贝叶斯统计基础

沈明宏 (mhshenaa@connect.ust.hk)
香港科技大学（广州）

2024 年 7 月 31 日

目录

本文在很大程度上基于澳门大学徐峻教授的贝叶斯课程。

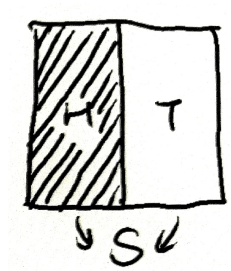
1 概率论基础

假设一共投了 S 次硬币，其中硬币朝上的次数为 H，则硬币朝上的概率 $P(H)$ 为

$$P(H) = \frac{H}{S} \tag{1}$$

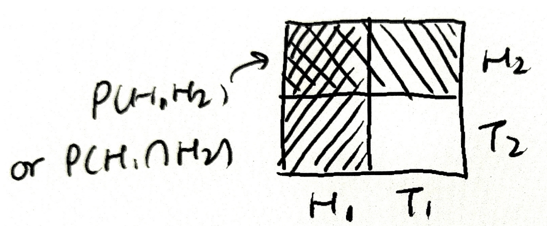
显然有：

$$0 \leq P(H) \leq 1 \tag{2}$$



假设我们让两个人分别投硬币，第一个人投硬币的次数为 S_1，第二个人投硬币的次数为 S_2，则两个人投硬币朝上的次数分别为 H_1 和 H_2，则两个人投硬币朝上的概率 $P(H_1)$ 和 $P(H_2)$ 分别为：

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{H_1}{S_1} \\ P(H_2) &= \frac{H_2}{S_2} \end{aligned} \tag{3}$$



我们可以计算两个人各投一枚硬币，都朝上的概率 $P(H_1H_2)$ 为：

$$\begin{aligned} P(H_1H_2) &= P(H_1 \cap H_2) \\ &= \frac{H_1H_2}{S_1S_2} \end{aligned} \tag{4}$$

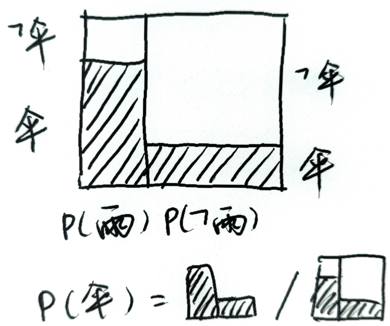
同理，我们可以计算下雨的概率 $P(\text{雨})$、带伞的概率 $P(\text{伞})$ 等。

$$
\begin{aligned}
P(\text{雨}) &= \frac{\text{下雨天数}}{\text{总天数}} \\
P(\text{伞}) &= \frac{\text{带伞人数}}{\text{总人数}}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

显然，有：

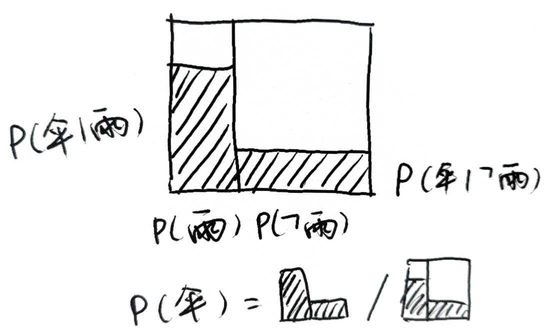
$$
\begin{aligned}
P(\text{雨}) + P(\text{不下雨}) &= 1 \\
P(\text{伞}) + P(\text{不带伞}) &= 1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

