テレンス・タオ『ルベーグ積分入門』

K.Kusano

2021 年 1 月 16 日

概 要

全単射線形より連続, という記述を書いたかと思うが渚 *nyuumon*, *Lemma*5.2

問 1 (0.0.1)**.** もし $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$が $\sum_{\alpha\in A} x_\alpha < \infty$ を満たす数 $x_\alpha \in [0,\infty]$ の集まりであれば, もし A 自身が非可算集合であっても, 高々可算個の $\alpha \in A$ を除いては $x_\alpha = 0$ であることを示せ。

証明. $M = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha < \infty$ とかき $S_n = \{\alpha \in A \mid x_\alpha \geq \frac{1}{n}\}$ とおく。すると x_αは非負なので $M \geq \sum_{\alpha\in S_n} x_\alpha > \sum_{\alpha\in S_n} \frac{1}{n} = \frac{|S_n|}{n}$ より S_nは有限集合である。よって $\{\alpha \in A \mid x_\alpha > 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ は高々可算集合である。次のように背理法から示すこともできる。もし非可算個の正の数 x_α があるなら $S_n = \{\alpha \mid x_\alpha \geq \frac{1}{n}\}$ は無限集合なので $M \geq \sum_{\alpha\in S_n} \frac{1}{n} = \infty$ となり矛盾する。 □

問 2 (0.0.2)**.** A, B を非可算でもよい集合とし, $(x_{n,m})_{n\in A, m\in B}$を A, B で添字づけられた拡大非負実数 $x_{n,m} \in [0,\infty]$ の二重無限列とする。このとき

$$\sum_{(n,m)\in A\times B} x_{n,m} = \sum_{n\in A}\sum_{m\in B} x_{n,m} = \sum_{m\in B}\sum_{n\in A} x_{n,m}$$

が成立することを示せ。($\sum_{n\in A} x_n$が有限であれば, x_nは高々可算個の n においてのみ 0 でないという前問を用いる方法が 1 つにはある。)

証明.

$$\sum_{(n,m)\in A\times B} x_{n,m} = \sup_{F\subset A\times B,\ F\ \text{は有限集合}} \sum_{(n,m)\in F} x_{n,m}$$

の定義によって, 次の等式を確かめれば十分である。U, V をそれぞれ A と B の有限部分集合とし $F := U \times V$ とおく。すると A と B は自然数全体 $\mathbb{N}$ とは限らないものの定理 0.0.2 と同様に $x_{n,m}$の非負性から

$$\sum_{(n,m)\in U\times V} x_{n,m} = \sum_{n\in U}\sum_{m\in V} x_{n,m} = \sum_{m\in V}\sum_{n\in U} x_{n,m}$$

である。 □

注 1. $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$を空でない集合 E_αからなる族とする。すると各集合から元を寄せ集めたような $x_\alpha \in E_\alpha$からなる族 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$が存在する。これに対して次の真に弱い公理を可算選択公理という。

系 1. $E_1, E_2, \ldots$を空でない集合とする。すると全ての $n = 1, 2, 3, \ldots$で $x_n \in E_n$を満たす列 $x_1, x_2, \ldots$が存在する。

定義 1 (区間, 直方体, 基本集合)**.** 区間とは, $a \leq b$ を実数として $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ という形をした $\mathbb{R}$ の部分集合のことである。区間 $I = [a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ の長さ $|I|$ とは $|I| = b - a$ で定める。$\mathbb{R}^d$の直方体とは d 個の区間 $I_1, \ldots, I_d$の直積 $B = I_1 \times \cdots \times I_d$のことである。体積は $|B| := |I_1| \times \cdots \times |I_d|$ である。基本集合とは有限個の直方体の和集合としてかける $\mathbb{R}^d$の部分集合である。

演習 1.1.1. は多少の Step が必要不可欠であるので、その準備を行う。

定義 2 (素朴な集合族)**.** X を集合とする。次の 2 つの条件を満たす X の空でない集合系$\mathcal{E}$を X の素朴な集合族と呼ぶことにする。
(i) $\varnothing \in \mathcal{E}$
(ii) $E, F \in \mathcal{E}$ なら $E \cap F \in \mathcal{E}$
(iii) $E \in \mathcal{E}$ なら E^cに対して互いに交わらない有限個の $\mathcal{E}$ の元 $I_1, \ldots, I_N$で $E^c = \sqcup_{i=1}^N I_i$を満たすものが存在する。

命題 1. X, Y を集合とする。$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ をそれぞれ X, Y の素朴な集合族とし, $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ を

$$\mathcal{E} \times \mathcal{F} = \{E \times F \mid E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F}\}$$

で定める。このとき, $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ は $X \times Y$ の素朴な集合族である。

証明. (i) $\varnothing \times \varnothing = \varnothing \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ は明らか。
(ii) $E_1, E_2 \in \mathcal{E},\ F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ とするとき $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}, F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ なので

$$(E_1 \times F_1) \cap (E_2 \times F_2) = (E_1 \cap E_2) \times (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$$

(iii) $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F}$ とするとき,

$$\begin{aligned} X \times Y = (E \cup E^c) \times (F \cup F^c) &= \{E \times (F \cup F^c)\} \cup \{E^c \times (F \cup F^c)\} \\ &= (E \times F) \cup (E \times F^c)\} \cup \{(E^c \times F) \cup (E^c \times F^c) \cdots (1) \end{aligned}$$

である。そして

$$(E \times F) \cap (E \times F^c) = E \times (F \cap F^c) = \varnothing$$
$$(E \times F) \cap (E^c \times F) = (E \cap E^c) \times F = \varnothing$$
$$(E \times F) \cap (E^c \times F) = (E \cap E^c) \times (F \cap F^c) = \varnothing \cdots (2)$$

であり (1), (2) によって

$$(E{\times}F){\cap}\{(E{\times}F^c){\cup}(E^c{\times}F){\cup}(E^c{\times}F^c)\} = \{(E{\times}F){\cap}(E{\times}F^c)\}{\cup}\{(E{\times}F){\cap}(E^c{\times}F)\}{\cup}\{(E{\times}F){\cap}(E^c{\times}F^c)\} = \varnothing$$

であって

$$(X \times Y) \backslash (E \times F) = (E \times F^c) \cup (E^c \times F) \cup (E^c \times F^c)$$

である。この表記を使って $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ が素朴な集合族であることを確かめる。E,F はそれぞれ X,Y における素朴な集合族の元なので (iii) より，有限個の非交叉の $I_i\in\mathcal{E},\ J_k\in\mathcal{F}$ があって

$$E^c=\cup_{i=1}^N I_i,\quad F^c=\cup_{j=1}^M J_j$$

とかける。このとき，

$$\begin{aligned}(X\times Y)\backslash(E\times F) &\equiv [E\times(\sqcup_{j=1}^M J_j)]\cup[(\sqcup_{i=1}^N I_i)\times F]\cup[(\sqcup_{i=1}^N I_i)\times(\sqcup_{j=1}^M J_j)] &(0.1)\\ &= \sqcup_{j=1}^M(E\times J_j)\cup\sqcup_{i=1}^N(I_i\times F)\cup[\sqcup_{i=1}^N\sqcup_{j=1}^M(I_i\times J_j)] &(0.2)\end{aligned}$$

が成り立つ。$(X\times Y)\backslash(E\times F)$ が $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ の元の有限個の和集合としてかけることを証明するため，**(??)** 右辺の集合が互いに交わらないことを示す。$i\neq i'$ なら $I_i\cap I_i'=\emptyset$ で同様に各 j に対し J_j も非交叉なので

$$\begin{aligned}(E\times J_j)\cap(E\times J_j') &= E\times(J_j\cap J_j')=\emptyset\ (j\neq j')\\ (I_i\times F)\cap(I_i'\times F) &= (I_i\cap I_i')\times F=\emptyset\ (i\neq i')\\ (E\times J_j)\cap(I_i\times F) &= (E\cap I_i)\times(J_j\cap F)=\emptyset\\ (E\times J_j)\cap(I_i\times J_j') &= (E\cap I_i)\times(J_j\cap J_j')=\emptyset\times J_j \text{ または } \emptyset\times\emptyset=\emptyset\\ (I_i\times F)\cap(I_i'\times J_j) &= \emptyset\end{aligned}$$

より，$(X\times Y)\backslash(E\times F)$ は $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ の元の有限個の合併としてかけていることが分かる。 □

補題 1. $\mathbb{R}^d$ の直方体全体と空集合がなす集合 $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}=\{\prod_{i=1}^d I_i\mid I_i \text{は区間}\ (i=1,2,...,d)\}\cup\{\emptyset\}$ は素朴な集合族である。例えば $E=[3,4)\times(2,5)\subset\mathbb{R}^2$ と $F=(3,4]\times[1,2]\subset\mathbb{R}^2$ に対して $E\cap F=(3,4)\times\emptyset=\emptyset\in\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ であり，一般的な状況においても成り立つと思われるが実際にそのことを示す。

証明. 直方体は左半開区間の直積に限定することとする。まず $d=1$ の場合について $\mathcal{E}_{\mathbb{R},\text{左半開区間}}$ は明らかに素朴な集合族である。なぜなら $(a,b],(c,d]\in\mathcal{E}_{\mathbb{R},\text{左半開区間}}$ に対して，$a<b,\ c<d$ の順序を満たす a,b,c,d の大小関係は次の 6 通り

(1) $a<b\le c<d$ のとき，$(a,b]\cap(c,d]=\emptyset=(\max\{a,c\},\min\{b,d\}]$

(2) $a\le c<b\le d$ のとき，$(a,b]\cap(c,d]=(c,b]=(\max\{a,c\},\min\{b,d\}]$

(3) $a\le c<d<b$ のとき，$(a,b]\cap(c,d]=(c,d]=(\max\{a,c\},\min\{b,d\}]$

(4) $c<a\le d<b$ のとき，$(a,b]\cap(c,d]=(a,d]=(\max\{a,c\},\min\{b,d\}]$

(5) $c<a<b\le d$ のとき，$(a,b]\cap(c,d]=(a,b]=(\max\{a,c\},\min\{b,d\}]$

(6) $c<d\le a<b$ のとき，$(a,b]\cap(c,d]=\emptyset=(\max\{a,c\},\min\{b,d\}]$

あり，どの場合も $(a,b]\cap(c,d]\in\mathcal{E}_{\mathbb{R},\text{左半開区間}}$ であり素朴な集合族の定義 (ii) を満たす。また $\mathbb{R}\backslash(a,b]=(\infty,a]\cup(b,\infty]$ より，定義 (iii) を満たすので $\mathcal{E}_{\mathbb{R},\text{左半開区間}}$ は素朴な集合族である。次に，

$$\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2,\text{左半開区間}}=\{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\}$$

に対して前命題より，これは素朴な集合族である。帰納的に $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d,\text{左半開区間}}$ は素朴な集合族である。 $\square$

問 3 (1.1.1)**.** $E, F \subset \mathbb{R}^d$ が基本集合であれば合併 $E \cup F$, 共通部分 $E \cap F$, $E \backslash F$, 対称差 $E \Delta F$ も基本集合であることを示せ。もし $x \in \mathbb{R}^d$ なら平行移動した $E + x := \{y + x \mid y \in E\}$ も基本集合であることは明らか。
これらの証明には補題 1.1.2(1)「基本集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ に対して，ある有限個の交わらない直方体が存在してそれらの和集合として E を表現できる。」ということを用いる必要があることに注意する。

証明. まず補集合 E^c がまた基本集合であることを示す。
<u>基本集合 E に対して E^c も基本集合</u>
$\mathbb{R}^d$ の直方体全体と空集合がなす集合を $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ とかく。E は基本集合なので補題 1.1.2(1) より有限個の互いに交わらない $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ の元 $I_1, ..., I_N$ で $\sqcup_{i=1}^N I_i = E$ を満たすものがある。このとき

$$E^c = \cap_{i=1}^N I_i^c$$

とかける。前補題より $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ は素朴な集合族なので, I_i^c は基本集合である。さらに補題 1.1.2(1) より各 I_i^c に対して有限個の互いに交わらない $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ の元 J_{ij} が存在して,

$$I_i^c = \sqcup_{j=1}^{M_i} J_{ij}$$

を満たす。よって

$$E^c = \cap_{i=1}^N (\sqcup_{j=1}^{M_i} J_{ij}) = \sqcup_{j_1=1}^{M_1} \cdots \sqcup_{j_N=1}^{M_N} (J_{1j_1} \cap \cdots \cap J_{Nj_N})$$

と表せる。$\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ は素朴な集合族ゆえ $J_{1j_1} \cap \cdots \cap J_{Nj_N} \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ である。
<u>$E \cup F$ は基本集合であることを示す。</u>
E, F を $\mathbb{R}^d$ での基本集合とする。まず $E \cup F = (F \backslash E) \sqcup E$ に注意。$F \backslash E$ が基本集合であること (これは問いの本文にも含まれていることである。) を示せば $E \cup F$ は互いに交わらない有限個の $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ の元の和集合としてかけているので $E \cup F$ は基本集合であることが分かる。
<u>$F \backslash E$ は基本集合</u>
F は基本集合より，ある $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ の非交叉なる有限個の元 $J_1, ..., J_M$ が存在して $F = \sqcup_{i=1}^M J_i$ である。E は基本集合なので E^c もまたそうであり，非交叉なる有限個の $I_1, ..., I_N \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ が存在して $E^c = \sqcup_{j=1}^N I_j$ である。すると

$$F \backslash E = F \cap E^c = (\sqcup_{i=1}^M I_i) \cap (\sqcup_{j=1}^N J_j) = \sqcup_{i=1}^M \sqcup_{j=1}^N (I_i \cap J_j)$$

である。$\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ は素朴な集合族なので $I_i \cap J_j \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ より，$F \backslash E$ は基本集合となる。
対称差がまた基本集合であることは $E \backslash F, E \cup F$ が基本集合であることから従う。平行移動したものについては次のようにすると良い。基本集合 E を d 次元直方体の和集合として $E = \cup_{i=1}^d B_i$ となる。$E = I_{i,1} \times \cdots \times I_{i,d}$, $I_{i,k} = [a_{ik}, b_{ik}]$ とかくと，$I_{i,k} + x = [a_{ik} + x, b_{ik} + x]$ である。$E + x$ は直方体 $(I_{i,1} + x) \times \cdots \times (I_{i,d} + x)$ の $1 \le i \le d$ についての和集合とかける。最後に $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c$ と書き直せばこれまでに示したことより $E \cap F$ も基本集合である。 $\square$

定義 3 (基本測度)**.** 基本集合 $E \subset \mathbb{R}^d$が有限個の交わらない直方体の和集合 $B_1 \cup \cdots \cup B_k$と分割されているならば $m(E) := |B_1| + \cdots + |B_k|$ で定義される量はその分割によらないことが示される。($\because$ 任意の区間 I に対して $|I| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sharp(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})$ を用いる。) この $m(E)$ を E の基本測度という。$I = [a, b]$ という区間を考え, 自然数 N に対して $x \in I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ を $x := \frac{q}{N}$とおく。すると $Na \le q \le Nb$ より $\sharp(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}) = \lfloor Nb \rfloor - \lfloor Na \rfloor + 1$ ゆえに

$$\frac{1}{N}\sharp(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}) = \frac{\lfloor Nb \rfloor - \lfloor Na \rfloor + 1}{N} = \frac{Nb - Na}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

である。よって

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sharp(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}) = |I|$$

である。区間 I が $I = (a, b]$ などの場合でも $Na < q \le Nb$ 等の変更をすればよい。

問 4 (1.1.2)**.** E を直方体に分割する方法が 2 通りあるとすると, どちらの方法に対してもより細分された共通の E の分割が存在することを示す。E が非交叉の直方体 $B_1 \cup \cdots \cup B_k$, 非交叉の $B'_1 \cup \cdots \cup B'_\ell$として分割されていたとする。このとき B_iと B'_jは共通部分をもっていて $B_i \supset B'_j$であるような場合を考える。(ただし, もし $B_i = B'_j$なら考える必要はない。目的は $B_i = B'_j$となるような細分的な分割を改良するように与えていくことである。) 表記を容易にするため $X = B_i, Y = B'_j$とかき, X に対応する (すなわち, 直積をとることで X になるような) 区間 $I_{X,1}, ..., I_{X,d}$を考え, Y についても同様に $I_{Y,1}, ..., I_{Y_k}$と表す。$I_{X,k}$と $I_{Y,k}$との共通部分を想像する。次のような区間の直積をとると, B_iの改良を与えていることになる。

$I^M_{X,k}$: 区間 $I_{X,k}$の部分集合であって, $I_{Y,k}$と交わりをもつもの
$I^L_{X,k}$: 区間 $I_{X,k}$の部分集合であって, $I_{Y,k}$より長さが小さいもの, もしくは極端には $I_{X,k}$の下端
$I^U_{X,k}$: 区間 $I_{X,k}$の部分集合であって, $I_{Y,k}$より長さが大きいもの, もしくは極端には $I_{X,k}$の上端

もし $B'_j \supset B_i$なら, 同様に B'_jの改良を与える。この改良を必要であれば何度も行うことで細分的な分割を初めの状態から共通なる分割として与えることができ, $(B_i)_i$と $(B'_j)_j$に対して $m(E) = |B_1| + \cdots + |B_k| = |B'_1| + \cdots + |B'_\ell|$ を満たすことが分かる。

問 5 (1.1.3)**.** $d \ge 1$ とする。$m' : \mathscr{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$を $\mathbb{R}^d$の基本部分集合全体からなる集合から非負実数への写像で, 非負, 有限加法的, 平行移動不変なものであるとする。このとき,
$m'(E) = cm(E)$ がすべての基本集合 E に対して成り立つような定数 $c \in \mathbb{R}^+$が存在することを示せ。特にもし $m'([0, 1)^d) = 1$ と仮定すれば, $m' = m$ である。

証明. 直方体 B に対する $m(B) \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^+$を用いて $m'(B) = cm(B)$ であることを示す。(問いは, ある非負実数 c が存在して任意の基本集合 E に対して等式が成り立つことを主張している。) 交わりをもたない直方体 $B_1, B_2 \ne \emptyset$が

$$m'(B_1) = c_1 m(B_1),\ m'(B_2) = c_2 m(B_2),\ m'(B_1 \cup B_2) = c_U m(B_1 \cup B_2)$$

を満たすとする。すると基本測度の有限加法性より

$$c_U(m(B_1) + m(B_2)) = c_1 m(B_1) + c_2 m(B_2) \Leftrightarrow (c_U - c_1)m(B_1) = (c_2 - c_U)m(B_2)$$

である。任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ について上式が成り立つのは $c_U = c_1 = c_2$ のときである。よってある $c \in \mathbb{R}^+$ があって勝手な直方体 B に対して $m'(B) = cm(B)$ である。自然数 n を固定して $[0, \frac{1}{n})^d$ を考えると, その測度は

$$m'\left([0, \frac{1}{n})^d\right) = cm\left([0, \frac{1}{n})^d\right)$$

である。$n \to \infty$ とすると $m'(\emptyset) = 0$ を得る。(これは $\emptyset$ を E の特別な場合として見ているといえる。) 補題 1.1.2 より任意の基本集合 E に対して $m'(E) = cm(E)$ である。もし m' を $m'([0, \frac{1}{n})^d) = 1$ を満たすように正規化してあって $c = 1$ のとき $m' = m$ である。 □

問 6 (1.1.4)**.** $d_1, d_2 \geq 1$ とし, $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ を基本集合とする。このとき, $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ は基本集合で, $m^{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = m^{d_1}(E_1) \times m^{d_2}(E_2)$ であることを示せ。

証明. E_1, E_2 を有限個の非交叉なる直方体の和集合 $B^1_1 \cup \cdots \cup B^1_n$, $B^2_1 \cup \cdots \cup B^2_m$ と表す。このとき,

$$E_1 \times E_2 = \cup_{i=1,\dots,n\ j=1,\dots,m} B^1_i \times B^2_j$$

である。$B^1_i = I^1_{i,1} \times \cdots \times I^1_{i,d_1} \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $B^2_j = I^2_{j,1} \times \cdots \times I^2_{j,d_2} \subset \mathbb{R}^{d_2}$ とかくと

$$B^1_i \times B^2_j = I^1_{i,1} \times \cdots \times I^1_{i,d_1} \times I^2_{j,1} \times \cdots \times I^2_{j,d_2}$$

であり, $d_1 + d_2 < \infty$ より $E_1 \times E_2$ は基本集合 $\cdots(*)$ である。また基本測度の定義より

$$m^{d_1+d_2}(B^1_i \times B^2_j) = |I^1_{i,1}| \times \cdots \times |I^1_{i,d_1}| \times |I^2_{j,1}| \times \cdots \times |I^2_{j,d_2}| = m^{d_1}(B^1_i) \times m^{d_2}(B^2_j)$$

である。前問と同様に, 基本集合の特別な場合として直方体のときの与式の成立を確かめた。そして次に基本集合 E_1, E_2 は非交叉なる直方体に分割表記されるのであるが, その直積 $E_1 \times E_2$ も $(*)$ より,

$$m^{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = \sum_{i=1,\dots,n\ j=1,\dots,m} m^{d_1}(B^1_i) \times m^{d_2}(B^2_j) = m^{d_1}(E_1) \times m^{d_2}(E_2)$$

□

定義 4 (ジョルダン測度)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$ を有界集合とする。E のジョルダン内測度 $m_{*,(J)}(E)$ を

$$m_{*,(J)}(E) := \sup_{A \subset E \text{ となる基本集合 } A} m(A)$$

で定義する。E のジョルダン外測度 $m^{*,(J)}(E)$ を

$$m^{*,(J)}(E) := \inf_{B \supset E \text{ となる基本集合 } B} m(B)$$

で定義する。$m(E) := m_{*,(J)}(E) = m^{*,(J)}(E)$ であるとき, E はジョルダン可測といい $m(E)$ を E のジョルダン測度という。

問 7. 次は同値であることを示せ。

(1) $E \subset \mathbb{R}^d$ はジョルダン可測

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $m(B \backslash A) \leq \epsilon$ となる基本集合 $A \subset E$ と $B \supset E$ が存在する。

(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対しても $m^{*,(J)}(A \Delta E) \leq \epsilon$ となるような基本集合 A が存在する。

証明. (2) $\Rightarrow$ (3) は易しい集合論に過ぎない。$A \subset E \subset B, m(B\backslash A) \leq \epsilon$を満たす基本集合$A, B$があるとする。このとき$A\Delta E \subset B\backslash A$であり，ジョルダン外測度の劣加法性から (3) を満たす。次にある基本集合A'があって$A\Delta E \subset A', m(A') \leq \epsilon$を満たすとする。$A\backslash A'$と$A \cup A'$は基本集合であり，

$$A\backslash A' \subset E \subset A \cup A'$$

が成り立つ。$(A \cup A')\backslash(A\backslash A') = A'$より (2) $\Rightarrow$ (1) (ジョルダン測度の定義より成立する。) を用いるとEはジョルダン可測である。
(1) $\Rightarrow$ (2) を示す。ジョルダン外測度の定義より任意の$\epsilon > 0$に対して

$$E \subset B,\ m(B) \leq m^{*,(J)}(E) + \frac{\epsilon}{2}$$

なる基本集合$B \subset \mathbb{R}^d$が存在する。$C_{B,n}$をBに対応する直方体とすると

$$E \subset \cup_{n=1}^{N} C_{B,n},\ \sum_{n=1}^{N} m(C_{B,n}) \leq m^{*,(J)}(E) + \frac{\epsilon}{2}$$

またジョルダン内測度の定義より任意の$\epsilon > 0$に対して

$$A \subset E,\ m_{*,(J)}(E) \leq m(A) + \frac{\epsilon}{2}$$

なる基本集合$A \subset \mathbb{R}^d$が存在する。$C_{A,n}$をAに対応する直方体とすると

$$\cup_{n=1}^{M} C_{A,n} \subset E,\ m_{*,(J)}(E) \leq \sum_{n=1}^{M} m(C_{A,n}) + \frac{\epsilon}{2}$$

である。Eはジョルダン可測なので$m^{*,(J)}(E)$と$m_{*,(J)}$は一致して

$$m(B) \leq m(E) + \frac{\epsilon}{2} \leq m(A) + \epsilon$$

が成り立つ。基本測度の性質より，$m(B) - m(A) \leq m(B) - m(A \cap B) = m(B\backslash A)$であるが上式に従って$m(B\backslash A) \leq \epsilon$である必要がある。
(3) $\Rightarrow$ (2) : 任意の正数ϵに対してある基本集合Cが存在して，$m^{*,(J)}(C\Delta E) \leq \epsilon$である。
$m^{*,(J)}(C\Delta E) \leq \epsilon < 2\epsilon$より，ある基本集合$D$があって

$$C\Delta E \subset D \text{ かつ } m(D) < 2\epsilon$$

を満たす。このとき，

$$C \cap D^c \subset E \subset C \cup D$$

であり

$$(C \cup D)\backslash(C \cap D^c) := (C \cup D) \cap (C \cap D^c)^c = (C \cup D) \cap (C^c \cup D) = D$$

なので$C \cap D^c$をAと置き，$C \cup D$をBと置き換えれば (2) の条件を満たす。 $\square$

問 8 (1.1.6)**.** $E, F \subset \mathbb{R}^d$をジョルダン可測集合とする。
(1)[ブール閉包性] $E \cup F, E \cap F, E\backslash F, E\Delta F$ はジョルダン可測である。
(2) $m(E) \geq 0$ である。
(3) もし E, F が非交叉なら, $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ である。
(4) $E \subset F$ ならば $m(E) \leq m(F)$ である。
(5) $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$ である。
(6) 任意の $x \in \mathbb{R}^d$に対して $E + x$ はジョルダン可測であり, $m(E + x) = m(E)$ である。

証明. (1) を示す為には

$$\sup_{A \subset E \cup F, A \text{ は基本集合}} m(A) = \inf_{E \cup F \subset B, B \text{ は基本集合}} m(B)$$

であることを言えば良い。E, F はジョルダン可測集合なので, 任意の$\epsilon > 0$ に対して $A_1 \subset E \subset B_1, A_2 \subset F \subset B_2$であって $m(B_1\backslash A_1) < \frac{\epsilon}{2}$, $m(B_2\backslash A_2) < \frac{\epsilon}{2}$を満たすものがある。すると

$$A_1 \cup A_2 \subset E \cup F \subset B_1 \cup B_2,\ (B_1 \cup B_2)\backslash(A_1 \cup A_2) \subseteq (B_1\backslash A_1) \cup (B_2\backslash A_2)$$

である。証明していないもののジョルダン測度の性質 (4), (5) の単調性と有限劣加法性を使って, 前問の同値性から $E \cup F$ はジョルダン可測であることが分かる。$E\Delta F = (E\backslash F) \cup (F\backslash E)$ はジョルダン可測集合 E, F に対して $F\backslash E, E \cup F$ はジョルダン可測なことより, ジョルダン可測である。
$E \cap F$ がジョルダン可測であることを示す。$A_1 \cap A_2 \subset E \cap F \subset B_1 \cap B_2$であり $B = B_1 \cap B_2$ とおく。

$$B\backslash(A_1 \cap A_2) = (B\backslash A_1) \cup (B\backslash A_2) \subset (B_1\backslash A_1) \cup (B_2\backslash A_2)$$

に対して基本測度の単調性から

$$m((B_1 \cap B_2)\backslash(A_1 \cap A_2)) \leq m(B_1\backslash A_1) + m(B_2\backslash A_2) \leq \epsilon$$

なので示せた。最後に差集合がまたジョルダン可測であることを示したい。そのためには $m_{*,(J)}(F\backslash E) = m^{*,(J)}(F\backslash E)$ を言及する。任意に直方体 (rectangle)Q $s.t.$ $E \subset F \subset Q$ であるものを取ると

$$Q\backslash(F\backslash E) = Q \cap (F \cap E^c)^c = (Q \cap F^c) \cup (Q \cap E) = (Q\backslash F) \cup E$$

である。よって基本測度の有限劣加法性より

$$m^{*,(J)}(Q\backslash(F\backslash E)) = m^{*,(J)}((Q\backslash F) \cup E) \leq m^{*,(J)}(Q\backslash F) + m^{*,(J)}(E) \tag{0.3}$$

Q の任意の部分集合 C に対して, $|Q|$ を直方体の体積として表すと

$$m^{*,(J)}(Q\backslash C) = |Q| - m_{*,(J)}(C) \tag{0.4}$$

が一般に成り立つ。(**??**) を (**??**) に対して用いると

$$|Q| - m_{*,(J)}(F\backslash E) \leq |Q| - m_{*,(J)}(F) + m^{*,(J)}(E) \Leftrightarrow m_{*,(J)}(F\backslash E) \geq m_{*,(J)}(F) - m^{*,(J)}(E) \tag{0.5}$$

である。この不等式の導出の仕方を同様にすることで

$$m^{*,(J)}(F\backslash E) \leq m^{*,(J)}(F) - m_{*,(J)}(E) \tag{0.6}$$

を得る。(**??**) と (**??**) より

$$0 \leq m^{*,(J)}(F\backslash E) - m_{*,(J)}(F\backslash E) \leq m^{*,(J)}(F) - m_{*,(J)}(F) - m_{*,(J)}(E) + m^{*,(J)}(E) = 0$$

よって, E, F が共にジョルダン可測集合であるという仮定によって, 差集合 $F\backslash E$ もまたジョルダン可測集合であることを示せた。 □

証明. 非負性は明らかである。有限加法性を認めると, それと非負性より単調性が従う。なぜならジョルダン可測な $E \subset F$ に対して

$$m(F) = m(E \sqcup F\backslash E) \overset{\text{有限加法性}}{=} m(E) + m(F\backslash E) \overset{\text{非負性}}{\geq} m(E)$$

である。有限劣加法性は, 有限加法性と単調性によって次式の

$$m(E \cup F) \leq m(E \sqcup F) = m(E) + m(F)$$

から従う。そこでジョルダン測度の有限加法性の証明を与えることにする。$1 \leq k, \ell < \infty$ とする。外測度の定義より任意の$\epsilon > 0$ に対して $E \subset B = C_{B,1} \sqcup \cdots \sqcup C_{B,k}$, $m(B) \leq m^{*,(J)}(E) + \frac{\epsilon}{2}$ を満たすように近似する基本集合 B がある。また, $F \subset B' = C_{B',1} \sqcup \cdots \sqcup C_{B',\ell}$, $m(B') \leq m^{*,(J)}(F) + \frac{\epsilon}{2}$ を満たす基本集合 F がある。すると $E \cup F \subseteq C_{B,1} \sqcup \cdots \sqcup C_{B',\ell}$ に対して

$$m^{*,(J)}(E \sqcup F) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} |C_{B,i}| + |C_{B',j}| \leq m^{*,(J)}(E) + m^{*,(J)}(F) + \epsilon$$

である。また, 内測度の定義より任意の$\epsilon > 0$ に対して $A \subseteq E$ であって $m_{*,(J)}(E) \leq m(A) + \frac{\epsilon}{2}$ を満たすものが存在し, $A' \subset E, m_{*,(J)}(F) \leq m(A') + \frac{\epsilon}{2}$ を満たすものがある。このとき

$$m_{*,(J)}(E \sqcup F) \geq m_{*,(J)}(E) + m_{*,(J)}(F) - \epsilon$$

である。$E \cup F$ はジョルダン可測集合なので外測度と内測度は一致して$\epsilon > 0$ の任意性より有限加法性が成り立つ。 □

問 9 (1.1.7(グラフの下部分はジョルダン可測)). $B \subset \mathbb{R}^d$ を閉直方体とし, $f : B \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。
(1) グラフ $\{(x, f(x) : x \in B\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ はジョルダン可測で, そのジョルダン測度は 0 であることを示せ。(ヒント : コンパクト距離空間においては連続函数は一様連続)
(2) $\{(x, t) : x \in B; 0 \leq t \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ はジョルダン可測であることを示せ。

