda lei de Newton na lei da gravitação universal, de modo que essa lei é recuperada como uma aproximação válida para grandes valores de rc^2/GM e partículas com velocidades baixas.

3.9 *Sistema de referencial giratório

Capítulo 4

Equações de campo e curvatura

4.1 Tensor de energia-momento e dinâmica de fluidos

Tratamos, à princípio, de espaços planos, em referenciais inerciais, nesta seção. Utilizaremos 4-vetores e 3-vetores, simbolizando estes com o negrito.

$$\lambda^\mu \equiv \left(\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3\right) \equiv \left(\lambda^0, \boldsymbol{\lambda}\right)$$

Considere uma partícula, com algumas quantidades relevantes:

$m \equiv$ massa de repouso da partícula,
$t \equiv$ tempo do referencial (tempo coordenado),
$\tau \equiv$ tempo próprio da partícula,
$\gamma \equiv dt/d\tau = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$, onde v é a velocidade da partícula,
$E \equiv \gamma mc^2 \equiv$ energia da partícula,
$u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau \equiv$ 4-velocidade da partícula
$v^\mu \equiv dx^\mu/dt \equiv u^\mu/\gamma \equiv$ velocidade da partícula
$p^\mu \equiv mu^\mu \equiv 4$-momento da partícula.

Assim, na notação definida, $v^\mu \equiv (c, \mathbf{v})$, onde $\mathbf{v}$ é a 3-velocidade da partícula, de modo que o v que aparece na fórmula de γ é $|\mathbf{v}|$.

Uma partícula estacionária situada em um ponto cujo vetor posição é $\mathbf{x}_0$ possui 4-velocidade

$$u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau = d(c\tau, \mathbf{x}_0)/d\tau = (c, \mathbf{0})$$

e momento

$$p^\mu = (c, \mathbf{0}).$$

A zero-ésima componente de p^μ é, neste caso, a *energia de repouso* a menos de um fator c. Para uma partícula em movimento, temos

$$p^\mu \equiv mu^\mu = \gamma m v^\mu = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p}). \tag{4.1}$$

Vamos, agora, tratar de uma distribuição contínua de matéria. Por simplicidade, trabalharemos com um fluido perfeito, que é caracterizado por dois campos escalares, sua densidade ρ e sua pressão p; e por um campo vetorial, sua 4-velocidade u^μ.

A fim de que ρ seja um campo escalar, deve-se defini-lo de modo que seja a *densidade própria*, isto é, a massa de repouso por unidade de volume de repouso. Aqui, no lugar do 4-momento da partícula $p^\mu \equiv mu^\mu$, temos a 4-densidade de momento ρu^μ.

Procura-se, então, um tensor de que, de alguma maneira, represente a energia do fluido e que, ao ser levado a um espaço-tempo curvo, possa agir como a origem do campo gravitacional. Na Relatividade Geral, perde-se a distinção de massa e energia, então toda forma de energia deveria produzir um campo gravitacional. Iremos simplesmente escrevê-lo e, então, interoretar seu significado físico. Ele é o chamado tensor de energia-momento e é definido como

$$T^{\mu\nu} \equiv \left(\rho + p/c^2\right) u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu}. \tag{4.2}$$

Pode-se notar que $T^{\mu\nu}$ é simétrico e depende dos campos vetoriais e escalares ρ, p e u^μ que caracterizam o fluido. Além disso, temos que

$$T^{\mu\nu} u_\nu = c^2 \left(\rho + p/c^2\right) u^\mu - p u^\mu = c^2 \rho u^\mu,$$

de modo que $T^{\mu\nu} u_\nu$ é, a menos de um fator c^2, a 4-densidade de momento do fluido. Finalmente, colocando sua divergência $T^{\mu\nu}_{,\mu}$ como zero nos dá duas equações importantes: a equação da continuidade e a equação de movimento.

