1. 数列极限

基础概念

- 有界：$\exists M>0,\forall n,|a_n|\le M$
- 无界：$\forall M>0,\exists n,|a_n|>M$
- 无穷大：$\forall M>0,\exists N,\forall n>N,|a_n|>M$

常用不等式

平均值不等式

$$\frac{x}{x+1}\le\ln(1+x)\le x$$

$$x-\frac{1}{2}x^2\le\ln(1+x)\le x$$

基本模型

幂平均极限（夹逼定理）：

$$M_p(a_i)=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\quad(a_i\geqslant 0,\ p\in\mathbf{R})$$

$$\lim_{p\to+\infty}M_p(a_i)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

$$\lim_{p\to-\infty}M_p(a_i)=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

调和级数和欧拉常数（单调有界准则）：

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}\to 1,n\to+\infty(Stolz)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=\gamma(Euler's\ \ constant)$$

例 1.3.7 证明数列 $\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 发散.

证明：设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则对任意 $n\in\mathbb{N}_+$，取 $m=2n$，有

$$|a_m-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}.$$

p级数（放缩）：

p级数：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}$

$p\le 1,\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\to+\infty,n\to+\infty$

$p>1,\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ 收敛

$p=2$，称作巴塞尔问题，$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$（微积分2会学怎么求）

31. 证明数列 $\left\{\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ $(\alpha>1)$ 收敛.

证明：令 $a_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$，显然 a_n 单调增加.

再证明有上界. 由于 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，存在 $i\in\mathbb{N}_+$ 使得 $2^{i-1}\le n<2^i$ 成立.

则应有 $\frac{1}{(2^i)^\alpha}<\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}$ 成立. 此时对 a_n 进行加括号处理，并进行放缩有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{1^\alpha}+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}+\frac{1}{(2^{i-1}+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right]\\&<1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}+\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}\right]\\&\le 1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\cdots+\frac{2^{i-1}}{(2^{i-1})^\alpha}\\&=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{i-1}\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^i}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}\\&<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}.\end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 有上界. 因此数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，从而收敛.

压缩映射

(I) 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 我们只要证明：

$$|x_{n+1}-A|\leqslant k|x_n-A|,0<k<1$$

$$\Rightarrow 0\leqslant|x_{n+1}-A|\leqslant k^n|x_1-A|\Rightarrow|x_n-A|\to 0\Rightarrow x_n\to A.$$

(II) 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$，我们证明：

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|,0<k<1$$

$\Rightarrow|x_{n+1}-x_n|\leqslant k^{n-1}|x_2-x_1|\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $A=f(A)$，求解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

证明（柯西收敛准则）：

$$|a_m-a_n|=|(a_m-a_{m-1})+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)|$$

$$\le|a_m-a_{m-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_n|$$

补充思想（适用于较复杂关系式）：预测+数学归纳

有界变差数列

37. 证明：对数列 $\{a_n\}$，若存在常数 $c>0$，使对任何 n，有

$$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\le c,$$

则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明：记 $b_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$，$n\in\mathbb{N}_+$.

由于 $b_{n+1}-b_n=|a_{n+2}-a_{n+1}|\ge 0$ 成立，即 $\{b_n\}$ 单调增加；

又 $b_n\le c$，则数列 $\{b_n\}$ 单调增加有上界，从而 $\{b_n\}$ 收敛.

由柯西准则，对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，对任意正整数 $m>n\ge N$ 有 $|b_m-b_n|\le\varepsilon$.

此时考虑 $\{a_n\}$，对任意正整数 m,n 满足 $m>n\ge N$ 有

$$\begin{aligned}|a_{m+1}-a_{n+1}|&=|(a_{m+1}-a_m)+(a_m-a_{m-1})+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})|\\&\le|a_{m+1}-a_m|+|a_m-a_{m-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|\\&=b_m-b_n=|b_m-b_n|<\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 是柯西列，从而收敛.