証明. (1) f はコンパクト距離空間 B 上一様連続なので, 任意の$\epsilon > 0$ に対してある$\delta > 0$ があって $N \subseteq B$ をある開直方体として $\forall x, y \in N$ に対して

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{v(B)} \tag{0.7}$$

が成り立つ。ただし $v(B)$ は直方体 B の体積を表す。このような開直方体の族で B を被覆すれば B のコンパクト性より, 開直方体の族による B の有限部分被覆 $N_1 \cup \cdots \cup N_k$が取れる。各 $N_i \subset \mathbb{R}^d$に対して, 区間 $[a_i, b_i]$ を

$$a_i := \min f|_{N_i}(x),\ b_i := \max f|_{N_i}(x)$$

なるものとして定める。すると

$$\{(x, f(x)) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(N_i \times [a_i, b_i])$$

である。よって

$$\sum v(N_i \times [a_i, b_i]) = \sum v(N_i) \cdot v([a_i, b_i]) \underset{(??)}{<} \frac{\epsilon}{v(B)} \sum v(N_i) = \epsilon$$

である。単調性よりジョルダン測度は 0 である。
(2) より一般的に, $f, g : \mathbb{R}^d \supset B \to \mathbb{R}$ を $\forall x \in B\ f(x) \leq g(x)$ なる閉直方体 B 上の連続函数としたときに

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f(x) \leq t \leq g(x)\}$$

がジョルダン可測集合である。ここでは, $d = 1$ の場合として連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$に対する

$$A = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq t \leq f(x)\}$$

がジョルダン可測集合であることを, A 上定義された指示函数が Riemann 可積分であることより示す。また, $d \geq 2$ の場合も Riemann 積分の定義を適切に多次元拡張する (後に説明を加えたい。) ことで一般性は保証される。$M := \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ に対して $E = [a, b] \times [0, M]$ とおく。任意に$\epsilon > 0$ をとり, [?]P.227 から f は可積分であるから区間の分割 $P' = ((a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b), (x_0^* < \cdots < x_n^*))$ を,

$$S(f, P') - s(f, P') < \epsilon$$

なるものとして取れる。($\because$ 演習 1.1.22) $R_j = [x_{j-1}, x_j] \times [0, m_j], R'_j = [x_{j-1}, x_j] \times [0, M_j]$ とおく。(ただし, M_j, m_jは $[x_{j-1}, x_j]$ 上の f の上限, 下限を表す。)
P を E の部分ブロックであって, 各 R_jの合併によって $P(\subset A)$ を作り, 各 R'_jの合併によって A を被覆して交わるような P を作るものとして定める。すると

$$S(1_A, P) - s(1_A, P) \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S(f, P') - s(f, P') < \epsilon$$

より, 1_Aは Riemann 可積分なので A はジョルダン可測である。[?]P.219 − 220 命題 6.2.3 も参照せよ。上式でも有界集合 A の内外両方にまたがる小方形の面積の総和が極限的には 0 になる (任意の正数ϵで上から評価できる) ことを測度 A が定まると呼ぶのでそのことを示している。
では, 測度 A の値を求める。体積 $|R_j| = m_j(x_j - x_{j-1}), |R'_j| = M_j(x_{j-1}, x_j)$ であり $s(f)_P, S(f)_P$ をそれぞれ P に関する f の不足和, 過剰和とすると

$$s(f)_P = \sum_{j=1}^{n} |R_j| = \sqcup_{j=1}^{n} |R_j|,\ \ S(f)_P = \sum_{j=1}^{n} |R'_j| = \sqcup_{j=1}^{n} |R'_j|$$

である。f は Riemann 可積分 $\Leftrightarrow$ ダルブー積分可能 (定義 1.1.6 参照) なので

$$\sup_P |\sqcup_{j=1}^n R_j| = \int_a^b f(x)dx = \inf_P |\sqcup_{j=1}^n R'_j|$$

が成り立つ。A はジョルダン可測集合であることは示したので

$$|A| = \sup_{E\subset A, E \text{ は基本集合}} |E| = \inf_{A\subset E', E' \text{は基本集合}} |E'|$$

である。$\sqcup_{j=1}^n R_j$ と $\sqcup_{j=1}^n R'_j$ は其々 A に含まれる又 A を含む基本集合の一つなので,

$$\sup_P \sqcup_{j=1}^n |R_j| \leq \sup_{E\subset A, E \text{ は基本集合}} |E| = |A| = \inf_{A\subset E', E' \text{は基本集合}} |E'| \leq \inf_P \sqcup_{j=1}^n |R'_j|$$

である。よって

$$|A| = \int_a^b f(x)dx$$

である。$d \geq 2$ の場合は閉直方体上の Riemann 積分が $d = 1$ の場合の積分の性質を保つように拡張されることから自然に従う。 □

問 10 (1.1.8)**.** (1) A, B, C を頂点とする $\mathbb{R}^2$内の三角形 $T(A, B, C)$ はジョルダン可測であることを示せ。
(2) この三角形のジョルダン測度は $2^{-1}|(B-A)\wedge(C-A)|$ であることを示せ。ただし, $|(a, b)\wedge(c, d)| := |ad - bc|$ とする。

証明. (1) ジョルダン可測集合の和集合 $E \cup F$ がジョルダン可測であることと前問の結果より A, B, C が囲む点集合はジョルダン可測である。(2) 辺のどれかが水平である場合は, x 軸又は y 軸に関して三角形を対称移動しても測度は不変であるから特に $T(A, B, C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ya \leq xb, 0 \leq x \leq a\}$ としてもよく $m(T(A, B, C)) = m(T(a, b)) = 2^{-1}ab$ である。任意の三角形について考えるときに 3 頂点 $(0, 0), (a, b), (c, d)$ を $c \leq a$ を仮定しても一般性を失わない。次に場合分けすべきは $d > b, d \leq b$ の可能性に対してであるが, x 軸に関する対称性によって $d > b$ と仮定しても良い。すると

$$T(A, B, C) = \{(j, k) \in \mathbb{R}^2 \mid kc \leq jd,\ ka \geq jb,\ \frac{j-c}{a-c} + \frac{k-b}{d-b} \leq 1\}$$

と表せる。$T \subseteq B := (0, a) \times (0, d)$ に対して (B は三角形を囲む長方形となっている)

$$B\backslash T = \{(j, k) \in B \mid kc > jd \text{ または } ka < jb \text{ または} \frac{j-c}{a-c} + \frac{k-b}{d-b} > 1\}$$

である。$B\backslash T$ は軸と水平な辺を持つ三角形の和集合であり

$$B\backslash T = W_1 \cup W_2 \cup W_3 = \{(j, k) \in \mathbb{R}^2 \mid ka < jb, j \leq a\} \sqcup \{(j, k) \in \mathbb{R}^2 \mid kc > jd, k \leq d\} \sqcup \{(j, k) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{j-c}{a-c} + \frac{k-b}{d-b} \geq 1\}$$

である。ジョルダン測度の有限加法性と, $c \leq a$ かつ $b \leq d$ の設定より

$$\begin{aligned} m^{(J)}(B\backslash T) &= m^{(J)}(W_1) + m^{(J)}(W_2) + m^{(J)}(W_3) = m^{(J)}(T(a, b)) + m^{(J)}(T(d, c)) + m^{(J)}(T(a-c, d-b)) \\ &= 2^{-1}(ab + dc + (a-c)(d-b)) = 2^{-1}(ab + dc + ad - ab - cd + bc) = 2^{-1}(ad + bc) \end{aligned}$$

よって

$$m^{(J)}(T) = m^{(J)}(B\backslash(B\backslash T)) = m^{(J)}(B) - m^{(J)}(B\backslash T) = ad - 2^{-1}(ad + bc)$$

□

問 11. $\mathbb{R}^d$のコンパクト凸多面体はジョルダン可測であることを示せ。

証明. 閉半空間$H \subset \mathbb{R}^d$は連続関数$f : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$を用いて$H = \{(x', t) \mid x' \in \mathbb{R}^{d-1}, t \leq f(x')\}$とかけることをまず示す。

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot v \leq c\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1 v_1 + \cdots + x_d v_d \leq c\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d \leq \frac{c - x_1 v_1 + \cdots + x_{d-1} v_{d-1}}{v_d}\}$$

であり, $x' := (x_1, x_2, ..., x_{d-1})$ に対して $f : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x') := \frac{c - x_1 v_1 + \cdots + x_{d-1} v_{d-1}}{v_d}$$

で定めるとこれは連続関数で $H = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_d \leq f(x')\}$ である。次に $\mathbb{R}^d$の部分集合としての閉半空間Hと直方体Bの共通部分がジョルダン可測であることを示す。Hはある$v \in \mathbb{R}^d$と定数$c \in \mathbb{R}$を用いて$H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot v \leq c\}$とかかれる。$I_1, ..., I_d \subset \mathbb{R}$を区間として$B = I_1 \times \cdots \times I_d$とかき, $B' := I_1 \times \cdots \times I_{d-1}$とおくと$B = B' \times I_d$である。$x' := (x_1, ..., x_{d-1})$と定めると

$$x \in H \cap B \Leftrightarrow x \cdot v \leq c, x \in B' \times I_d = B' \times [a, b]$$
$$\Leftrightarrow x_d \leq f(x'), x \in B' \times I_d \Leftrightarrow x \in B',\ a \leq x_d \leq \min\{f(x'), b\}$$

なので

$$H \cap B = \{(x', x_d) \mid x' \in B',\ a \leq x_d \leq \min\{f(x'), b\}\}$$

である。ここで, $k := (0, 0, ..., -a) \in \mathbb{R}^d$ で右移動させた点集合

$$(H \cap B) + k = \{(x', x_d) \mid x' \in B',\ 0 \leq x_d \leq \min\{f(x'), b\} - a\}$$

は演習 1.1.7 のグラフの下部分のジョルダン可測性より, 可測集合である。ジョルダン測度の平行移動不変性より $m^{(J)}(H \cap B + k) = m^{(J)}(H \cap B)$ である。最後にコンパクト凸多面体Pはジョルダン可測であることを示す。$P = H_1 \cap H_2 \cdots H_n \subset \mathbb{R}^d$を有界とする。$P$は有界なのである直方体$B \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$が存在して$P = B \cap P$とかける。

$$P = B \cap P = B \cap (H_1 \cap \cdots \cap H_n) = (B \cap H_1) \cap \cdots \cap (B \cap H_n)$$

であり, 上述したことから$B \cap H_i$はジョルダン可測である。有限個の交叉はジョルダン可測性を保つのでPはジョルダン可測である。 □

問 12 (1.1.10)**.** (1)$\mathbb{R}^d$における開または閉のユークリッド球$B(x, r) := \{(y \in \mathbb{R}^d \mid |y - x| < r\}$と$\overline{B(x, r)} := \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - x| \leq r\}$はジョルダン可測であり, そのジョルダン測度は$d$のみに依存する定数$c_d > 0$を用いて$c_d r^d$とかける。
(2) 次の評価が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{2}{\sqrt{d}}\right)^d \leq c_d \leq 2^d$$

証明. ジョルダン測度の平行移動不変性より, 特に$\overline{B(0,r)} := \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y| < r\}$ のジョルダン可測性を確かめればよい。すると $f : \mathbb{R}^{d-1} \ni y' \mapsto (r^2 - y_1^2 - \cdots - y_{d-1}^2)^{1/2}$ として

$$\begin{aligned}\overline{B(0,r)} &= \{y \in \mathbb{R}^d \mid y_1^2 + \cdots + y_d^2 \leq r^2\} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y_d^2 \leq r^2 - (y_1^2 + \cdots + y_{d-1}^2)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq y_d \leq (r^2 - y_1^2 - \cdots - y_{d-1}^2)^{1/2} \sqcup \{y \in \mathbb{R}^2 \mid -(r^2 - y_1^2 - \cdots - y_{d-1}^2)^{1/2} \leq y_d < 0\} \\ &= \{(y', y_d) \mid y' \in \mathbb{R}^{d-1}, y_d \in \mathbb{R},\ 0 \leq y_d \leq f(y')\} \sqcup \{(y', y_d) \mid y' \in \mathbb{R}^{d-1}, y_d \in \mathbb{R}, -f(y') \leq y_d < 0\}\end{aligned}$$

は演習 1.1.7(2) よりジョルダン可測集合である。次に開球がジョルダン可測であることを示す。$C := \overline{B(x,r)} \backslash B(x,r)$ は演習 1.1.7(1) より測度 0 のジョルダン可測集合である。よって差集合 $B(x,r) = \overline{B(x,r)} \backslash C$ は可測であり,

$$m^{(J)}(B(x,r)) = m^{(J)}(\overline{B(x,r)}) - m^{(J)}(C) = m^{(J)}(\overline{B(x,r)})$$

である。$B(0,r)$ に内接した立方体 A と外接した立方体 B (辺の長さは $\ell = 2r$) を考える。直方体の体積 (volume) の定義より $|B| = (2r)^d$であり, 内接する立方体 A の対角線の長さは $2r$ である。よってその一辺の長さは $\ell' = \frac{2}{\sqrt{d}} r$ より, $|A| = \left(\frac{2}{\sqrt{d}} r\right)^d$ である。以上より (1) のジョルダン測度が $c_d r^d$とかけることを示せばよい。これは次によるであろう。

$$m^{(J)}(B(0,r)) = m^{(J)}(B(0,1)) r^d =: c_d r^d$$

□

問 13 (1.1.11). $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$を全単射線型変換とする。
(1) どんな基本集合 E に対しても $m(L(E)) = Dm(E)$ となるような非負の実数 D が存在することを示せ。(演習 1.1.3 を $E \mapsto m(L(E))$ に適用せよ。)
(2) もし E がジョルダン可測なら, $L(E)$ もそうであり $m(L(E)) = Dm(E)$ であることを示せ。
(3) $D = |\det L|$ であることを示せ。(まずガウスの消去法を用いて, L が基本変換である場合を考える。あるいは, L が対角行列または直交行列である場合を考え, 直交行列には単位球を使って極分解を使う。)
https://huynhcam.files.wordpress.com/2013/07/aliprantis_c-d-principles_of_real_analysis_third_edition-academic_press1998.pdf の 389 ページには Lebesgue 測度に関する拡張した命題の証明が解説されているので, 参照されたい。

証明. (1) 演習 1.1.3 から写像 $E \mapsto m(L(E))$ が有限加法性, 平行移動不変性を満たすことを確かめれば良い。互いに素な基本集合 E, F に対して $m(L(E \sqcup F)) = m(L(E)) + m(L(F))$ である。(2) 次の補題を用いる。
<u>Step1</u>
U, V を $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$の開集合とし, $f : U \to V$ を同相写像とするとき, U の任意の部分集合 A に対して $f(A^i) = f(A)^i$である。また $A^a \subset U, f(A)^a \subset V$ ならば

$$f(A^a) = f(A)^a, \quad f(\partial A) = \partial(f(A))$$

が成り立つ。ただし A に対して A^aは閉包, A^i は内部のことを指す。

証明. f, f^{-1}は連続なので，任意の $F \in \mathcal{O}_V$に対し $f^{-1}(F) \in \mathcal{O}_U$で任意の $E \in \mathcal{O}_U$に対し $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E) \in \mathcal{O}_V$である。さて $A^i \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}, A^i \subset U$ より

$$A^i = A^i \cap U \in \mathcal{O}_U$$

なので上記より

$$f(A^i) \in \mathcal{O}_V$$

である。よってある $O' \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}$が存在して $f(A^i) = O' \cap V$ となる。即ち $f(A^i)$ は $\mathbb{R}^m$の開集合であって $f(A)$ に含まれる。$f(A)^i$は $f(A)$ の部分集合の中で最大の $\mathbb{R}^m$の開集合だったので

$$f(A^i) \subset f(A)^i$$

である。同様に，仮定から $f(A)^i \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}, f(A)^i \subset V$ より

$$f(A)^i = f(A)^i \cap V \in \mathcal{O}_V$$

が満たされる。よって $f^{-1}(f(A)^i) \in \mathcal{O}_U$なので，ある $O \in \mathcal{O}_U$が存在して $f^{-1}(f(A)^i) = O \cap U$ となる。(c.f.相対位相) つまり，$f^{-1}(f(A)^i)$ は $\mathbb{R}^n$における開集合である。$f^{-1}(f(A)^i) \subset f^{-1}(f(A)) = A$ と A^iが A に含まれる $\mathbb{R}^n$の最大の開集合なことから

$$f^{-1}(f(A)^i) \subset A^i$$

である。よって，$f(A)^i \subset f(A^i)$ で逆の包含関係も示せたので $f(A^i) = f(A)^i$が成り立つ。
次に $f(A^a) = f(A)^a$を示す。$f : U \to V,\ f^{-1} : V \to U$ の連続性から，任意の $F \in \mathcal{F}_V$に対して $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_U$で任意の $E \in \mathcal{F}_U$に対して $f(E) = (f^{-1})^{-1}(E) \in \mathcal{F}_V$である。これと，$A^a \subset U$ より $A^a = A^a \cap U \in \mathcal{O}_U$なので，$f(A^a) \in \mathcal{F}_V$である。$f(A) \subset f(A^a)$ かつ，$f(A)^a$が $f(A)$ を含む $\mathbb{R}^m$の最小の閉集合なことより

$$f(A)^a \subset f(A^a)$$

となる。次に逆の包含を示す。仮定 $f(A)^a \subset V$ より $f(A)^a = f(A)^a \cap V \in \mathcal{F}_V$から，$f^{-1}(f(A)^a) \in \mathcal{F}_U$である。そして $A = f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(f(A)^a)$ かつ，A^aが A を含む $\mathbb{R}^n$の最小の閉集合なことより

$$A^a \subset f^{-1}(f(A)^a)$$

となる。これと，一般に $f(f^{-1}(f(A)^a)) \subset f(A)^a$より，$f(A^a) \subset f(A)^a$である。従って $f(A^a) = f(A)^a$が成り立つ。
最後に $f(\partial A) = \partial(f(A))$ を示す。$\partial A = A^a \backslash A^i,\ \partial(f(A)) = f(A)^a \backslash f(A)^i$であり

$$\partial(f(A)) = f(A)^a \backslash f(A)^i = f(A^a) \backslash f(A^i) = f(A^a \backslash A^i) = f(\partial A)$$

□

定義 5 (全有界, 点列コンパクト)**.** $K \subset \mathbb{R}^n$が点列コンパクトであるとは，次の二条件を共に満たすことを指す。
(い) K の 任意の 点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$は収束する部分列 $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$を含む。
次補題の鍵
(ろ) この収束部分列 $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$の極限は K に属す。
(い) の条件を満たす集合は全有界であるという。全有界は $\mathbb{R}^n$の部分集合に対しては有界であることと同値である。

補題 2 (以下の $(*)$ に関して)**.** (1) $\mathbb{R}^n$の部分集合 K が全有界 $\Leftrightarrow$ K は有界集合である。
(2) K は点列コンパクト $\Leftrightarrow$ K は有界閉集合 $\Leftrightarrow$ K はコンパクトである。

証明. (1) だけ示す。
$(\Rightarrow)$ K が全有界であるとし対偶法を用いる。K が有界でないとすれば任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$|x_m| > m$ なる点 $x_m \in K$ がある。各 m についてこのような点 x_mを 1 つ選んで K の点列 $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$を作る。$(x_{m(k)})_{k\in\mathbb{N}}$をこの点列の任意の部分列とすれば $k \to \infty$ のとき $m(k) \to \infty$ より $|x_{m(k)}| \to \infty$ となる。つまり $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$は $\mathbb{R}^n$の点に収束する部分列を持たないので K は全有界ではない。矛盾した。
$(\Leftarrow)$ n に関する帰納法で示す。$n = 1$ のとき $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$を K の任意の点列とすればこれは有界点列なので Bolzano, Weierstrass より収束する部分列が存在し，K は全有界である。$n > 1$ とし $\mathbb{R}^{n-1}$では成り立つとすると任意の点 $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$に対して，$x' := (x_1, ..., x_{n-1})$ とし $x = (x', x_n)$ とかくことにする。$\mathbb{R}^n$の有界集合 K の勝手な点列 $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$をとり，$x_m = (x'_m, x_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$ とおく。定数 $M > 0$ があって任意の $x \in K$ に対して $|x| < M$ なので，点列 $(x'_m)_{m\in\mathbb{N}}$は

$$|x'_m| \leq \sqrt{|x'_m|^2 + x_{m,n}^2} = |x_m| < M$$

であるから，$\mathbb{R}^{n-1}$の有界点列である。よって帰納法から収束部分列 $(x'_{m(k)})_{k\in\mathbb{N}}$が存在することが分かる。また

$$|x_{m(k),n}| \leq \sqrt{|x'_{m(k)}|^2 + |x_{m(k),n}|^2} = |x_{m(k)}| < M$$

なので $(x_{m(k),n})_{k\in\mathbb{N}}$は有界実数列である。$n = 1$ のときに従って収束部分列 $(x_{m(k(l)),n})_{l\in\mathbb{N}}$が存在する。$(x_{m(k(l))})_{l\in\mathbb{N}}$は $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$の収束部分列より，$K$ は全有界である。 □

補題 3 (以下の $(*)$ に関して)**.** $K \subset \mathbb{R}^n$を点列コンパクト集合，$f : K \to \mathbb{R}^m$は連続関数とすると，$f(K)$ は点列コンパクトであり，特に f は有界である。

証明. $f(K)$ の任意の点列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$をとる。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $y_n = f(x_n)$ となる $x_n \in K$ を 1 つずつ選び K の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$を作る。K は点列コンパクトより収束する部分列 $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$があって $x_{n(k)} \to x \in K$ $(k \to \infty)$ を満たす。このとき，f の連続性より

$$\lim_{k\to\infty} y_{n(k)} \equiv \lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) = f(x) \in f(K)$$

である。即ち $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$の収束部分列 $(y_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$が存在して極限は $f(K)$ に含まれるので，$f(K)$ は点列コンパクトである。前補題より $f(K)$ は有界集合ゆえ f は有界となる。 □

Step2
$L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$を全単射線型変換 ($\therefore$ 連続) とする。このとき L は C^1級微分同相写像 (c.f. ヤコビ行列及び行列の微分：$\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_d)^T, \boldsymbol{f}_L(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), ..., f_d(\boldsymbol{x}))^T$ に対して $\frac{\partial \boldsymbol{f}_L(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_d(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_d} & \cdots & \frac{\partial f_d(\boldsymbol{x})}{\partial x_d} \end{pmatrix}$) である。$E$ が $E^a \subset \mathbb{R}^d$を満たすジョルダン可測集合ならば，$L(E)$ もジョルダン可測である。

証明. E は有界なので，ある $r > 0$ があって $E \subset \overline{B^d}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq r\}$ を満たす。このとき $E^a \subset (\overline{B^d}(0, r))^a = \overline{B^d}(0, r)$ なので E^a も有界閉集合である。よって $\mathbb{R}^d$ においてはこれはコンパクト性を意味し，

$$L(E^a)\ \text{もコンパクト} \cdots (*)$$

である。すると $L(E) \subset L(E^a)$ だから $L(E)$ は有界である。∂E は有界な E^a の閉部分集合なのでコンパクトである。E はジョルダン可測集合なので $v(\partial E) = 0$ である。Step1 より $L(\partial E) = \partial(L(E))$ である。よって $v(\partial(L(E))) = v(L(\partial E)) = 0$ なので，下記の補題から $L(E)$ はジョルダン可測集合となる。 □

□

定義 6 (テキストの演習 1.1.24 を用いた定義)**.** $\mathbb{R}^d$ の有界集合 E は E 上で定数 1 が可積分であるときジョルダン可測または体積確定といい

$$v(E) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_E\, dx$$

を E の d 次元体積という。

補題 4. $\mathbb{R}^d$ の有界集合 A に対して，A はジョルダン可測 $\Leftrightarrow$ ∂A は零集合 $\Leftrightarrow$ $v(\partial A) = 0$

証明. <u>Step1 : $A \subset \mathbb{R}^n$ の指示関数 1_A の不連続点全体は ∂A に一致する</u>
$1_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は任意の $x \in A^i$ に対し $1_A(x) = 1$ で，$B(x, \delta)$ を $B(x, \delta) \subset A^i$ となるように取れば $y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < \delta$ ならば $y \in B(x, \delta)$ より $|1_A(y) - 1_A(x)| = 0$ である。よって 1_A は A^i で連続である。同様の考え方で 1_A は外部 $A^e = (A^c)^i$ の各点のある開近傍での挙動は 0 に等しいので，A^e で連続である。従って，1_A の不連続点全体を B とすれば $B \subset \partial A$ となる。また ∂A 上の各点 x と任意の $\delta > 0$ に対して，$B(x, \delta) \cap A^i \neq \emptyset, B(x, \delta) \cap A^e \neq \emptyset$ より，

$$1_A(y) = 1, \quad 1_A(z) = 0$$

となるある $y, z \in B(x, \delta)$ が存在する。$x \in \partial A \cap A$ なら $1_A(x) = 1$ なので $|1_A(x) - 1_A(z)| = 1$ であり $x \in \partial A \backslash A$ なら $1_A(x) = 0$ なので $|1_A(x) - 1_A(y)| = 1$ である。($x \in \partial A$ に関して 2 通りの場合がある。どちらの場合であっても，という流れ。) 即ち任意の $\delta > 0$ に対し $x' \in B(x, \delta) \Leftrightarrow |x - x'| < \delta$ かつ $|1_A(x) - 1_A(x')| = 1$ を満たす。よって 1_A は不連続点 x をもつ。これは $\partial A \subset B$ を意味するので $B = \partial A$ である。 □

<u>Step2 : 次の命題 (特に (4) を補題 4 にて適用) を示す。</u>

命題 2. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。
(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して有界閉区間の列 $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ であって

$$A \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} v(I_m) < \epsilon$$

を満たすものが存在するとき n 次元零集合と呼ぶ。零集合とはジョルダン外測度 $m^{*,(J)}(A) = 0$ である A のことに合致する。

(今は演習問題との整合性を図るために, Lebesgue 測度を持ち出していないが, 正確には零集合とは Lebesgue 測度 0 の集合である。A がジョルダン可測なら Lebesgue 測度$\mu(A) = v(A)$ である。ただし, $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ などのジョルダン可測でないが Lebesugue 可測なものはよくあるので注意というか, 基本的事実の整理。)
さて, 上定義において, 有界閉区間の列を有界開区間の列としても定義は同値。
(2) 零集合の可算列 $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$について $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$ も零集合。
(3) $v(A) = 0$ なら A は零集合。
(4) コンパクト集合 A に対しては, 体積 0 なことと零集合なことは同値。(このように, 零集合は体積 0 の集合の一般化)

証明. (1) 任意の$\epsilon > 0$ に対して

$$A \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m, \ \ \sum_{m=1}^{\infty} v(I_m) < 2^{-n}\epsilon$$

なる有界閉区間の列 $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$が存在する。このとき各 I_mの重心を中心として, I_mを 2 倍に相似拡大した閉区間の内部を J_m ($\mathbb{R}^n$の有界開区間) とすれば,

$$I_m \subset J_m, \ \ v(J_m) = 2^n v(I_m)$$

を満たす。すると

$$A \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m \subset \cup_{m=1}^{\infty} J_m, \ \ \sum_{m=1}^{\infty} v(J_m) = 2^n \sum_{m=1}^{\infty} v(I_m) = 2^n 2^{-n}\epsilon = \epsilon$$

である。逆に, 定義を後者のものとして然るべき有界開区間の列 $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$が存在すれば, その閉包の列 $(I_m^a)_{m\in\mathbb{N}}$は有界閉区間の列で

$$A \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m^a, \ \ \sum_{m=1}^{\infty} v(I_m^a) = \sum_{m=1}^{\infty} v(I_m) < \epsilon$$

より O.K.
(2) 各 A_mは零集合なので, 任意の$\epsilon > 0$ に対し有界開区間の列 $(I_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$があって

$$A_m \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_{m,n}, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} v(I_{m,n}) < \epsilon 2^{-m}$$

を満たす。$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算より集合列 $(I_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$は有界開区間の列 $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$とかけて,

$$A \subset \cup_{k=1}^{\infty} J_k, \ \ \sum_{k=1}^{\infty} v(J_k) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v(I_{m,n}) < \epsilon$$

が成り立つ。A は零集合である。
(3) 一般に, 有界な $A \subset \mathbb{R}^n$に対して $v(A) = 0 \Leftrightarrow$ 任意の$\epsilon > 0$ に対し有限個の有界閉区間 $I_1, ..., I_m$であって $A \subset \cup_{k=1}^{m} I_k$, $\sum_{k=1}^{m} v(I_k) < \epsilon$を満たすものがある。そこで, $k > m$ に対して I_kを一辺の長さ 0 の閉区間とすれば, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$は A が零集合であるような性質を満たす。

(4) (3) によって常に体積 0 なら零集合であり逆に A がコンパクト零集合とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して有界開区間 ($\because$ (1) 参照) の列 $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$であって,

$$A \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m,\ \ \sum_{m=1}^{\infty} v(I_m) < \epsilon$$

を満たすものがある。A のコンパクト性より, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$から有限個の開区間 $I_{n_1}, ..., I_{n_m}$を選んで, $A \subset \cup_{k=1}^{m} I_{n_k}$となる。このとき,

$$\sum_{k=1}^{m} v(I_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \epsilon$$

なので,

$$v(A) = 0$$

□

Step3 : 補題 4 の証明 次の命題を示す。

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{はジョルダン可測} \Leftrightarrow_1 \partial A \text{ は零集合} \Leftrightarrow_2 v(\partial A) = 0$$

($\Leftrightarrow_1$) A は有界なので $A \subset I$ となる有界閉直方体 $I \subset \mathbb{R}^n$がある。Step1 より, 1_Aの不連続点全体は∂A に一致する。よって, 1_Aが I 上可積分 (i.e.ジョルダン可測) であることと∂A が零集合なことは同値である。
($\Leftrightarrow_2$) $\partial A = \mathbb{R}^n \backslash (A^i \sqcup A^e)$ は閉集合である。∂A は有界でもあるのでコンパクトなことから Step2(4) を用いればよい。最後に, 演習 1.1.11(3) の主張を考える。

証明. Step1 : L が基本行列による線形変換の場合に任意の直方体 $I \subset \mathbb{R}^d$に対し (3) が成立
基本行列とは次の 3 つ, 順に $P_i^{(d)}(c)$ は n 次単位行列の (i, i) 成分を $c \neq 0$ に替えたもの, $Q_{ij}^{(d)}(c)$ は n 次単位行列の (i, j) 成分を c に替えたもの, $R_{ij}^{(d)}$は d 次単位行列の第 i 業と第 j 行を替えたもの, すなわち

$$P_i^{(d)}(c) = I_d + (c-1)E_{ii}^{(d)},\ Q_{ij}^{(d)}(c) = I_d + cE_{ij}^{(d)},\ R_{ij}^{(d)} = I_d - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

のことである。補題より $L(I)$ はジョルダン可測である。I が閉直方体でないなら I の代わりに閉包 I^aとしても体積は同じなので I は閉直方体の場合を考えても十分なので $I = \prod_{k=1}^{d}[a_k, b_k]$ とする。$L = P_i(c)$ のときは, $x = (x_1, ..., x_d)^T \in \mathbb{R}^d$に対し $L(x) = P_i(c)x = (x_1, ..., cx_i, ..., x_d)^T$となるので $c > 0$ の場合,

$$L(I) = P_i(c)I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [ca_i, cb_i] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

であり

$$v(L(I)) \ \ = \ \ (b_1 - a_1) \times \cdots \times (cb_i - ca_i) \times \cdots \times (b_d - a_d) = cv(I) = |c|\, v(I)$$

また $c < 0$ の場合は $P_i(c)I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [cb_i, ca_i] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ なので

$$v(L(I)) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (ca_i - cb_i) \times \cdots \times (b_d - a_d) = |c|\, v(I)$$

