# 5. 反常积分

## 基本概念

**无穷区间上的反常积分：**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{；}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{；}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

其中，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$都收敛.

**注**：对于$(-\infty,+\infty)$的反常积分，不能盲目套用奇偶性的结论，也就是说——

即使$f(x)$是奇函数，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也不一定等于零；

即使$f(x)$是偶函数，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也不一定等于$2\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

上述结论要想成立，前提是$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛. 对于收敛的反常积分，是可以套用奇偶性的结论的.

**无界函数的反常积分（瑕积分）：**

若$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则$x=b$是瑕点，并定义$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$.

若$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，则$x=b$是瑕点，并定义$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$.

若$c\in(a,b)$，且$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，则$x=c$是瑕点，并定义$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

对于瑕点$c$藏在区间内部的情况，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$都收敛.

若$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛；

若$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散，但$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$条件收敛.

## 比较判别法

### 无穷区间上的反常积分

设函数$f(x),g(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$恒成立，则——

(1) 若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛；（大的收敛，小的也收敛）

(2) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$也发散.（小的发散，大的也发散）

设$f(x)$和$g(x)$在$[a,+\infty)$连续、非负，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，则——

(1) 当$k=0$时，若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$必收敛（大的收敛，小的必收敛）；

(2) 当$k=+\infty$时，若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$必发散（小的发散，大的必发散）；

(3) 当$k$为非零常数，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$的敛散性相同——该结论说明，若$x\to+\infty$时$f(x)$和$g(x)$是同阶无穷小，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同敛散.

### 无界函数的反常积分

设$f(x),g(x)$在$(a,b]$连续，$x=a$是它们的瑕点，且$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则——

(1) 如果$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛；（大的收敛，小的也收敛）

(2) 如果$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散，也$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$也发散.（小的发散，大的也发散）

设$f(x),g(x)$在$(a,b]$连续、非负，$x=a$是它们的瑕点，且$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，则——

(1) 当$k=0$时，若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必收敛（大的收敛，小的必收敛）；

(2) 当$k=+\infty$时，若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必发散（小的发散，大的必发散）；

(3) 当$k$为非零常数，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$的敛散性相同——该结论说明，若$x\to a^+$时$f(x)$和$g(x)$是同阶无穷大，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛散.

**注**：为了判断形如$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$或$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$的敛散性，我们要找的对比尺度往往是$p-$积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$或$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$.

## p-积分：

形如$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$、$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$、$\int_a^b\dfrac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$、$\int_a^b\dfrac{1}{(x-b)^p}\mathrm{d}x$，都称为$p-$积分.

(1) 讨论$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性

**解**：当$p>1$时，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{-p}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{0^+}^1=\infty$，发散；

当$p<1$时，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{-p}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{0^+}^1=\dfrac{1}{1-p}$，收敛；

当$p=1$时，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_{0^+}^1=\infty$，发散.

综上，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{发散，若}p\geqslant 1\\ \text{收敛，若}0<p<1\end{cases}$.（对于$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，显然$p$越大越发散）

(2) 讨论$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性

**解**：当$p>1$时，$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty} x^{-p}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\dfrac{1}{p-1}$；

当$p<1$时，$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty} x^{-p}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\infty$；

当$p=1$时，$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{+\infty}=\infty$.

综上，$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}\text{发散，}p\leqslant 1\\ \text{收敛，}p>1\end{cases}$.（对于$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，显然$p$越大越收敛）

(3) 讨论$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性

**解**：由于$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$I_1$收敛需要$0<p<1$，$I_2$收敛需要$p>1$，二者无交集，所以无论$p$取何值，$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$都发散.

**广义p-积分（可经过凑微分转化为常规p-积分）：**

形如$\int_1^{e}\dfrac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$、$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$、$\int_{e^{100}}^{+\infty}\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot(\ln\ln x)^p}\mathrm{d}x$的积分，都叫广义$p-$积分.

## 敛散性判别

①找瑕点

②判断该积分在每个瑕点处的敛散性

- (i)看该积分是否本身就是p-积分或广义p-积分，如果是，直接套结论，否则进入下一步
- (ii)找到被积函数在瑕点处的等价量
  - 1) 若被积函数能直接等价为幂函数，则直接利用$p-$积分的结论判断出敛散性（如：$\int_0^1\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$、$\int_1^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$、$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$、$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}\mathrm{d}x$）
  - 2) 若被积函数无法等价为幂函数，则可能是因为存在对数函数或指数函数. 对数函数速度太慢、阶太低，而指数函数太快、阶太高，所以可以先猜测敛散性，然后用比较判别法的极限形式严格证明（如$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$、$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$、$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$、$\int_0^1(\ln x)^{100}\mathrm{d}x$、$\int_0^1[\ln(1-x)]^{100}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$）；
  - 3) 若被积函数在瑕点处出现$\sin\infty$或$\cos\infty$的情况，导致被积函数不断变号，则应先判断该积分是否绝对收敛，此时需要对被积函数加绝对值，然后利用$|\sin\bullet|\leqslant 1$或$|\cos\bullet|\leqslant 1$，把被积函数中的三角函数放缩掉，此时会出现两种结果：
    - ① 放缩掉三角函数以后的新积分收敛，则原积分绝对收敛（如$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{e^x}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$）；
    - ② 放缩掉三角函数以后的新积分发散，则暂无法判断原积分的敛散性，此时可以用分部积分，将原积分转化为另一个新的积分，从而转化研究对象.（如$\int_2^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$、$\int_1^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$）

③若该积分在所有瑕点处均收敛，则整个积分收敛；只要有一个瑕点处发散，则整个积分发散

注：由于敛散性只需要判断“阶”，所以被积函数中的“非零因子”不会影响敛散性，也不必在乎这些非零因子的极限到底是几，我们只需要关注零因子的阶即可.

## 反常积分的计算

①积分区间内部如果存在瑕点，则需要拆区间

②将反常积分拆成两个积分计算时，需要考虑每个积分的敛散性

③反常积分的分部积分，也需要考虑每一项的敛散性

④无穷区间上的区间再现公式

- 对于无穷区间，尤其是$(0,+\infty)$，我们可采用倒代换的方法，令$x=\dfrac{1}{t}$，便可实现区间再现.
- 也可以是将$(0,+\infty)$拆成$(0,1)$和$(1,+\infty)$，然后对$(1,+\infty)$倒代换，从而将$(1,+\infty)$变回$(0,1)$.
- 也可以三角换元，令$x=\tan t$，这样就将$x\in(0,+\infty)$变成了$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，然后再用区间再现即可.
- 小结论：
  $$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$$