注意，这里和上面 $P(H)$ 不同，这里的 $P(\text{雨})$ 和 $P(\text{伞})$ 是相关的。



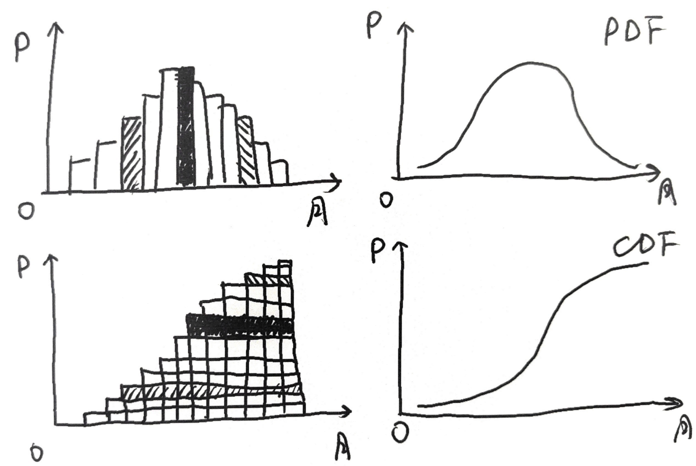
这时，为了计算两根阴影柱子的高度，我们需要引入“条件概率”。比方说，我们想知道下雨的情况下带伞的概率 $P(\text{伞}|\text{雨})$，则有：

$$
\begin{aligned}
P(\text{伞}|\text{雨}) &= \frac{P(\text{雨} \cap \text{伞})}{P(\text{雨})} \\
P(\text{雨}|\text{伞}) &= \frac{P(\text{雨} \cap \text{伞})}{P(\text{伞})}
\end{aligned}
\tag{7}
$$



2 概率分布

刚才的事件都是离散的，但是在实际中，我们通常会遇到连续的情况。这时，我们就需要引入概率密度函数（PDF）和概率分布函数（CDF）。



概率密度函数 $f(x)$ 是一个函数，满足：

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geq 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= 1
\end{aligned}
\tag{8}
$$

概率分布函数 $F(x)$ 是一个函数，满足：

$$
F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{9}
$$

概率分布函数是概率密度函数的积分，所以有：

$$
F(b) - F(a) = P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{10}
$$

反之，如果我们知道概率分布函数 $F(x)$，则可以通过求导得到概率密度函数 $f(x)$：

$$
f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{11}
$$

3 贝叶斯定理

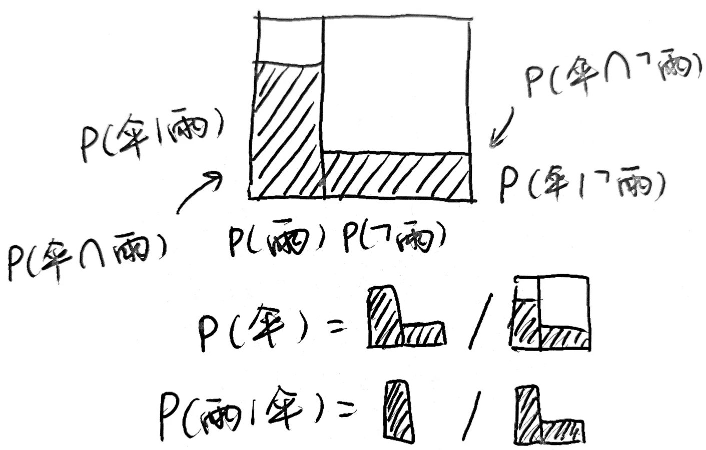
$P(雨|伞)$ 是个非常奇怪的概率，什么叫“带伞的时候下雨的概率”?

但其实，这才是我们科研中在做的。我们通常是只能收集到“带伞”的数据，然后根据这个数据来推断下雨的概率。

这时，我们就需要用到贝叶斯定理。

根据上面的方程，我们可以得到：

$$\begin{aligned} P(雨 \cap 伞) &= P(雨|伞) \times P(伞) \\ &= P(伞|雨) \times P(雨) \end{aligned} \tag{12}$$



也就是说：

$$\begin{aligned} P(雨|伞) \times P(伞) &= P(伞|雨) \times P(雨) \\ P(雨|伞) &= \frac{P(伞|雨) \times P(雨)}{P(伞)} \end{aligned} \tag{13}$$

