浙江大学 2010-2011 学年春学期《微积分》（II）课程期末考试试卷

1、求经过原点 $O(0,0,0)$且与直线$\begin{cases} x+2y-3z-4=0 \\ 3x-y+5z+9=0 \end{cases}$平行的直线 L 的方程.

2、求曲面 $z=x^2+y^2$ 上点 $(1,-\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ 处的切平面方程.

3、求以点 $A(1,1,1), B(3,2,0), C(2,4,1)$ 为顶点的三角形的面积.

4、已知圆柱面 S 的中心轴为直线$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$，并设 S 与球面

$x^2+y^2+z^2-8x-6y+21=0$ 外切，求该圆柱面的方程.

5、设 $F(u,v)$具有一阶连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(\frac{x}{z},yz)=0$ 所确定，假定运算过程中出现的分母不为零，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$.

6、求二元函数 $z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，在点（1, 1）处的全微分.

7、求二元函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值，应说明是极大值还是极小值？

8、计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} \mathrm{d}y$.

9、设平面区域 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)y\mathrm{d}\sigma$.

10、设 $z=z(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，且 $z=z(x-2y,x+3y)$ 满足方程

$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 $z=z(u,v)$ 所满足的方程.

11、设 $f(x,y)=\max\{x,y\}$，$D=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算

$\iint\limits_D f(x,y)\left|y-x^2\right|\mathrm{d}\sigma$.

12、求曲面 $4z=3x^2-2xy+3y^2$ 到平面 $x+y-4z=1$ 的最短距离.

13、设 $D=\{(x,y) \mid 1\le x+y\le 2, xy\ge 0\}$，选择适当坐标系，计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma$.

14、设二元函数 $u=\sqrt{x^2+2y^2}$，点 $(0,0)$.

（I）偏导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 是否存在？若存在，求出之，若不存在，请说明理由；

（II）设 $\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$ 为以点（0, 0）为始点的平面单位向量，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}$ 是否存在？若存在，求出之，若不存在，请说明理由.

浙江大学 2011-2012 学年春学期《微积分》（II）课程期末考试试卷

一、（14 分）

1. 请用向量方法证明勾股定理：在直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，边 AB，BC，CA 的长分别为 c， a， b，求证 $a^2+b^2=c^2$。

2．给定 $u(x,y)=\sin x^2\cos y^2$，求 $grad(u(x,y))$。

二、（15 分）

1. 过两点(10,0,0),(0,10,0)作球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的切平面,请给出切平面的方程。

2. 给定两直线 $L_1:\begin{cases}x=0\\y=0,\\z=t\end{cases} L_2:\begin{cases}x=s\\y=4,-\infty<s,t<\infty\\z=0\end{cases}$。C（1,1,1）是固定点，A，B 分别在直线 L_1,L_2 上运动的动点。

（1）直线与平面有三种关系：平行，相交，在平面内。请问直线 L_1 与由 C 点和直线 L_2 确定的平面之间的关系属于哪一种？直线 L_2 与由 C 点和直线 L_1 确定的平面之间的关系呢？

（2）你认为三角形 ABC 的面积的最小值是多少？为什么？请给出达到该最小值时的 A，B 两点的坐标。

三、（15 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $f_x'(0,0), f_{xy}''(0,0)$。

2. 设 $z=g(x^2+y^2+1,xy)$，其中 g 是连续可微的函数，求 dz。

四、（10 分）令 $\begin{cases}\xi=2x+y\\ \eta=x+y\end{cases}$，请将下列方程变换成函数 u 关于变量 ξ,η 的方程：

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+u=0。$$

五、（16 分）

1. 设区域 $\Omega=\left\{0<R_1\le x^2+y^2\le R_2, x,y\ge 0\right\}$，求 $\iint_\Omega e^{x^2+y^2+\ln\frac{x+y}{x^2+y^2}}dxdy$。

2. 计算 $\int_0^1 dy \int_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y \sin x^2 dx$ 。

六、（10 分）请仅用向量运算的方法证明△ABC 的三条中线相交与一点 O。（提示：△ABC 内的一点 O 在边 BC 的中线上的充要条件是线段 AO 的延长线经过 BC 边的中点 M。此时△ABM，△AMC 的面积相等，注意到向量外积的方向相同，则有

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AC} 。\qquad (*)$$

由于 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{AO}$ 方向相同，故有一实数 k（0<k<1），使得 $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AO}$，代入（*），约去 k，可得△ABC 内的点 O 位于 BC 边上的中线上的充要条件为