である。明らかに $|\det L| = |\det P_i(c)| = |c|$ より

$$v(L(I)) = |\det L|\, v(I)$$

である。次に $L = R_{ij}$のときを考えると $L(x) = R_{ij}x = (x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_d)^T$だから

$$L(I) = R_{ij}I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_j, b_j] \times \cdots \times [a_i, b_i] \times \cdots \times [a_d, b_d] \text{ より } v(L(I)) = v(I)$$

また $\det L = -1$ であるので, $v(L(I)) = |\det L|\, v(I)$ である。
次に, $L = Q_{ij}(c)$ の場合 $L(x) = Q_{ij}(c)x = (x_1, ..., x_i + cx_j, ..., x_d)^T$である。$L(I) = Q_{ij}(c)I$ は直方体の形をしておらず

$$L(I) = Q_{ij}(c)I = \{\sum_{k \neq i,j} x_k e_k + x_i(ce_j + e_i) + x_j e_j \mid x_k \in [a_k, b_k], 1 \leq k \leq d\}$$

である。$x_k \in [a_k, b_k]$ $(k \neq i, j)$ を固定し, $\hat{x} = \sum_{k \neq i,j} x_k e_k$とする。$K_{ij} = \{(x_i + cx_j, x_j) \mid x_i \in [a_i, b_i], x_j \in [a_j, b_j]\}$ とおき $K_{ij} \subset I_{ij}$なる $x_i x_j$平面の有界閉直方体 $I_{ij} \subset \mathbb{R}^2$を取る。$J_{ij} = \prod_{k \neq i,j}[a_k, b_k] = [a_1, b_1] \times \cdots \times \widehat{[a_i, b_i]} \times \cdots \times \widehat{[a_k, b_k]} \times \cdots \times [a_d, b_d]$ として,

$$I' = \{(x_1, ..., x_d) \mid (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d) \in J_{ij},\ (x_i, x_j) \in I_{ij}\}$$

とすれば, I'は $L(I)$ を含む $\mathbb{R}^d$内の有界閉直方体 (第 **i,j 成分を微調整した.**) であり,
$(I' \supset)L(I)$ はジョルダン可測なので $1_{L(I)}$は I'上可積分である。$\varphi_{ij} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$を $x = (x_1, ..., x_d)$ に対し $y = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d), z = (x_i, x_j)$ とし

$$\varphi(y, z) = x$$

で定める。このとき任意の $y \in J_{ij}$に対して $1_{L(I)} \circ \varphi(y, z) = 1_{J_{ij} \times K_{ij}}(y, z) = 1_{J_{ij}}(y) \cdot 1_{K_{ij}}(z)$ 及び $\forall y \in J_{ij}; 1_{J_{ij}}(y) = 1$ より $(1_{L(I)} \circ \varphi)^y(z) = 1_{K_{ij}}(z)$ となる。定義より, $d = 2$ の場合は $Q^{(2)}_{ij}(c)I_{ij} = K_{ij}$であって演習 (2) より K_{ij}は I_{ij}の線形変換 $Q^{(2)}_{ij}(c) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$による像だからジョルダン可測である。よって, $\iint 1_{K_{ij}}$は J_{ij}上可積分であり, 重積分に関する命題より (現代解析 1 にて既習の Fubini の定理ではないがその類似物より)

$$\begin{aligned}
v(L(I)) &= \int \cdots \int_{L(I)} dx_1 \cdots dx_d = \int \cdots \int_{I'} 1_{L(I)}(x = (x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_d))\, dx_1 \cdots dx_d \\
&= \int \cdots \int_{J_{ij} \times I_{ij}} 1_{J_{ij} \times K_{ij}}(x)\, dx_1 \cdots dx_d \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int \cdots \int_{J_{ij}} \left(\iint_{K_{ij}} dx_i dx_j \right) dx_1 \cdots \hat{dx_i} \cdots \hat{dx_j} \cdots dx_d \\
&= \prod_{k \neq i,j} (b_k - a_k) \times \left(\iint_{K_{ij}} dx_i dx_j \right) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k) = v(I)
\end{aligned}$$

Step2 : 直方体を拡張してジョルダン可測集合 A に対しても (3) が成立

補題 5 (行列の基本変形)**.** 正則行列 $A \in M_d(\mathbb{K})$ は基本行列の積としての S, T を使って, $SAT = I_d$とできる。よって $A = S^{-1}T^{-1}$とかける。

補題は, 線形変換は特に基本行列である場合に Step.2 を証明しても, 直ちに任意の線形変換に対して言及したことになることを意味する。そこで, L は基本行列のいずれかとする。Step.1 より, A が直方体のときには O.Kなので A が基本集合の場合についても言及したことにして良い。さて, A を勝手なジョルダン可測集合とすると, 任意の$\epsilon > 0$ に対して

$$K \subset A \subset K',\ m^{(J)}(K') - m^{(J)}(K) < \epsilon \tag{0.8}$$

を満たす基本集合 K, K'が存在する。($\because$ 演習 1.1.5. そういえば, $m^{(J)}$と v は全く同じ関数。)
$L(K) \subset L(A) \subset L(K')$ であり, K と K'については Step.2 は成り立つので

$$|\det L|\, m^{(J)}(K) \leq m^{(J)}(L(A)) \leq |\det L|\, m^{(J)}(K')$$

である。また

$$|\det L|\, m^{(J)}(K) \leq |\det L|\, m^{(J)}(A) \leq |\det L|\, m^{(J)}(K')$$

であり, よって

$$|\det L|(m^{(J)}(K) - m^{(J)}(K')) \leq m^{(J)}(L(A)) - |\det L| m^{(J)}(A) \leq |\det L|(m^{(J)}(K') - m^{(J)}(K))$$

である。(**??**) より

$$\left| m^{(J)}(L(A)) - |\det L| m^{(J)}(A) \right| \leq |\det L|(m^{(J)}(K') - m^{(J)}(K)) < |\det L|\epsilon$$

□

問 14 (1.1.12)**.** $A \subset K'$であって $m(K') \leq m^{*,(J)}(A) + \epsilon$を満たす基本集合 K'が存在する。任意に $B \subset A$ を取る。$m^{(J)}(A) = m^{*,(J)}(A) = 0$ と基本測度の非負性より $0 \leq m(K') \leq \epsilon$.
$\epsilon > 0$ の任意性より $m(K') = 0$ であり, ジョルダン測度の単調性から $m^{(J)}(B) \leq m^{(J)}(A) \leq m^{(J)}(K') = 0$ である。

問 15 (1.1.13)**.** いつもの Step by Step を行う。ジョルダン可測集合 A と任意の正数ϵに対して, $K \subset A \subset K'$, $m(K') - m(K) < \epsilon$であり, 基本集合については

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sharp \left(K \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d \right) = m^{(J)}(K) \leq m^{(J)}(A) \leq m^{(J)}(K) + \epsilon$$

を満たす。

問 16. $n, i_1, ..., i_d$を整数として, 次の形からなる半開直方体

$$[\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_1+1}{2^n}) \times \cdots \times [\frac{i_d}{2^n}, \frac{i_d+1}{2^n})$$

を考え, 2 進立方体と呼ぶことにする。$E \subset \mathbb{R}^d$を有界集合とする。各自然数 n に対して $\mathcal{E}_*(E, 2^{-n})$ を E に含まれる一辺の長さが 2^{-n}の 2 進立方体の個数とし, $\mathcal{E}^*(E, 2^{-n})$ を E と交わる一辺の長さが 2^{-n}である 2 進立方体の個数とする。E がジョルダン可測である必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-dn}(\mathcal{E}^*(E, 2^{-n}) - \mathcal{E}_*(E, 2^{-n})) = 0$$

であることを示せ。

証明. 個数というのはジョルダン測度のことでしょうか。証明を書く時間がないので，ここは Riemann 可積分とは何かを伝えてお開きとします。statementは違いますが，テキストの Riemann 積分の定義や 1.1.6 と一致します。$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を有界関数とし，
$n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ に対して $I_{n,k} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ (これは $d = 1$ としたとき) $m_{n,k} = \inf\{f(x) \mid x \in I_{n,k} \cap [a,b]\}$, $M_{n,k} = \sup\{f(x) \mid x \in I_{n,k} \cap [a,b]\}$ とおく。不足和と過剰和を $s_n(f) = \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_{n,k}$, $S_n(f) = \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} M_{n,k}$で定義する。$\lim_n s_n(f) = \lim_n S_n(f)$ であるとき，f は $[a,b]$ 上 Riemann 可積分であるという。1.1.15 のジョルダン測度の一意性は 1.1.5 を使えば良いと思う。 □

問 17 (1.1.16)**.** $d_1, d_2 \geq 1$ とし，$E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$をジョルダン可測集合とする。このとき $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$はジョルダン可測で $m^{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = m^{d_1}(E_1) \times m^{d_2}(E_2)$ である。

証明. $E_1 \subset I \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $E_2 \subset J \subset \mathbb{R}^{d_2}$となる有界閉直方体 I, J をとる。$I = \prod_{i=1}^{d_1}(b_i - a_i)$, $J = \prod_{j=1}^{d_2}(d_j - c_j)$ というように区間の直積としてかけるとする。

$$L := (\prod_{i=1}^{d_1}(b_i - a_i)) \times (\prod_{j=1}^{d_2}(d_j - c_j))$$

は $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$の有界閉直方体で $E_1 \times E_2 \subset L$ は有界である。I, J の分割Δ', Δ''は，I の第 i 番目の辺の分割$\Delta'_i = \{x^i_0, x^i_1, ..., x^i_{p_i}\}$ $(i = 1, ..., d_1)$ と J の第 j 番目の辺の分割$\Delta''_j = \{y^j_0, y^j_1, ..., y^j_{q_j}\}$ $(j = 1, ..., d_2)$ により

$$\Delta' = \{(x^1_{\mu_1}, ..., x^{d_1}_{\mu_{d_1}}) \in \mathbb{R}^{d_1} \mid x^i_{\mu_i} \in \Delta'_i,\ \mu_i = 0, 1, ..., p_i,\ i = 1, ..., d_1\}$$

$$\Delta'' = \{(y^1_{\gamma_1}, ..., y^{d_2}_{\gamma_{d_2}}) \in \mathbb{R}^{d_2} \mid y^j_{\gamma_j} \in \Delta''_j,\ \gamma_j = 0, 1, ..., q_j,\ j = 1, ..., d_2\}$$

とかけるとし，また

$$(\Delta', \Delta'') := \left\{(x^1_{\mu_1}, ..., x^{d_1}_{\mu_{d_1}}, y^1_{\gamma_1}, ..., y^{d_2}_{\gamma_{d_2}}) \mid x^i_{\mu_i} \in \Delta'_i,\ \mu_i = 0, 1, ..., p_i,\ i = 1, ..., d_1\ ;\ y^j_{\gamma_j} \in \Delta''_j,\ \gamma_j = 0, 1, ..., q_j,\ j = 1, ..., d_2$$

で定義するとこれは L の分割である。E_1はジョルダン可測なので 1_{E_1}は I 上可積分であるが，1_{E_1}を $I \times J = L$ 上に拡張したものを $1^*_{E_1} : (x, y) \mapsto 1_{E_1}(x)$ とする。μに対して $L_\mu = I_k \times J_\ell$(分割$\Delta = (\Delta', \Delta'')$ で生じる $I \times J$ の小区間の一つ) を満たす組 (k, ℓ) は一意的である。Δに関する 1_{E_1}の不足和と過剰和は，$v_{d_1+d_2}(I_k \times J_\ell) = v_{d_1}(I_k) \times v_{d_2}(J_\ell)$ (非常に重要な Step であるが直方体について命題が成り立つことは省略する。) 並びに

$$1^*_{E_1}(x, y) = 1_{E_1}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E_1, y \in J) \\ 0 & (x \notin E_1, y \in J) \end{cases}$$

$$m(1^*_{E_1}, I_k \times J_\ell) = \inf_{(x,y)\in I_k\times J_\ell} 1^*_{E_1}(x, y) = \inf_{x\in I_k} 1_{E_1}(x) = \begin{cases} 1 & (I_k \subset E_1) \\ 0 & (I_k \not\subset E_1) \end{cases}$$

$$M(1^*_{E_1}, I_k \times J_\ell) = \sup_{(x,y)\in I_k\times J_\ell} 1^*_{E_1}(x, y) = \sup_{x\in I_k} 1_{E_1}(x) = \begin{cases} 1 & (I_k \cap E_1 \neq \emptyset) \\ 0 & (I_k \cap E_1 = \emptyset) \end{cases}$$

(最後の等式は図を描いて納得。) であることから (∗印でこの利用を表すとする。),

$$s(1^*_{E_1}, \Delta = (\Delta', \Delta'')) = \sum_{(k,\ell)} m(1^*_{E_1}, I_k \times J_\ell) v_{d_1+d_2}(I_k \times J_\ell) \overset{(*)}{=} \sum_{(k,\ell), I_k \subset E_1} v_{d_1}(I_k) v_{d_2}(J_\ell)$$

$$= \sum_{k, I_k \subset E_1} v_{d_1}(I_k) \sum_{\ell} v_{d_2}(J_\ell) \overset{(*)}{=} s(1_{E_1}, \Delta') v_{d_2}(J)$$

また,

$$S(1^*_{E_1}, \Delta = (\Delta', \Delta'')) = \sum_{(k,\ell)} M(1^*_{E_1}, I_k \times J_\ell) v_{d_1+d_2}(I_k \times J_\ell) = \sum_{(k,\ell), I_k \cap A \neq \emptyset} v_{d_1}(I_k) v_{d_2}(J_\ell)$$

$$\sum_{k, I_k \cap E_1 \neq \emptyset} v_{d_1}(I_k) \sum_{\ell} v_{d_2}(J_\ell) = S(1_{E_1}, \Delta') v_{d_2}(J)$$

となる。

$1_{E_1\times E_2}$はジョルダン可測

これと, E_1のジョルダン可測性より $v_{d_1}(E_1) = \int_I 1_{E_1}(x)dx = \overline{\int}_I 1_{E_1}(x)dx = \underline{\int}_I 1_{E_1}(x)dx$ であること, より

$$\underline{\iint}_L 1_{E_1}(x)dxdy = \sup_{\Delta} s(1^*_{E_1}, \Delta) = \sup_{\Delta'} s(1_{E_1}, \Delta') v_{d_2}(J) = (\underline{\int}_I 1_{E_1}(x)dx) v_{d_2}(J) = v_{d_1}(E_1) v_{d_2}(J)$$

$$\overline{\iint}_L 1_{E_1}(x)dxdy = \inf_{\Delta} S(1^*_{E_1}, \Delta) = \inf_{\Delta'} S(1_{E_1}, \Delta') v_{d_2}(J) = (\overline{\int}_I 1_{E_1}(x)dx) v_{d_2}(J) = v_{d_1}(E_1) v_{d_2}(J)$$

となる。従って $1_{E_1}(x)$ は L 上 Riemann 可積分である。同様に $1_{E_2}(y)$ も L 上可積分なので, $1_{E_1\times E_2}(x,y)$ も L 上可積分であり, (∵ 有界直方体の上で定義された可積分な有界実数値関数の積も可積分。)

$$v_{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = \iint_L 1_{E_1\times E_2}(x,y)dxdy = \underline{\iint}_L 1_{E_1\times E_2}(x,y)dxdy = \overline{\iint}_L 1_{E_1\times E_2}(x,y)dxdy$$

である。

ジョルダン可測集合に対して命題は成り立つ

$$m(1_{E_1\times E_2}, I_k \times J_\ell) = \inf_{(x,y)\in I_k\times J_\ell} 1_{E_1\times E_2}(x,y) = (\inf_{x\in I_k} 1_{E_1}(x))(\inf_{y\in J_\ell} 1_{E_2}(y)) = \begin{cases} 1 & if\ I_k \subset E_1 \text{かつ } J_\ell \subset E_2 \\ 0 & if\ I_k \not\subset E_2 \text{または } J_\ell \not\subset E_2 \end{cases}$$

だから,

$$s(1_{E_1\times E_2}, \Delta) = \sum_{(k,\ell)} m(1_{E_1\times E_2}, I_k \times J_\ell) v_{d_1+d_2}(I_k \times J_\ell) = \left(\sum_{k, I_k \subset E_1} v_{d_1}(I_k) \right) \left(\sum_{\ell, J_\ell \subset E_2} v_{d_2}(J_\ell) \right) = s(1_{E_1}, \Delta') s(1_{E_1}, \Delta'')$$

が成り立つ。Δ', Δ''に関する上限をとると (Δ', Δ''に関する細分をより強めると)

$$s(1_{E_1\times E_2}, \Delta) = s(1_{E_1}, \Delta') s(1_{E_2}, \Delta'') \leq \left(\underline{\int}_I 1_{E_1}(x)dx \right) \left(\underline{\int}_J 1_{E_2}(y)dy \right) = v_{d_1}(E_1) v_{d_2}(E_2)$$

である。(E_1, E_2のジョルダン可測性を使った。) また, Δに関する上限をとって

$$v_{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) \leq \underline{\iint}_L 1_{E_1\times E_2}(x,y)dxdy = v_{d_1}(E_1) \times v_{d_2}(E_2)$$

を得る。一方で

$$v_{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = \underline{\iint}_L 1_{E_1\times E_2}(x,y)dxdy \geq s(1_{E_1\times E_2}, (\Delta', \Delta'')) = s(1_{E_1}, \Delta')s(1_{E_2}, \Delta'')$$

であり, Δ', Δ''に関する細分の上限をとって

$$v_{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) \geq v_{d_1}(E_1) \times v_{d_2}(E_2)$$

を得る。 □

注 2 (感想)**.** $s(1^*_{E_1}, \Delta) = \sum_{(k,\ell)} m(1^*_{E_1}, I_k \times J_\ell)v_{d_1+d_2}(I_k \times J_\ell)$ は Lebesgue 積分の定式化に似ている。

問 18 (1.1.17)**.** 演習 1.1.7 より多角形 $P, Q \subset \mathbb{R}^d$はジョルダン可測である。$P$ を分割した $P_1, ..., P_n$の各境界のジョルダン測度は 0 であり, ジョルダン測度の平行移動不変性と回転移動不変性から, P と Q は同じジョルダン測度をもつ。個人的な注意点として, Lebesgue 測度の平行移動不変性の証明はジョルダン測度の同様の性質の証明とは本質的には違うものであること, 回転移動不変性 (E をジョルダン可測集合とする。直交群 $O(n)$ の任意の元 T に対して $TE = \{Tx \mid x \in E\}$ もジョルダン可測で, $m^{(J)}(TE) = m^{(J)}(E)$ を満たすだろうか。) の証明を与える必要があることの両方について, ここでは書く余力がない。

問 19 (1.1.18)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$を有界集合とする。
(1) E とその閉包$\overline{E}, E^a$のジョルダン外測度は等しい。
(2) E とその内部 E°, E^iのジョルダン内測度は等しい。
(3) E がジョルダン可測集合 $\Leftrightarrow$ ∂E のジョルダン外測度は 0
(4) $[0,1]^2\backslash\mathbb{Q}^2$と $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$のジョルダン内測度は 0, ジョルダン外測度は 1 である。

証明. (4) は (1), (2) と $\mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ での稠密性から従う。有界集合 $M \subset \mathbb{R}^N$に対して

$$v^*(M) := \inf_{M\subset Q_1\cup Q_1\cup\cdots\cup Q_m} \{\sum_{k=0}^{m} v(Q_k) \mid Q_1, ..., Q_m \subset \mathbb{R}^N \text{はコンパクト}\}$$

と定め,

$$v_*(M) := \sup_{Q_1\cup\cdots\cup Q_m\subset M} \{\sum_{k=1}^{m} v(Q_k) \mid Q_1, ..., Q_m \subset \mathbb{R}^N \text{は開集合}\}$$

と定める。$E \subset E^a$であるから任意の E^aを被覆する上記定義を満足する $P := \cup_{i=1}^m P_i$ $(1 \leq i \leq m)$ は E を被覆するから $v^*(E) \leq v^*(E^a)$ である。ϵを任意の正数とし $E \subset \cup_{i=1}^m Q_i$に対して $\sum_{i=1}^m v(Q_i) \leq v^*(E)+\epsilon$を満たす。$Q$ はコンパクトで E を含む閉集合より必然的に $E^a \subset Q$ である。(なぜなら, E^aは E を含む閉集合の中で最小のもの。) よって, 上記の外測度の定義より

$$v^*(E^a) \leq \sum_{i=1}^{m} v(Q_i)$$

が成り立つので

$$v^*(E^a) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{m} v(Q_i) - \epsilon \leq v^*(E)$$

である。よって $v^*(E^a) \leq v^*(E)$ であり逆側の不等式と合わせて $v^*(E) = v^*(E^a)$ である。
(2) $E^\circ \subset E$ であるから $E^\circ \supset P := \cup_{i=1}^{m} P_i$ ($i = 1, ..., m$ に対し P_iは開集合である。) を満たす任意の P に対して $E \supset P$ なので, $v_*(E^\circ) \leq v_*(E)$ である。(1) と同様に, 任意の正数ϵに対して

$$v_*(E) \leq \sum_{i=1}^{m} v(Q_i) + \epsilon$$

である。また, $Q \subset E^\circ$(なぜなら Q が E の部分開集合であり E°は E に含まれる最大の開集合。) ゆえに $\sum_{i=1}^{m} v(Q_i) \leq v_*(E^\circ)$ を満たす。よって

$$v_*(E) \leq \sum_{i=1}^{m} v(Q_i) + \epsilon \leq v_*(E^\circ) + \epsilon$$

であり $\epsilon > 0$ は任意だったので $v_*(E) = v_*(E^\circ)$ である。
(3) 常に $v_*(E) \leq v^*(E)$ である。もし E がジョルダン可測集合ならば, $\overline{E}, E^\circ$もジョルダン可測である。なぜなら

$$v_*(\overline{E}) \geq v_*(E^\circ) = v_*(E) \overset{E\text{ はジョルダン可測}}{=} v^*(E) = v^*(\overline{E})$$

かつ

$$v^*(E^\circ) \leq v^*(\overline{E}) = v^*(E) \overset{E\text{ はジョルダン可測}}{=} v_*(E) = v_*(E^\circ)$$

である。さて, 命題の主張 $\Rightarrow$ を示すため E はジョルダン可測集合とする。このとき $\overline{E}, E^\circ$の可測性より差集合$\overline{E} \backslash E^\circ$もジョルダン可測ゆえに, 次の第 1 等式が成り立つ。またジョルダン測度の有限加法性 (ジョルダン外測度は有限加法性を持たない。) より第 2 等式も成り立って

$$v^*(\partial E) = v(\overline{E} \backslash E^\circ) = v(\overline{E}) - v(E^\circ) = v^*(\overline{E}) - v^*(E^\circ)$$

である。したがって

$$v^*(\partial E) = v^*(\overline{E}) - v^*(E^\circ) = v^*(E) - v_*(E^\circ) = v^*(E) - v_*(E) = 0$$

を満たすので示せた。
次は $\Leftarrow$ を示す。(1), (2) より

$$v^*(E) = v^*(\overline{E}) = v^*(E^\circ \sqcup \partial E) \leq v^*(E^\circ) + v^*(\partial E) = v^*(E^\circ)$$

となって, 上手く $v^*(E) \leq v_*(E)$ を言えない。そこで, 零集合という概念を再度用いることにする。零集合の定義を述べれば, 任意の$\epsilon > 0$ に対して有界閉直方体の列 $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$であって,

$$E \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m, \ \sum_{m=1}^{\infty} v(I_m) < \epsilon$$

を満たすものが存在することであった。可算列は有限列に空集合を可算個適当に付け加えたものとしても通用するので, ジョルダン外測度が 0 の集合は零集合でもある。よって補題 4 から E はジョルダン可測である。 □

問 20 (1.1.19 カラテオドリの性質)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$は有界で $F \subset \mathbb{R}^d$は基本集合とする。このとき, $m^{*,(J)}(E) = m^{*,(J)}(E \cap F) + m^{*,(J)}(E \backslash F)$ であることを示せ。この結果を F がジョルダン可測な場合に一般化せよ。これは, 集合上に外測度を定義したときに「可測集合」を特徴付ける性質と言える。

証明. 演習 1.2.8 と 1.2.17 を考慮して, 次の命題を示す。

命題 3. $E \subset \mathbb{R}^d$が Lebesgue 可測であるための必要十分条件は, $\mathbb{R}^d$の任意の部分集合 A に対して

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$$

が成り立つ。

Lebesgue 外測度の定義

E を $\mathbb{R}^d$の任意の部分集合とする。$S_E = (I_i)_{i \in \mathbb{N}}$を $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ (直方体全体と空集合がなす集合) の集合列で, $\cup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$ を満たすものとする。そして S_E全体の集合を $\mathscr{T}(E; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$ とかくことにする。今$\rho : \mathscr{T}(E; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}) \to [0, \infty]$ を

$$\rho(S_E) := \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i)$$

と定める。$E \subset \mathbb{R}^d$の Lebesgue 外測度 $\mu^*_{\mathbb{R}^d}(E)$ を

$$\mu^*(E) := \inf\{\rho(S_E) \mid S_E \in \mathscr{T}(E; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})\} \tag{0.9}$$

で定義する。

補題 6. [**?**], 25 ページを参照すると良い。μ^*を Lebesgue 外測度とするとき, 次が成り立つ。
(1) $E \subset F \subset \mathbb{R}^d$なら$\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ である。
(2) $E_i \subset \mathbb{R}^d$ $(1 \leq i \leq \infty)$ に対して$\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ が成り立つ。

証明. (1) $S_F = (I_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathscr{T}(F; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$ とすると, $E \subset F \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i$より, $S_F \in \mathscr{T}(E; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$ でもある。よって (**??**) より, 任意の $S_F \in \mathscr{T}(F; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$ に対して$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) = \rho(S_F)$ である。よって$\mu^*(E)$ は $\{\rho(S_F) \mid S_F \in \mathscr{T}(F; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})\}$ の 1 つの下界であるから, $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ となる。
(2) $\mu^*(E_i) = \infty$ なる E_iが存在すれば, $\forall E \subset \mathbb{R}^d$に対し, $\mu^*(E) \leq \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ であるから, 特に $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$とおけば良い。そこで, $\forall i \in \mathbb{N}$ について$\mu^*(E_i) < \infty$ とする。下限の性質より, 任意の$\epsilon > 0$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して直方体の列 $S_{E_i} = (I_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathscr{T}(E_i; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$ で

$$\rho(S_{E_i}) \leq \mu^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \tag{0.10}$$

となるようにとる。$E := \cup_{i=1}^{\infty} E_i$に対して $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} I_k^{(i)}$すなわち $(I_k^{(i)})_{(i,k) \in \mathbb{N}^2} \in \mathscr{T}(E; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$ であり,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k^{(i)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(S_{E_i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i})$$

となる。ここでもし $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ が収束するのであれば,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \epsilon$$

となって, $\sum^\infty\sum^\infty v(I_k^{(i)})$ が収束し, これは $\sum_{i,k}^\infty v(I_k^{(i)})$ に等しい。([?], 384 ページ参照) よって

$$\mu^*(E) \underset{(??)}{\leq} \sum_{i,k=1}^{\infty} v(I_k^{(i)}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \epsilon$$

である。これで

$$\mu^*(\cup_{i=1}^\infty E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

を得る。もし $\sum_{i=1}^\infty \mu^*(E_i) = \infty$ ならこの不等式は自明である。なお, 上記の$\mu^*(E_i) < \infty$ という仮定は (**??**) で使っている。 □

目標 : 一. 命題 3 を示す。二. 演習 1.1.19 における基本集合の場合については, 次の主張を援用する。

命題 4. 基本集合 E に対して $\mu^*(E) = m(E)$ である。

どんな基本集合もジョルダン可測であり, ジョルダン測度は有限加法性, 単調性, 有限劣加法性をもっていた。

雑談 : テキスト P.7 の基本測度の有限加法性の証明について

(**??**) を見る為には基本測度の性質を使う必要があるので, 今一度テキストでは証明を明記されていない基本測度の有限加法性 (i.e. 交叉しない基本集合 E, F に対し $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ であること) をここで確かめることとする。基本集合 E は互いに素な $I_1, ..., I_N \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ により $E = \sqcup_{i=1}^N I_i$とかかれて F は互いに素な $J_1, ..., J_M \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ により $F = \sqcup_{j=1}^M J_j$とかかれる。このとき $m(E) = \sum_{i=1}^N |I_i|$, $m(F) = \sum_{j=1}^M |J_j|$ である。$I_i \cap J_j \subset E \cap F = \emptyset$より $I_i \cap J_j = \emptyset$であるから $E \cup F$ は互いに素な直方体の和集合である。よってテキスト 6 ページ, 補題 1.1.2(2) の Def より

$$m(E \cup F) = \sum_{i=1}^{N} |I_i| + \sum_{j=1}^{M} |J_j| = m(E) + m(F)$$

命題 4 の証明

有限個の互いに素な $F_1, ..., F_N \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d}$ により $E = \sqcup_{i=1}^N F_i$とかけ $m(E) = \sum_{i=1}^N |F_i|$ である。一方, $i \geq N+1$ に対して $F_i = \emptyset$とすれば $S := (F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}(E; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$ なので

$$\mu^*(E) \leq \rho(S) = \sum_{i=1}^{N} |F_i| = m(E)$$

を満たす。逆側の不等式を示す。

まず基本集合 E が有界な場合についてである。$S_E = (I_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}(E; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$ を任意にとる。基本集合 F を$\overline{F} \subset E$, $m(E) \leq m(F) + \epsilon$を満たすようにとる。これは次のような理由で取れる。基本集合 E が

$$E = \sqcup_{i=1}^N I'_i,\ \ I'_i = \prod_{j=1}^{d} (a_{ij}, b_{ij}],\ I'_i \cap I'_k = \emptyset$$

とかかれているとすると,

$$m(E) = \sum_{i=1}^{N} |I'_i| = \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=1}^{d} (b_{ij} - a_{ij}) \right)$$

である。ここで $f(x) := \sum_{i=1}^{N}(\prod_{j=1}^{d}(b_{ij}-a_{ij}-x))$ と定義すれば，f は $x=0$ で連続で $f(0)=m(E)$ を満たす。即ち任意の$\epsilon>0$ に対し $|x|<2\delta$なら $|f(x)-f(0)|<\epsilon$なる$\delta>0$ がある。そこで $x=\delta$とすれば $f(0)<f(\delta)+\epsilon$を満たす。$F := \cup_{i=1}^{N}(\prod_{j=1}^{d}(a_{ij}+\delta, b_{ij}]))$ と定めれば $\overline{F} = \cup_{i=1}^{N}(\prod_{j=1}^{d}[a_{ij}+\delta, b_{ij}]) \subset E$ で，$m(F)=f(\delta)$ より

$$m(E) < m(F)+\epsilon$$

を満たしている。
左半開区間 J_iを $I_i \subset J_i^{\circ}$であって $|J_i| \leq |I_i| + \frac{\epsilon}{2^i}$となるように次の理由によってとれる。$I_i = \prod_{j=1}^{d}(c_{ij}, d_{ij}]$ とかかれているとき，$g_i(x) = \prod_{j=1}^{d}(d_{ij}-c_{ij}+x)$ と定義すると各 g_i $(1 \leq i \leq d)$ は $x=0$ で連続で $g_i(0)=|I_i|$ である。即ち任意の$\epsilon>0$ に対し $|x|<2\delta$なら $|g_i(x)-g(0)| < \frac{\epsilon}{2^i}$ なる$\delta>0$ がある。そこで $x=\delta$とすれば $g_i(\delta) < g_i(0)+\frac{\epsilon}{2^i}$ を満たす。$J_i := \prod_{j=1}^{d}(c_{ij}, d_{ij}+\delta]$ と定めれば $J_i^{\circ} = \prod_{j=1}^{d}(c_{ij}, d_{ij}+\delta) \supset I_i$で，

$$|J_i| < |I_i| + \frac{\epsilon}{2^i}$$

を満たしている。
今$\overline{F} \subset E \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \cup_{i=1}^{\infty} J_i^{\circ}$である。$J_i^{\circ}$は開集合で$\overline{F}$はコンパクトだからある番号 N があって $\overline{F} \subset \cup_{i=1}^{N} J_i^{\circ}$となり，$F \subset \overline{F} \subset \cup_{i=1}^{N} J_i^{\circ} \subset \cup_{i=1}^{N} J_i$である。$F$ と $\cup_{i=1}^{N} J_i$は基本集合なので，基本測度の単調性と有限劣加法性より

$$m(E) \leq m(F)+\epsilon \leq m(\cup_{i=1}^{N} J_i)+\epsilon \underset{\text{有限劣加法性}}{\leq} \sum_{i=1}^{N}|J_i|+\epsilon \leq \sum_{i=1}^{N}(|I_i|+\frac{\epsilon}{2^i})+\epsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty}|I_i|+\epsilon$$

