Lec 6：联结词集完备性、形式系统、PC

1 联结词集完备性

- 功能完备集
  - 任意一个真值函数都可以用仅包含该联结词集中的联结词的命题公式表示
  - eg. $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，$\{\neg, \wedge, \vee\}$，$\{\neg, \rightarrow\}$
- 冗余联结词
  - 在一个联结词集中可以用集合中其他联结词来定义的联结词
- 极小功能完备集
  - 不含冗余联结词
  - eg. $\{\neg, \rightarrow\}$，$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \wedge\}$
- 仅包含单个联结词的功能完备集
  - 定义联结词 $\downarrow$（Peirce记号）为 $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$，则 $\{\downarrow\}$ 是功能完备集
  - 证明思路：用 $\downarrow$ 去定义功能完备集中每一个联结词

2 形式系统

- 形式系统定义就是符号串集合的构造性定义
- 符号体系
  - 规定了符号串可能包含的字符（或字符的合法组合模式，词）
- 公理
  - 作为基础的基本重言式
  - 规定了几个集合中的符号串（或者这种符号串的模式）
- 推理规则
  - 若干确保由重言式导出重言式的规则，是系统内符号变换的依据
  - 规定了从集合中已知符号串变换生成集合中其他符号串的方法
- 证明（Proof）演绎与（Deduction）
  - 定理（theorem）：记作 $\vdash * A_m$（*是形式系统的名称），或简记为 $\vdash A_m$
  - 演绎结果：记作 $\Gamma \vdash * A_m$，或简记为 $\Gamma \vdash A_m$，称 Γ 和 Γ 的成员为 A_m 的前提假设（hypothesis）
  - 证明是演绎在 Γ 为空集时的特例

3 命题演算形式系统PC（Proposition Calculus）

1. 公理
   - $A \to (B \to A)$
   - $(A \to B \to C) \to (A \to B \to A \to C)$
   - $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
2. 推理规则
   - 分离规则：$A, A \to B / B$
3. 性质
   - 合理性（Soundness）
   - 一致性 （Consistency）
   - 完备性 （Completeness）
4. 元定理
   - 演绎定理
     - 对任意公式集合， $\Gamma \vdash_{PC} A \to B$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$
     - 当 $\Gamma = \emptyset$ 时，$\vdash_{PC} A \to B$ 当且仅当 $\{A\} \vdash_{PC} B$ 或者 $A \vdash_{PC} B$
   - 归谬定理
     - 对任何公式集合 Γ 和公式 A, B，若 $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{PC} B$，$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{PC} \neg B$，那么 $\Gamma \vdash_{PC} A$
   - 穷举定理
     - 对任何公式集合 Γ 和公式 A, B，若 $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{PC} B$，$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$，那么 $\Gamma \vdash_{PC} B$