这可以抽象为：

$$P(参数|数据) = \frac{P(数据|参数) \times P(参数)}{P(数据)} \tag{14}$$

这是因为 $P(数据)$ 是一个常数，所以在算概率分布的时候可以不用管。

$$P(参数|数据) \propto P(数据|参数) \times P(参数) \tag{15}$$

如果用 D 表示数据，θ 表示参数，则有：

$$P(\theta|D) \propto P(D|\theta) \times P(\theta) \tag{16}$$

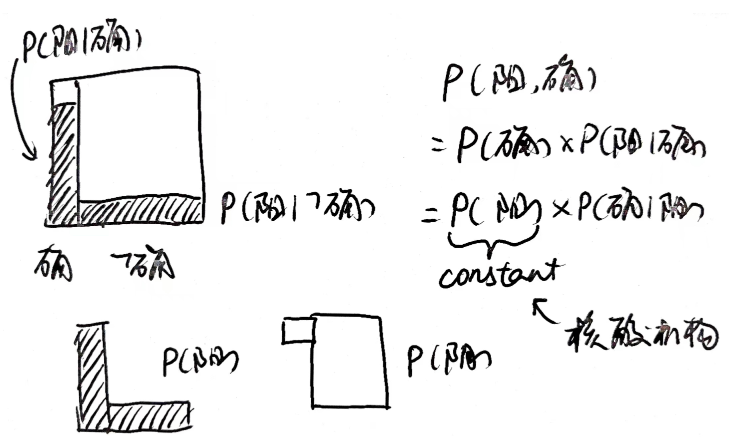
这就是贝叶斯定理的核心。

- 先验概率（Prior）：我们对参数的初始估计 $P(\theta)$
- 似然函数（Likelihood）：数据在参数下的概率 $P(D|\theta)$
- 后验概率（Posterior）：我们对参数的最终估计 $P(\theta|D)$

3.1 案例一：核酸检测

Exercise 1

小贝去做核酸检测。已知新冠的确诊率为 0.0001，确诊人群的阳性率为 0.99，其他人的阳性率为 0.01。假设小贝的检测结果为阳性，求小贝确诊的概率。

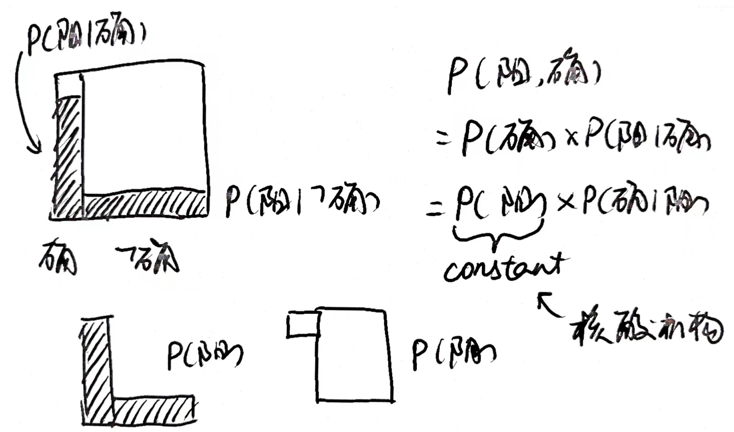


Answer of exercise 1

$$\begin{aligned} P(\text{确诊}|\text{阳性}) &= \frac{P(\text{阳性}|\text{确诊}) \times P(\text{确诊})}{P(\text{阳性})} \\ &= \frac{0.99 \times 0.0001}{0.99 \times 0.0001 + 0.01 \times 0.9999} \\ &= 0.0098 \end{aligned} \tag{17}$$

Exercise 2

小贝**重做**核酸检测。已知小贝的确诊率为 0.0098，确诊人群的阳性率为 0.99，其他人的阳性率为 0.01。假设小贝的检测结果**又**为阳性，求小贝确诊的概率。

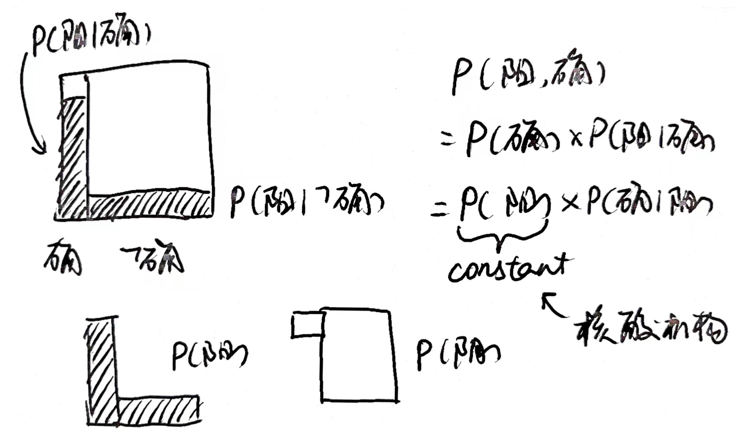


Answer of exercise 2

$$
\begin{aligned}
P(\text{确诊}|\text{阳性}) &= \frac{P(\text{阳性}|\text{确诊}) \times P(\text{确诊})}{P(\text{阳性})} \\
&= \frac{0.99 \times 0.0098}{0.99 \times 0.0098 + 0.01 \times 0.9902} \\
&= 0.4949
\end{aligned} \tag{18}
$$