が成り立つ。ここで両辺の下限をとる。

$$\mu^*(E)+\epsilon := \inf\{\rho(S_E)+\epsilon \mid S_E \in \mathscr{T}(E;\mathcal{R}_{\mathbb{R}^d})\}$$

なので，

$$m(E) \leq \mu^*(E)+\epsilon$$

である。よって $m(E) \leq \mu^*(E)$ であり，基本集合 E を有界として $m(E)=\mu^*(E)$ を示せた。
次に E が有界でないとし，$m(E)=\mu^*(E)=\infty$ を確かめる。

$$I_k := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \text{各 } j=1,...,d \text{ に対して } -k < x_j \leq k\},\ J_1 := I_1,\ J_k := I_k \backslash I_{k-1}\ (k \geq 2)$$

と定めると，$(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$は互いに素な基本集合の列で $\mathbb{R}^d = \sqcup_{k=1}^{\infty} J_k$を満たす。$E_k := E \cap J_k$とおけば，$(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$は互いに素な基本集合の列で $\sqcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$ である。ここで，基本測度の可算加法性を示す。(ジョルダン測度は一般には可算加法性をもたない。Lebesgue 測度はこの性質を持つ点でも極めて利点がある。)
基本測度 (テキスト 6 ページ参照) は可算加法性をもつ。
互いに素な基本集合の列 $(E_i) \subset \mathbb{R}^d$について

$$\sqcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{が基本集合ならば，} m(\sqcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

を示す。各 E_i $(1 \leq i \leq \infty)$ に対して，$E_i = \sqcup_{k=1}^{N_i} F_k^i$, $m(E_i) = \sum_{k=1}^{N_i} |F_k^i|$ なる互いに素な有限個の区間 F_k^i $(1 \leq k \leq N_i) \subset \mathbb{R}$ が存在する。集合族 $\{F_k^i \mid 1 \leq k \leq N_i,\ 1 \leq i \leq \infty\}$ の添字集合 $L = \{(i,k) \mid k \in \mathbb{N}(N_i) = \{1,...,N_i\},\ i \in \mathbb{N}\}$ と $\mathbb{N}$ の間に全単射 $\varphi : \mathbb{N} \to L$ を構成する。まず$\varphi(1) = (1,1)$ とし，$\varphi(2) = (1,2),...,\varphi(N_1) = (1,N_1)$ と定める。次に$\varphi(N_1+1) = (2,1), \varphi(N_1+2) = (2,2),...,\varphi(N_1+N_2) = (2,N_2)$ と定める。以下同様にしてφ の値を定めていけばφ は全単射である。$l \in \mathbb{N}, M_i < l \leq M_{i+1}$のとき $F_{\varphi(l)} = F_{l-M_i}^i$とおく。すると $(F_{\varphi(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ は互いに素な区間の列で,

$$\sqcup_{l=1}^{\infty} F_{\varphi(l)} = \sqcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

を満たす。($\because$ φ の全単射性) ここで区間列に対する基本測度の可算加法性 (明らか) より

$$m(\sqcup_{i=1}^{\infty} E_i) = m(\sqcup_{l=1}^{\infty} F_{\varphi(l)}) \overset{\text{可算加法性}}{=} \sum_{l=1}^{\infty} |F_{\varphi(l)}|$$

である。正項級数 $\sum_{l=1}^{\infty} |F_{\varphi(l)}| < \infty$ だったなら微積分学の命題より

$$\sum_{l=1}^{\infty} |F_{\varphi(l)}| \overset{\text{順序交換}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_i} |F_k^i| = \sum_{i=1}^{\infty} m(\sqcup_{k=1}^{N_i} F_k^i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

となるので

$$m(\sqcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

であるから示せた。$\sum_{l=1}^{\infty} |F_{\varphi(l)}| = \infty$ のときも成立する。 □

命題 4 の証明続き

互いに素な基本集合 $E_k := E \cap J_k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ に対する測度の可算加法性より,

$$\infty = m(E) = m(\sqcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} m(E_k)$$

である。$\sqcup_{k=1}^{N} E_k$は有界基本集合なので有界な場合の結果 $(*)$ より,

$$\mu^*(\sqcup_{k=1}^{N} E_k) \overset{(*)}{=} m(\sqcup_{k=1}^{N} E_k) = \sum_{k=1}^{N} m(E_k)$$

である。$\sqcup_{k=1}^{N} E_k \subset E$ なので Lebesgue 外測度の単調性 (補題 6(1)) より,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(\sqcup_{k=1}^{N} E_k) = \sum_{k=1}^{N} m(E_k)$$

である。$N \to \infty$ とすると $m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \infty$ から$\mu^*(E) = \infty$ を得る。

目標:一. 命題 3 の証明

補題 7. $E \subset \mathbb{R}^d$とする。任意の$\epsilon > 0$ に対してある開集合 $G \subset \mathbb{R}^d$で

$$E \subset G,\ \mu^*(G) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

を満たすものが存在する。

証明. まず$\mu^*(E) < \infty$の場合を考える。$\mu^*(E)$の定義 (テキスト 18 ページを参照せよ。) から任意の$\epsilon > 0$に対して, 基本集合の列$(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$で$E \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq \mu^*(E) + \frac{\epsilon}{2}$を満たすものがある。開区間$J_i$を, $I_i \subset J_i$かつ$\mu^*(J_i) \leq \mu^*(I_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$となるようにとる。$G := \cup_{i=1}^{\infty} J_i$とおくと$E \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \cup_{i=1}^{\infty} J_i = G$であり, 外測度の可算劣加法性 (**??**) より

$$\mu^*(G) = \mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} J_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(J_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(I_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}})$$

である。今の場合では$\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < \infty$なので, $\mu^*(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) + \frac{\epsilon}{2} \leq \mu^*(E) + \epsilon$となる。$\mu^*(E) = \infty$の場合には$G = \mathbb{R}^d$とすれば$G$は開であり,

$$\mu^*(G) = \infty = \mu^*(E) + \epsilon$$

であるから自明。 □

系 2. 任意の$E \subset \mathbb{R}^d$に対してG_δ集合Hで, $E \subset H$かつ$\mu^*(H) = \mu^*(E)$なるものが存在する。

証明. 前補題より任意の$k \in \mathbb{N}$に対して$E \subset G_k$, $\mu^*(G_k) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{k}$なる$G_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}$がある。$H = \cap_{k=1}^{\infty} G_k$とおくと$E \subset H$である。特に (**??**) より$\mu^*(E) \leq \mu^*(H)$である。$H \subset G_k$より任意の$k \in \mathbb{N}$について

$$\mu^*(H) \leq \mu^*(G_k) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{k}$$

なので

$$\mu^*(H) \leq \mu^*(E)$$

である。 □

proof of proposition 3

$E \subset \mathbb{R}^d$を Lebesgue 可測集合とする。(**??**) の劣加法性より

$$\mu^*(A) = \mu^*((A \cap E) \cup (A \backslash E)) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$$

である。このように, 逆側の不等式$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$が非自明である。前系より$\mathbb{R}^d$の任意の部分集合$A$に対して$G_\delta$集合$H$で$A \subset H$かつ$\mu^*(A) = \mu(H)$を満たすものが存在する。(ただし, μは Lebesgue 測度である。)

1. テキスト 22 ページにある様に「Lebesgue 外測度は有限加法性を満たすのか？」
2. G_δ集合とは可算個の開集合の共通部分としてかける集合のことである。
Hを Lebesgue 測度をもって測定されうる為にはHが Lebesgue 可測であるか？(G_δ集合は可測だろうか？)
3. 1.を更に強めて一般に Lebesgue 測度は可算加法性を満たす測度か？
という疑問が生じる。2.についてはテキスト 30 ページ, 補題 1.2.13 を読まれたい。Hは今の状況では Lebesgue の意味で可測なので, 22 ページの注意にあるように以下の証明に於いて (有限) 加法性を使うことができる。

$H = (H \cap E) \sqcup (H \backslash E)$より測度の有限加法性から$\mu(H) = \mu(H \cap E) + \mu(H \backslash E)$である。$A \subset H$で$E$は第一行目に書いたように Lebesgue 可測なので

$$\mu^*(A \cap E) \leq \mu(H \cap E),\ \mu^*(A \backslash E) \leq \mu(H \backslash E)$$

を満たす。よって

$$\mu^*(A) = \mu(H) = \mu(H \cap E) + \mu(H \backslash E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$$

である。よって示せた。
$(\Longleftarrow)$ 仮定より $E \subset \mathbb{R}^d$が任意の $A \subset \mathbb{R}^d$に対して

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \tag{0.11}$$

を満たす。

$$I_k := \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \mid -k < x_j \leq k \ (j = 1, ..., d)\}$$

なる直方体族 (左半開区間の直積の族) を考えると $\mathbb{R}^d = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$である。$E_k := E \cap I_k$とおくと$\mu^*(E_k) \leq \mu^*(I_k) = m(I_k) < \infty$ であり $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$を満たす。

今回, 命題 4 の証明のときとは違って, I_kから互いに素な J_kを定義するという作業がないのは, 命題 4 では互いに素な基本集合の列に対する測度の性質を用いる必要が偶然あったためである。

前系より, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して G_δ集合 H_kを

$$E_k \subset H_k, \ \ \mu^*(E_k) = \mu(H_k)$$

を満たすようにとる。$H_k \cap E \supset E_k \cap E = E_k$に注意すると (**??**) と外測度の単調性から,

$$\mu(H_k) = \mu^*(H_k \cap E) + \mu^*(H_k \backslash E) \geq \mu^*(E_k) + \mu^*(H_k \backslash E)$$

である。よって

$$\mu^*(H_k \backslash E) \geq 0 \text{ i.e. } \mu^*(H_k \backslash E) = 0$$

である。テキスト補題 1.2.13 より $H := \cup_{k=1}^{\infty} H_k$は Lebesgue 可測である。また $H \backslash E = (\cup_{k=1}^{\infty} H_k) \cap E^c = \cup_{k=1}^{\infty} (H_k \cap E^c) = \cup_{k=1}^{\infty} (H_k \backslash E)$ であり外測度の可算劣加法性を用いると

$$\mu^*(H \backslash E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(H_k \backslash E) = 0 \tag{0.12}$$

が成り立つ。

(テキスト 19 ページ)
集合 $E \subset \mathbb{R}^d$が Lebesgue 可測であるとは, 任意の$\epsilon > 0$ に対して, $\mu^*(U \backslash E) \leq \epsilon$となるような E を含む開集合 $U \subset \mathbb{R}^d$がとれることをいう。
この定義からは直接には, H が開集合とは限らない為に上記の証明に於ける E が Lebesgue 可測であるとは結論できない。しかし, E は次の理由 (補題 1.2.13(5) 及び外測度 0 の集合の Lebesgue 可測性) によって Lebesgue 可測であると言える。

<u>外測度 0 集合の可測性</u>
$E \subset \mathbb{R}^d$が$\mu^*(E) = 0$ を満たすとする。(**??**) より, $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}$で $E \subset G$, $\mu^*(G) \leq \mu^*(E) + \epsilon = \epsilon$を

満たすものが存在する。これと外測度の単調性より$\mu^*(G\backslash E) \leq \mu^*(G) \leq \epsilon$である。定義に従って E は Lebesgue 可測集合である。
差集合はまた Lebesgue 可測
(**??**) であるから $H\backslash E$ は Lebesgue 可測である。また, $H\backslash(H\backslash E) = H\cap(H\cap E^c)^c = H\cap(H^c \cup E) = (H\cap H^c)\cup(H\cap E) \overset{E\subset H}{=} E$ なので, E は Lebesgue 可測と結論できる。

問 21 (1.1.20). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が区分的定数関数であるとは, $[a, b]$ を各区間 I_i上で f の値が定数 c_iであるような有限個の区間 $I_1, ..., I_n$に分割できることをいう。f が区分的定数関数であれば, p.c. $\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=1}^n c_i|I_i|$ は f が区分的に定数であることを示すのに用いた分割によらない。

問 22 (1.1.22). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を有界とする。このとき f が Riemann 可積分である必要十分条件はダルブー可積分である事と積分値は等しい事を示せ。

定義 7. $A \subset \mathbb{R}^{d_1}$ 上定義された $f : A \to \mathbb{R}^{d_2}$は任意の$\epsilon > 0$ に対してある$\delta > 0$ があって $|x-y| < \delta$を満たす任意の $x, y \in A$ に対し, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$を満たすとき, A 上一様連続であるという。一様連続性は任意の$\epsilon > 0$ に対し$\delta > 0$ が存在して A に含まれる直径δ未満の集合 B 上での f の振幅$\omega(f, B) := \sup_{x,y\in B} |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ということに他ならない。

問 23 (1.1.23). どんな連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 可積分であることを示しより一般に, どんな有界な区分的連続な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ も Riemann 可積分であることを示せ。

注 3. `https://en.wikipedia.org/wiki/Thomae%27s_function` に Riemann 可積分であるが連続でない関数があった。

証明. $\mathbb{R}^{d_1} \supset I$ を有界閉直方体とし, I 上連続な $f : I \to \mathbb{R}^{d_2}$の可積分性を示す。
<u>$A \subset \mathbb{R}^{d_1}$をコンパクトとし, 連続関数 $f : A \to \mathbb{R}^{d_2}$は一様連続</u>
$(\because)$ f が A 上一様連続でないと仮定する。このとき, ある$\epsilon > 0$ があって任意の$\delta > 0$ に対してある $x, y \in A$ が存在して, それは $|x - y| < \delta$かつ $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$を満たす。いま$\delta$として $\frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ を取ると, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\exists x_k, y_k \in A,\ |x_k - y_k| < \frac{1}{k} \wedge |f(x_k) - f(y_k)| \geq \epsilon \tag{0.13}$$

である。A の点列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$と $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$について考える。A はコンパクトなので (**??**) より, 点列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ の部分列 $(x_{k_p})_{p\in\mathbb{N}}$が存在して

$$\lim_{p\to\infty} x_{k_p} = x \in A$$

を満たす。(**??**) から $|x_{k_p} - y_{k_p}| < \frac{1}{k_p}$で, $p \leq k_p$だから $\lim_{p\to\infty} |x_{k_p} - y_{k_p}| = 0$ である。よって

$$|y_{k_p} - x| \leq |y_{k_p} - x_{k_p}| + |x_{k_p} - x| \to 0\ as\ p \to \infty \text{ 即ち } \lim_{p\to\infty} y_{k_p} = x$$

である。f の $x \in A$ での連続性よりϵに対してある$\delta' > 0$ があって $|x' - x| < \delta'$なら $|f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$を満たす。いま番号 $N \in \mathbb{N}$ を $p \geq N$ ならば,

$$|y_{k_p} - x| < \delta',\ |x_{k_p} - x| < \delta'$$

となるように取れる。すると $p \geq N$ に対して $|f(y_{k_p}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, $|f(x_{k_p}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$であるが, (**??**) により ($f$ の一様連続性を否定する仮定より)

$$|f(x_{k_p}) - f(y_{k_p})| \geq \epsilon$$

であるから

$$|f(y_{k_p})-f(x)|\geq|f(y_{k_p})-f(x_{k_p})|-|f(x_{k_p})-f(x)|>\epsilon-\frac{1}{3}\epsilon=\frac{2}{3}\epsilon$$

を満たす。$|f(y_{k_p})-f(x)|>\frac{\epsilon}{3}$に矛盾した。
<u>連続関数は可積分. [?]227 ページ参照</u>
($\because$) f が実数値関数の場合に示せば十分である。$I\subset\mathbb{R}^{d_1}$ は有界閉集合であるからコンパクトである。よって f は I 上で一様連続であり, 任意の$\epsilon>0$ に対して$\delta>0$ があって, $|x-y|<\delta$ を満たす任意の $x,y\in I$ に対して $|f(x)-f(y)|<\epsilon$である。よって I の分割Δで $d(\Delta)<\delta$となるものを勝手に一つとれば, 各 $k\in K(\Delta)$ に対する $x,y\in I_k$に対して $|x-y|\leq d(\Delta)<\delta$より, $|f(x)-f(y)|<\epsilon$が成り立つ。従って$\omega(f,I_k)\leq\epsilon$となる。$v(I)=\sum_{k\in K(\Delta)}v(I_k)$ により

$$\sum_{k\in K(\Delta)}\omega(f,I_k)v(I_k)\leq\epsilon\sum_{k\in K(\Delta)}v(I_k)=\epsilon v(I)$$

である。ϵの任意性より f は I 上可積分である。[?]217 ページの定理 3.3(可積分条件)(c) を参照する必要があり, また $\sum_{k\in K(\Delta)}\omega(f,I_k)v(I_k)=0$ なら $d(\Delta)\to 0$ をとっても 0 という流れがあろう。 □

演習 1.1.23 が言い指すある有界関数の可積分性は, 次の命題と$\mathbb{R}^d$での零集合と体積 (volume)0 の集合の同値性, というよりかは (**??**) の (3) によって結論されると思われる。

命題 5. $I\subset\mathbb{R}^d$を有界直方体とし, 有界関数 $f:I\to\mathbb{R}$ について次は同値である。
(1) f は I 上 Riemann 可積分
(2) f の不連続点全体 E は零集合

証明. ($\Rightarrow$) f を I 上で可積分とすれば, 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し, $E(1/m):=\{x\in I\mid a(f,x)\geq 1/m\}$ とおくと $E=\cup_{m=1}^{\infty}E(1/m)$ である。従って E が零集合であることを示すには (**??**) の (2) より $E(1/m)$ が零集合であることを示せばよい。f は I 上可積分なので, 任意の$\epsilon>0$ に対し I の分割Δを

$$S(f,\Delta)-s(f,\Delta)<\frac{\epsilon}{m}$$

となるように取る。($\because$ [?]217 ページ, 定理 3.3) いま $K_0:=\{k\in K(\Delta)\mid I_k^\circ\cap E(1/m)\neq\emptyset\}$ とおく。$k\in K_0$に対して $x\in I_k^\circ\cap E(1/m)$ となる x が存在し, ある$\delta>0$ に対して $U(x,\delta)\subset I_k$となり, $a(f,I_k)\geq a(f,U(x,\delta))\geq a(f,x)\geq 1/m$ を満たす。従って

$$\frac{1}{m}\sum_{k\in K_0}v(I_k)\leq\sum_{k\in K_0}a(f,I_k)v(I_k)\leq\sum_{k\in K(\Delta)}a(f,I_k)v(I_k)\underset{a(f,I_k)=M_k-m_k}{\equiv}S(f,\Delta)-s(f,\Delta)<\frac{\epsilon}{m}$$

となる。故に

$$\sum_{k\in K_0}v(I_k)<\epsilon \tag{0.14}$$

である。
一方分割Δによって生じる全ての小区間の境界の和集合を A とすれば $v(A)=0$ である。即ちある有界閉直方体 $J_1,...,J_p$があって $\cup_{q=1}^{p}J_q\supset A,\sum_{q=1}^{p}v(J_q)<\epsilon$を満たす。各 $E(1/m)$ を,

ある I_k の内部 I_k° に含まれる部分と I_k の境界に含まれる部分とに分けると，(K_0 の定義及び (**??**) から)

$$E(1/m) \subset (\cup_{k\in K_0} I_k) \cup (\cup_{q=1}^{p} J_q),\ \ \sum_{k\in K_0} v(I_k) + \sum_{q=1}^{p} v(J_q) < 2\epsilon$$

である。$v(E(1/m)) = 0$ より (**??**) ゆえに零集合である。

($\Leftarrow$) f の不連続点全体 E は零集合とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して，有界開直方体の列 $(J_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ で，

$$E \subset \cup_{m=1}^{\infty} J_m,\ \ \sum_{m=1}^{\infty} v(J_m) < \epsilon$$

を満たすものがある。

$\forall x \in I\backslash E$ を取れば，この x に対して $a(f,x) = 0$ なので，$a(f, B(x,\delta)\cap I) < \epsilon$ を満たす $\delta > 0$ が存在する。そこで x を含む開直方体 $L_x \subset \mathbb{R}^d$ を，$L_x \subset B(x,\delta)$ となるように取れば $a(f, L_x \cap I) < \epsilon$ を満たす。

$(J_m)_{m\in\mathbb{N}} \cup (L_x)_{x\in I\backslash E}$ は I の開被覆であり，I はコンパクトなので有限開被覆が存在する。その有限個の開直方体を $J_1,...,J_p, L_1,...,L_q$ とする。このとき補題 (**??**) より I の分割 Δ であって，任意の $k \in K(\Delta)$ に対して

$$(i)\ I_k \subset J_i\ (1 \le \exists i \le p)\ \text{もしくは}\ (ii)\ I_k \subset L_i\ (1 \le \exists i \le q)$$

が成り立つ。そこで (i) を満たす $k \in K(\Delta)$ 全体を P, (ii) を満たす $k \in K(\Delta)$ 全体を Q とおく。f は有界より $|f(x)| < M$ を満たす M があり $\forall k \in K(\Delta)$ に対して，

$$a(f, I_k) := \sup_{x,y\in I_k} |f(x) - f(y)| \le 2 \sup_{x\in I_k} |f(x)| < 2M$$

である。よって

$$\sum_{k\in P} a(f,I_k)v(I_k) < 2M \sum_{k\in P} v(I_k) \underset{\text{互いに素な } I_k \text{への有限加法性}}{=} 2Mv(\cup_{k\in P} I_k) \le 2Mv(\cup_{i=1}^{p} J_i) \underset{\text{有限劣加法性}}{\le} 2M \sum_{i=1}^{p} v(J_i) < 2M\epsilon$$

となる。一方 $k \in Q$ ならば，$I_k \subset L_i \cap I$ なる番号 i が存在し $a(f, I_k) \le a(f, L_i \cap I) < \epsilon$ となるので

$$\sum_{k\in Q} a(f,I_k)v(I_k) < \epsilon \sum_{k\in Q} v(I_k) \le \epsilon \sum_{k\in K(\Delta)} v(I_k) = \epsilon v(I)$$

となる。これらから

$$0 \le S(f) - s(f) \underset{[\mathbf{?}]213}{\le} S(f,\Delta) - s(f,\Delta) \equiv \sum_{k\in K(\Delta)} a(f,I_k)v(I_k) = \sum_{k\in P} a(f,I_k)v(I_k) + \sum_{k\in Q} a(f,I_k)v(I_k) < (2M + v(I))\epsilon$$

である。$S(f)$ は [**?**] では S と表記されるものであるが，同書定理 3.3(d) により f は I 上 Riemann 可積分である。 □

補題 8. $I \subset \mathbb{R}^d$ を有界直方体，$J_1,...,J_m$ を $I \subset \cup_{i=1}^{m} J_i$ を満たす $\mathbb{R}^d$ の開直方体とする。このとき I の分割 Δ であって，任意の $k \in K(\Delta)$ に対して I_k がある J_i に含まれるものが存在する。

証明. $f_i(x) = d(x, J_i^c)$, $f(x) = \max\{f_1(x), ..., f_m(x)\}$ と定義すれば f_i, f は連続である。$\{J_i\}_{1\le i\le m}$ は I を覆うので任意の $x \in I$ に対し $x \in J_j$なる番号 j がある。このとき $x \notin J_j^c$より $f_j(x) > 0$ であり, $f(x) > 0$ である。I はコンパクトなので f は I 上の最小値 r をもつが

$$r > 0$$

である。さて $d(\Delta) < r$ なる I の任意の分割Δを考える。分割により生じる小直方体のうち任意に 1 つ I_k $(k \in K(\Delta))$ を選び, 勝手な $x \in I_k$をとれば $f(x) = f_i(x)$ となる i がある。この i に対して

$$d(x, J_i^c) = f_i(x) = f(x) \ge r$$

である。すると任意の $y \in I_k$に対して $d(y, x) \le d(\Delta) < r$ であるから $B(x, r) \supset I_k$が成り立つ。また $y \in B(x, r)$ ならば

$$d(y, J_i^c) \ge d(x, J_i^c) - d(x, y) \underset{r\,\text{の定義}}{>} 0$$

となって, $y \in J_i$である。以上から $I_k \subset B(x, r) \subset J_i$が結論される。 □

演習 *1.1.23* をもう一度. $[a, b]$ 上定義された連続な f は一様連続であるから任意の$\epsilon > 0$ に対してある$\delta > 0$ があって, $\forall x, y \in [a, b]$ に対して $|x - y| < \delta$ならば $|f(x) - f(y)| < \epsilon$を満たす。f が可積分であることを示すためには, 任意に与えられた正数ϵに対して次の条件を満たす$\delta > 0$ の存在を保証すれば良い。つまり, $[a, b]$ の分割$\Gamma = \{x_0 < \cdots < x_d\}$ が $|\Gamma| := d(\Gamma) = \max\{x_{i+1} - x_i\} < \delta$ならば, $S_\delta - s_\delta < \epsilon$であるような$\delta$である。ただし,

$$S_\delta := \inf \sum_i M_i(x_{i+1} - x_i),\ s_\delta := \sup \sum_i m_i(x_{i+1} - x_i),\ M_i := \max f|_{[x_i, x_{i+1}]}, m_i := \min f|_{[x_i, x_{i+1}]}$$

f は $[a, b]$ 上一様連続なので

$$\exists \delta > 0\ [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$

である。このδに対し $|\Gamma| < \delta$なるどんな分割Δに対しても $M_i - m_i < \epsilon/b - a$ なので, $S_\delta - s_\delta < \frac{\epsilon}{b-a}(b - a) = \epsilon$である。これに可積分条件を適用し題意が成り立つ。 □

1 1.2 節

問 24 (1.2.1)**.** $E_1, E_2, ... \subset \mathbb{R}$ はジョルダン可測とする。可算和$\cup_{n=1}^\infty E_n$や可算共通部分$\cap_{n=1}^\infty E_n$は有界であったとしてもジョルダン可測とは限らないことを示せ。

証明. $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$ は一点集合 $\{x\} \subset \mathbb{Q}$ の可算和としてかける。$\{x\}$ はジョルダン可測であるが $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ はジョルダン可測でない。なぜなら, 有界集合 E と E°のジョルダン内測度は一致し, E と$\overline{E}$のジョルダン外測度は一致するのであったが, 一般的には E のジョルダン内測度は E°の Lebesgue 測度と等しく, E のジョルダン外測度は$\overline{E}$の Lebesgue 測度に等しい。そこで, $\{x\}^\circ = \emptyset$で Lebesgue 測度 0, $\overline{\{x\}} = \{x\}$ で Lebesgue 測度 0 と図ると, $\{x\}$ のジョルダン外測度と内測度は同じことがわかる。よって $\{x\}$ はジョルダン可測である。
後者の例についてはハルナック集合が該当する。それは一辺の長さ 1 の正方形 H_0から

幅 1/4 の十字を取り除いたものを H_1 とし, H_1 に含まれる 4 つの正方形から幅 $1/4^2$ の十字を取り除いたものを $H_2, ...$ として出来る図形に対して $H = \cap_{n=0}^{\infty} H_n$ で定まる集合のことである。$m_{*,(J)}(H) = 0$ であり, またジョルダン外測度を計算したい。
H_1 は一辺 $(1 - \frac{1}{4})\frac{1}{2}$ の正方形 4 個, H_2 は一辺 $(1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4^2})\frac{1}{2^2}$ の正方形 4^2 個, H_3 は一辺 $(1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4^2} - \frac{2^2}{4^3})\frac{1}{2^3}$ の正方形 4^3 個ある。
すなわち, H_n に含まれる一辺の長さ

$$\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4^2} - \cdots - \frac{2^{n-1}}{4^n}\right)\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

の正方形は 4^n 個ある。H_n に関するジョルダン外測度を求める際にどのように H_n を覆うにしてもこの正方形らを含むので,

$$m^{*,(J)}(H_n) \geq \left\{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right\}^2 \times 4^n = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^2$$

である。よって $H = \cap_{n=0}^{\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} H_n$ に対する外測度は $m^{*,(J)}(H) \geq \frac{1}{4}$ であり, $m^{*,(J)}(H) \neq m_{*,(J)}(H)$ を満たす。各 $H_n \subset \mathbb{R}^2$ はジョルダン可測である。 □

問 25. 一様有界でリーマン可積分な関数からなる列 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ で, リーマン可積分でない $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に各点収束するようなものの例を挙げよ。各点収束でなく一様収束ならどうか。(もし一様収束極限なら矛盾する？)

証明. 最大・最小値の原理より, $\mathbb{R}$ の有界閉区間上定義された実数値連続関数は有界である。そのような関数列の各点収束極限で有界でなく従ってリーマン可積分でないものを選べば良い。
$[0,1]$ 上の実数値連続関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x \leq 1/n) \\ \frac{1}{x} & (1/n \leq x \leq 1) \end{cases}$$

とおく。$(f_n)_n$ は $[0,1]$ 上の実数値関数

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \frac{1}{x} & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

に各点収束する。実際, $x > 0$ なら $x > \frac{1}{n_0}$ なる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し $n > n_0$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n(x) = \frac{1}{x}$ である。即ち $x > 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$ である。$x = 0$ のときは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = 0$ より $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ であり, よって f_n は非有界関数 f に各点収束する。 □

注 4. しかし, 次のような $[0,1]$ 上で連続関数に各点収束する実数値連続関数 (一様有界かつ可積分であるという条件を満たす。) の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって, 一様収束しない例もある。
各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & if\ x \in [0, 1/n] \\ -n^2 x + 2n & if\ x \in [1/n, 2/n] \\ 0 & if\ x \in [2/n, 1] \end{cases}$$

で定めると, $\forall x \in [0,1]; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ である。

問 26 (アスコリ・アルツェラの定理と問い)**.** 次の命題を用いて解く問いを解きたい。$K \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とし, $C(K) = \{h \mid h$ は K 上連続な関数 $\}$ とおく。関数列 $\{f_n\} \subset C(K)$ で次の条件を共に満たすものがあるとする。
(一様有界性) ある $M > 0$ があって, $\|f_n\|_\infty := \max_{x\in K} |f_n(x)| \le M \ \forall n \ge 1$
(同程度連続性) ある関数$\omega(x, x')$ で$\omega(x, x') \to 0$ $(|x - x'| \to 0)$ となるものがあって

$$|f_n(x) - f_n(x')| \le \omega(x, x')\ ; \forall n \ge 1\ \forall x, x' \in K$$

このとき, ある部分列 $\{f_{n_k}\}$ とある $f \in C(K)$ が存在して, $\|f_{n_k} - f\|_\infty \to 0$ $(k \to \infty)$ を満たす。(i.e. f_{n_k}は f に K 上一様収束する。)
問いとは次の内容である。
いま $\{f_n\} \subset C(K)$ について $\{f_n\}, \{f'_n\}$ が $C(K)$ 上一様有界であるとする。このとき, $\{f_n\}$ の部分列で $C(K)$ 上一様収束するものが存在する。
なぜなら, $\{f'_n\}$ は一様有界より $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in C(K)} |f'_n(z)| < \infty$ である。平均値の定理より $|f_n(x) - f_n(y)| \le |x-y| \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in C(K)} |f'_n(z)|$ なので $\{f_n\}$ は同程度連続である。よって Ascoli, Arzela から $C(K)$ 上ある h に一様収束する $\{f_{n_k}\}$ が存在する。