Fazendo a divergencia $T^{\mu\nu}_{,\mu}$ igual a zero nos diferenciá

$$\left(\rho u^\mu\right)_{,\mu} u^\nu + \rho u^\mu u^\nu_{,\mu} + \left(p/c^2\right) u^\mu_{,\mu} u^\nu + \left(p/c^2\right) u^\mu u^\nu_{,\mu} + c^{-2} p_{,\mu} u^\mu u^\nu - p_{,\mu}\eta^{\mu\nu} = 0. \tag{4.3}$$

Notando que a 4-velocidade u^ν satisfaz $u^\nu u_\nu = c^2$, temos

$$u^\nu u_\nu = g_{\nu\sigma} u^\nu u^\sigma = c^2$$

e, diferenciando (notando que $g_{\nu\sigma;\mu} = 0$), chegamos em

$$g_{\nu\sigma}\left(u^\nu_{;\mu} u^\sigma + u^\nu u^\sigma_{;\mu}\right) = 0 \Rightarrow g_{\nu\sigma} u^\nu_{,\mu} u^\sigma + g_{\sigma\nu} u^\sigma_{,\mu} u^\nu = 2 u^\nu_{,\mu} u_\nu = 0$$

Assim, temos que $u^\nu_{,\mu} u_\nu = 0$. Contraindo, então, a equação (4.3) com u_ν e dividindo por c^2 nos dá:

$$\boxed{\left(\rho u^\mu\right)_{,\mu} + \left(p/c^2\right) u^\mu_{,\mu} = 0.} \tag{4.4}$$

Colocando esse resultado na equação (4.3), temos que ela simplifica para

$$\boxed{\left(\rho + p/c^2\right) u^\nu_{,\mu} u^\mu = \left(\eta^{\mu\nu} - c^{-2} u^\mu u^\nu\right) p_{,\mu}.} \tag{4.5}$$

Vamos mostrar, agora, que a equação (4.4) e (4.5), para fluidos em baixas velocidades e baixas pressões, reduzem para as equações clássicas de continuidade e de movimento de um fluido perfeito. Velocidades baixas implica que $\gamma = 1$ e baixas pressões significa que $p/c^2 \ll \rho$. Assim, a equação (4.4) reduz para

$$\left(\rho v^\mu\right)_{,\mu} = 0,$$

o que dá

$$(\rho c)_{,0} + \left(\rho v^i\right)_{,i} = 0$$

e, em notação 3-vetorial isso é

$$\boxed{\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,} \tag{4.6}$$

que é a equação da continuidade clássica **(citar referência)**.

Já a equação (4.5), nessa aproximação, reduz-se a

$$\rho v^{\nu}_{,\mu} v^{\mu} = \left(\eta^{\mu\nu} - c^{-2} v^{\mu} v^{\nu}\right) p_{,\mu}$$

e, para baixas velocidades, temos que

$$\left[\eta^{\mu\nu} - c^{-2} v^{\mu} v^{\nu}\right] \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

de modo que as zero-ésimas componentes de ambos os lados da equação são zero. As outras componentes podem ser escritas como

$$\rho v^i, \mu^{\mu} = \rho \left[\partial v^i / \partial t + v^i_{,j} v^j\right] = -\delta^{ji} p_{,j}.$$

Em notação 3-vetorial, essa ultima igualdade é escrita como

$$\boxed{\rho(\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p} \tag{4.7}$$

que é a equação de movimento de Euler clássica para um fluido perfeito **(citar referência)**. (pág. 100)

4.2 *Tensor de curvatura

Por questão de generalidade, esta seção tratará de variedades N-dimensionais, de modo que se utilizarão sufixos $a, b, \ldots$, os quais vão de 1 a N, em vez de $\mu, \nu, \ldots$ que vão de 0 a 3.

Vamos primeiramente estudar de perto uma propriedade da diferenciação covariante que difere da diferenciação parcial – a ordem em que são feitas as operações importa, e mudar a ordem (em geral) muda o resultado.