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{AC}$ 。）

（1）根据上述提示，△ABC 内的点 O 分别位于 BC 边，AC 边的中线上为已知条件，求证 O 点也位于 AB 边的中线上，用向量运算的形式写出已知和求证两部分。

（2）证明之。（要求：只能运用向量运算，不能利用其他几何定理。）

七、（10 分）以过抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 上的点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面为下底面，以该抛物面为上底面，以圆柱面 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 为侧面可以围成一个立体。随着 P 点在抛物面上的变动，立体的体积会改变。求该类立体的体积最小值，及达到最小值时的切平面的方程。

八、（10 分）设函数 $u = x + y + z$ ， $P(x_0, y_0, z_0)$ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的点。求函数 u 在 P 点出沿球面的外法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 。并在球面上，求 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的最大值，最小值及其达到最大值、最小值时的坐标。

浙江大学 2012-2013 学年春学期《微积分》（II）课程期末考试试卷

1. 设$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=3$，求$\left((\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{c})\right)\cdot(\vec{c}-\vec{a})$.

2. 求直线 L 的方程，设 L 经过点$(-1,-4,3)$，且与两直线$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\ x+3y+5=0\end{cases}$，

$L_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$都垂直.

3. 设直线$L:\begin{cases}x=1-t\\ y=2+t\\ z=2t\end{cases}$，其中 t 为参数。求 L 绕 z 轴所成的旋转曲面的方程，并说出该曲面的名称。

4. 求经过直线 L：$\begin{cases}x-z+4=0\\ x+5y+z=0\end{cases}$且与平面 P：$x-4y-8z=12$ 所成的二面角为 45 度的平面方程。

5. 设 $f(x,y)=x^2(y-4)^2+(y-2)\arcsin\sqrt{\dfrac{x-1}{y}}+\arctan(y(x-1))$，求 $f_x'(1,2)$ 及 $f_y'(1,2)$。

6. 设函数$u=3x^2+2y^2+z^2$，点 P$(1,1,1)$，曲面 S $x^2+2y^2+3z^2=6$，求函数 u 在点 P 处沿曲面 S 的外法线方向的方向导数。

7. 设函数$z=z(x,y)$由方程$F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$确定，其中 F 为可微函数，且$F_2'\neq 0$，计算$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

8. 求$\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}}(xy+1)\sin(x^2+y^2)dy$。

9. 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，$u=f(r)$存在二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。（请用$r, f(r), f'(r), f''(r)$表示）

10. 设 $z=f(x,y)$ 在点（1，2）处存在连续的一阶偏导数，且 $f(1,2)=2$，$f_x'(1,2)=3$，$f_y'(1,2)=4$，$\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，求$\left.\dfrac{d}{dx}\varphi(x)\right|_{x=1}$。

11. 设 D 是由曲线 $y=x^3, x=-1, y=1$ 围成的有界闭区域，求 $\iint\limits_D (y^2+(xy)^{2013})dxdy.$

12. 求以曲面 $z=y\sqrt{1+2x+y^2}$ 为顶，以 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x\le 4\right\}$ 为底的曲顶柱体的体积。

13. 在椭圆抛物面 $\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 与平面 z=c 围成的空间有界闭区域 Ω 中，放置一个边分别平行于坐标轴的长方体，要使得其体积最大，求该长方体各边的长及该长方体的体积，其中 *a, b, c* 均为正常数。

14. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，（1）求 $f_x'(0,0)$ $f_y'(0,0)$；（2）证明 $f(x,y)$ 在原点处不可微。

浙江大学 2012－2013 学年 夏季 学期

《 微积分（III） 》课程期末考试试卷

课程号：__________，开课学院： 理学部

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打 √）

考试形式：√闭、开卷（请在选定项上打 √），允许带 笔 入场

考试日期： 2013 年 7 月 4 日，考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________学号：__________所属院系：__________

题序	1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13	总 分
得分								
评卷人								

本卷共 13 题 8 页，解题时应写出必要的解题过程。

1、（7 分）设 $f(x)=\cos^{2013}x$，$s(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数，求 a_{100}.

2、（7 分）设 $y(x)=\int_0^x\sqrt{3+t^4}\,\mathrm{d}t$，$l$ 为平面曲线 $y=y(x)$ 在 $-1\le x\le 1$ 上的弧段，求第一型（即对弧长的）曲线积分 $\int_l (y+|x|^3)\mathrm{d}l$.

3、（7 分）设l为椭圆$4x^2+y^2=8x$正向一周，计算平面第二型（即对坐标的）曲线积分$\oint_l e^{y^2}dx+(x+y^2)dy$.