問 27 (1.2.3, 外測度の公理)**.** (1) $m^*(\emptyset) = 0$ (2) 単調性 : もし $E \subset F \subset \mathbb{R}^d$なら $m^*(E) \le m^*(F)$ (3) 可算劣加法性 : $m^*(\cup_{n=1}^\infty E_n) \le \sum_{n=1}^\infty m^*(E_n)$

証明. 可算選択公理をどこで使ったのかもう一度考えることとする。 □

問 28 (1.2.4)**.** $E, F \subset \mathbb{R}^d$を交わらない閉集合とし, E, F の少なくとも一方はコンパクトであるとする。このとき $\mathrm{dist}(E, F) > 0$ であることを示せ。またコンパクト性の仮定を外した場合にはこの結論が成り立たない例を考えよ。

証明.

$$\mathrm{dist}(E, F) := \inf\{|x - y| \mid x \in E, y \in F\} = \inf\{\mathrm{dist}(x, F) \mid x \in E\} := \inf\{\inf\{|x - y|; y \in F\} \mid x \in E\}$$

である。E をコンパクト集合とし, 写像 $E \to \mathbb{R}; x \mapsto \mathrm{dist}(x, F)$ はコンパクト集合上の連続関数である。このことから,

$$\mathrm{dist}(E, F) = \mathrm{dist}(x_0, F)$$

となる $x_0 \in E$ が存在する。E, F は互いに交わらないので $x_0 \notin F$ である。F は閉集合なので $x_0 \notin \overline{F}$でもある。よって, $\mathrm{dist}(E, F) = \mathrm{dist}(x_0, F) > 0$ を満たす。後半のコンパクト性を外した反例については, $E = \{(x, 1/x) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ が該当する。 □

命題 6 (補題 1.2.9)**.** $E = \cup_{n=1}^\infty B_n$をほとんど交わらない直方体 $B_1, B_2, \ldots$の可算和集合とするとき

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$$

が成り立つ。従って, たとえば $\mathbb{R}^d$は無限大の外測度をもつ。

証明. 可算劣加法性と, 基本集合に対する測度の同値性 (**??**) から

$$m^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \le m^*(E)$$

を示す。N を自然数とすると, E は殆ど交わらない基本集合 $B_1 \cup \cdots \cup B_N$ を含むので, 単調性から

$$m^*(E) \ge m^*(B_1 \cup \cdots \cup B_N) = m(B_1 \cup \cdots \cup B_N)$$

であり, よって $\sum_{n=1}^{N} |B_n| \le m^*(E)$ である。$N \to \infty$ とすると主張を得る。 □

問 29 (1.2.5)**.** 基本集合とは有限個の直方体の和集合としてかける $\mathbb{R}^d$ の部分集合のことを指した。どんな基本集合もジョルダン可測であるがそれと, μ^* を Lebesgue 外測度として一般的に成り立つ (テキスト 26 ページ),

$$m_{*,(J)}(E) \le \mu^*(E) \le m^{*,(J)}$$

ということから, 題意を確かめることもできるのかなと思ったが、どうなのだろうか。適当な拡張とは次を意味する。有界でない集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ について E がジョルダン可測であるとは, $\mathbb{R}^d$ の任意の有界ジョルダン可測集合 K に対して $E \cap K$ がジョルダン可測であることを言う。「ほとんど交わらない直方体の可算和集合」は基本集合とみなしても良いのだろうか? しかしながら, やはりジョルダン内測度の定義 $m_{*,(J)}(E) := \sup_{A \subset E \text{ となる基本集合 } A} m(A)$ を振り返れば, 補題 1.2.9 と合わせて,

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| =: m_{*,(J)}(E)$$

という簡潔な論理展開によって示されると考えた。$E = \lim_{m \to \infty} \cup_{n=1}^{m} B_n$ とみて, $(E \supset) B_1 \cup \cdots \cup B_m$ に対しジョルダン内測度の定義を適用している。なので sup の性質についてよく考える必要がある。

注 5 (26 ページ, ジョルダン非可測な有界開, コンパクト集合の存在)**.** $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ は可算なのでその元を $\{q_1, q_2, ...\}$ とかける。$\epsilon > 0$ を小さな数にとって $U := \cup_{n=1}^{\infty} (q_n - \frac{\epsilon}{2^n}, q_n + \frac{\epsilon}{2^n})$ とおく。これは開集合である。外測度の可算劣加法性より

$$m^*(U) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^n} = 2\epsilon$$

である。ところが U は $[0,1]$ で稠密なので

$$m^{*,(J)}(U) \overset{\text{演習 1.1.18}}{=} m^{*,(J)}(\overline{U}) = m^{*,(J)}([0,1]) = 1$$

となる。よって, $\epsilon := 1/3$ とすると U のジョルダン外測度と Lebesgue 外測度は一致していない。これと, 一般に

$$m_{*,(J)}(E) \le m^*(E) \le m^{*,(J)}(E) \tag{1.1}$$

なので, $m_{*,(J)}(E) \neq m^{*,(J)}(E)$ ゆえ有界開集合 U はジョルダン可測でない。また例えば $[-2,2]\backslash U$ はコンパクトであるが, ジョルダン可測でない。

補題 9 (補題 1.2.11)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする。E は殆ど交わらない直方体 (閉立方体) の可算和集合として表される。

証明. $n \geq 0, i_1, ..., i_d$ を整数として

$$Q = [\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_1+1}{2^n}] \times \cdots \times [\frac{i_d}{2^n}, \frac{i_d+1}{2^n}]$$

という形をしている立方体 Q を閉 2 進立方体と呼ぶ。一辺の長さが 2^{-n} の 2 進立方体を一つ考えると, それを含んでいるような長さ 2^{-n+1} であるような「親」立方体が唯一ある。(逆に言えば一辺の長さが 2^{-n+1} である立方体は, 一辺が 2^{-n} の「子」立方体を 2^d 個持っている。) 任意に 2 つの閉 2 進立方体が与えられると, それらは殆ど交わらないか, あるいは一方が他方の中に含まれているか, いずれかである。
E が開であり, $x \in E$ とすると, x を中心とする開球で E に含まれるようなものがある。そして, x を含むような閉 2 進立方体で E に含まれるようなものも存在する。よって, E に含まれる 2 進立方体全てからなる集合を $\mathcal{Q}$ とおくと, $\cup_{Q\in\mathcal{Q}} Q = E$ である。
2 進立方体は可算個なので, $\mathcal{Q}$ は高々可算である。しかし, これで完了ではない。これらの立方体は殆ど交わらないという訳ではない (例えば, どんな $\mathcal{Q}$ に含まれるどんな立方体 Q もその子立方体と重なる部分がある。) からである。しかし, これは次のように対処できる。$\mathcal{Q}$ に含まれる立方体で, 集合の包含関係に関して極大であるようなものを集めた集合を $\mathcal{Q}^*$ とする。つまり, $\mathcal{Q}$ の中で他の立方体には含まれることのない立方体全体である。$\mathcal{Q}$ のどんな立方体も $\mathcal{Q}^*$ のただ 1 つの極大立方体に含まれていることを意味する。
そして $\mathcal{Q}^*$ の極大立方体は殆ど交わらない。従って E は殆ど交わらない立方体の和集合として $E = \cup_{Q\in\mathcal{Q}^*} Q$ とかける。$\mathcal{Q}^*$ は高々可算であり, 可算にする必要があるならば空集合を加えることで主張が従う。 □

補題 10 (補題 1.2.12, 外部正則性)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$ を任意の集合とする。

$$m^*(E) = \inf_{E\subset U, U\text{ は開}} m^*(U)$$

が成り立つ。

証明. 単調性から

$$m^*(E) \leq \inf_{E\subset U, U\text{ は開集合}} m^*(U)$$

は自明なので

$$\inf_{E\subset U, U\text{ は開集合}} m^*(U) \leq m^*(E)$$

を示す。$m^*(E) = \infty$ なら明らかなので $m^*(E)$ は有限であるとする。任意に $\epsilon > 0$ をとり, 外測度の定義から E を覆うような直方体の可算列 $B_1, B_2, ...$ で,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq m^*(E) + \epsilon$$

となるものがある。この直方体 $B_1, B_2, ...$ それぞれを $|B'_n| \leq |B_n| + \frac{\epsilon}{2^n}$ を満たす開直方体 $B'_n (\supset B_n)$ へと広げる。すると $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} B'_n$ は開集合である。また,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B'_n| \leq m^*(E) + \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = m^*(E) + 2\epsilon$$

であり, 可算劣加法性から $m^*(\cup_{n=1}^{\infty} B'_n) \leq m^*(E) + 2\epsilon$ である。よって,

$$\inf_{E \subset U, U \text{ は開集合}} m^*(U) \leq m^*(E)$$

である。 □

問 **30** (1.2.6)**.**

$$m^*(E) = \sup_{U \subset E, U \text{ は開}} m^*(U)$$

が成り立たない集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ を列挙せよ。

証明. $a \in \mathbb{R}^d, A = \{a\}$ とおく。$m^*(A) = 0$ であることを示せば, (右辺) $= \sup_{U \subset A, U:\text{開集合}} m^*(U) = m^*(\emptyset) \overset{\text{演習 1.2.3(1)}}{=} 0$ であるから...ってこれは一致するか。でも示す。$a \in \mathbb{R}^d$ を $a = (a_1, ..., a^d)$ と成分表示する。任意に $\epsilon > 0$ を取り, $J^{\epsilon} = (a^1 - \epsilon^{1/d}, a^1] \times \cdots \times (a^d - \epsilon^{1/d}, a^d]$ と定める。外測度の定義より

$$0 \leq m^*(\{a\}) \leq m(J^{\epsilon}) = \prod_{i=1}^{d} \{a^i - (a^i - \epsilon^{1/d})\} = \epsilon$$

である。$\epsilon > 0$ の任意性より, $m^*(A) = 0$ を満たす。
次も該当例ではないのであるが $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ の内部は $\emptyset$ なので (右辺) $= 0$, (左辺) $= m^*([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ を示す。全単射 $f : [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \{1, 2, ...\}$ がある。任意の正数 $\epsilon > 0$ に対して $g_{\epsilon} : \{1, 2, ...\} \to \mathbb{R}$ を $g_{\epsilon}(n) = \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ で定める。集合 $B := \{(x - g_{\epsilon} f(x), x + g_{\epsilon} f(x)) \mid x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$ とおく。明らかに $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset B$ であり $\mu(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n}) = \epsilon$ を満たすので $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ の Lebesgue 測度は 0 である。
2 次元ハルナック集合が (左辺) > 0 で (右辺) $= \sup_{U \subset E, U \text{ は開}} m^*(U) = 0$ となる集合の例であろうか。(1) ハルナック集合は閉集合 (2) ハルナック集合はどのような小さい正方形も内部に含まないので, $E^{\circ} = \emptyset$?なのかを確かめる必要がある。
また, (3) ハウスドルフ空間の任意の有限部分集合は閉集合, であるがハルナック集合がハウスドルフであることを言えば, (右辺) $= 0$ と言及できる方向もあると考えた。これを示す為には, (4) ハルナック集合はカントール集合と位相同型であり, カントール集合の特徴づけが数種ある中, 距離付け可能であることに注目して最後に (5) 距離空間はハウスドルフであることを辿れば良いと思われる。
(4) は `https://drive.google.com/file/d/1zoJ10l-yLBf2GSgjRVmCXG2zP7pT9-nk/view?usp=sharing` を参照させて頂いた。 □

補題 11 (補題 1.2.13)**.** (1) 開集合は Lebesgue 可測である。(2) 閉集合は Lebesgue 可測である。(3) Lebesgue 外測度が 0 であるもの (つまり零集合) は可測である。(4) $\emptyset$ は可測。
(5) もし $E \subset \mathbb{R}^d$ が可測なら補集合 $\mathbb{R}^d \backslash E$ も可測である。(6) $E_1, E_2, ... \subset \mathbb{R}^d$ が Lebesgue 可測集合なら $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ も可測である。(7) $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$ も Lebesgue 可測である。

証明. (6) を示す。ϵを任意の正数とする。テキスト定義 1.2.2.より各 E_nは $m^*(U_n\backslash E_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$を満たす開集合 U_nに含まれる。よって $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$であり，外測度の可算劣加法性から $m^*(\cup_{n=1}^{\infty} U_n\backslash \cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(U_n\backslash E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$である。即ち $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$は可測である。

(2) を示す。閉集合 E は有界閉集合の可算和集合である。(例えば $n = 1, 2, ...$として閉球 $\overline{B(0,n)}$と E との交わり) なので，**(6) の事実から**有界な閉集合つまりコンパクトとして示しても良い。ϵを任意の正数とする。外部正則性 (補題 1.2.12) から，$m^*(U) \leq m^*(E) + \epsilon$なる $(E \subset)U$: 開集合がある。そこで,

$$m^*(U\backslash E) \leq \epsilon$$

であることを示す。$U\backslash E$ は開であるから，**(??)** により，殆ど交わらない閉立方体の可算和集合 $U\backslash E = \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$とかける。**(??)** より,

$$m^*(U\backslash E) = \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n|$$

なので, 任意の有限の N に対して

$$\sum_{n=1}^{N} |Q_n| \leq \epsilon$$

を示せば十分である。$\cup_{n=1}^{N} Q_n$は閉集合であり，コンパクト集合 E とは交わらない。**(??)** と補題 1.2.5 のある状況に対する有限加法性より (**これは盲点!**)

$$m^*(E \cup \cup_{n=1}^{N} Q_n) = m^*(E) + m^*(\cup_{n=1}^{N} Q_n)$$

である。単調性から $m^*(E \cup \cup_{n=1}^{N} Q_n) \overset{\text{単調性}}{\leq} m^*(U) \leq m^*(E) + \epsilon$なので，(右辺) $\leq \epsilon$を満たす。

次に (5) を示す。

E の可測性から，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m^*(U_n\backslash E) \leq \frac{1}{n}$$

となる $E \subset U_n$: 開集合がある。$F_n := U_n^c = \mathbb{R}^d\backslash U_n$とおくと，$F_n \subset E^c$であるので，上式は即ち

$$m^*((\mathbb{R}^d\backslash E)\backslash F_n) \leq \frac{1}{n}$$

である。$F := \cup_{n=1}^{\infty} F_n$とおくと $F \subset E^c$である。よって

$$m^*((\mathbb{R}^d\backslash E)\backslash F) \underset{\text{単調性}}{\leq} m^*((\mathbb{R}^d\backslash E)\backslash F_n) \leq \frac{1}{n}$$

$n \in \mathbb{N}$ は任意なので，(左辺) = 0 である。これは $\mathbb{R}^d\backslash E$ は，F と Lebesgue 外測度 0 の集合の合併であることを意味する。F は可算個の閉集合の合併であり，本問 (2), (3), (6) を見ると E が Lebesgue 可測であることが諒解される。 □

注 6. (2) で E の有界性は最後の (右辺) $\leq \epsilon$を満たすことを言う際に使っている。もし ∞ なら普通の数と並べて加減演算できないからである。

問 31 (1.2.7)**.** (1) $E \subset \mathbb{R}^d$は Lebesgue 可測
(2) (開集合による外からの近似) 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(U\backslash E) \leq \epsilon$となるような $E \subset U$: 開集合がある。
(3) (ほとんど開集合) 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(U\Delta E) \leq \epsilon$となる開集合 U が存在する。
(4) (閉集合による中からの近似) 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(E\backslash F) \leq \epsilon$となるような $F(\subset E)$: 閉集合がある。
(5) (ほとんど閉集合) 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(F\Delta E) \leq \epsilon$となるような閉集合 F がある。
(6) (ほとんど可測) 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(E_\epsilon \Delta E) \leq \epsilon$であるような可測集合 E_ϵがある。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (4) ([**?**] 定理 7.5 では Borel 可測に対する必要十分条件が書いてある) :
補題 1.2.13 より, Lebesgue 可測集合全体 $\mathscr{L}_{\mathbb{R}^d}$は$\sigma$加法族の性質をもつ。$E$ が可測 $\Leftrightarrow$ E^cが可測 :$\Leftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0 \exists G \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}; E^c \subset G, m^*(G\backslash E^c) \leq \epsilon$である。$F := G^c$とおくと F は閉集合であり $F = G^c \subset E$, $G\backslash E^c = G \cap (E^c)^c = E \cap (G^c)^c = E\backslash F$ より $m^*(E\backslash F) \leq \epsilon$が成り立つ。
(1) $\Leftrightarrow$ (2) は可測の定義そのものである。
(6) $\Rightarrow$ (1) : E_ϵを $m^*(E_\epsilon \Delta E) \leq \epsilon$を満たす可測集合とする。任意の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^d$に対して

$$A \cap E \subset (A \cap E_\epsilon) \cup (E\backslash E_\epsilon),\ \ A\backslash E \subset (A\backslash E_\epsilon) \cup (E_\epsilon\backslash E)$$

単調性より

$$m^*(A \cap E) + m^*(A\backslash E) \leq m^*(A \cap E_\epsilon) + m^*(A\backslash E_\epsilon) + m^*(E\backslash E_\epsilon) + m^*(E_\epsilon\backslash E)$$

である。E_ϵは Lebesgue 可測なので, $m^*(A \cap E_\epsilon) + m^*(A\backslash E_\epsilon) = m^*(A)$ であり, $m^*(E\backslash E_\epsilon) + m^*(E_\epsilon\backslash E) \leq 2m^*(E\Delta E_\epsilon) \leq 2\epsilon$である。(なぜなら, もし $E \subset E_\epsilon$なら $E_\epsilon \Delta E = E_\epsilon\backslash E$.) すると$\epsilon$は任意の正数なので

$$m^*(A \cap E) + m^*(A\backslash E) \leq m^*(A)$$

を満たし, よって E は可測集合である。(2) $\Rightarrow$ (3) : (2) が成り立つとする。$E \subset U$ に対しては $U\Delta E = U\backslash E$ より明らか。
(1) $\Rightarrow$ (6) : (1) が成り立つとする。このとき $\forall\epsilon > 0 \exists E_\epsilon \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}; E \subset E_\epsilon$かつ $m^*(E_\epsilon\backslash E) \leq \epsilon$である。開集合は可測集合だったので明らかに (6) が成り立つ。
(6) $\Rightarrow$ (1) を示す方法にヒントのやり方があるが, 有限積が可測性を保つことをメモしておく。$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathscr{A}_i\})$ の性質より, $A_1 \in \mathscr{L}^N, A_2 \in \mathscr{L}^M$に対して,

$$\mu_{\mathbb{R}^N} \otimes \mu_{\mathbb{R}^M}(A_1 \times A_2) = \mu_{\mathbb{R}^N}(A_1) \cdot \mu_{\mathbb{R}^M}(A_2)$$

が成り立つことに注意する。A_1, A_2は Lebesgue 可測集合なので, 閉集合 V_1, V_2と開集合 U_1, U_2があって

$$V_1 \subset A_1 \subset U_1,\ V_2 \subset A_2 \subset U_2 \text{かつ} \mu_{\mathbb{R}^N}(U_1\backslash V_1) \leq \frac{1}{2}\epsilon,\ \mu_{\mathbb{R}^M}(U_2\backslash V_2) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

を満たす。

$$U_1 \times U_2 = (U_1 \times V_2) \sqcup (U_1 \times (U_2\backslash V_2)) = (V_1 \times V_2) \sqcup ((U_1\backslash V_1) \times V_2) \sqcup (U_1 \times (U_2\backslash V_2)) \supset A_1 \times A_2 \supset V_1 \times V_2$$

である。よって測度の有限加法性より

$$\mu_{\mathbb{R}^{N+M}}((U_1 \times U_2)\backslash(V_1 \times V_2)) = \mu_{\mathbb{R}^{N+M}}((U_1\backslash V_1) \times V_2) + \mu_{\mathbb{R}^{N+M}}(U_1 \times (U_2\backslash V_2))$$

$$= \mu_{\mathbb{R}^N}(U_1 \backslash V_1)\mu_{\mathbb{R}^M}(V_2) + \mu_{\mathbb{R}^N}(U_1)\mu_{\mathbb{R}^M}(U_2 \backslash V_2)$$

もし$\mu_{\mathbb{R}^N}(U_1), \mu_{\mathbb{R}^M}(V_2) \leq M$ を満たす M が存在すれば, $\epsilon' := \epsilon/2M$ とおいて $A_1 \times A_2$は可測である。

□

問 32 (1.2.8)**.** ジョルダン可測集合は Lebesgue 可測であることを示せ。

証明. 体積 0 ⇒ 零集合 (Lebesgue 外測度が $0 \cdots *$) ⇒ Lebesgue 可測ゆえに, 以下の命題又は系 (1) において $A \backslash K$ は Lebesgue 可測である。補題 1.2.6.そして $(*)$ と演習 1.2.7(4) を合わせて A は Lebesgue 可測であることが示される。 □

命題 7 (lebesgue181126 系 8.2.3 参照)**.** $A \subset \mathbb{R}^d$を有界集合とし任意の$\epsilon > 0$ に対して閉基本集合 $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^d$であって

$$K_1 \subset A \subset K_2,\ m_{*,(J)}(A) - \epsilon < m^{(J)}(K_1) \leq m^{(J)}(K_2) < m^{*,(J)}(A) + \epsilon \tag{1.2}$$

を満たすものが存在する。特に A がジョルダン可測ならば, $m^{(J)}(A \backslash K_1), m^{(J)}(K_2 \backslash A) < \epsilon$である。

微積分学の要諦
$A \subset I$ となる有界閉直方体 I の分割Δに対して, $\lim_{d(\Delta)<0} s(1_A, \Delta) = v(A)$ である。

$$s(1_A, \Delta) = \sum_{k \in K(\Delta)} m(1_A, I_k)v(I_k),\ m(1_A, I_k) = \inf_{x \in I_k} 1_A(x) = \begin{cases} 1 & I_k \subset A \\ 0 & I_k \not\subset A \end{cases}$$

だから, $s(1_A, \Delta) = \sum_{k \in K(\Delta), I_k \subset A} v(I_k)$ となり

$$K_\Delta := \cup_{k \in K(\Delta), I_k \subset A} I_k$$

とおくと

$$v(K_\Delta) = s(1_A, \Delta)$$

であることが分かる。即ち任意の$\epsilon > 0$ に対し $d(\Delta)$ を十分小さくすれば $v(A) - s(1_A, \Delta) < \epsilon$とでき $v(A) - \epsilon < v(K_\Delta)$ である。

上命題の証明, $m_* = m_{*,(J)}$とかく. $m_*(A) = s(1_A) < \infty$ であり任意の正数ϵについて I の分割Δであって,

$$m_*(A) - \epsilon < s(1_A, \Delta) = m(K_\Delta)$$

を満たすものが存在する。(色を付けたところはいつものϵの余地をもらう技.) そこでこのような I の分割Δに対して $K_1 := K_\Delta$とすれば良い。K_2としては $k \in K(\Delta), I_k \cap A \neq \emptyset$となる I_kの和集合を取る。(i.e. $K_2 := \cup_{k \in K(\Delta), I_k \cap A \neq \emptyset} I_k$) ここで過剰和の定義から

$$S(1_A, \Delta) = \sum_{k \in K(\Delta)} M(1_A, I_k)m(I_k),\ M(1_A, I_k) = \sup_{x \in I_k} 1_A(x) = \begin{cases} 1 & I_k \cap A \neq \emptyset \\ 0 & I_k \cap A = \emptyset \end{cases}$$

なので

$$S(1_A, \Delta) = \sum_{k \in K(\Delta), I_k \cap A \neq \emptyset} v(I_k)$$

となるので

$$m(K_2) = S(1_A, \Delta)$$

である。Riemann 積分とジョルダン測度の関係性から $m^*(A) = S(1_A) < \infty$ であり，任意の正数ϵに対して $d(\Delta)$ が十分小さくすることで，

$$m(K_2) < m^*(A) + \epsilon$$

が満たされる。常に $s(1_A, \Delta) \leq S(1_A, \Delta)$ であるから $d(\Delta)$ を

$$m_*(A) - \epsilon \leq s(1_A, \Delta)(\text{これは上既述})\text{ かつ } S(1_A, \Delta) < m^*(A) + \epsilon$$

となるように十分小さく取れば (**??**) を満たす。特に A がジョルダン可測なときは，K_1, K_2 は基本集合でジョルダン可測ゆえ $A \backslash K_1, K_2 \backslash A$ はジョルダン可測であり，可測性から $s(1_A) = S(1_A) = m^{(J)}(A)$ である。(**??**) より明らかに

$$m^{(J)}(A \backslash K_1) < \epsilon, \;\; m^{(J)}(K_2 \backslash A) < \epsilon$$

である。 □

系 3. $A \subset \mathbb{R}^d$を有界集合とする。
(1) 任意の$\epsilon > 0$ に対しある閉集合 $K = \cup_{k=1}^{p} I_k$が存在して

$$K \subset A^\circ, \;\; m_{*,(J)}(A) - \epsilon < m^{(J)}(K) \leq m_{*,(J)}(A^\circ)$$

が成り立つ。特に A がジョルダン可測ならば $m^{(J)}(A \backslash K) < \epsilon$である。
(2) 任意の$\epsilon > 0$ に対してある閉集合 $K = \cup_{k=1}^{p} I_k$が存在して

$$\overline{A} \subset K^\circ, \; m^{*(J)}(\overline{A}) \leq m^{(J)}(K) \leq \sum_{k=1}^{p} m^{(J)}(I_k) < m^{*,(J)}(A) + \epsilon$$

が成り立つ。特に A がジョルダン可測ならば $m^{(J)}(K \backslash A) < \epsilon$となる。

問 33 (1.2.9, カントール集合)**.** $I_0 := [0, 1]$ を区間とする。$I_1 := [0, 1/3] \cup [2/3, 1], I_2 := [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1], ...$と定義していく。この操作を無限回して残った集合 $C := \cap_{n=1}^{\infty} I_n$をカントール集合という。これはコンパクトで非可算な零集合であることを示せ。

証明. 操作をする度に除いた開区間の (無限個合わせた) 和集合 D は開集合であるから $C = I_0 \cap D^c$は閉集合である。C は有界なのでコンパクトなのは明らかであった。次に C はジョルダン可測集合で体積 $v(C) = 0$ であることを示す。区間を除く操作を n 回行った後に残る集合を A_nとおく。(ただし $A_0 = I_0$.) I_0を 3^n等分して得る各閉区間を

$$I_{n,k} = [\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n}] \; (k = 1, ..., 3^n)$$

とおくと, $I^\circ_{n,k} = (\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n})$ であるので

$$A_1 = [0,1/3]\cup[2/3,1] = I_0\backslash(1/3,2/3) = A_0\backslash I^\circ I^\circ_{1,2},\ A_2 = A_1\backslash(I^\circ_{2,2}\cup I^\circ_{2,5}\cup I^\circ_{2,8}), \cdots,\ A_n = A_{n-1}\backslash\left(\cup_{k=1}^{3^{n-1}} I^\circ_{n,3k-1}\right)$$

とかける。A_2は体積 $1/3^2$の区間 2^2個の非交和で A_nは体積 $1/3^n$の区間 2^n個の非交和であるからその体積は

$$v(A_n) = 2^n \times \frac{1}{3^n}$$

である。$C \subset A_n$だから, $0 \leq 1_C \leq 1_{A_n}$という関係があるので積分の単調性より

$$0 \leq \overline{\int_I} 1_C(x)dx \leq \overline{\int_I} 1_{A_n}(x)dx = v(A_n) = (2/3)^n \to 0$$

よって, $0 \leq s(1_C) \leq S(1_C) = 0$ であり, $s(1_C) = S(1_C)$ が成り立つ。即ち C は体積 0 のジョルダン可測集合である。 □

問 34. $[0,1)$ は交わらない閉区間の可算和集合としてかけないことを示せ。(ヒント：交わらない閉区間の有限和集合として $[0,1)$ を表せないのは簡単に分かる。次に $[0,1)$ が無限個の交わらない閉区間の和集合と仮定して, $[0,1)$ がカントール集合と同相なことを示す。これは不合理である。ベールのカテゴリー定理を使ってもいい。)

証明. $[0,1)$ が交わらない閉区間の可算和集合でかけたとすると $[0,1) \cong C$ である。ベールのカテゴリー定理から,「空でない完備距離空間が閉部分集合の可算和としてかけるならばその閉集合の少なくとも一つは内部が空でない」のであるが, これは矛盾する内容である。即ち, 簡潔に言ってベールの定理を認めると, $[0,1) \cong C$ の証明が残す所となる。どの連結成分も一点のみからなっている空間 (これを完全不連結, totally disconnected) になっているのだろうか? であれば, (そうとは言い難いが...)「完全不連結で孤立点をもたず空でないコンパクト距離空間はカントール集合と同相」という命題によって $[0,1) \cong C$ を言及できる。いや, もし交わらない閉区間の可算和集合として表せると仮定すると $[0,1) \cong C$ は前問から当然? (以下その証明) であってベールのカテゴリー定理を使えばいいのだろうか。
証明 片開区間だけでなく同様に開区間をこの形で書くことも不可能であるからこれを同時に示すことにする。開区間または片開区間がそのような形に書けたと仮定し, 和をとる閉区間を l_n $(n \in \omega)$ と書く。そして l_nのうち下端が 0 でないものを一つ取り (今対象としているのが開区間の場合はどれでもいいし, 半開区間の場合でも l_nの disjoint性からこれは可能.)。それを $[\alpha,\beta]$ とする。ここで写像 $f_1 : [1/3,2/3] \to [\alpha,\beta]$ を

$$f_1(x) = \begin{cases} 3\alpha x & (0 \leq x < 1/3) \\ 3(\beta-\alpha)(x-1/3)+\alpha & (1/3 \leq x \leq 2/3) \\ 3(1-\beta)(x-2/3)+\beta & (2/3 < x < 1) \end{cases}$$

とすると, これは連続である。ここで $[0,\alpha)(resp.(0,\alpha))$ 及び $(\beta,1)$ は片開区間と開区間 ($resp.$ ともに開区間) であり, しかも l_nのうち $[\alpha,\beta]$ 以外の区間の和は $[0,\alpha)(resp.(0,\alpha))$ と $(\beta,1)$ になるはずであり, 一つの区間は (連結性を考慮すれば) そのどちらかにしか入らないから, 議論は振り出しに戻る。そこでもう一度同じ操作をそれぞれに行う。こうして得られた関数をそれぞれ $f_{2,1}, f_{2,2}$とする。$f_{2,1}, f_{2,2}$をそれぞれ 1/3 に縮小したもので f_1の第一と第三の場

合分けを置き換えたものを f_2 とする。以下同様にカントール関数の構成と同様の要領で f_n を構成する。f_n は一様収束するから極限関数 f は連続である。f の定義域をカントール集合に制限するとこれはヒントで提示された様に同相である。(カントール集合の内部が空であることから常に逆像が開になることから連続で, 同相.) □

補題 12 (補題 1.2.15)**.** (1) $m(\varnothing) = 0$ (2) $E_1, E_2, ... \subset \mathbb{R}^d$ が Lebesgue 可測な非交叉の集合列とすると $m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ である。

証明. 補題 1.2.5, 演習 1.2.4(以前も盲点とかいた。) から各 E_n がコンパクトな場合については

$$m(\cup_{n=1}^{N} E_n) = \sum_{n=1}^{N} m(E_n)$$

である。 □

問 35 (1.2.11, 増大列連続性)**.** (1) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^d$ を可測集合とするとき, $m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$ である。
(2) $\mathbb{R}^d \supset E_1 \supset \cdots$ を可測集合とするとき, $m(E_n)$ の少なくとも一つが有限であれば $m(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$ である。
(3) (2) の仮定をはずすことはできないことを例示せよ。