A derivada covariante de um campo vetorial covariante λ_a é

$$\lambda_{a;b} \equiv \partial_b \lambda_a - \Gamma^d_{ab} \lambda_d,$$

Uma segunda diferenciação nos dá

$$\begin{aligned} \lambda_{a;bc} &= \partial_c \left(\lambda_{a;b}\right) - \Gamma^e_{ac} \lambda_{e;b} - \Gamma^e_{bc} \lambda_{a;e} \\ &= \partial_c \partial_b \lambda_a - \left(\partial_c \Gamma^d_{ab}\right) \lambda_d - \Gamma^d_{ab} \partial_c \lambda_d - \Gamma^e_{ac} \left(\partial_b \lambda_e - \Gamma^d_{eb} \lambda_d\right) - \Gamma^e_{bc} \left(\partial_e \lambda_a - \Gamma^d_{ae} \lambda_d\right). \end{aligned}$$

Intercalando b e c e, então, subtraindo as expressões nos dá

$$\lambda_{a;bc} - \lambda_{a;cb} = R^d_{abc} \lambda_d, \tag{4.8}$$

onde

$$\boxed{R^d_{abc} \equiv \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_c \Gamma^d_{ab} + \Gamma^e_{ac} \Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{ab} \Gamma^d_{ec}.} \tag{4.9}$$

Como o lado esquerdo da equação (4.8) é um tensor para vetores λ_a arbitrários, a contração de R^d_{abc} com λ_d também é um tensor e, como R^d_{abc} não depende de λ_a, o Teorema do Quociente leva-nos a concluir que R^d_{abc} é um tensor do tipo $(1, 3)$. Denomina-se tensor de curvatura (ou tensor de Riemann).

Então, a condição necessária e suficiente para que a ordem em que a diferenciação covariante de um tensor $(0, 1)$ qualquer pode ser trocada é que $R^a_{bcd} = 0$.

Fazer exercício 3.2.1 e afirmar que é válido para qualquer campo

No espaço-tempo plano da Relatividade Especial, sabemos que existem referenciais em que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e que, nesses sistemas coordenados, $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = 0$ e, então, o tensor de curvatura é identicamente nulo. Problema 3.1 como exemplo

Podemos, agora, formalizar a definição de planicidade. Uma variedade (ou uma região de uma variedade) é *plana* se, em todos os seus pontos, $R^a_{bcd} = 0$; de outro modo, ela é *curvada*.

A princípio, o tensor R^a_{bcd} possui N^4 componentes. No entanto, ele possui muitas simetrias e suas componentes satisfazem uma identidade importante, de modo que esse número abaixa para $N^2(N^2-1)/12$ componentes independentes. A identidade é a seguinte relação:

$$R^a_{bcd} + R^a_{cdb} + R^a_{dbc} = 0. \tag{4.10}$$

Chama-se *identidade cíclica*. As simetrias desse tensor são mais facilmente expressas em termos do tensor associado do tipo $(0, 4)$ MOSTRAR RELAÇÃO CICLICA 3.14

$$R_{abcd} \equiv g_{ae} R^e_{bcd}.$$

A partir das equações 2.33 2.35 e 2.36 chegamos em

$$R_{abcd} \equiv \tfrac{1}{2}\left(\partial_d\partial_a g_{bc} - \partial_d\partial_b g_{ac} + \partial_c\partial_b g_{ad} - \partial_c\partial_a g_{bd}\right) - g^{ef}\left(\Gamma_{eac}\Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead}\Gamma_{fbc}\right) \tag{4.11}$$

A partir disso, apenas é necessário checarem-se as seguitnes propriedades:

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \tag{4.12}$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \tag{4.13}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \tag{4.14}$$

Segue de ((4.12)) que

$$R^a_{acd} = 0.$$

Demonstração. Provar relações 3.16-3.17 □

4.3 *Curvatura e transporte paralelo

Discutiu-se na Seção 3.2 que o transporte paralelo em uma variedade curvada dependia do caminho, mostrando especificamente que esse era o caso para uma esfera. No entanto, nós agora formalizamos o conceito de curvatura em termos do tensor de Riemann. Nesta seção, o intuito é deixar clara a conexão entre esse o transporte paralelo e o tensor de curvatura. Mais especificamente, mostraremos como a mudança $\Delta\lambda^a$ que resulta do transporte paralelo de um vetor λ^a ao longo de uma pequena curva fechada ao retor de um ponto P se relaciona com o tensor de curvatora em P.