4、（7 分）设l为从点$A(-\dfrac{\pi}{2},0)$沿曲线$y=\cos x$到点$B(\dfrac{\pi}{2},0)$的有向弧，求平面第二型曲线积分

$$\int_l\frac{(x+2y)dx+(4y-2x)dy}{x^2+4y^2}.$$

5、（7 分）设函数 $\varphi(y)$ 具有连续的一阶导数，l 为从点 $A(1,1)$ 沿圆周 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 的右下方半个到点 $B(3,3)$ 的有向弧段，求平面第二型曲线积分

$$\int_l [\pi\varphi(y)\cos\pi x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin\pi x-\pi]\mathrm{d}y .$$

6、（7 分）设 L 为空间曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=x \end{cases}$ 介于点 $A(0,0,0)$ 与点 $B(1,1,2)$ 之间的弧，求空间第一型曲线积分 $\int_L y\mathrm{d}l$.

7、（7 分）柱面 $S=\left\{(x,y,z)\middle| z=\sqrt{R^2-x^2}，\ x^2+y^2\le a^2，常数 R>a>0\right\}$，求第一型（即对面积的）曲面积分

$$I=\iint_S z(x+y-z)^2\mathrm{d}S.$$

8、（7 分）设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧的第一卦限部分，求第二型（即对坐标的）曲面积分

$$I=\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

9、（7 分）设S为有向曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，其法向量与z轴正向夹角为锐角，求第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_S (2xy^2+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

10、（10 分）设有向曲面S为平面$x+y+z=2$被柱面$|x|+|y|=1$截下的有限部分，法向量向上

（1）请将第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_S (y+2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

化成第一型曲面积分；

（2）计算上述积分.

11、（10 分）求三重积分

$$\iiint_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}v$$

其中　$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\right\}$

12、（10 分）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，且对平面上任意一条逐段光滑的简单封闭曲线 l，平面第二型曲线积分

$$\oint_l [xy(x+y)-f(x)]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y\equiv 0.$$

（1）求函数 $f(x)$；

（2）设 l_1 为从点（0，0）到点 (x,y) 的任意一条逐段光滑的有向弧，求平面第二型曲线积分

$$\int_{l_1}[xy(x+y)-f(x)]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y.$$

13、（7 分）（1）设 $F(y)$ 为连续函数，证明 $\int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z F(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)F(y)\mathrm{d}y$；

（2）设 $\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| 0 \le x \le y, 0 \le y \le z, 0 \le z \le 1\right\}$，$f(x)$ 为连续函数，证明

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

浙江大学 2013-2014 学年春学期《微积分》（II）课程期末考试试卷

1. 已知$\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2},\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，求$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$。

2. 直角坐标系中的 4 个点 A(3,-1,0)，B(-1,-1,1)，C(3,2,1)与 D(5,-2.5,-1)，这 4 个点是否在同一个平面上？若是，请求出此平面方程；若不是，请说明理由。

3. 设$z=(1+x^2y)^{xy^2}$，计算$x\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial y}$。

4. 设函数$z=z(x,y)$是由方程$z=2y+e^{2x-3z}$确定，求全微分 dz.

5. 求曲面$z=x^2+y^2$的切平面方程，已知该切平面与平面$2x-y-z=1$平行。

6. 设常数$a>0$，并设函数$y=y(x)$与$z=z(x)$满足方程组$xyz=a^3$，$x^2+y^2-2az=0$及条件$y(a)=a,z(a)=a$。求$y'(a),z'(a)$，并求空间曲线$y=y(x)$，$z=z(x)$在点(a,a,a)处的切线方程。

7. 求三元函数$u=3x^2+2yz$在点 A 处沿$\overrightarrow{AB}$方向的方向导数，其中 A(1,1,1)，B(5,-1,5)。

8. 计算二重积分$\iint\limits_D yd\sigma$，其中 D 是由直线$x=-2,y=0,y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围成的平面区域。

9. 设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D\frac{1+x+\sin(xy)}{1+x^2+y^2}d\sigma$。

10. 交换积分次序计算

$$\int_0^1 dy\int_0^1\sqrt{e^{2x}-y^2}dx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^1\sqrt{e^{2x}-y^2}dx。$$

11. 设$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又设$g(x,y)=f(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

12. 求函数$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在约束条件$z=x^2+y^2$和$x+y+z=4$下的最大值与最小值。

13. 设$f(x)$具有连续的一阶导数，并设表达式$[xy(x+y)-y]dx+[f(x)+x^2y]dy$为某二元函数$u(x,y)$的全微分，求$f(x)$的一般表达式与$u(x,y)$的一般表达式。