Exercise 3

小贝**重做**核酸检测。已知小贝的确诊率为 0.4949，确诊人群的阳性率为 0.99，其他人的阳性率为 0.01。假设小贝的检测结果**又**为阳性，求小贝确诊的概率。



Answer of exercise 3

$$
\begin{aligned}
P(\text{确诊}|\text{阳性}) &= \frac{P(\text{阳性}|\text{确诊}) \times P(\text{确诊})}{P(\text{阳性})} \\
&= \frac{0.99 \times 0.4949}{0.99 \times 0.4949 + 0.01 \times 0.5051} \\
&= 0.99
\end{aligned} \tag{19}
$$

3.2 案例二：大众点评

在刚才的例子里，P(确诊) 一直在变化，这就是贝叶斯的思想。我们可以不断地更新我们的先验概率 P(确诊)，从而得到更准确的后验概率。

举一个生活中的例子，假设我们在大众点评上看到了一个餐厅的评价，评分为 4.5 分。我们可以看看推荐菜，看看照片和价格，然后给出我们的心里的评分。

当我们真的去吃了以后，我们可以更新我们的评分。这就是贝叶斯的思想。

$$\text{餐后评价} \propto \text{先验评价} \times \text{用餐体验} \tag{20}$$

当然，如果我们后面又去吃了，我们可以再次更新我们的评分。

$$\text{本次餐后评价} \propto \text{上次餐后评价} \times \text{用餐体验} \tag{21}$$

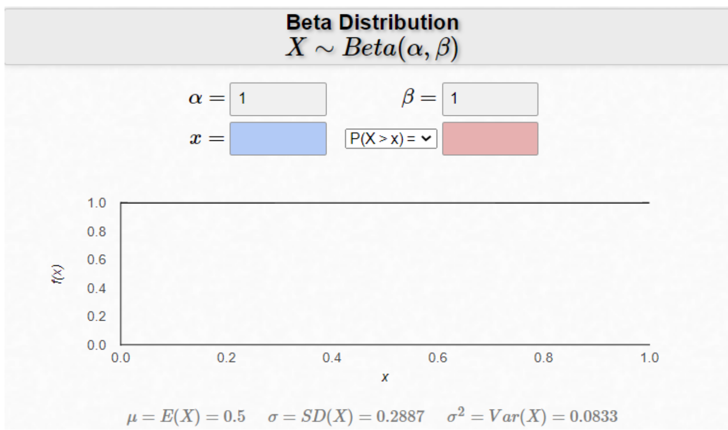
3.3 案例三：店铺好评

Exercise 4

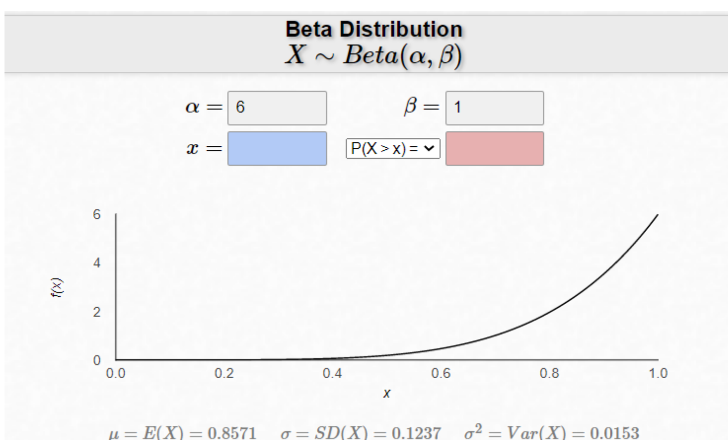
小贝逛淘宝看到一家新的店铺。这家店铺有 5 条好评，0 条差评，那么这家店铺的好评率应该是多少？

