Lec 5：逻辑等价、蕴涵、范式

1 逻辑等价与逻辑蕴含

1. 1 逻辑等价式（logical equivalence）

- 当命题公式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式时，称 A 逻辑等价于 B ,记作 $A \equiv B$

> - 双重否定律：$\neg\neg A \equiv A$
> - 幂等律：$A \vee A \equiv A$ ，$A \wedge A \equiv A$
> - 交换律：$A \vee B \equiv B \vee A$ ，$A \wedge B \equiv B \wedge A$
> - 结合律：$A \vee B \vee C \equiv A \vee B \vee C$ ，$A \wedge B \wedge C \equiv A \wedge B \wedge C$
> - 分配律：$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee A \wedge C$ ，$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge A \vee C$
> - 德摩根律：$\neg A \vee B \equiv \neg A \wedge \neg B$，$\neg A \wedge B \equiv \neg A \vee \neg B$
> - 吸收律：$A \vee A \wedge B \equiv A$，$A \wedge A \vee B \equiv A$
> - 蕴涵等值式：$A \to B \equiv \neg A \vee B$
> - 等价等值式：$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$
> - 零律：$A \vee T \equiv T$，$A \wedge F \equiv F$
> - 同一律：$A \vee F \equiv A$，$A \wedge T \equiv A$
> - 排中律和矛盾律：$A \vee \neg A \equiv T$，$A \wedge \neg A \equiv F$
> - $\neg T \equiv F$，$\neg F \equiv T$
> - $A \wedge B \to C \equiv A \to B \to C$
> - 假言易位：$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$
> - 归谬论：$A \to B \wedge A \to \neg B \equiv \neg A$
> - 等价等值式2：$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

1. 2 逻辑蕴涵式（logical implication）

- 当命题公式 $A \to B$ 是重言式时，称 A 逻辑蕴涵 B，记做 $A \vDash B$
- 公式 A 的所有成真赋值都是公式 B 的成真赋值
- $A \equiv B$ 可以看作 $A \vDash B \wedge B \vDash A$

> - $A \vDash A \vee B$
> - $A \wedge B \vDash A$

> - $A \wedge (A \to B) \vDash B$
> - $(A \to B) \wedge \neg B \vDash \neg A$
> - $\neg A \wedge (A \vee B) \vDash B$
> - $(A \to B) \wedge (B \to C) \vDash A \to C$
> - $(A \to B) \wedge (C \to D) \vDash (A \wedge C) \to (B \wedge D)$
> - $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \vDash A \leftrightarrow C$

- 推广形式：$\Gamma \vDash B$
  - Γ 中所有公式的合取逻辑蕴涵 B
  - 当 Γ 中不包含任何公式时，记作 $\vDash B$，表示 B 永真

> - $A \equiv B$ 当且仅当 $\vDash A \leftrightarrow B$
> - $A \vDash B$ 当且仅当 $\vDash A \to B$
> - 若A ≡ B，则 B ≡ A
> - 传递性
>   - 若 $A \equiv B \wedge B \equiv C$，则 $A \equiv C$
>   - 若 $A \vDash B \wedge B \vDash C$，则 $A \vDash C$
> - 若 $A \vDash B$，则 $\neg B \vDash \neg A$
> - 若 $A \vDash B$，$A \equiv A'$，$B \equiv B'$，则 $A' \vDash B'$

1. 3 RS 和 RR

1. 3. 1 重言式的代入原理（RS: Rule of Substitution）

- 将重言式 A 中的某个命题变元 p 的所有出现都代换为命题公式 B，得到的命题公式 $A(B/p)$ 也是重言式

1. 3. 2 命题公式的替换原理（RR: Rule of Replacement）

- 将命题公式 A 中的子公式 C 的部分出现替换为和 C 逻辑等价的公式 D，得到的命题公式 B 满足 $A \equiv B$

1. 4 逻辑等价式和逻辑蕴涵式的证明

- 真值表法
  - 分别列出 $A \leftrightarrow B$ 和 $A \to B$ 的真值表，最后一列全为真即可
- 赋值法

    - 逻辑蕴涵式 $A \vDash B$
        - A 的任意一个成真赋值都是 B 的成真赋值
        - 或：B 的任意一个成假赋值都是 A 的成假赋值
    - 如果证明了 $A \vDash B$ 和 $B \vDash A$，那么就证明了 $A \equiv B$
- 推演法
    - 利用已知的重言式，逻辑等价式和逻辑蕴涵式，采用RS和RR进行推演
    - 命题公式至少有一个成真赋值

