Carrera:

Ingeniería Mecatrónica

Materia:

Robótica

Reporte:

Manipulador RoRR: Jacobiano Inverso

Alumno:

Salgado Ojeda Carlos Daniel 06/634

Catedratico:

M.C. Armando Valdéz Reyes

Lugar y Fecha:

Mexicali, BC a 6 de Diciembre del 2010

Índice general

1 Jacobiano Inverso

1.1. Introducción

El jacobiano directo relaciona las velocidades de articulación con las velocidades cartesianas, para obtener las velocidades de articulación a partir de las velocidades cartesianas se invierte el jacobiano directo. Ésto es posible si la matriz tiene un determinante diferente de cero, lo que significa que el manipulador no se encuentra en una configuración singular.

1.2. Manipulador RoRR

Si la definición de jacobiano es

$$J = \frac{\delta x}{\delta \theta}$$

Entonces el jacobiano inverso es

$J^{-1} = \frac{\theta^{\cdot}}{x^{\cdot}}$ o $\theta^{\cdot} = J^{-1} x^{\cdot}$

Para el manipulador RoRR

$$J = \begin{bmatrix} -a_3 S_1 C_{23} - a_2 S_1 C_2 & -a_3 C_1 S_{23} - a_2 C_1 S_2 & -a_2 C_1 S_{23} \\ a_3 C_1 S_{23} + a_2 C_1 S_2 & a_3 S_1 C_{23} + a_2 S_1 C_2 & a_2 S_1 C_{23} \\ 0 & a_3 C_{23} + a_2 C_2 & a_3 C_{23} \end{bmatrix}$$

Su jacobiano inverso es

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2 & -a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2 & -a_2C_1S_{23} \\ a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2 & a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2 & a_2S_1C_{23} \\ 0 & a_3C_{23} + a_2C_2 & a_3C_{23} \end{bmatrix}^{-1}$$

$J^{-1} = |J|^{-1}\, adj\, J^T$

1.2.1. Determinante

Para obtener la determinante de la matriz Jacobiana, ya que es de 3 x 3, se utiliza la regla de Sarrus, que indica

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - (a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2})$$

$$\begin{vmatrix} -a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2 & -a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2 & -a_2C_1S_{23} \\ a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2 & a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2 & a_2S_1C_{23} \\ 0 & a_3C_{23} + a_2C_2 & a_3C_{23} \end{vmatrix} =$$

$= (-a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2)(a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2)(a_3C_{23}) + (-a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2)(a_2S_1C_{23})(0)$
$+(-a_2C_1S_{23})(a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2)(a_3C_{23} + a_2C_2) - ((-a_2C_1S_{23})(a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2)(0)$
$+(-a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2)(a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2)(a_3C_{23}) + (-a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2)(a_2S_1C_{23})(a_3C_{23} + a_2C_2))$

$= (-a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2)(a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2)(a_3C_{23}) + (-a_2C_1S_{23})(a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2)(a_3C_{23} + a_2C_2)$
$-((-a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2)(a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2)(a_3C_{23}) + (-a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2)(a_2S_1C_{23})(a_3C_{23} + a_2C_2))$

$= -a_3^3S_1^2C_{23}^3 - a_2a_3^2S_1^2C_2C_{23}^2 - a_2a_3^2S_1^2C_2C_{23}^2 - a_2^2a_3S_1^2C_2^2C_{23} - a_2a_3^2C_1^2C_{23}S_{23}^2 - a_2^2a_3C_1^2C_2S_{23}^2$
$-a_2^2a_3C_1^2S_2C_{23}^2 + a_2^3C_1^2C_2S_2S_{23} + a_3^3C_1^2S_{23}^2C_{23} + a_2a_3^2C_1^2S_2S_{23}C_{23} + a_2a_3^2C_1^2S_2S_{23}C_{23} + a_3a_2^2C_1^2S_2^2C_{23}$
$+a_2a_3^2S_1^2C_{23}^3 + a_2^2a_3S_1^2C_2C_{23}^2 + a_2^2a_3S_1^2C_2C_{23}^2 + a_2^3S_1^2C_2^2C_{23}$

$= -a_2^2a_3S_1^2C_2^2C_{23} - a_2^2a_3C_1^2C_2S_{23}^2 - a_2^2a_3C_1^2S_2C_{23}^2 + a_3a_2^2C_1^2S_2^2C_{23} + 2a_2^2a_3S_1^2C_2C_{23}^2 + a_3^3C_1^2S_{23}^2C_{23} - a_3^3S_1^2C_{23}^3$
$-2a_2a_3^2S_1^2C_2C_{23}^2 - a_2a_3^2C_1^2C_{23}S_{23}^2 + 2a_2a_3^2C_1^2S_2S_{23}C_{23} + a_2a_3^2S_1^2C_{23}^3 + a_2^3C_1^2C_2S_2S_{23} + a_2^3S_1^2C_2^2C_{23}$

Por lo tanto, la inversa del determinante del jacobiano es
$|J|^{-1} = [-a_2^2a_3S_1^2C_2^2C_{23} - a_2^2a_3C_1^2C_2S_{23}^2 - a_2^2a_3C_1^2S_2C_{23}^2 + a_3a_2^2C_1^2S_2^2C_{23} + 2a_2^2a_3S_1^2C_2C_{23}^2$
$+a_3^3C_1^2S_{23}^2C_{23} - a_3^3S_1^2C_{23}^3 - 2a_2a_3^2S_1^2C_2C_{23}^2 - a_2a_3^2C_1^2C_{23}S_{23}^2 + 2a_2a_3^2C_1^2S_2S_{23}C_{23}$
$+a_2a_3^2S_1^2C_{23}^3 + a_2^3C_1^2C_2S_2S_{23} + a_2^3S_1^2C_2^2C_{23}]^{-1}$

1.3. Matriz de cofactores

La inversión de una matriz jacobiana de n x n (en este caso 3 x 3) resulta bastante complicado utilizando la definición habitual, lo cual ya se comprobó sólo con el cálculo del determinante.