Answer of exercise 4

这里我们没有任何先验信息，所以我们可以假设先验概率为 50%。具体来说，我们假设一个 Beta 分布，$\text{Beta}(1,1)$，即：



同时，数据告诉我们，这家店铺有 5 条好评，0 条差评，所以我们可以得到一个 Beta 分布，$\text{Beta}(5+1,0+1)$，即：



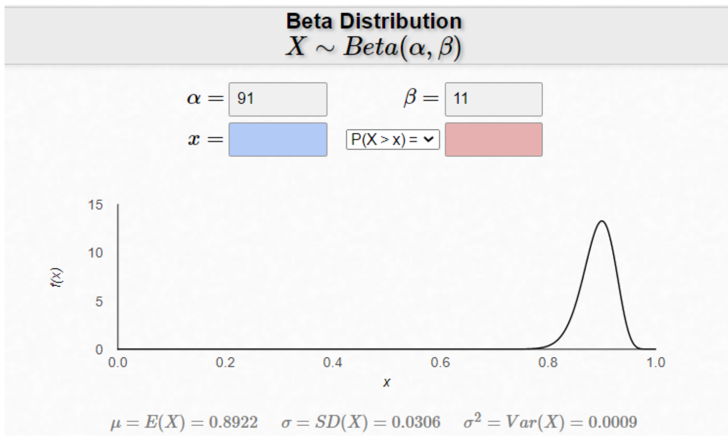
注：这两张图来自Bognar (2021) 的网站。

Exercise 5

小贝逛淘宝看到一家新的店铺。这家店铺有 90 条好评，10 条差评，那么这家店铺的好评率应该是多少？

Answer of exercise 5

数据告诉我们，这家店铺有 90 条好评，10 条差评，所以我们可以得到一个 Beta 分布，$\text{Beta}(90+1, 10+1)$，即：

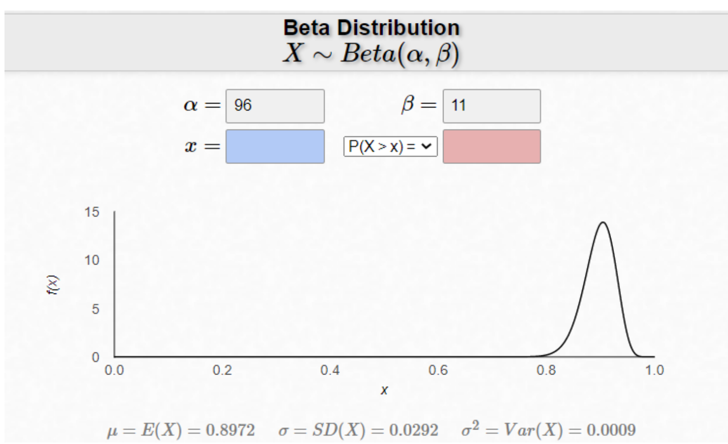


Exercise 6

过了几天，小贝发现刚刚的店铺新增了 5 条好评。此时，这家店铺的好评率应该是多少？

Answer of exercise 6

此时我们有个先验分布 $\text{Beta}(90+1, 10+1)$，然后我们有了新的数据，所以我们可以得到后验分布 $\text{Beta}(90+5+1, 10+1)$，即：



显然，当我们的先验分布比较强时，我们的后验分布主要由先验分布决定；当我们的数据比较强时，我们的后验分布主要由数据决定。

4 贝叶斯的优劣

贝叶斯学派（Bayesian）和频率学派（Frequentist）是统计学中的两大学派。贝叶斯学派认为参数是随机的，而频率学派认为参数是固定的。

和频率学派相比，贝叶斯学派的优劣势如下：

- 优点：
    1. 不用提一个注定错误的假设（$H_0 : \beta = 0$），在原理上没有硬伤。
    2. 可以证明一个东西没有影响（“不显著”）。
    3. 可以纳入先验信息。
    4. 更好地处理小样本问题。
    5. 通过电脑模拟来估计系数，天然适配多层次模型等。
    6. 可以拟合约束复杂的模型。
- 缺点：
    1. 需要大量数值计算，稍复杂的模型会跑很久。
    2. 解释结果较为复杂，社会学界尚未普及。
    3. 学习曲线陡峭，需要大量统计知识。