Suponha, por exemplo, que λ^a é transportado paralelamente ao longo de uma curva γ de um ponto inicial O em que suas componentes são λ^a_0. Se γ é parametrizado por t, então λ^a satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\lambda^a}{dt} = -\Gamma^a_{bc}\lambda^b \frac{dx^c}{dt}, \tag{4.15}$$

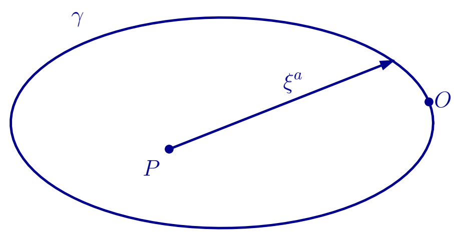

Figura 4.1: Uma curva pequena ao redor de P.

de onde podemos chegar que λ satisfaz a equação integral

$$\lambda^a = \lambda_0^a - \int \Gamma^a_{bc} \lambda^b dx^c, \tag{4.16}$$

onde a integral é tomada ao longo de γ do ponto inicial O. Assim, podemos calcular a mudança $\Delta\lambda^a$ à medida que λ é transportado ao longo de uma curva pequena próxima a P. Se P possui coordenadas x_P^a, então os pontos na curva possuirão coordenadas x^a dadas por

$$x^a = x_P^a + \xi^a$$

onde os ξ^a são pequenos. As diferenças entre coordenadas ξ^a podem ser pensadas como um vetor partindo de P para um ponto qualquer de γ. (veja a Figura 4.1). Como os x_P^a são constantes, a equação (4.16) pode ser escrita como

$$\lambda^a = \lambda_0^a - \int \Gamma^a_{bc} \lambda^b d\xi^c. \tag{4.17}$$

Apesar de termos chegado em uma relação entre λ^a e λ_0^a, nós não podemos calculá-la de uma maneira direita, uma vez que o vetor transportado também aparece na integral à direita. No entanto, podemos utilizar essa relação para conseguir aproximações cada vez melhores que são válidas quando λ^a não muda muito de seu valor inicial λ_0^a, que será o caso para nossa curva pequena próxima de P.

Como uma primeira aproximação, podemos utilizar $\lambda^b = \lambda_0^b$ na integral ao lado direito e, então, podemos utilizar o resultado como uma aproximação melhor.

$$\begin{aligned} \lambda^a &= \lambda_0^a - \int \Gamma^a_{bc} \lambda_0^a d\xi^c \\ &= \lambda_0^a - \lambda_0^b \int \Gamma^a_{bc} d\xi^c. \end{aligned}$$

Utilizando esse resultado ao lado direito, podemos chegar em uma aproximação ainda melhor:

$$\begin{aligned} \lambda^a &= \lambda_0^a - \int \Gamma^a_{bc} \left(\lambda_0^b - \lambda_0^d \int \Gamma^b_{de} d\xi^e \right) d\xi^c \\ &= \lambda_0^a - \lambda_0^b \int \Gamma^a_{bc} d\xi^c + \lambda_0^d \int \Gamma^a_{bc} \left(\int \Gamma^b_{de} d\xi^e \right) d\xi^c. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Esse processo pode ser repetido indefinidamente, mas a aproximação dada por (4.18) é o suficiente para o nosso propósito, o qual envolve utilizar aproximações de segunda ordem em ξ^a..