2 范式

2. 1 基本构成

- 文字（literals）：命题常元、变元和它们的否定（前者称正文字，后者称负文字）
- 析取子句（disjunctive clauses）：文字或者若干文字的析取
- 合取子句（conjunctive clauses）：文字或者若干文字的合取
- 互补文字对（complemental pairs of literals）：一对正文字和负文字

2. 2 DNF 和 CNF

- 析取范式DNF（Disjunctive Normal Form）
    - $A' \equiv A$，A' 为合取子句或者若干合取子句的析取
- 合取范式CNF（Conjunctive Normal Form）
    - $A' \equiv A$，A' 为析取子句或者若干析取子句的合取
- 求范式的一般步骤
    - 消去公式中的联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$
        - 蕴涵等值式：$p \rightarrow q$ 化为 $\neg p \vee q$
        - 等价等值式：$p \leftrightarrow q$ 化为 $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ 或 $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
    - 利用德摩根律将否定联结词 $\neg$ 向内深入，最后只作用于文字
    - 将 $\neg\neg p$ 化简为 p
    - 利用分配律得到需要的析取或者合取范式
- 一个公式的析取范式和合取范式都不是唯一的
- 公式的析取范式可能同时也是合取范式

2. 3 范式用于重言式和矛盾式的识别

- 重言式识别：合取范式中每个析取子句都包含了至少一个互补文字对
- 矛盾式识别：析取范式中每个合取子句都包含了至少一个互补文字对

2. 4 主范式

2. 4. 1 主析取范式（major disjunctive form）

- 定义：A' 中每一个合取子句里 p_1，p_2，$...$，p_n 均恰出现一次
- 主析取范式存在且唯一
- 构造步骤
  - 假设 A' 是公式 $A(p_1，p_2，...，p_n)$ 的析取范式
  - 若 A' 中某个合取子句 A_i 既不包含 p_j 也不包含 $\neg p_j$，则展开 A_i
    - $A_i \equiv A_i \wedge 1 \equiv A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \equiv (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j)$
  - 将合取子句中重复出现的命题变元、合取子句和矛盾式消去
    - $p \wedge p \equiv p$
    - $A_i \vee A_i \equiv A_i$
    - $p \wedge \neg p \equiv 0$
  - 将所有的合取子句整理变元顺序，成为极小项，并得到主析取范式 A''
- 极小项的性质
  - 没有两个不同的极小项是等价的
  - 极小项只有唯一的成真赋值
  - 极小项中命题变元与1对应，其否定与0对应
- 具有相同主析取范式的公式是等值的，属于同一个等值类
  - 极小项的数量为 $N = 2^n$
  - 由极小项组合成的主析取范式的数量为 2^N
  - 等值类的数量等于主析取范式的数量

2. 4. 2 主合取范式（major conjunctive form）

- 定义：A' 中每一个析取子句里 p_1，p_2，$...$，p_n 均恰出现一次
- 主合取范式存在且唯一
- 构造步骤
  - 消去蕴含关系
  - 运用分配率将短语都转化成子句
  - 化成合取范式

    - 补充缺少的命题变元
    - 进一步化简
    - 将所有的析取子句整理变元顺序，成为极大项，并得到主合取范式 A''
- 极大项的性质
    - 没有两个不同的极大项是等价的
    - 极大项只有唯一的成假赋值
    - 极大项中命题变元与0对应，其否定与1对应
- 具有相同主合取范式的公式是等值的，属于同一个等值类
    - 极大项的数量为 $N = 2^n$
    - 由极大项组合成的主合取范式的数量为 2^N
    - 等值类的数量等于主合取范式的数量