La matriz de los cofactores de A se llama la comatriz de A, y se nota com A o A con una tilde encima. La comatriz sirve para calcular la matriz inversa de A, cuando existe, gracias a la relación:

$(A)(comA^t) = (comA^t)(A) = |A|(I_n)$
donde I_n es la matriz identidad de orden n.

Lo que significa que

$J^{-1} = |J|^{-1} adj J^T = comJ$

Por lo que a continuación se calculó la matriz de cofactores de la matriz jacobiana de velocidad.

Para una matriz de 3 x 3

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, comA = \begin{pmatrix} A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32} & A_{23}A_{31} - A_{21}A_{32} & A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31} \\ A_{32}A_{13} - A_{33}A_{12} & A_{33}A_{11} - A_{31}A_{13} & A_{31}A_{12} - A_{32}A_{11} \\ A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} & A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23} & A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{pmatrix}$$

$comJ_{11} = (a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2)(a_3C_{23}) - (a_2S_1C_{23})(a_3C_{23} + a_2C_2)$

$$comJ_{12} = (a_2S_1C_{23})(0) - (a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2)(a_3C_{23} + a_2C_2)$$
$$comJ_{13} = (a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2)(a_3C_{23} + a_2C_2) - (a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2)(0)$$
$$comJ_{21} = (a_3C_{23} + a_2C_2)(-a_2C_1S_{23}) - (a_3C_{23})(-a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2)$$
$$comJ_{22} = (a_3C_{23})(-a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2) - (0)(-a_2C_1S_{23})$$
$$comJ_{23} = (0)(-a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2) - (a_3C_{23} + a_2C_2)(-a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2)$$
$$comJ_{31} = (-a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2)(a_2S_1C_{23}) - (-a_2C_1S_{23})(a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2)$$
$$comJ_{32} = (-a_2C_1S_{23})(a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2) - (-a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2)(a_2S_1C_{23})$$
$$comJ_{33} = (-a_3S_1C_{23} - a_2S_1C_2)(a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2) - (-a_3C_1S_{23} - a_2C_1S_2)(a_3C_1S_{23} + a_2C_1S_2)$$

$$comJ_{11} = a_3^2S_1C_{23}^2 + a_2a_3S_1C_2C_{23} - a_2a_3S_1C_{23}^2 - a_2^2S_1C_2C_{23}$$
$$comJ_{12} = -a_3^2C_1S_{23}C_{23} - a_2a_3C_1C_2S_{23} - a_2a_3C_1S_2C_{23} - a_2^2C_1C_2S_2$$
$$comJ_{13} = a_3^2C_1S_{23}C_{23} + a_2a_3C_1C_2S_{23} + a_2a_3C_1C_{23}S_2 + a_2^2C_1C_2S_2$$
$$comJ_{21} = -a_2a_3C_1S_{23}C_{23} - a_2^2C_1C_2S_{23} + a_3^2C_1C_{23}S_{23} + a_2a_3C_1C_{23}S_2$$
$$comJ_{22} = -a_3^2S_1C_{23}^2 - a_2a_3S_1C_2C_{23}$$
$$comJ_{23} = a_3^2S_1C_{23}^2 + a_2a_3S_1C_2C_{23} + a_2a_3S_1C_{23} + a_2^2S_1C_2^2$$
$$comJ_{31} = (-a_2a_3C_1S_1S_{23}C_{23} - a_2^2C_1S_1S_2C_{23}) + a_2a_3S_1C_1C_{23}S_{23} + a_2^2S_1C_2C_1S_{23}$$
$$comJ_{31} = -a_2^2C_1S_1S_2C_{23} + a_2^2S_1C_2C_1S_{23}$$
$$comJ_{32} = -a_2a_3C_1^2S_{23}^2 - a_2^2C_1^2S_2S_{23} + a_2a_3S_1^2C_{23}^2 + a_2^2S_1^2C_2C_{23}$$
$$comJ_{33} = -a_3^2S_1^2C_{23}^2 - 2a_3S_1C_{23} - a_2^2S_1^2C_2^2 + a_3^2C_1^2S_{23}^2 + 2a_2a_3C_1^2S_2S_{23} + a_2^2C_1^2S_2^2$$

1.4. Conclusiones

Para obtener las velocidades de unión a partir de las velocidades cartesianas se necesita invertir el jacobiano directo, ésto se logra mediante su matriz de cofactores ya que es un procedimiento más corto y fácil de realizar, así nos ahorramos los cálculos de la transpuesta y adjunta de nuestra matriz jacobiana.