注 7. `https://drive.google.com/file/d/1XR0hrR6ggCTbFnIzNXRoPvwlUZ4xo1O_/view?usp=sharing` を参照しても良いが、単調増大列については $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(E_n)$. Lebesgue 測度は可測集合に関しては Lebesgue 外測度より優れた性質 (可算加法性) をもっていたから, これを使えば容易に示せる。

証明. (1) $m(E_n) = \infty$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在するならば, 単調性より

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(E_n)$$

である。そこで任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $m(E_n) < \infty$ とする。便宜的に $E_0 := \varnothing$ とおき, $F_n := E_n \backslash E_{n-1}$ $(n \geq 1)$ とおくと $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非交叉であり今は $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ である。測度の (有限) 加法性と $m(E_n) < \infty$ から

$$m(F_n) = m(E_n) - m(E_{n-1})$$

であるから

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(F_n) = \sup_N \sum_{n=1}^{N} m(F_n) = \sup_N \sum_{n=1}^{N} (m(E_n) - m(E_{n-1})) = \sup_{N\in\mathbb{N}} m(E_N)$$

である。
(2) $(E_1 \backslash E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は増大列なので (1) によって次の等式が成り立ち, $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$ である。

$$\begin{aligned} m(E_1) - m(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n) &= m(E_1 \backslash \cap_n E_n) = m(\cup_n (E_1 \backslash E_n)) \\ &\overset{(1)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} m(E_1 \backslash E_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (m(E_1) - m(E_n)) = m(E_1) - \lim_{n\to\infty} m(E_n) \end{aligned}$$

(3) $E_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$ とおくと, $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ であり $\cap_n E_n = \emptyset$である。ここで m を個数測度とし, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $m(E_n) = \infty$ である。よって $m(\cap_n E_n) = 0 \neq \infty = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$ となってしまう。 □

問 36 (1.2.12)**.** $\mathscr{L} \ni E \mapsto m(E) \in [0,\infty]$ で空集合と可算加法性の公理を満たすものは, 演習 1.2.3 の単調性と可算劣加法性の公理を満たすことを示せ。

証明. まず, 可算加法性から有限加法性が自明に成り立つ。なぜなら $k \geq n+1$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $E_k = \emptyset$とすれば $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$は非交叉で

$$m(\cup_{k=1}^n E_k) = m(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k) \underset{\text{可算加法性}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k) \underset{m(\emptyset)=0}{=} \sum_{k=1}^n m(E_k)$$

である。次に単調性を示す。$E = F \sqcup (E \backslash F)$ であり有限加法性を用いて

$$m(F) \leq m(F) + m(E\backslash F) = m(E)$$

である。可算劣加法性については

$$F_1 := E_1,\ F_n := E_n \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})\ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

とおくと $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$は非交叉であり, $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n, \forall n \in \mathbb{N}; F_n \subset E_n$である。よって単調性により

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(F_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n)$$

が言える。 □

問 37 (1.2.13)**.** 集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$が, ある $\mathbb{R}^d$内の集合 E に各点収束するとは, 指示函数 1_{E_n}が 1_Eに各点収束することを言う。
(1) もし E_nが全て可測で E に各点収束しているならば, E もまた可測である。(ヒント : 各点収束の定義より $1_E(x) = \liminf_{n\to\infty} 1_{E_n}(x)$ または $\limsup_{n\to\infty} 1_{E_n}(x)$ を使う.)
(2) 測度の連続性より成立する。
(3) もし有限測度の集合に含まれていない E_nがあれば, たとえ $m(E_n)$ が一様に有界であると仮定しても (2) は不成立であることを反例を挙げて示せ。

証明.

$$F_n := \cap_{m\geq n} E_m,\ \ G_n := \cup_{m\geq n} E_m$$

とおく。E_nが E に各点収束しているという条件より $1_E(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} 1_{E_n}(x) = \lim_{n\to\infty} 1_{F_n}(x)$ であり, 明らかに $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$は単調増大列であるから

$$E = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

を満たす。同様に $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$は単調減少列で E_nの E への各点収束性から

$$E = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

を満たす。F_nは Lebesgue 可測であり, 測度の増大列連続性から

$$\lim_{n\to\infty} m(F_n) = m(E)$$

である。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n \subset E_n$であり単調性により $m(F_n) \le m(E_n)$ である。$E = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\ge n} E_m = \liminf_{n\to\infty} E_n$であるから (注 : これは関係ない?),

$$m(E) \le \liminf_{n\to\infty} m(E_n)$$

が成り立つ。
次に測度の減少列連続性より

$$\lim_{n\to\infty} m(G_n) = m(E)$$

である。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n \subset G_n$なので $\limsup_{n\to\infty} m(E_n) \le m(E)$ である。以上より,

$$\limsup_{n\to\infty} m(E_n) \le m(E) \le \liminf_{n\to\infty} m(E_n)$$

である。これで (2) の主張である

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E)$$

を示せた。(3) については $E_n := [n, n+1]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ とすれば $E = \cup\varnothing = \varnothing$であり $m(E_n)$ は $m(E)$ に収束しない。 □

問 38 (1.2.14)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$とする。E はその測度が $m^*(E)$ に一致するような Lebesgue 可測集合 B に含まれている。

証明. [**?**]38 ページの系ではボレル集合 B の存在が示される。$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma[\mathbb{R}^d]$ の最小性と $\mathscr{L}$ がσ加法族であることから, 次の包含関係

$$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}^d}$$

があるから問いについても通用する。 □

問 39 (1.2.15, 内部正則性)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$を Lebesgue 可測とする。

$$m(E) = \sup_{K\subset E, K \text{ はコンパクト}} m(K)$$

であることを示せ。

証明. $E \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}^d}$を有界集合とし$\epsilon$を任意の正数とする。$\overline{E}\backslash E$ に対して補題 1.2.12, 外部正則性を使う (しかも, 今 E は可測で開集合 U も可測なので 29 ページの記号 m^*は m で良い.) と, 開集合 U であって

$$\overline{E}\backslash E \subset U,\ m(U) \le m(\overline{E}\backslash E) + \epsilon$$

を満たすものが存在する。$K := \overline{E}\backslash U$ とおくとき, K はコンパクトかつ $K \subset E$ であり,

$$m(K) \ge m(E) - \epsilon$$

が成り立つ。(最大の要点 : これは内部正則性を意味する.)
$(\because)\ m(U) \leq m(\overline{E}\backslash E) + \epsilon$より, $m(K) \geq m(\overline{E}) - m(U) \geq m(E) - \epsilon$である。
$\mathbb{R}^d$上で有界閉集合はコンパクトであり, $K = \overline{E}\backslash U \subset \overline{E}$: コンパクトの状況において,「コンパクト集合の任意の閉集合はコンパクト」なので K はコンパクトである。
次に $K \subset E$ を示す。任意に $x \in K$ を取ると $x \in \overline{E}, x \notin U$ である。$x \notin U$ ゆえに $x \notin \overline{E}\backslash E = \partial E$ である。よって $x \in E$ より $K \subset E$ である。
以上より E が有界集合に対しては内部正則性を示せた。次は任意の $E \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}^d}$に対して

$$m(E) = \sup\{m(K) \mid K \subset E, K : \text{コンパクト}\}$$

が成り立つことを言う。非有界な E に対して $E_k := E \cap [-k,k]^N$ と定めるとこれは有界 Lebesgue 可測集合である。E が有界な場合のときの結果より,

$$m(E \cap [-k,k]^N) = \sup\{m(K) \mid K \subset E \cap [-k,k]^N, K : \text{コンパクト}\}$$

であり増大列連続性から

$$\infty = m(E) = \sup_{k \in \mathbb{N}}\{m(E \cap [-k,k]^N)\} = \sup\{m(K) \mid K \subset E \cap [-k,k]^N, K : \text{コンパクト}\}$$

これで言えた。 □

問 40 (1.2.16)**.** (1) $E \subset \mathbb{R}^d$は測度有限な可測集合である。
(2) (開による外側近似) 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(U\backslash E) \leq \epsilon$であるような有限測度の開集合 U の中に E が含まれているようにできる。
(3) (ほとんど有界開) E と有界閉集合の違いは, 任意に小さな Lebesgue 外測度をもつ集合だけである。(i.e. 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(E\Delta U) \leq \epsilon$となる有界開集合 U が存在する.)
(4) (コンパクトによる内側近似) 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(E\backslash F)$
(6) (ほとんど有界可測) 任意の$\epsilon > 0$ に対して $m^*(E\Delta F) \leq \epsilon$となる有界可測集合 F が存在する。
(8) (ほとんど 2 進的に基本的) 任意の$\epsilon > 0$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ があって $m^*(E\Delta F) \leq \epsilon$である一辺の長さ 2^{-n}の閉 2 進立方体の有限和集合 F が存在する。

証明. 演習 1.2.7.と同じなので (1) ⇒ (4) だけ示す。(8) は有界ジョルダン可測集合 E に対して任意の$\epsilon > 0$ を取ってある基本集合 $K = \cup_{k=1}^N I_k$が存在して $K \subset A^\circ, m(A\backslash K) \leq \epsilon$を満たしたことを思い出せば十分と考えた。
$\mathbb{R}^d$の原点 $\mathbf{0}$ を中心とする半径 n の球の内部を S_nとする。
<u>E が有界集合の場合</u>
ある $n \in \mathbb{N}$ があって $E \subset S_n$を満たす。$\overline{S_n}\backslash E$ は可測なので

$$\overline{S_n}\backslash E \subset G,\ m(G\backslash(\overline{S_n}\backslash E)) < \epsilon$$

なる開集合 G が存在する。$F := \overline{S_n}\backslash G$ は閉集合で $F \subset \overline{S_n}\backslash(\overline{S_n}\backslash E) = E$ である。よって

$$F \subset E \subset \overline{S_n} \subseteq G + F$$

したがって

$$G + F \supset (\overline{S_n} - E) + (E - F) + F$$

であるから

$$E - F \subset G - (\overline{S_n} \backslash E)$$

である。単調性より $m(E\backslash F) < \epsilon$であるから題意の条件を満たす有界閉集合 F (明らかに $F \subset E$ より有界) が取れることが示された。

<u>E が非有界集合の場合</u>

$E_1 := E \cap S_1,\ E_n := E \cap (S_n \backslash S_{n-1})\ (\forall n \geq 2)$ とおくと，各 E_nは有界可測だから今度は内部正則性より，

$$F_n \subset E_n,\ m(E_n \backslash F_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

なるコンパクト集合 F_nが存在する。$F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$は閉集合であり (考察せよ.) $F \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ である。また $E\backslash F \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n \backslash F_n$だから，単調性及び可算加法性を用いて

$$m(E\backslash F) \leq m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n \backslash F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \backslash F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

である。

特に $m(E) < \infty$ ならば,「単調な集合列に対して $m(\lim_{n\to\infty} J_n) = \lim_{n\to\infty} m(J_n)$」という命題に従うと

$$\lim_{n\to\infty} m(E\backslash E \cap S_n) = 0$$

であるから

$$m(E\backslash E \cap S_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

なる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。$E \cap S_n$は有界可測であり，内部正則性から

$$F \subset E \cap S_n,\ \ m(E \cap S_n \backslash F) < \frac{\epsilon}{2}$$

なるコンパクト集合 F がある。すると $m(E\backslash F) < \epsilon$が成り立ち F は題意の集合であることが示せた。 □

注 8. 非有界であって測度有限である集合とは何だろうか？という疑問が残る。
って $\cup_{n\in\mathbb{N}} [n, n + 2^{-n}]$ など無数にあるか。

問 41 (1.2.18, 内測度)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$を有界集合とする。E の Lebesgue 内測度 $m_*(E)$ を E を含む基本集合 A を用いて

$$m_*(E) := m(A) - m^*(A\backslash E)$$

として定める。

(1) これが両定義であることを示せ。つまりもし A, A'が E を含む基本集合ならば $m(A) - m^*(A\backslash E) = m(A') - m^*(A'\backslash E)$ である。

(2) $m_*(E) \leq m^*(E)$ で等号は E が Lebesgue 可測であるときに限る。

注 9. `https://math.stackexchange.com/questions/81615/lebesgue-inner-measure-formula` を参照すると, $m_*(E) = \sup\{m(F) : F \subset E, F \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$ という定義の同値性があるのだろうかと考えこれを示すことで良定義であることを言及する。$m_*(E) \leq m^*(E)$ もこの等式より成立する。

証明. $E \subset \mathbb{R}^d$を任意の部分集合とする。[?], 38 ページの系より $E \subset B$ かつ $m(B) = m^*(E)$ を満たす $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ が存在する。$m^*(E) < \infty$ であると仮定することとする。

$$\begin{aligned} m_*(E) := m(B) - m^*(B \backslash E) &\overset{\text{外部正則性}}{=} m(B) - \inf\{m(C) \mid B \cap E^c \subset C,\ C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\} \\ &= \sup\{m(B) - m(B \cap A^c) \mid B \cap A^c \supset B \cap E^c,\ B \cap A^c \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\} \\ &= \sup\{m(A) \mid B \cap A^c \supset B \cap E^c,\ A^c \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\} = \sup\{m(A) \mid A \subset E,\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

(2) の等号成立の必要十分性について考える。$E \in \mathscr{L}^*(\mathbb{R})$ は $m^*(E) < \infty$ を満たすとする。カラテオドリの意味の外測度可測性より

$$m^*(E) = m^*(B) \overset{\text{Caratheodory}}{=} m^*(B \cap E) + m^*(B \backslash E) = m^*(E) + m^*(B \backslash E)$$

であり, $m^*(E) < \infty$ により $m^*(B \backslash E) = 0$ である。よって

$$m_*(E) := m(B) - m^*(B \backslash E) = m(B) = m^*(E) \tag{1.3}$$

である。次は逆に $m_*(E) = m^*(E)$ ならば E が Lebesgue 可測であることを示す。上と同様に $E \subseteq B, m(B) = m^*(E)$ を満たす $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ を取ると (**??**) より $m^*(B \backslash E) = 0$ は使えて, また外測度の単調性, 有限劣加法性から

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \underset{\text{単調性}}{\leq} m^*(A \cap B) + m^*((A \cap B^c) \cup (B \backslash E)) \underset{\text{劣加法性}}{\leq} m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c) + m^*(B \backslash E)$$

である。$B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ の可測性から最右辺を次のように書き直せて

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A) + m^*(B \backslash E) = m^*(A)$$

である。$\geq$ の方向の不等式は外測度の性質より自明なので可測に関するカラテオドリの必要十分性から E は Lebesgue 可測集合である。 □

定義 8. G_δ集合は可算個の開集合の共通部分 $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$, F_σ集合は可算個の閉集合の和集合 $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$のことして定義する。

問 42 (1.2.19)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$に対して
(1) E は Lebesgue 可測
(2) E は零集合を取り除くと G_δ集合である。(誤植 : E に零集合を付け足すと)
(3) E は F_σ集合と零集合の和である。

証明. (2) $\Rightarrow$ (1) : $E \subset \mathbb{R}$ が G_δ集合 V と $m(N_1) = 0$ を満たす $N_1 \subset \mathbb{R}$ により $E = V \backslash N_1$と表せるとする。G_δ集合は $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ の元だから $V \in \mathscr{L}$ であり, また N_1は外測度を m^*とするとき $m^*(N_1) = 0$ を満たしているから $N_1 \in \mathscr{L}$ である。($\because$ 外測度 0 の集合は Lebesgue 可測であった.) $\mathscr{L}$ は σ 加法族なので $N_1^c \in \mathscr{L}$ であり, $E = V \backslash N_1 = V \cap N_1^c \in \mathscr{L}$ (あるいは差集合はまた可測より.)
(3) $\Rightarrow$ (1) : $E \subset \mathbb{R}$ が F_σ集合 H と $m(N_2) = 0$ を満たす $N_2 \subset \mathbb{R}$ により $E = H \cup N_2$と表せるとする。F_σ集合は $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ の元だから $H \in \mathscr{L}$ であり, 上と同様に $N_2 \in \mathscr{L}$ であるから $E = H \cup N_2 \in \mathscr{L}$ である。

(1) ⇒ (2) : E は可測集合とする。外部正則性により E を含む開集合の単調減少列 $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $m(V_i\backslash E) < 1/i$ を満たすように取れる。実際, E を含む開集合の列 $(V'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を各 $i \in \mathbb{N}$ について $m(V'_i\backslash E) < 1/i$ を満たすように取れて, $V_i := \cap_{j=1}^{i} V'_j$ とおけば, $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は E を含む開集合の単調減少列であり, 単調性から $m(V_i\backslash E) \leq m(V'_i\backslash E) < 1/i$ を満たす。そこで $V := \cap_{i=1}^{\infty} V_i$ とすれば V は G_δ 集合である。さらに可算加法性と演習 1.2.11 より,

$$m(V\backslash E) = m((\cap_{i=1}^{\infty} V_i)\backslash E) \underset{\text{可算加法性}}{=} m(\cap_{i=1}^{\infty}(V_i\backslash E)) = \lim_{i\to\infty} m(V_i\backslash E) = 0$$

となる。よって $N_1 := V\backslash E$ とおけば N_1 は可測集合で $m(N_1) = 0$ で $E = V\backslash N_1$ を満たす。
(1) ⇒ (3) : $E \in \mathscr{L}$ とすれば $E^c \in \mathscr{L}$ だから外部正則性により任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し開集合 G_i で $G_i \supset E^c, m(G_i\backslash E^c) < 1/i$ を満たすものがある。$H_i := \cup_{j=1}^{i} G_j^c$ とおけば H_i は閉集合であり $G_j^c \subset E\ (\forall j \in \mathbb{N})$ より $H_i \subset E$ である。$G_i\backslash E^c = E\backslash G_i^c$ 及び $H_i \supset G_i^c$ より $E\backslash G_i^c \supset E\backslash H_i$ であるから

$$m(E\backslash H_i) \leq m(E\backslash G_i^c) = m(G_i\backslash E^c) < \frac{1}{i}$$

である。$(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は閉集合の単調増大列であり $H := \cup_{i=1}^{\infty} H_i$ は F_σ 集合で $H \subset E$ である。そこで

$$E\backslash H = E\backslash(\cup_{i=1}^{\infty} H_i) = E \cap (\cap_{i=1}^{\infty} H_i^c) = \cap_{i=1}^{\infty}(E\backslash H_i)$$

となる。減少列連続性より

$$m(E\backslash H) = m(\cap_{i=1}^{\infty}(E\backslash H_i)) = \lim_{i\to\infty} m(E\backslash H_i) = 0$$

となる。$N_2 := E\backslash H$ とすれば $H \subset E$ から $H \cup N_2 = H \cup (E\backslash H) = H \cup (E \cap H^c) = H \cup E = E$ であるので (3) の条件を満たす。 □

問 43 (1.2.20, 平行移動不変性)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$ が可測であればどんな $x \in \mathbb{R}^d$ に対しても $E + x$ も可測であり, $m(E + x) = m(E)$ であることを示せ。

証明. 次は Borel 可測関数を定義せずに証明する. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とすると $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ は連続である。このとき $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ なら $F^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ であること (i.e. 連続ならば Borel 可測) を示す。
$\mathscr{F} := \{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m) \mid F^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\}$ とおく。このとき $\mathscr{O}_{\mathbb{R}^m} \subset \mathscr{F}$ かつ $\mathscr{F}$ は σ 加法族である事を言えば $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ の最小性から $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{F}$ である。よって $\mathscr{F} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ を示せる。
(い) $F^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ より $\emptyset \in \mathscr{F}$ である。
(ろ) $A \in \mathscr{F}$ とすれば $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m), F^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ である。すると $A^c \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m), F^{-1}(A^c) = (F^{-1}(A))^c \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ である。よって $A^c \in \mathscr{F}$.
(は) $A_i \in \mathscr{F}\ (i \in \mathbb{N})$ とするとき $A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m), F^{-1}(A_i) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ であり, このとき明らかに $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ である。また $F^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \cup_{i=1}^{\infty} F^{-1}(A_i) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ なので $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.
さて, $\mathbb{R}^m$ の開集合 G に対して $G \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ であり, F は連続なので $F^{-1}(G) \in \mathscr{O} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ である。よって $G \in \mathscr{F}$ で $\mathscr{O} \subset \mathscr{F}$.
Step1. $E \subset \mathbb{R}^d$ を Borel 集合とすると $aE, E + y$ も Borel
$0 \neq a \in \mathbb{R}$ とする。$F_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $F_a(x) := a^{-1}x$ で定める。すると $|F_a(x) - F_a(x')| = |a^{-1}||x - x'|$ より F_a は連続だから $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ に対し $F_a^{-1}(E) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ である。

$$F_a^{-1}(E) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^{-1}x \in E\} = \{ay \in \mathbb{R}^n \mid y \in E\} = aE$$

なので, $aE \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. 写像 $F_y(x) = x - y$ は $|F_y(x) - F_y(x')| = |x - x'|$ より連続で $F_y^{-1}(E) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x - y \in E\} = \{x' + y \in \mathbb{R}^n \mid x' \in E\} = E + y \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ である。

Step.2 外測度の平行移動不変性

$E \subset \mathbb{R}^n, 0 \neq a \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$とするとき

$$m^*(aE) = |a|^n m^*(E),\ m^*(E + y) = m^*(E)$$

が成り立つ。$y = (y_1, ..., y_n)$ とかくと左半開直方体 $I = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j]$ に対して $aI, I + y$ も左半開直方体であり, $a > 0$ のときは

$$aI = \prod_{j=1}^n (aa_j, ab_j],\ \ I + y = \prod_{j=1}^n (a_j + y_j, b_j + y_j]$$

とかけて

$$v(aI) = \prod_{j=1}^n a(b_j - a_j) = a^n v(I),\ \ v(I + y) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = v(I)$$

である。$a < 0$ のときは

$$aI = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ab_j \leq x_j \leq aa_j\ (j = 1, 2, ..., n)\} = \prod_{j=1}^n [ab_j, aa_j)$$

つまり aI は右半開直方体であって

$$v(aI) = \prod_{j=1}^n (aa_j - ab_j) = |a|^n v(I)$$

である。任意の $E \subset \mathbb{R}^n$に対し, $(I_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}(E; \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n})$ を任意にとる。各 I_iは左半開直方体で $E \subset \cup_{i=1}^\infty I_i$より $aE \subset \cup_{i=1}^\infty aI_i, E + y \subset \cup_{i=1}^\infty (I_i + y)$ で (aI_iは a の正負により左または右半開直方体), 補題 1.2.6 から

$$m^*(aE) \leq \sum_{i=1}^\infty m^*(aI_i) = \sum_{i=1}^\infty v(aI_i) = |a|^n \sum_{i=1}^\infty v(I_i)$$

$$m^*(E + y) \leq \sum_{i=1}^\infty m^*(I_i + y) = \sum_{i=1}^\infty v(I_i + y) = \sum_{i=1}^\infty v(I_i)$$

である。よって $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$に関する下限をとって

$$m^*(aE) \leq |a|^n m^*(E),\ \ m^*(E + y) \leq m^*(E)$$

を得る。$m^*(E) = m^*(a^{-1}(aE)) \leq |a^{-1}|^n m^*(aE)$ が成り立つので $|a|^n m^*(E) \leq m^*(aE)$ である。よって

$$m^*(aE) = |a|^n m^*(E)$$

が成り立つ。$m^*(E) = m^*((E + y) - y) \leq m^*(E + y)$ より

$$m^*(E) = m^*(E + y)$$

が成り立つ。

演習 1.2.20 の証明

仮定より E を可測とする。演習 1.2.19 より F_σ集合 H と零集合の集合 Z で $E = H \cup Z$ を満たすものが存在する。$aE = aH \cup aZ$ で $E + y = (H + y) \cup (Z + y)$ である。$m^*(Z) = 0$ なので Step.2 より

$$m^*(aZ) = 0,\ \ m^*(Z + y) = 0$$

となり, $aZ, Z + y$ は Lebesgue 可測である。また H は Borel 集合より $aH, H + y$ は Step.1 より可測集合である。

以上より $aE, E + y$ は Lebesgue 可測となる$\cdots(*)$ ことが示せた。従って

$$m(aE) \underset{(*)}{=} m^*(aE) \underset{\text{Step.2}}{=} |a|^n m^*(E) \underset{E\text{ は可測}}{=} |a|^n m(E)$$

が成り立つ。同様に $m(E + y) = m^*(E + y) - m^*(E) = m(E)$. □

注 10. 可測性の証明の部分でそれぞれ違うことを使って示しているのが面白い。Borel 集合 $\mathfrak{B}(X)$ は位相空間 $(X, \mathscr{O})$ に対して $\mathscr{O}$ から生成される σ 加法族がその定義であるが, 簡単に次のことから F_σ集合が Borel 集合であることが成り立つ。

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする. 閉集合系 $\mathscr{F}$ に対して$\sigma(\mathscr{F}) = \mathfrak{B}(X)$ を満たす.

問 44 (1.2.21)**.** $E \subset \mathbb{R}^d$がLebesgue 可測で$T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$を線形変換とすると, $T(E)$ も Lebesgue 可測で $m(T(E)) = |\det T|\, m(E)$ であることを示せ。もし $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ $(d' < d)$ なら $T(E)$ は可測ではないかもしれないから, そのとき (左辺) = 0 とする。

証明. Step.1 $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とするとき $m^*(T(E)) = |\det T| m^*(E)$

略す。また $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ ならば (**??**) より $T(E) = (T^{-1})^{-1}(E) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ である。$E \in \mathscr{L}$ に対して $TE \in \mathscr{L}$ であることが分かれば Lebesgue 外測度と Lebesgue 測度は一致し $m(TE) = |\det T| m(E)$ は Step1 ゆえに明らか。よって $E \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}^d}$とする。$G_\delta$集合 H と測度零集合 Z があって $E = H \backslash Z$ とかけるので

$$TE = T(H \cap Z^c) = TH \cap TZ^c = TH \cap TZ^c = TH \cap (TZ)^c = TH \backslash TZ$$

である。$H \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ で $T(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ であるので, $TH \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ である。$m^*(TZ) = |\det T| m^*(Z)$ であるが Z は零集合なので $m^*(TZ) = 0$ であり外測度 0 の集合は可測なので, $TZ \in \mathscr{L}$. 以上より, $TE = TH \backslash TZ \in \mathscr{L}$ を満たす。 □

問 45 (1.2.22)**.** $d, d' \geq 1$ を自然数とする。(1) $E \subset \mathbb{R}^d, F \subset \mathbb{R}^{d'}$であれば

$$(m^{d+d'})^*(E \times F) \leq (m^d)^*(E) \times (m^{d'})^*(F)$$

であることを示せ。

(2) E, F を可測集合とする。このとき $E \times F$ は可測で, $m^{d+d'}(E \times F) = m^d(E) \times m^{d'}(F)$ を示せ。

証明. 任意の正数ϵを取り, $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}(E;\mathcal{E}_{\mathbb{R}^d})$, $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}(F;\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{d'}})$ であって (基本測度と外測度は一致することを考慮して)

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} m^*(E_i) \leq m^*(E) + \epsilon,\ \ \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(F_j) \leq m^*(F) + \epsilon$$

を満たすものを取る。すると $E\times F \subset \cup_{i,j\in\mathbb{N}}^{\infty} E_i \times F_i$である。外測度の可算劣加法性を用いて

$$m^*(\cup_{i,j}^{\infty} E_i \times F_j) \leq \sum_{i,j} m(E_i \times F_j) \underset{\text{これは変形可}}{=} \sum_{i,j} m(E_i) \times m(F_j)$$

$$= (\sum_{i\in\mathbb{N}} m^*(E_i))(\sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(F_j)) \leq (m^*(E) + \epsilon)(m^*(F) + \epsilon)$$

である。左辺における下限をとって

$$m^{d+d'}(E\times F) = m^d(E) \times m^{d'}(F)$$

が成り立つ。
(2) 本問は「直積測度」について勉強されるとより理解が深まると思われる。$E\times F$ の可測性は Lebesgue 可測の言い換えを使って以前言及したので, 以下の $m^{d+d'}$ が可算加法的測度であることを示すがその際単調収束定理は可測集合に対するものではなく一般化した定理 1.4.43 を使う。$(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d), m^d), (\mathbb{R}^{d'}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'}), m^{d'})$ を測度空間とする。$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$ 上の半加法族 (半加法族である事は現代解析 report6 で証明) $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'})$ に対し

$$m^{d+d'} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'}) \ni E\times F \mapsto m^d(E) \times m^{d'}(F) \in [0,\infty]$$

を定義する。このとき $m^{d+d'}$ は半加法族上の可算加法的測度であることを示し, 最後に $m^{d+d'}$ の σ有限性により Hopfの拡張定理から $m^{d+d'}$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'})$ 上の測度として一意存在することで終わる。 □

証明. $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'})$ を満たす非交叉列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$を取り

$$m^{d+d'}(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m^{d+d'}(C_n) \tag{1.4}$$

であることを示せばよい。各 $n\in\mathbb{N}$ に対し,

$$C_n = E_n \times F_n\ (E_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d), F_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'}))$$

とおき

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = E\times F\ (E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d), F \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'}))$$

とおく。$(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$が非交叉列であることから

$$1_{\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n}(x_1, x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{C_n}(x_1, x_2)\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$$

が成り立つ。よって

$$1_E(x_1) \cdot 1_F(x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{E_n}(x_1) \cdot 1_{F_n}(x_2)\ (\forall x_1 \in \mathbb{R}^d, \forall x_2 \in \mathbb{R}^{d'})$$

である。任意の $x_2 \in \mathbb{R}^{d'}$ を取り固定してこの等式を $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の非負可測関数の等式とみて単調収束定理を用いると

$$m^d(E)1_F(x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m^d(E_n)1_{F_n}(x_2)$$

である。さらにこれを $(\mathbb{R}^{d'}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'}))$ 上の非負可測関数の等式とみて単調収束定理を用いると

$$m^d(E)m^{d'}(F) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m^d(E_n)m^{d'}(F_n)$$

である。よって (**??**) が成り立つので $m^{d+d'}$ は半加法族 $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\times\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'})$ 上の可算加法的測度である。
次に $m^{d+d'}$ が σ 有限であることを言う。$\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度 $m^d, m^{d'}$ は σ 有限測度であるから,

$$\mathbb{R}^d = \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n,\ m^d(A_n) < \infty\ (\forall n\in\mathbb{N})\ \text{と}\ \mathbb{R}^{d'} = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n,\ m^{d'}(B_n) < \infty$$

を満たすものがある。各 $(A_n), (B_n)$ が単調増加列としてとれる (確かめよ。) ことから

$$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d'} = \cup_{n\in\mathbb{N}}A_n\times B_n$$

が成り立ち,

$$m^{d+d'}(A_n\times B_n) = m^d(A_n)\cdot m^{d'}(B_n) < \infty(\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから $m^{d+d'}$ は σ 有限である。 □

問 46 (1.2.23,Lebesgue 測度の (公理的な) 一意性)**.** m は基本集合上で基本測度に一致する。これは m^*を Lebesgue 外測度とすると $m(E)\le m^*(E)$ であることを意味する。互いに素な直方体 B_nに対して $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}|B_n|$ であることを確かめて開集合に対しては公理を満たす m は Lebesgue 測度に一致することが示される。(なぜなら補題 1.2.11) すると m はコンパクト集合に対しても Lebesgue 測度に一致するから内部正則性 (外部は m^*なので当てにならない?) から有界可測集合に対する Lebesgue 測度と等しい。次に非有界な可測集合に対しても等しいことを示す, というのが流れらしい。基本測度は互いに素な直方体に対して可算加法性を満たすことの証明は既に通った道であるので基本集合上で m が基本測度と等しいことの証明を考えたい。それは演習 1.1.3 を見れば, 基本測度は有限加法的, 平行移動不変性をもつものとして一意的なものである点によるであろう。