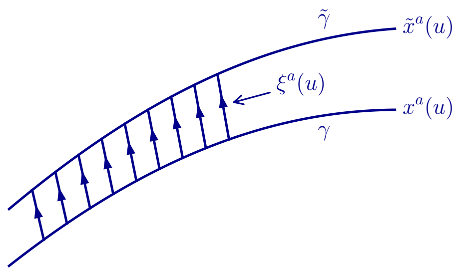

Figura 4.2: Geodesic deviation.

4.4 *Desvio geodésico

4.5 *Equações de campo de Einstein

4.6 *Equações de Einstein e de Poisson

4.7 *A solução de Schwarzschild

As equações de campo discutidas aqui são extremamentes difíceis de serem resolvidas, visto que possuem um alto grau de não-linearidade. Assim, para encontrar soluções, é preciso simplificar o problema, isto é, buscar situações de alta simetria.

A primeira solução das equações de campo foi uma solução especial e foi obtida por K. Schwarzschild em 1916. O que foi procurado foi o campo tensorial de métrica representando um campo gravitacional estático e de simetria esférica situado no espaço-tempo vazio em torno de um objeto esférico massivo, tal como uma estrela. Suas suposições para o problema foram: (comentar sobre a condição (a) ser redundante?)

(a) o campo é estático,

(b) o campo possui simetria esférica,

(c) o espaço-tempo está vazio,

(d) o espaço-tempo é assintoticamente plano.

Também assumiu-se que o espaço-tempo poderia ser descrito por um sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ), onde t é uma coordenada do tipo tempo»»¿,

Então, procurou-se um elemento de linha da forma

$$c^2 d\tau^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \tag{4.19}$$

onde $A(r)$ e $B(r)$ são funções deseconhecidas de r a serem obtidas ao resolver as equações.

O fato que nenhum dos termos depende de t reflete a suposição ((a)), e o fato que as superfícies dadas por r, t constantes têm elementos de linha dados por

$$ds^2 = r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{4.20}$$

mostra que possuem a geometria de esferas (Exercício 1.6.2) e isso indica sua suposição ((b)). A suposição ((c)) significa que $A(r), B(r)$ devem ser encontrados utilizando as equações de campo do espaço-tempo vazio $R_{\mu\nu} = 0$, ao passo que a suposição ((d)) nos dá as condições de contorno em A, B:

$$A(r) \to c^2 \quad \text{e} \quad B(r) \to 1 \text{ quando } r \to \infty \tag{4.21}$$

r não é a distância radial???

Vamos agora extrair a solução de Schwarzschild das equações de campo. O intuito é utilizar o tensor de métrica $g_{\mu\nu}$ obtido pelo elemento de linhaeq:ElementoLinhaSchwarzschildPostulado como uma tentativa de solução da equação de campo para o espaço-tempo vazio. Da equação **eq:DefinicaoTensorRicci**, temos

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}$$

e do exemplo FAZER PROBLEMA 2.7, temos

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^0_{01} = A'/2A, & \Gamma^1_{00} = A'/2B, & \Gamma^1_{11} = B'/2B, \\
\Gamma^1_{22} = -r/B, & \Gamma^1_{33} = -\left(r\sin^2\theta\right)/B, & \Gamma^2_{12} = 1/r, \\
\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma^3_{13} = 1/r, & \Gamma^3_{23} = \cot\theta,
\end{array}$$

com todos os outros coeficientes de conexão nulos. Aqui fizemos a identificação das coordenadas $x^0 \equiv t, x^1 \equiv r, x^2 \equiv \theta, x^3 \equiv \phi$ e a linha significa uma diferenciação com respeito a r. FAZER AS CONTA CHATA, a partir de $R_{\mu\nu} = 0$, temos

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} = 0, \tag{4.22}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB} = 0 \tag{4.23}$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) = 0 \tag{4.24}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta = 0 \tag{4.25}$$

e $R_{\mu\nu} = 0$ sem nenhuma condição a mais para $\mu \neq \nu$