Stolz定理

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$，要求 b_n 严格单调且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$

应用场合：估阶(渐进分析)、处理含有数列的和(级数)的问题

算数平均形式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n$$

几何平均形式：

x_n 收敛且 $x_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解：记 $a=\lim_{n\to\infty}x_n$，则 $a\ge 0$

若 $a>0$，则也有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}$. 用平均值不等式 $H\le G\le A$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}}\le\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\le\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$$

令 $n\to\infty$ 并在两边用柯西命题，可见它们都收敛于 a，因此得到 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=a$

对于 $a=0$ 的情况则只要如上写出右边的不等式后再用柯西命题即可.

取整函数

分区间讨论，确定取整式的值

$$x-1\le[x]\le x$$

解题技巧

等价无穷小：

(1) $\sin x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\tan x\sim x;$
(2) $\ln(1+x)\sim x;$
(3) $e^x-1\sim x;$
(4) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x;$
(5) $\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x.$

$$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$$

添项凑项：

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

根号：有理化，看作分数指数幂

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

用对数处理连乘、阶乘、1^∞的极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^2(n^{\frac{1}{x}}-n^{\frac{1}{x+1}})$$

$$x^2n^{\frac{1}{x+1}}(n^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1)$$

$$=x^2n^{\frac{1}{x+1}}(e^{\frac{1}{x(x+1)}\ln n}-1)$$

$$\sim\frac{x^2}{x(x+1)}n^{\frac{1}{x+1}}\ln n\to\ln n(n\to+\infty)$$

证明 我们有

$$x_n=a+\alpha_n,$$

这里 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小序列. 于是

$$\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2}=\frac{(a+\alpha_1)+2(a+\alpha_2)+\cdots+n(a+\alpha_n)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}a+\frac{\frac{1}{n}\alpha_1+\frac{2}{n}\alpha_2+\cdots+\frac{n}{n}\alpha_n}{n}.$$

因为

$$\left|\frac{\frac{1}{n}\alpha_1+\frac{2}{n}\alpha_2+\cdots+\frac{n}{n}\alpha_n}{n}\right|\leqslant\frac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n},$$

所以

$$\lim\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2}=\lim\frac{n+1}{2n}a+\lim\frac{\frac{1}{n}\alpha_1+\frac{2}{n}\alpha_2+\cdots+\frac{n}{n}\alpha_n}{n}=\frac{a}{2}+0=\frac{a}{2}.\quad\square$$

松弛变量：拆分数列+绝对值+上界放大

证 设 $b_n-b=\beta_n$ 或 $b_n=b+\beta_n$，由已知，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 于是

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\frac{a_1(b+\beta_n)+a_2(b+\beta_{n-1})+\cdots+a_n(b+\beta_1)}{n}=b\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\frac{a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1}{n}.$$

由第 23 题，有 $\lim\limits_{n\to\infty}b\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=ab$.

下面证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1}{n}=0$.

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，从而数列 $\{a_n\}$ 有界，即

$$\exists M>0,\forall n\in\mathbf{N},有|a_n|\leqslant M.$$

又已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$，即 $\forall\varepsilon>0,\exists m\in\mathbf{N},\forall n>m$，有 $|\beta_n|<\varepsilon$.

取定自然数 m，显然，$|a_{n-m+1}\beta_m+a_{n-m+2}\beta_{m-1}+\cdots+a_n\beta_1|$ 有上界，设它的上界是 A.

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A}{n}=0$，即对上述的 $\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$（使 $N>m$），$\forall n>N$，有 $\frac{A}{n}<\varepsilon$. 从而，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1}{n}-0\right|\\&\leqslant\left|\frac{a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_{n-m}\beta_{m+1}}{n}\right|+\left|\frac{a_{n-m+1}\beta_m+\cdots+a_n\beta_1}{n}\right|\\&\leqslant\frac{|a_1||\beta_n|+|a_2||\beta_{n-1}|+\cdots+|a_{n-m}||\beta_{m+1}|}{n}+\frac{A}{n}\\&\leqslant\frac{(n-m)M\varepsilon}{n}+\varepsilon\leqslant M\varepsilon+\varepsilon\\&=(M+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1}{n}=0$.

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\lim_{n\to\infty}b\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1}{n}=ab.$$

估价（渐进分析）：

常见无穷大的阶：$n^n>n!>a^n(a>1)>n^k(k>0)>lnn$