例 1. $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の全てのコンパクト集合から生成される。

証明. $\mathfrak{B}_1$を $\mathbb{R}$ のコンパクト集合で生成される完全加法族とする。$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ は開集合全体を含み補集合を取る演算で閉じるので $\mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{O}\subset\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である。よって $\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. 開集合 $B\subset\mathbb{R}$ をとると $\mathbb{R}\backslash B$ はもし有界ならコンパクトであるから $\mathbb{R}\backslash B\in\mathfrak{B}_1$でよって完全加法族なことより $B\in\mathfrak{B}_1$. (有界でなくてもコンパクトな閉区間の可算和集合より, $B\in\mathfrak{B}_1$.) $\mathfrak{B}(\mathbb{R})\subset\mathfrak{B}_1$. □

問 47 (1.2.24)**.** (1) $E\sim F\Rightarrow F\sim E$ と $E\sim E$ は $m(\emptyset)=0$ より自明であり推移律 $E\sim F, F\sim G$ なら $E\sim G$ を満たすことも $m(E\Delta G)\le m(E\Delta F)+m(F\Delta G)=0$ より成立する。
(2) $m(E\Delta F) = m(E'\Delta F') = 0$ なら $m(E\Delta E') = m(F\Delta F')$ であることを確かめ距離関数 d :

$([E],[E']) \mapsto m^*(E\Delta E')$ が良定義であることを言う。これは $m(E\backslash E' \sqcup E'\backslash E) - m(F\backslash F' \sqcup F'\backslash F) = m(E\backslash F \sqcup F\backslash E) - m(E'\backslash F' \sqcup F'\backslash E') = 0$ より良い。$2^A/\sim$ は完備距離空間なことは可測集合列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N; m(A_n\Delta A_m) < \epsilon$$

を満たすことを言えば良い。(Cauchy の判定法) $[A]$ を A で表記することにし $d(A,B) = m(A\Delta B)$ と書く。$d(A_n, A_{n+1}) \leq 2^{-n}$ を満たす任意の $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して極限 $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ が存在するかである。

定義 9. $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $I = [a,b]$ で定義され, $\mathbb{R}^n$ 値関数 f に対し I の分割Δが$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ で与えられるとすれば, $v_\Delta(f) = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ をΔに対応する f の変動 (variation) といい, $V_I(f) = \sup_\Delta v_\Delta(f)$ を f の区間 I における全変動 (total variation) という。$V_I(f)$ が有限のとき f は I で有界変動であるという。ただし, 区間 $I = [a,a]$ については分割は$\Delta : t_0 = t_1 = a$ の唯一つとし, $v_\Delta(f) = |f(t_1) - f(t_0)| = |f(a) - f(a)| = 0$ として定める。$I = [a,b]$ 上定義され $\mathbb{R}^n$ 値有界変動関数全体を $BV(I,\mathbb{R}^n) = \{f : I \to \mathbb{R}^n \mid V_I(f) < \infty\}$ とかく。

補題 13. $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ 上で定義された $\mathbb{R}^n$ 値関数を f とする。
(1) f が I で Lipschitz 連続ならば, f は I で有界変動である。
(2) f が I で微分可能で, 導関数 Df が I で有界ならば, f は Lipschitz 連続である。
(3) f が I で C^1 級ならば, f は I で Lipschitz 連続である。

証明. f が I で Lipschitz 連続なので定数 $L > 0$ が存在して任意の $t,s \in I$ に対して $|f(t) - f(s)| \leq L|t-s|$ である。I の分割$\Delta : a = t_0 < \cdots t_m = b$ に対して

$$v_\Delta(f) = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq L\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) = L(b-a)$$

であるから全変動は $V_I(f) \leq L(b-a)$ を満たし f は I において有界変動である。
(2) $f(t) = (f_1(t),...,f_n(t))$ とし, $l_i := \sup_{t\in I}|f_i'(t)|$, $l := \max\{l_1,...,l_n\}$ とする。f は微分可能なので平均値の定理より $t,s \in I$ に対しある実数$\tau_k \in (t,s)$ があって $f_k(t) - f_k(s) = f_k'(\tau_k)(t-s)$ を満たす。よって $|f_k(t) - f_k(s)| \leq l|t-s|$ $(k = 1,2,...,n)$ である。ゆえに

$$|f(t) - f(s)| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |f_k(t) - f_k(s)|^2} \leq \sqrt{n}l|t-s|$$

となり, f は Lipschitz 連続である。
(3) Df が有界閉区間 I で連続という条件から $|Df(t)|$ は有界である。すると (2) より f は Lipschitz 連続である。$|Df(t)|$ の有界性は一般に,
$K \subset \mathbb{R}^n$を点列コンパクト, $f : K \to \mathbb{R}^m$は連続関数とするときに $f(K)$ も点列コンパクトで特に f は有界であるという命題による。 □

問 48 (1.2.25)**.** $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$を連続微分可能な関数とする。$\mathbb{R}^d$の連続微分可能曲線を $\{\gamma(t) \mid a \leq t \leq b\}$ の集合とする。

(1) もし $d \geq 2$ であれば Lebesgue 測度が 0 であることを示せ。
(2) $d \geq 2$ なら単位立方体 $[0,1]^d$ を可算個の連続微分可能曲線で覆うことは不可能であることを示せ。

証明. f は C^1 級なので Lipschitz 連続であるから，ある定数 $M > 0$ が存在して任意の $x, y \in [a,b]$ に対して $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ を満たす。すなわち，$|x - y| < \delta$ ならば $f(y) \in B(f(x), M\delta)$ である。区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots t_n = b$ を取り $m := \inf_{1 \leq k \leq n} \frac{t_k + t_{k-1}}{2}$ と定義し $\delta := \frac{b-a}{2n}$ とおくと $f([t_{k-1}, t_k]) \subset B(f(m), M\delta); \forall k \in \{1, ..., n\}$ である。(何故なら $\frac{t_k - t_{k-1}}{2} < \frac{b-a}{2}$ である.) これより

$$f([a,b]) \subset \cup_{\ell=1}^n B(f(m), M\delta)$$

であり，よって C を適当な定数として

$$m^*(f([a,b])) \leq \sum_{k=1}^n C(M\delta)^d = C\left(\frac{b-a}{2}\right)^d n^{1-d}$$

である。$n \in \mathbb{N}$ の任意性より $d \geq 2$ ならば曲線の Lebesgue 測度は 0 である。
(2) 可算個の連続微分可能関数 γ_n $(n \in \mathbb{N})$ があって $[0,1]^d \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\gamma_n(t) \mid a \leq t \leq b\}$ を満たすと仮定する。外測度 m^* の単調性より

$$m^*([0,1]^d) \leq m^*(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\gamma_n(t) \mid a \leq t \leq b\})$$

であり，左辺に対して Lebesgue 測度の存在性より $m^*([0,1]^d) = 1$ が成り立つ。右辺について考える。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し γ_n は連続微分可能なので $\{\gamma_n(t) \mid a \leq t \leq b\}$ は連続微分可能曲線であり

$$m^*(\{\gamma_n(t) \mid a \leq t \leq b\}) = m(\{\gamma_n(t) \mid a \leq t \leq b\}) \underset{(1)}{=} 0$$

であり m^* の可算劣加法性より

$$m^*(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\gamma_n(t) \mid a \leq t \leq b\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\{\gamma_n(t) \mid a \leq t \leq b\}) = 0$$

である。これで $1 \leq 0$ を示したことになり矛盾。 □

問 49 (1.2.26, 外測度は有限加法的でない)**.** 実数上の交わらない有界な部分集合 E, F で $m^*(E \cup F) \neq m^*(E) + m^*(F)$ となるものが存在することを示せ。

証明. [**?**], 53 ページの問い 2(ii) を参照する。$E := A, F := A + x$ とおくと $m^*(A \cup (A + x)) = m^*(A + x)$ である。もし命題の等式が成立するとすれば $m^*(A + x) + m^*(A) = m^*(A + x)$ より $m^*(A) = 0$ であるがこれは $m^*(A) > 0$ に矛盾する。 □

補題 14. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x = y \in \mathbb{R}^n\}$ とするとき，E は $\mathbb{R}^{2n}$ の Lebesgue 測度 m^{2n} について $m^{2n}(E) = 0$ である。

証明. $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を $\varphi(x,y) = (\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y))$ で定めるとこれは全単射である。実際 $\frac{1}{2}(x+y+x-y) = x, \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y$ より逆写像 φ^{-1} は $\varphi^{-1}(x,y) = (x+y, x-y)$ で与えられる。また φ は線形である。実際 $\varphi((x,y)+(x',y')) = (\frac{1}{2}(x+x'+y+y'), \frac{1}{2}(x+x'-y-y')) =$

$\varphi(x,y)+\varphi(x',y')$ であり, 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $\varphi(a(x,y))=a\varphi(x,y)$ である。この二点より φ の行列 $T\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ であり,「$T(E)$ が $\mathbb{R}^{2n}$ の Lebesgue 可測集合で $m^{2n}(T(E))=0$」が言えれば, $E=T^{-1}(TE)$ も $\mathbb{R}^{2n}$ の Lebesgue 可測集合で $m^{2n}(E)=|\det(T^{-1})|m^{2n}(T(E))=0$.
以下 $m^{2n}(T(E))=0$ を示す。
任意の $x\in\mathbb{R}^n$ について $\varphi(x,x)=(x,0)$ で

$$T(E)=\varphi(E):=\{\varphi(x,x)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\}=\{(x,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\}=\mathbb{R}^n\times\{0\}$$

である。$N,M\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}I_{N,M} &:= \{(x_1,x_2,...,x_{2n})\in\mathbb{R}^{2n} \mid -N<x_i\le N, -M^{-1}<x_{n+i}\le M^{-1},\ 1\le i\le n\}\\ &= (-N,N]\times\cdots\times(-N,N]\times(-M^{-1},M^{-1}]\times\cdots\times(-M^{-1},M^{-1}]\end{aligned}$$

とすれば $I_{N,M}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の Lebesgue 可測集合で $m^{2n}(I_{N,M})=(2N)^n(2M^{-1})^n=2^{2n}N^nM^{-n}$. また $I_N:=\lim_{M\to\infty}I_{N,M}=\cap_{M=1}^{\infty}I_{N,M}$ とすれば $N\in\mathbb{N}$ を固定するとき $(I_{N,M})_{M\in\mathbb{N}}$ は M に関する単調減少列で I_N は補題 1.2.13 より Lebesgue 可測で

$$I_N=(-N,N]\times\cdots\times(-N,N]\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}$$

である。減少列連続性より

$$m^{2n}(I_N)=\lim_{M\to\infty}m^{2n}(I_{N,M})=\lim_{M\to\infty}2^{2n}N^nM^{-n}=0$$

を満たす。$(I_N)_{N\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の Lebesgue 可測集合の単調増大列で $m^{2n}(I_N)=0$ であることを示したが, $\cup_{N=1}^{\infty}I_N=\mathbb{R}^n\times\{0\}$ だから

$$m^{2n}(\mathbb{R}^{2n}\times\{0\})=m^{2n}(\cup_{N=1}^{\infty}I_N)\overset{\text{増大列連続性}}{=}\lim_{N\to\infty}m^{2n}(I_N)=0$$

となる。よって $m^{2n}(T(E))=m^{2n}(\mathbb{R}\times\{0\})=0$ を満たす。 □

問 50 (1.2.27)**.** $\pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $\pi(x,y):=x$ で定める。このとき $\mathbb{R}^2$ の可測部分集合 E で $\pi(E)$ が非可測でないものが存在することを示せ。

証明. $F\subset\mathbb{R}$ を Lebesgue 非可測集合とする。$F':=\{(x,x)\mid x\in F\}$ とおくとこれは求める $\mathbb{R}^2$ の可測集合となっている。なぜなら $F'\subset L:=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ に対して前補題より $m^2(L)=0$ である。 □

2 1.3 節

定義 10 (符号なし単関数の積分)**.** $(S,\mathcal{A},m)$ を測度空間とする。可測空間 $(S,\mathcal{A})$ 上の任意の非負可測単関数 $f:S\to[0,\infty)$ に対し互いに素な有限個の $E_1,...,E_n\in\mathcal{A}$ と $a_1,...,a_n\in[0,\infty)$ で $f=\sum_{j=1}^n a_j 1_{E_j}$ を満たすものが (Tao 曰くヴェン図を使う) とれる。そこで f の m による積分を

$$\mathrm{Simp}\int_S f(x)dm(x):=\sum_{j=1}^n a_j m(E_j)\in[0,\infty]$$

で定義する。これは良定義すなわち補題 1.3.4 が成り立つ。

問 51 (1.3.1, 符号なし単関数積分). (1) Simp $\int_{\mathbb{R}^d} cf(x)dm(x) = c$Simp $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dm(x)$ は明らかであろう。なぜなら $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{E_i}$ に対して $m(E_i) < \infty; \forall i \in \{1, ..., n\}$ ならば

$$\int_{\mathbb{R}^d} cf(x)dm(x) = \sum_{i=1}^n (ca_i)m(E_i) = c(\sum_{i=1}^n a_i m(E_i)) = c\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dm(x)$$

であり $m(E_i) = \infty$ なる i が少なくとも一つある場合についても, $\int_{\mathbb{R}^d} cf(x)dm(x) = \sum_{i=1}^n (ca_i)m(E_i) = \infty$ で $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dm(x) = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i) = \infty$ かつ $c > 0$ より $c\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dm(x) = \infty$ より左辺と右辺は等しい。
そこで一方の線型性を示す。f, g は符号なし単関数であるから $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d), F_1, ..., F_m \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ を互いに素な集合列とし $a_1, ..., a_n,\ b_1, ..., b_m \in (0, \infty)$ として

$$f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{E_j} = \sum_{j=0}^n a_j 1_{E_j}\ ,\ g = \sum_{k=1}^m b_k 1_{F_k} = \sum_{k=0}^m b_k 1_{F_k}$$

とかける。ただし, $a_0 := 0, b_0 := 0$ である。

$$f + g = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) 1_{E_j \cap F_k} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m (a_j + b_k) 1_{E_j \cap F_k}$$

であるから (何故なら, $E_j = \sqcup_{k=0}^m (E_j \cap F_k)$, $F_k = \sqcup_{j=0}^n (E_j \cap F_k)$ より $1_{E_j}(x) = \sum_{k=0}^m 1_{E_j \cap F_k}(x)$, $1_{F_k}(x) = \sum_{j=0}^n 1_{E_j \cap F_k}(x)$. ただし, この $\sqcup$ をとる操作で E_j になったり F_k になったりする為には $E_0 := \mathbb{R}^d \backslash (\sqcup_{j=1}^n E_j)$ かつ $F_0 := \mathbb{R}^d \backslash (\sqcup_{k=1}^m F_k)$ と定義しておく。) 次式が成り立つ。ただし, 測度の有限加法性を正確に使う為に十分解答を練る必要があるからその点に注意しなければならない。
$a_j + b_k = 0$ となるのは $j = k = 0$ の場合のみなので, この項は除外して

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x)dm(x) \\
&\underset{\text{項の除外}}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j m(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n a_j m(E_j \cap F_0) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k m(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^m b_k m(E_0 \cap \\
&= \sum_{j=1}^n a_j (\sum_{k=1}^m m(E_j \cap F_k) + m(E_j \cap F_0)) + \sum_{k=1}^m b_k (\sum_{j=1}^n m(E_j \cap F_k) + m(E_0 \cap F_k)) \\
&= \sum_{j=1}^n a_j (\sum_{k=0}^m m(E_j \cap F_k)) + \sum_{k=1}^m b_k (\sum_{j=0}^n m(E_j \cap F_k)) \\
&\underset{\text{有限加法性}}{=} \sum_{j=1}^n a_j m(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k m(F_k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dm(x) + \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dm(x)
\end{aligned}$$

(5) $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d),\ F_1, ..., F_m \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ を互いに素な集合列, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in (0, \infty)$ とし $f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{E_j}$, $g = \sum_{k=1}^m b_k 1_{F_k}$ に対して積分の単調性が成り立つことを示す。$m(E_j \cap F_k) > 0$ を満たす任意の j, k に対し $E_j \cap F_k \neq \emptyset$ だから任意の $x \in E_j \cap F_k$ を取れば $a_j = f(x) \leq g(x) = b_k$ となる。($\because 1_{E_j}, 1_{F_k}$ の定義) よって

$$a_j m(E_j \cap F_k) \leq b_k m(E_j \cap F_k) \quad (1 \leq \forall j \leq n,\ 1 \leq \forall k \leq m)$$

を満たす。また $\sqcup_{j=1}^n E_j \subset \sqcup_{k=1}^m F_k$ が成り立つ。何故なら，$E_j \backslash (\sqcup_{k=1}^m F_k) \neq \emptyset$ なる E_j があったとすれば，$x \in E_j \backslash (\sqcup_{k=1}^m F_k)$ とするとき，$f(x) = a_j > 0 = g(x)$ ($\because a_j$ や b_j は $j \geq 1$ に対して正数と定めてある.) となり $f \leq g$ に矛盾する。従って $E_j = \sqcup_{k=1}^m E_j \cap F_k$ と表せ，($\forall j$ という点が図を描いて考えると分かる.) $m(E_j) = \sum_{k=1}^m m(E_j \cap F_k)$ となる。以上より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dm(x) = \sum_{j=1}^n a_j m(E_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j m(E_j \cap F_k)$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k m(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^m b_k (\sum_{j=1}^n m(E_j \cap F_k)) = \sum_{k=1}^m b_k m\Big((\sqcup_{j=1}^n E_j) \cap F_k\Big)$$

$$\leq \sum_{k=1}^m b_k m(F_k) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dm(x)$$

が成り立つ。$(\sqcup_{j=1}^n E_j) \cap F_k \subset \sqcup_{k=1}^m F_k \cap F_k = F_k$ であり測度の単調性を用いた。
(6) 本問は (左辺) := $m(E)$ で自明であるが次の命題で一般的な証明を勉強することとする。
f を符号なし単関数とし $\gamma : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ を $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し $\gamma(A) = \int_A f(x)dm(x)$ で定義すると γ は測度である。
($\because$) $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ を $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ の互いに素な集合列とする。$A = \sqcup_{k=1}^\infty A_k$ と分割されるとし，$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j 1_{E_j}(x)$ $(0 < a_j < \infty, \forall j)$ とおく。

$$\gamma(A) = \int_A f(x)dm(x) = \sum_{j=1}^n a_j m(A \cap E_j),\ \gamma(A_k) = \int_{A_k} f(x)dm(x) = \sum_{j=1}^n a_j m(A_k \cap E_j)$$

である。$A \cap E_j = \sqcup_{k=1}^\infty A_k \cap E_j$ であり m は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の測度で可算加法性より

$$m(A \cap E_j) = m(\sqcup_{k=1}^\infty (A_k \cap E_j)) = \sum_{k=1}^\infty m(A_k \cap E_j)$$

だから

$$\gamma(A) = \sum_{j=1}^n a_j m(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^\infty m(A_k \cap E_j) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n a_j m(A_k \cap E_j) = \sum_{k=1}^\infty \gamma(A_k)$$

より γ は測度である。(5) の証明では「ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}^d$ で」という文言に注意を払わなかったがこれは，Lebesgue 測度零集合上での関数の値を変えても積分の値に変化は起きないという理由による。(4) $\Rightarrow$ (3) は明らかであり (4) は一般的な命題を勉強する。(2) の有限性についても符号なし単関数 $f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{E_j}$ に対し零集合上で $a_j = \infty$ や零集合内に無限測度の台を含んでいても ($a_j \in [0, \infty]$ や E_j が関数の値を変える.) 積分値には影響しないから成立する。(2) は次の (い) ($\Rightarrow$ は自明で $\Leftarrow$ は非自明であろう。)，そして (4) の同値性は (は) で示すが (ろ) が (は) の補題の役割となる。

命題 8 (1.3.1)**.** $(S, \mathcal{A}, m)$ を測度空間とする。
(い) $E \in \mathcal{A}$ とする。このとき $m(E) = 0$ ならば任意の $\overline{\mathbb{R}}$ 値可測関数 f に対して $\int_E f d\mu = 0$ で

ある。
(ろ) 可測関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$に対し, $E_i = \{x \in X \mid |f(x)| > 1/i\}$ とおくと $E_i \in \mathcal{A}$ であり

$$\{x \in X \mid |f(x)| \neq 0\} = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$$

が成り立つ。また $\forall i \in \mathbb{N}; \mu(E_i) < \infty$ である。さらに $E_\infty = \{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$ とおけば, $E_\infty \in \mathcal{A}$ で$\mu(E_\infty) = 0$ である。
(は) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$とし, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$に対し次は同値である。
(a) a.e.$x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ である。
(b) g は可測関数で任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$が成立する。

定義 11. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$ とする。$A \in \mathcal{A}, f \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A})$ に対して

$$\int_A f d\mu = \int_X 1_A f d\mu$$

で定義する。

証明. f は可測なので $1_E f$ は可測であり, $(1_E f)^{\pm} = 1_E f^{\pm} \in \mathcal{A}^{+}(X)$ (: X 上の非負可測関数全体を指す. また $f^{\pm}$はテキスト 52 ページ参照.) である。また $(1_E f)(x) \neq 0$ ならば $x \in E$ なので (これは部分集合上での Lebesgue 積分の定義によって?)

$$N^{\pm} = \{x \in X \mid \pm(1_E f)(x) > 0\}$$

とおけば $N^{\pm} \subset E$ である。$\pm(1_E f)(x) > 0$ であることと $x \in E$ かつ $f^{\pm}(x) > 0$ であることとは同値なので, $f^{\pm}$が可測関数であることから

$$N^{\pm} = E \cap (f^{\pm})^{-1}((0, \infty]) \in \mathcal{A}$$

である。よって $0 \leq \mu(N^{\pm}) \leq \mu(E) = 0$ より$\mu(N^{\pm}) = 0$ であり, a.e.$x \in X$ に対して $(1_E f)^{\pm}(x) = 0$ が成り立つ。よって $\int_X (1_E f)^{\pm} d\mu = 0$ である。これで

$$\int_E f d\mu = \int_X 1_E f d\mu := \int_X (1_E f)^{+} - \int_X (1_E f)^{-} d\mu = 0$$

である。
(ろ) f は可測より $|f|$ も可測であり, $E_i = |f|^{-1}((1/i, \infty]) \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ である。$x \in X, f(x) \neq 0$ とすれば $|f(x)| > 0$ より $|f(x)| > 1/i$ なる $i \in \mathbb{N}$ があり $x \in E_i$である。よって $x \in \cup_{i=1}^{\infty} E_i$は明らか。逆に $x \in \cup_{i=1}^{\infty} E_i$とすれば $x \in E_i$を満たす i があるので $|f(x)| > 1/i$ であり $|f(x)| \neq 0$ である。
$x \in E_i$と $|f(x)| > 1/i$ は等価なので $1_{E_i}(x) \leq i|f(x)|$ である。よって積分の単調性より

$$\mu(E_i) = \int_X 1_{E_i} d\mu \leq \int_X i|f| d\mu < \infty$$

である。任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $|f(x)| \geq i 1_{E_\infty}(x)$ である。実際 $x \in E_\infty$でもまた $x \notin E_\infty$なら $i 1_{E_\infty}(x) = 0 \leq |f(x)|$ である。また $E_\infty = f^{-1}(\{\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ より 1_{E_∞}は非負可測関数である。よって積分の単調性より,

$$\int_X |f| d\mu \geq \int_X i 1_{E_\infty} d\mu = i\mu(E_\infty)$$

となる。よって

$$0 \le m(E_\infty) \le \frac{1}{i}\int_X |f|d\mu$$

である。条件より $\int_X |f|d\mu < \infty$ だから$\mu(E_\infty) = 0$ である。
(は) a.e.$x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ とする。このとき任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ となることを示す。$\mu(N) = 0$ なる測度零集合 $N \in \mathcal{A}$ を，任意の $x \in N^c$に対して $f(x) < \infty, f(x) = g(x)$ であるように取れる。なぜなら，a.e.$x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ より $N' \in \mathcal{A}$ で $\mu(N') = 0$ なるものが存在して，任意の $x \in X\backslash N'$に対し $f(x) = g(x)$ である。
(ろ) から，$E_\infty := \{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$ とすれば $E_\infty \in \mathcal{A}, \mu(E_\infty) = 0$ である。そこで $N := N' \cup E_\infty$とすると，$\mu(N) = 0$ である。$X\backslash N = X \cap (N' \cup E_\infty)^c = (X\backslash N') \cap (X\backslash E_\infty)$ なので $x \in X\backslash N$ なら $x \in X\backslash N'$から $f(x) = g(x)$ であり，$x \in X\backslash E_\infty$でもあるので $|f(x)| < \infty$ を満たす。(証明終)
$x \in N^c$ならば $1_E f = 1_E g$ である。$(1_E f)^\pm \le f^\pm$に対し単調性より $\int_X (1_E f)^\pm d\mu \le \int_X f^\pm d\mu < \infty$ である。$x \in N^c$ならば $\int_X (1_E f)^\pm d\mu = \int_X (1_E g)^\pm d\mu$であるから $\int_X (1_E f)^\pm d\mu, \int_X (1_E g)^\pm d\mu$は ($N$ の取り方により) 有限であって

$$\int_E f d\mu = \int_X 1_E f d\mu = \int_X (1_E f)^+ d\mu - \int_X (1_E f)^- d\mu = \int_X 1_E g d\mu = \int_E g d\mu$$

である。逆を示す。$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$が成り立つとする。
<u>f, g が (拡張ではない) 実数値関数である場合</u>
この場合に a.e.$x \in X$ に対し $f(x) = g(x)$ を示す。このとき積分の線型性から

$$\int_E (f - g)d\mu = \int_E f d\mu - \int_E g d\mu = 0$$

である。

$$E_\pm := \{x \in X \mid \pm(f(x) - g(x)) > 0\} = (\pm(f - g))^{-1}((0, \infty))$$

とすれば $E_\pm \in \mathcal{A}$ で $0 = \int_{E_\pm} (f - g)d\mu = \int_X 1_{E_\pm}(f - g)d\mu$なので a.e.$x \in X$ に対し $1_{E_\pm}(x)(f(x) - g(x)) = 0$ である。([(3)0 になる] を使用 i.e. $\mu(P_\pm) = 0$ を満たし，任意の $x \in X\backslash P_\pm$に対して $1_{E_\pm}(x)(f(x) - g(x)) = 0$ となるものが存在.) $x \in E_\pm$ならば $\pm 1_{E_\pm}(x)(f(x) - g(x)) = \pm(f(x) - g(x)) \underset{E\pm\text{の } def}{>} 0$ なので $x \in P_\pm$. すなわち $E_\pm \subset P_\pm$である。よって$\mu(E_\pm) \le \mu(P_\pm) = 0$ より $\mu(E_\pm) = 0$ となる。X の部分集合 N を

$$N := \{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \sqcup \{x \in X \mid f(x) < g(x)\} = E_+ \sqcup E_-$$

とすれば明らかに$\mu(N) = 0$ である。これで$\mu(N) = 0$ なる N があって $x \in N^c$ならば $f(x) = g(x)$ であることが示せた。
<u>f, g が$\overline{\mathbb{R}}$値である場合</u>

$$F_0 := \{x \in X \mid |f(x)| = \infty\},\ \ G_0 := \{x \in X \mid |g(x)| = \infty\}$$

とすれば (ろ) より$\mu(F_0) = \mu(G_0) = 0$ である。そこで $H_0 = F_0 \cup G_0$とすれば$\mu(H_0) = 0$ を満たす。

$$\hat{f} := 1_{H_0^c} f,\ \ \hat{g} := 1_{H_0^c} g$$

とすれば$\hat{f},\hat{g}$は$\mathbb{R}$ 値可測関数であり $x \in H_0^c$ならば $\hat{f} = f$ である。
すなわち a.e.$x \in X$ に対し$\hat{f}^{\pm}(x) = f^{\pm}(x)$ である。よって任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して $(1_E\hat{f})^{\pm}(x) = 1_E\hat{f}^{\pm}(x) = 1_E f^{\pm}(x) = (1_E f)^{\pm}(x)$, a.e.$x \in X$ であり，$\int_X (1_E\hat{f})^{\pm} d\mu = \int_X (1_E f)^{\pm} d\mu$となる。ゆえに

$$\begin{aligned}\int_E \hat{f} d\mu &= \int_X 1_E \hat{f} d\mu = \int_X (1_E\hat{f})^{+} d\mu - \int_X (1_E\hat{f})^{-} d\mu \\ &= \int_X (1_E f)^{+} d\mu - \int_X (1_E f)^{-} d\mu = \int_X 1_E f d\mu = \int_E f d\mu\end{aligned}$$

である。同様に

$$\int_E \hat{g} d\mu = \int_E g d\mu$$

も任意の $E \in \mathcal{A}$ に対し成り立つ。よって

$$\int_E \hat{f} d\mu = \int_E f d\mu \underset{(b)\Rightarrow(a)}{=} \int_E g d\mu = \int_E \hat{g} d\mu$$

よって a.e.$x \in X$ に対し$\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ が成り立つ。つまり$\mu(H) = 0$ であって $x \in H^c$ならば $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ を満たす H が存在する。そこで $K := H_0 \cup H$ とすれば$\mu(K) = 0$ で，$x \in X\backslash K$ ならば「$x \in X\backslash H_0$より$\hat{f}(x) = f(x)$ と$\hat{g}(x) = g(x)$」($\because$ $\hat{f}$および$\hat{g}$の def),「$x \in X\backslash H$ より$\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ である」ので

$$f(x) = g(x)$$

が成り立つ。すなわち a.e.$x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ であることが分かる。 □

注 11 ((3)0 になる)**.** (4) の同値性と全体空間を「抽象測度空間」とした命題で示される。$(S, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする。f, g を S 上の非負可測空間とする。$\int_S f d\mu = 0 \Leftrightarrow$ a.e.$x \in S$ に対して $f(x) = 0$ である。
($\because$) a.e.$x \in S$ に対して $f(x) = 0$ とする。まず f は非負単関数であるとする。$\mu(N) = 0$ を満たす N で任意の $x \in N^c$に対し $f(x) = 0$ となるものがある。$f = \sum_{i=1}^M a_i 1_{E_i}$ $(a_i > 0, E_i \in \mathcal{A})$ とかけば $E_i \subset N$ $(1 \leq i \leq M)$ である。実際，$x \in E_i$ならば $f(x) = a_i > 0$ より $x \in N$. よって $0 \leq \mu(E_i) \leq \mu(N) = 0$ であり，$\mu(E_i) = 0$ となる。よって $\int_S f d\mu = \sum_{i=1}^M a_i \mu(E_i) = 0$ である。次に一般に f が非負可測関数とする。(演習 1.3.1 には必要ない。) a.e.$x \in S$ に対して $f(x) = 0$. このときϕを $0 \leq \phi \leq f$ を満たす任意の非負単関数とすれば a.e.$x \in S$ に対し$\phi(x) = 0$ である。実際，$\phi = \sum_{i=1}^M a_i 1_{E_i}$ $(0 < a_i, E_i \in \mathcal{A})$ とかく。$\mu(N) = 0$ を満たす任意の $x \in N^c$に対し $f(x) = 0$ となるものがあるので，$x \in E_i$とすれば $f(x) \geq \phi(x) = a_i$より $x \in N$ である。
よって $E_i \subset N$ で $0 \leq \mu(E_i) \leq \mu(N) = 0$ より$\mu(E_i) = 0$ である。よって $\int_S \phi d\mu = 0$ である。ϕ は $0 \leq \phi \leq f$ を満たす任意の非負単関数であったのでテキスト定義 1.3, 13 の「非負可測関数の Lebesgue 積分」の定義から

$$\int_S f d\mu = 0$$

である。逆に非負可測関数 f に対して $\int_S f d\mu = 0$ とする。$E_i = \{x \in S \mid f(x) > 1/i\}$ とおくと $\{x \in S \mid f(x) > 0\} = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. ($\because$ $f(x) > 0$ なら $f(x) > 1/i$ なる $i \in \mathbb{N}$ が存在し，逆に $f(x) > 1/i$ なら $f(x) > 0$) また任意の $x \in S$ に対して $1_{E_i} \leq if$ なので，$\mu(E_i) = \int_S 1_{E_i} d\mu \leq$

