2. 微分中值定理

基本定理：

- 费马定理：函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，并且在x_0处可导，如果对于任意的$x\in U(x_0)$，都有$f(x)\leqslant f(x_0)$（或$f(x)\geqslant f(x_0)$），那么$f'(x_0)=0$
- 费马引理：若$f(x)$在x_0处可导，在x_0的某邻域内均有$f(x)\le f(x_0)$（或$f(x)\ge f(x_0)$），则$f'(x_0)=0$
- 导数零点定理：设$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f'_+(a)f'_-(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$.
- 导数介值定理：若$f(x)$在$[a,b]$上可微，且$f'(a)\neq f'(b)$，则对于$f'(a)$与$f'(b)$之间的任一数u，必有一点$c\in(a,b)$，使$f'(c)=u$.
- 拉格朗日中值定理：如果函数满足：
  (1)在闭区间$[a,b]$上连续；
  (2)在开区间(a,b)内可导；
  那么在开区间(a,b)内至少有一点$\varepsilon(a<\varepsilon<b)$使等式$f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)(b-a)$成立
- 柯西中值定理：如果函数$f(x)$及$F(x)$满足
  (1)在闭区间$[a,b]$上连续
  (2)在开区间(a,b)内可导
  (3)对任一$x\in(a,b)$，$F'(x)\neq 0$，那么在(a,b)内至少有一点ξ，
  使等式$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$成立

介值定理小推论：$af(u)+bf(v)=(a+b)f(\eta)$

泰勒展开式

有限区间在某点展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}(x-x_0)^n$$

思路：**选取导数值信息多的点作为 x0(在 x0 处展开)**。有时也会有其他展开方式，**如将两端点均在中点处展开、将中点分别在两个端点处展开、在任意点处展开等**，具体情况需具体分析。

设f在$[a,b]$上连续，在(a,b)上二阶可导，证明：存在$\eta\in(a,b)$，有：

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\eta)$$

设$k=\dfrac{f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})}{\frac{(b-a)^2}{4}}$

$\Rightarrow f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})-\frac{(b-a)^2}{4}k=0$

$F(x)=f(x)+f(a)-2f(\frac{x+a}{2})-\frac{k(x-a)^2}{4}$

$F(a)=F(b)=0\Rightarrow F'(x_1)=0$

$F'(x_1)=f'(x_1)-f'(\frac{x+a}{2})-k\frac{x_1-a}{2}=0$

$\Rightarrow k=\dfrac{f'(x_1)-f'(\frac{x_1+a}{2})}{\frac{x_1-a}{2}}=f''(\eta)(Lagrange)$