$\int_S ifd\mu \underset{仮定}{=} 0$ である。よって $\forall i \in \mathbb{N}; \mu(E_i) = 0$ だから

$$0 \le \mu(\{x \in S \mid f(x) > 0\}) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = 0$$

であり, a.e.$x \in S; f(x) = 0$ が成り立つ。

定義 12 (非負可測関数)**.** 非負関数 $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ が Lebesgue 可測である, または単に可測とは非負単関数の各点収束極限であることである。つまり, 各 $x \in \mathbb{R}^d$で $f_n(x) \to f(x)$ となるような非負単関数 $f_1, f_2, ... : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ が存在することとする。

補題 15 (補題 1.3.9, 同値な言い換え)**.** ・$f(x) = \inf_{N>0} \sup_{n \ge N} f_n(x)$ より (次の $\cup_{M>0}$ は $1/M$ を数直線の左に寄せていくだけで, $\cap_{N>0}$が指す部分の正当性がこの理由による。)

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > \lambda\} = \cup_{M>0} \cap_{N>0} \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \sup_{n \ge N} f_n(x) > \lambda + \frac{1}{M}\right\} \text{a.e.}$$

・(5) $\Leftrightarrow$ (6) では $\mathbb{Q}^+$の可算性は言及するのが大事。
・$[0, \infty)$ の開集合は $[0, \infty)$ の可算個の開区間の和集合としてかけることは別途証明が必要。
・次で定めた f_nは増大列で $\sup_n f_n = f$ を満たす。$\{f_n^{-1}(c) \mid c \neq 0\} = f^{-1}(I_c) \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \le n\}$ という形になることは, f_nの定義を具体的に書き下してみて分かったが, 明らかか。

$$f_n(x) := \begin{cases} \max\{\mathbb{Z}2^{-n}\} \ (\le \min\{f(x), n\}) & if\ |x| \le n \\ 0 & if\ |x| > n \end{cases}$$

問 52 (1.3.3)**.** (1) 全ての連続関数 $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ は可測である。
(2) 全ての非負単関数は可測である。
(3) 非負可測関数列の上限, 下限, 上極限, 下極限は可測である。
(4) ある非負可測関数にほとんど至る所等しい非負関数は可測である。
(5) もし非負可測関数の列 f_nがほとんど至る所ある非負極限 f に各点収束していれば, f も可測である。
(6) $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ が可測で, $\phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ が連続ならば$\phi \circ f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ も可測である。
(7) もし f, g が非負可測関数ならば $f + g, fg$ も可測である。

証明. (6) を示す。常に $(\phi \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\phi^{-1}(U))$ である。ϕは連続なので $[0, \infty]$ における開集合 U に対して$\phi^{-1}(U)$ は開である。開集合は Lebesgue 可測 (補題 1.2.13) なので, 可測関数 f に対して補題 1.3.9(10) を用いると $f^{-1}(\phi^{-1}(U))$ は Lebesgue 可測集合である。再び (10) $\Rightarrow$ (1) より演習 1.3.3(6) が成り立つ。
(7) を示す。$\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ での稠密性から任意の $a \in [0, \infty]$ に対し

$$(a < f+g) = (a-g < f) = \cup_{r \in \mathbb{Q}}\{(a-g < r) \cap (r < f)\} = \cup_{r \in \mathbb{Q}}\{(a-r < g) \cap (r < f)\} \underset{補題\ 1.3.9(5)}{\in} \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$$

である。よって $f + g$ は可測である。$p \in (0, \infty)$ に対して $|f|^p : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto |f(x)|^p \in [0, \infty]$ は可測である。なぜなら任意の$\lambda \in [0, \infty]$ に対し $(\lambda < |f|^p) = (\lambda^{1/p} < |f|) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ である。このことと $f + g$ の可測性によって

$$fg = \frac{1}{4}|f + g|^2 - \frac{1}{4}|f - g|^2$$

も可測関数である。(3) は定義 1.3.8 を用いれば容易である。f を非負可測単関数の各点収束極限として $f = \sup f_n$とおく。$\lambda \in [0,\infty]$ に対して

$$f^{-1}([0,\lambda]) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \in [0,\lambda]\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sup f_n(x) \in [0,\lambda]\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall n \in \mathbb{N}; f_n(x) \in [0,\lambda]\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([0,\lambda]) \underset{(1)\Rightarrow(8)}{\in} \mathcal{A}$$

となる。再び補題 1.3.9(8) $\Rightarrow$ (1) より f は可測関数である。$\inf f_n = -\sup(-f_n)$ も同様であり $\limsup$ や $\liminf$ は $\sup$ と $\inf$ を合わせて書けるから示せた。テキストに書いてない方は $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq N} f_n(x)$
(2) の符号なし単関数が可測であることについては，まず定義 1.3.2 を振り返る必要がある。そして E が Lebesgue 可測集合なことと 1_Eが可測関数であることの同値性を確かめる。また演習 1.3.8(2) で値域が $\mathbb{C}$ の場合についても適用できる形でまとめる。
1_Eを $E \subset S$ の指示関数とすれば

$$1_E^{-1}((\lambda,\infty]) = \begin{cases} S & (\lambda < 0) \\ E & (0 \leq \lambda < 1) \\ \varnothing & (\lambda \geq 1) \end{cases}$$

である。S 上の完全加法族 $\mathcal{A}$ として$\varnothing, S \in \mathcal{A}$ であるために E が可測集合であるのと 1_Eが可測関数であることは同値である。ただし演習 1.3.3 では符号なしの場合なので，$\lambda \geq 0$ に対する $(\lambda,\infty]$ の逆像を答案として書いた方が良い。1.3.3.(7) より単関数 $f(x) = \sum_{i=1}^N c_i 1_{E_i}(x)$ $(c_i \in \mathbb{K}\backslash\{0\}, i = 1,...,N)$ は可測関数である。
逆に f が可測単関数で $f(x) = \sum_{i=1}^N c_i 1_{E_i}(x)$ の形に表されるとすると，

$$f^{-1}(\{\lambda\}) = f^{-1}([-\infty,\lambda] \cap [\lambda,\infty]) = f^{-1}([-\infty,\lambda]) \cap f^{-1}([\lambda,\infty]) \tag{2.1}$$

より $1 \leq i \leq N; E_i = \{x \in S \mid f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$ は補題 1.3.9 から Lebesgue 可測集合である。$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は $c_j \in \mathbb{C}$ を $c_j = a_j + b_j$とおけば

$$f(x) = \sum_{j=1}^N (a_j + ib_j) 1_{E_j}(x) = \mathrm{Re} f(x) + i\mathrm{Im} f(x)$$

である。よって (7) と $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の結果から $E_1,...,E_N$が Lebesgue 可測なことと f が Lebesgue 可測関数であることは同値。 □

命題 9 (一般的な (4),(5))**.** (4) $(X,\mathcal{M},\mu)$ を完備測度空間とし，$(Y,\mathcal{N})$ を可測空間とする。$f,g : X \to Y$ があり f は可測写像とする。このとき a.e.$x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ なら g も可測写像であることを示す。$f,g : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ でも測度の完備性は必要。
$\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{M}$ が存在し任意の $x \in X\backslash N$ に対し $f(x) = g(x)$ である。任意の $E \in \mathcal{N}$ に対して $x \in g^{-1}(E) \cap X\backslash N$ ならば $f(x) = g(x) \in E$ で $x \in f^{-1}(E)$ である。$x \in f^{-1}(E) \cap X\backslash N$ でもある。よって $g^{-1}(E) \cap X\backslash N = f^{-1}(E) \cap X\backslash N$ より

$$g^{-1}(E) = \{g^{-1}(E) \cap X\backslash N\} \cup \{g^{-1}(E) \cap N\} = \{f^{-1}(E) \cap X\backslash N\} \cup \{g^{-1}(E) \cap N\}$$

である。$g^{-1}(E)\cap N\subset N$ であり，μの完備性より $g^{-1}(E)\cap N\in\mathcal{M}$. f は可測なので $f^{-1}(E)\in\mathcal{M}$ だから $f^{-1}(E)\cap X\backslash N\in\mathcal{M}$ である。よって上式より，$g^{-1}(E)\in\mathcal{M}$.
(5) $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とし，$(f_i)_{i\in\mathbb{N}}:X\to\mathbb{K}$ を可測関数で a.e.$x\in X$ に対し $\lim_{i\to\infty}f_i(x)$ が収束するとして，

$$\lim_{i\to\infty}f_i(x)=f(x)\ \text{a.e.}x\in X$$

とする。さらに $(X,\mathcal{M},\mu)$ が完備ならどんな f も可測である。
仮定より$\mu(N)=0$ なる $N\in\mathcal{M}$ があって，任意の $x\in X\backslash N$ に対し $(f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$は $\mathbb{K}$ の点に収束する。よって，$x\in N$ なら明らかにそうであるが，$x\in X$ に対して $(1_{X\backslash N}(x)f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{K}$ 上の収束点列である。従って $f(x):=\lim_{i\to\infty}1_{X\backslash N}(x)f_i(x)$ とおけば，$x\in X\backslash N$ ならば $\lim_{i\to\infty}f_i(x)=f(x)$ なので，a.e.$x\in X$ で $\lim_{i\to\infty}f_i(x)=f(x)$ が成り立つ。(存在性)
X が完備測度空間とし，勝手な $g:X\to\mathbb{K}$ が a.e.$x\in X$ に対して $\lim_{i\to\infty}f_i(x)=g(x)$ を満たすとする。a.e.$x\in X$ で $\lim_{i\to\infty}f_i(x)=f(x)$ を満たす可測な f が従って存在する。((3) の上極限と下極限が一致するとき収束するが，その可測性より。) $N_1,N_2\in\mathcal{M}$ で$\mu(N_1)=\mu(N_2)=0$ なるものがあって，$x\in X\backslash N_1$に対し $\lim_{i\to\infty}f_i(x)=f(x)$, $x\in X\backslash N_2$に対し $\lim_{i\to\infty}f_i(x)=g(x)$ が成り立つ。
$N=N_1\cup N_2$とおくと，$x\in N^c=N_1^c\cap N_2^c$ならば，

$$g(x)=\lim_{i\to\infty}f_i(x)=f(x)$$

である。$\mu(N)=0$ よりほとんど至る所 $g(x)=f(x)$ である。(4) より g も可測関数。

問 53 (1.3.4)**.** $f:\mathbb{R}^d\to[0,\infty]$ が有界な符号なし可測関数 $\Leftrightarrow$ f は有界な単関数の一様収束極限

系 4. $[0,\infty]$ を拡張して$\overline{\mathbb{R}}$の場合は，f を f^+と f^-に分解すれば結果を用いられる。実際，可測単関数 $(\psi_i^{\pm})_{i\in\mathbb{N}}$で任意の $x\in X$ について

$$0\le\psi_1^{\pm}(x)\le\cdots\le\psi_i^{\pm}(x)\le\cdots\le f^{\pm}(x)$$

を満たすものが存在する。従って$\phi_i(x):=\psi_i^+(x)-\psi_i^-(x)$ と定義すればψ_iは$\overline{\mathbb{R}}$値可測単関数であり，任意の $i\in\mathbb{N}$ に対して $|\phi_i|=\psi_i^++\psi_i^-\le f^++f^-=|f|$ となる。故に任意の $x\in X$ で

$$0\le|\phi_1(x)|\le\cdots\le|\phi_i(x)|\le\cdots\le|f(x)|$$

f が有界なら，ここが系であるが $\psi_i^{\pm}\to f^{\pm}$の一様収束性より$\phi_i\to f$ も一様である。

問 54 (1.3.4)**.** 単関数列の収束先としての符号なし可測関数が有界であるときは，一様であることを示す。

問 55 (1.3.8(7))**.** (**??**) は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ni\varphi^{-1}$が Lebesgue 可測集合を Lebesgue 可測集合にうつすことを意味する。f の Lebesgue 可測性より任意の $E\in\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ に対し $f^{-1}(E)\in\mathscr{L}$ である。
よって

$$(f\circ\varphi)^{-1}(E)=\varphi^{-1}(f^{-1}(E))\in\mathscr{L}$$

なのでこれは A 上の Lebesgue 可測関数である。これで 1.3.8(7) は示された。全射性が必要な理由は Lebesgue 測度の次元論的側面の性質による。もし全射なら 1.2.21 の注意の状況に当たらない。

問 56 (1.3.9)**.** (**??**) の応用である。

問 57 (1.3.12)**.** 何の可測性も仮定されていないときは Lebesgue 外測度は有限可法性を持たない (演習 1.2.26) より Lebesgue 上積分や下積分も加法性を持たない。本問では Lebesgue 外測度を登場させているが内測度に置き換えて更に適切な命題としたものが [**?**]88 ページの問 4 である。

問 58 (1.3.13, 面積解釈)**.** ヒントと [**?**] の 89 ページを参照せよ。

問 59 (1.3.15, 平行移動不変性,[**?**]87 ページ)**.** Step1 : $f(x) = \sum_j \alpha_j 1_{E_j}(x)$ とかけ単関数の場合を示す。$f(x+y) = \sum_j \alpha_j 1_{E_j - y}(x)$ なので $f(x+y)$ は x の可測単関数で

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)dx = \sum_j \alpha_j \mu(\{E_j - y\}) \underset{\text{測度の不変性}}{=} \sum_j \alpha_j \mu(E_j) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx$$

である。Step2 : f が非負可測関数の場合は $f_n(x) \nearrow f(x)$ を満たす単関数列 $(f_n)_n$ を取れば, $f_n(x+y) \nearrow f(x+y)$ を満たす単調増大な単関数列であるから $f(x+y)$ も可測で

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x+y) \underset{\text{Step1}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx$$

が成り立つ。

問 60 (1.3.18)**.** $d = 1$ として $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ を $x \mapsto -\log x$ で定める。

問 61 (1.3.21)**.** 積分の定義より明らか。

問 62 (1.3.25)**.** (2) $f : B(0,R) \to R$ に対して $N \subset B(0,R)$s.t.$m(N) = 0$ で f が N^c上有界であるような N がある。近似するような閉集合 C であって, $C \subset B(0,R), m(B(0,R) - C) \leq \epsilon$を満たすものが取れる。すると $m(B(0,R) - (C - N)) \leq \epsilon$であり, E は $C \backslash N$ とおけば良い。閉集合 C で ∞ を f は取るかもしれないが, ∞ を取るような x 全体を集めても減少列連続性からその測度は 0 で問題は起きない。

注 12 (注意 1.3.27)**.** どんな $0 < \epsilon < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対しても測度 1 の集合 $[n, n+1]$ 上で $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$を満たす。よって, ある A の外で f_nが f に一様収束するというエゴロフの定理を満足する為には $\forall n \in \mathbb{N}; [n, n+1] \subset A$ である。n が十分大きいときも含む必要があるので $m(A) = \infty$ であるが, これは定理において矛盾する。

問 63 (1.4.8)**.** n を自然数とする。$\mathcal{F}$ が n 個の集合の集まりであるとすると, $\langle \mathcal{F} \rangle_{bool}$は濃度が高々 2^{2^n} である有限濃度の有限加法族であることを示せ。$X = \{0,1\}^n$のような離散的な全体集合を使えば良い。

証明. X の根源事象の個数とは $X = \{(0,0,...,0),...,(1,1,...,1)\}$ の要素数のことであり, これは 2^nである。標本空間 X の部分集合を事象というが, 2^n個の要素が含まれるか含まれないかの選択で事象が定まるから 2^{2^n} が事象の個数である。 □

問 64 (1.4.14)**.** (5), (6) については [**?**], 35 ページに記載。$\mathcal{E}_d$を $\mathbb{R}^d$における直方体全体とする $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \equiv \sigma[\mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}]$ が $\mathfrak{B}(\mathcal{E}_d)$ に一致することを示せば十分である。任意の $I \in \mathcal{E}_d$は

$$I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$$

と書ける場合とする。$n = 1, 2, ...$に対して $b_{\gamma d} = b_\gamma + \frac{1}{n}$ $(\gamma = 1, ..., d)$ とおくと，$J_n := (a_1, b_{1n}) \times \cdots \times (a_d, b_{dn})$ は $\mathbb{R}^d$の開集合で $I = \cap_{n=1}^{\infty} J_n$だから $I \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \equiv \sigma[\mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}]$ は明らかに成り立つ。よって $\mathcal{E}_d \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ であり，$\mathfrak{B}(\mathcal{E}_d) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ が成立する。
次に任意の $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}$を取ると，任意の点 $x \in G$ に対して xを内部に含む $\mathbb{R}^d$の直方体 $I_x \subset G$ が開集合の定義により存在する。各 $I_x \in \mathcal{E}_d$は

$$I_x = (a_{x1}, b_{x1}] \times \cdots \times (a_{xd}, b_{xd}]$$

なる形だから，

$$J_x := (a_{x1}, b_{x1}) \times \cdots \times (a_{xd}, b_{xd})$$

とおくと J_xは開集合で $x \in J_x$，よって

$$\cup_{x \in G} J_x \supset G$$

であり，リンデレフの被覆定理から高々可算個の G の点 $x_1, x_2, ...$が存在して

$$\cup_{n=1}^{\infty} J_{x_n} \supset G$$

が成立する。したがって $\cup_{n=1}^{\infty} I_{x_n} \supset G$ でもある。$I_{x_n} \subset G$ より $\cup_{n=1}^{\infty} I_{x_n} \subset G$ なので $G = \cup_{n=1}^{\infty} I_{x_n} \in \mathfrak{B}(\mathcal{E}_d)$. つまり $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{E}_d)$ より $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{E}_d)$ である。以上より目的の等号を示せた。

問 65 (1.4.15,1.4.16)**.** [**?**]109 ページ，定理 6.1*A* と定理 6.1*B* を参照せよ。

問 66 (1.4.17, 一般的に)**.** 注 1.4.15 と演 1.4.14 を利用する方法がタオが意図する正式な解法なことは直観的には把握した。$(X_1, \mathcal{O}_{X_1}), ..., (X_d, \mathcal{O}_{X_d})$ を位相空間とし，$(X, \mathcal{O}_X)$ をこれらの直積位相空間とするとき $\otimes_{i=1}^{d} \mathfrak{B}(X_i) \subset \mathfrak{B}(X)$ である。また，もし全ての $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ が第二可算公理を満たすなら等号が成り立つ。

証明. 実は $\pi_i : X \to X_i$を射影として

$$\otimes_{i=1}^{d} \mathfrak{B}(X_i) = \sigma[\mathcal{F} := \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{O}_{X_i},\ i = 1, ..., d\}]$$

となっている。射影の連続性より $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X$なので$\sigma[\mathcal{F}] \subset \sigma[\mathcal{O}_X]$ であり $\otimes_{i=1}^{d} \mathfrak{B}(X_i) \subset \mathfrak{B}(X)$ となる。 □

問 67 (1.4.18)**.** 開集合 $D \subset \mathbb{R}^{d_1}$を取り，$\mathcal{A} = \{F \subset \mathbb{R}^{d_2} \mid D \times F \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})\}$ は $\mathbb{R}^{d_2}$の完全加法族である。問いでは点 $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$を考えているが，一点集合は $\mathbb{R}^{d_1}$で開なので大丈夫。
$F \in \mathcal{A}$ に対し $F^c \in \mathcal{A}$ を言う。$D \times F \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ で $D \times \mathbb{R}^{d_2}$は開集合でボレル可測である。

$$(D \times F)^c \cap (D \times \mathbb{R}^{d_2}) = (D \times \mathbb{R}^{d_2}) \backslash (D \times F) = D \times (\mathbb{R}^{d_2} \backslash F) = D \times F^c \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$$

である。よって $F^c \in \mathcal{A}$ であり, $\forall i \in \mathbb{N}; F_i \in \mathcal{A}$ ならば $\cup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{A}$ も成り立つ。もしくは「$\mathcal{F}$ が完全加法族なら $f(\mathcal{F})$ も完全加法族」であるからと言うことも可能であるが, 今考えるとこの命題はボレル可測な部分集合に対しての言及で初めから考え直す必要しかない。次の命題 (1) で可測空間 $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ を $(\mathbb{R}^{d_1}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_1})), (\mathbb{R}^{d_2}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_2}))$ として $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_2}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ から問いの主張が成り立つ。

注 13. $X \times Y$ の部分集合 E と $x \in X, y \in Y$ に対して

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\},\ E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$

とおく。また $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ と $x \in X, y \in Y$ を固定して, $f_x : Y \to \mathbb{K}, f^y : X \to \mathbb{K}$ を

$$f_x(y) := f(x, y),\ f^y(x) := f(x, y)$$

で定める。$(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \mu)$ を測度空間とする。
(1) $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ ならば任意の $x \in X$ に対し $E_x \in \mathcal{N}$ であり, 任意の $y \in Y$ に対し $E^y \in \mathcal{M}$ である。
(2) $f(x, y)$ が $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ 可測ならば, $f_x(y)$ は $\mathcal{N}$ 可測で $f^y(x)$ は $\mathcal{M}$ 可測である。

証明. (1) $\mathcal{R} = \{E \in 2^{X \times Y} \mid \forall x \in X; E_x \in \mathcal{N}$ かつ $\forall y \in Y; E^y \in \mathcal{M}\}$ とおく。今

$$\mathcal{R} = \{E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \mid \forall x \in X; E_x \in \mathcal{N} \text{ かつ } \forall y \in Y; E^y \in \mathcal{M}\}$$

である。方針として $\mathcal{E} := \mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ を示し, 次に $\mathcal{R}$ が $X \times Y$ 上の完全加法族であることを示す。そうすれば, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \equiv \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{R}$ と自明な $\mathcal{R} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ から (1) が成り立つ。
$\underline{\mathcal{E} \subset \mathcal{R}}$
$E \times F \in \mathcal{E}\ (E \in \mathcal{M}, F \in \mathcal{N})$ に対して

$$(E \times F)_x = \begin{cases} F & (x \in E) \\ \varnothing & (x \notin E) \end{cases},\quad (E \times F)^y = \begin{cases} E & (y \in F) \\ \varnothing & (y \notin F) \end{cases}$$

より ($\varnothing \in \mathcal{M}, \mathcal{N}$ に注意.) $E \times F \in \mathcal{R}$ であり, $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ が示せた。
$\underline{\mathcal{R} \text{ は完全加法族}}$
$(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を $\mathcal{R}$ の集合列とし, $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ とし, 明らかに $E_x = \cup_{i=1}^{\infty} (E_i)_x$, $E^y = \cup_{i=1}^{\infty} (E_i)^y$ である。任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して定義から $(E_i)_x \in \mathcal{N}$, $(E_i)^y \in \mathcal{M}$ なので, $E_x \in \mathcal{N}$ かつ $E^y \in \mathcal{M}$ であるから $E \in \mathcal{R}$ である。
次に補集合をとる演算で閉じることを示すため $E \in \mathcal{R}$ とする。$E_x \in \mathcal{N}, E^y \in \mathcal{M}$ より $(E_x)^c \in \mathcal{N}, (E^y)^c \in \mathcal{M}$ である。よってこれと $(E^c)_x = (E_x)^c, (E^c)^y = (E^y)^c$ から $E^c \in \mathcal{R}$ である。
次に $\varnothing \in \mathcal{R}$ を示す。$\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in \mathcal{E}$ であり, $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ だったから良い。 □

問 68 (1.4.19,[?]40 ページ)**.** $\mathbb{R}^d$ の Lebesgue シグマ集合代数は Borel シグマ集合代数と零シグマ集合代数を合わせたもので生成されるものである。

問 69 (1.4.20)**.** 有限加法性は自明. $F = E \sqcup (F \backslash E)$ に対して有限加法性から $m(E) \leq m(E) + m(F \backslash E) = m(F)$ であるから単調性も明らか. $F_1 := E_1, F_n := E_n \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$ ($n \in \{2, ..., k\}$ とおくと $(F_n)_n$ は共通部分を持たず $\cup_n E_n = \cup_n F_n$, $\forall i; F_i \subset E_i$ である。これと単調性

から有限劣加法性が成り立つ。もし $c=\infty$ なら $a+c=b+c\Rightarrow a=b$ は不成立であることを思い出し, 包除則は示す。つまり, $\mu(E),\mu(F)$ が有限値である場合に引き算をして, ∞ 値をとる場合も個別に (4) が成り立つと明記するのが良い。$E\backslash F$ と F は互いに素な集合なので有限加法性より

$$\mu(E\backslash F)+\mu(F)\overset{\text{加法性}}{=}\mu((E\backslash F)\cup F)=\mu(A\cup B)$$

であり, また $E\backslash F$ と $E\cap F$ に対する有限加法性より

$$\mu(E\backslash F)+\mu(E\cap F)\overset{\text{加法性}}{=}\mu((E\backslash F)\cup(E\cap F))=\mu(F)$$

を満たす。よって (4) が成り立つ。

問 70 (1.4.21・25, 測度なら有限加法的測度に注意)**.** X を集合とし, $f:X\to[0,\infty]$ を任意の写像とする。$\mu:2^X\to[0,\infty]$ を$\mu(\emptyset)=0$ とし,

$$\mu(E):=\sum_{x\in E}f(x):=\sup\{\sum_{x\in F}f(x)\mid F\subset E\text{ は有限部分集合 }\}$$

とするとμは 2^X上の測度となることを示す。

証明. $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$を 2^Xの互いに素な集合列とする。$E=\cup_{i=1}^{\infty}E_i$とするとき F を E の有限部分集合とすれば $F\cap E_i$は E_iの有限部分集合だから

$$\sum_{x\in F}f(x)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{x\in F\cap E_i}f(x)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{x\in E_i}f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$

である。$F\subset E$ に関して上限をとれば$\mu(E)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ である。逆に各 $i\in\mathbb{N}$ に対して E_i の有限部分集合 F_iを取ると, $(\cup_{I=1}^{n}F_i)_n$は単調増加な E の有限部分集合の列であり

$$\sum_{x\in E}f(x)\geq\sum_{x\in\cup_{i=1}^{n}F_i}f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in F_i}f(x)$$

である。各 F_iは任意だから $\sum_{x\in E}f(x)\geq\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in E_i}f(x)$ となり $n\in\mathbb{N}$ は任意なので, $\sum_{x\in E}f(x)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{x\in E_i}f(x)$ である。すなわち$\mu(E)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ でもある。 □

注 14. $\sum a_n$に対して

$$(a_n)_+:=\frac{|a_n|+a_n}{2}\geq 0,\ (a_n)_-:=\frac{|a_n|-a_n}{2}\geq 0$$

とおくと, 各 n に対して $a_n=(a_n)_+-(a_n)_,\ |a_n|=(a_n)_++(a_n)_-$である。
・$\sum a_n$が絶対収束する $\Leftrightarrow$ $\sum(a_n)_+<\infty$ かつ $\sum(a_n)_<\infty$ となる. なぜなら, もし $\sum|a_n|<\infty$ ならば $(a_n)_\pm\leq|a_n|$ より $\sum(a_n)_\pm<\infty$. 逆に, $\sum(a_n)_\pm<\infty$ ならば $\sum|a_n|=\sum(a_n)_+\sum(a_n)_-<\infty$ より $\sum a_n$は絶対収束.
・$\sum a_n=S$ が絶対収束 $\Rightarrow$ $\forall$ 全単射$\rho:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ に対して, $\sum a_{\rho(n)}$も絶対収束して, その和は S. なぜなら, 正項級数に対しては明らかに

$$\sum(a_{\rho(n)})_+=\sum(a_n)_+,\ \ \sum(a_{\rho(n)})_-=\sum(a_n)_-$$

となる. すると

$$\sum |a_{\rho(n)}| = \sum (a_{\rho(n)})_+ + \sum (a_{\rho(n)})_- = \sum (a_n)_+ + \sum (a_n)_- = \sum |a_n| < \infty$$

である. ゆえに $\sum a_{\rho(n)}$は絶対収束し, (この議論は可積分性を考えたときと同様.)

$$\sum a_{\rho(n)} = \sum (a_{\rho(n)})_+ - \sum (a_{\rho(n)})_- = \sum (a_n)_+ - \sum (a_n)_- = \sum a_n$$

問 71 (1.4.22)**.** (2) $E := \sqcup_{n=1}^{\infty} E_n$とかくと, μ_i $(i \in \mathbb{N})$ は可算加法的測度なので$\mu_i(\sqcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(E_n)$ であり, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(E_n)$.

問 72 (1.4.23, 連続性)**.** (2) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ が $\mathscr{B}$ 可測であれば, $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$ が成り立つ。
(3) $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ が $\mathscr{B}$ 可測であり, 少なくとも一つの n について$\mu(E_n) < \infty$ であれば $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$ が成り立つ。

証明. (2) ある n について$\mu(E_n) = \infty$ であると仮定する。このとき $i \geq n$ なる $i \in \mathbb{N}$ に対して $E_n \subset E_i$より$\mu(E_i) = \infty(i \geq \exists n)$ である。一方 $E_n \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i$より$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \mu(E_n) = \infty$ ゆえに自明に$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = \infty$ が成り立つ。そこで, すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(E_i) < \infty$ の場合 (これは以下にて使う.) に示す。
いま E_jは単調増大列なので $E_0 := \emptyset$とおくと $\cup_{i=1}^{\infty} E_i = \cup_{i=0}^{\infty}(E_{i+1} \backslash E_i)$ とかける。なぜなら, 次のように $E_N = \cup_{i=0}^{N-1}(E_{i+1} \backslash E_i)$ が成り立ち, 今 $\cup_{i=1}^{N} E_i = E_N$であるからである。N の場合に成立するとすると,

$$E_{N+1} = (E_{N+1} \backslash E_N) \cup E_N = (E_{N+1} \backslash E_N) \cup (\cup_{i=0}^{N-1}(E_{i+1} \backslash E_i)) = \cup_{i=0}^{N}(E_{i+1} \backslash E_i)$$

$\mu(E_i) < \infty$ なので

$$\mu(E_{i+1} \backslash E_i) = \mu(E_{i+1}) - \mu(E_i)$$

を満たし, $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mu(\sqcup_{i=0}^{\infty}(E_{i+1} \backslash E_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_{i+1} \backslash E_i) = \sum_{i=0}^{\infty}(\mu(E_{i+1}) - \mu(E_i)) := \lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{i-1}(\mu(E_{j+1}) - \mu(E_j)) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$.
(3) $\mu(E_1) \geq \cdots \geq \mu(E_n) \geq \cdots$なので, $\exists n \in \mathbb{N} \forall i \geq n$ に対して$\mu(E_i) < \infty$ である。したがって $i \geq n$ に対しては, $F_i := E_1 \backslash E_i$と定義すると, $\mu(F_i) = \mu(E_1) - \mu(E_i)$ であり,
$F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ である。測度の非負性より $(\mu(E_i))_{i\in\mathbb{N}}$は下に有界な単調減少列なので収束し,

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \overset{(2)}{=} \lim_{i\to\infty} \mu(F_i) = \lim_{i\to\infty}(\mu(E_1) - \mu(E_i)) \overset{\lim の性質}{=} \mu(E_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$$

となる。$\cup_{i=1}^{\infty} F_i = E_1 \backslash \cap_{i=1}^{\infty} E_i$より,

$$\mu(E_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = \mu(E_1) - \mu(\cap_{i=1}^{\infty} E_i)$$

より (3) が成立する。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会,2004, 第 22 刷

[2] 齋藤正彦, 微分積分学, 東京図書,2013, 第 9 刷

[3] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 裳華房,2018, 新装第 1 版 2 刷

[4] 寺澤順, 現代集合論の探検, 日本評論社,2013