3. 不定积分

- **有理函数**
  - 通用解法
    - 基本步骤：裂项+待定系数法
      - 原则：
        - ①只要分母中含有$(x-a)^k$，则裂项后的式子中一定含有$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$；
        - ②只要分母中含有$(x^2+px+q)^k$（注：因为已经分解到不能再分解了，所以这里的$p^2-4q<0$），则裂项后的式子中一定含有$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$
    - 基本模型
      - 类型1：$\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$ —— 套公式
      - 类型2：$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ —— 改造分子，拆分为两个积分，其中第一个积分直接凑微分，第二个积分配方后套公式即可
      - 类型3：$\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$ —— 降低分母的次数→分部积分
      - 类型4：$\int\frac{1}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$ —— 三角换元法
      - 类型5：$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$ —— 改造分子、拆分为两个积分→对分母配方、换元→归结于类型4
      - 类型6：$\int\frac{x^2}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$
  - 特殊解法
    - 根据分母的形式改造分子，从而实现“裂项”的目的
    - 倒代换：适用于分母的次数远高于分子时
    - 形如：$\int\frac{1\pm x^2}{1+kx^2+x^4}\mathrm{d}x$
      - 基本思路：分子分母同时除以x的平方后凑微分
      - 补充1：$\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]$
      - 补充2：$\int\frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$ —— 裂项→化为基本型的和（待定系数法）
- **三角函数**
  - 通用解法：利用万能公式将三角有理函数的积分化为有理函数的积分
    $\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$，$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$，$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
  - 特殊解法
    - 缩分母
      - 分母为1±cosx或1±sinx
        - 分子分母同乘共轭表达式
        - 利用二倍角公式
      - 辅助角公式
      - 根据分母改造分子凑微分
    - 分部积分+积分重现
      $$\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\left(\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\left(\sqrt{1+x^2}\right)dx$$
    - 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\cos x$凑到d后面，变出$\mathrm{d}\sin x$
    - 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\sin x$凑到d后面，变出$\mathrm{d}\cos x$
    - 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则可想办法制造出$\sec^2x\mathrm{d}x$，凑出$\mathrm{d}\tan x$。我们有时候喜欢分子分母同时除以$\cos^2x$，使分子出现$\sec^2x\mathrm{d}x$，就是这个原因。
    - 对于形如$\int R(\sin^2x,\sin x\cos x,\cos^2x)\mathrm{d}x$的积分，令 tanx=t，则$\int R(\sin^2x,\sin x\cos x,\cos^2x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{t}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$
    - 对于形如$\int\frac{A\sin x+B\cos x}{C\sin x+D\cos x}\mathrm{d}x$的积分，我们一般假设“分子$=p\cdot$分母$+q\cdot$(分母)$'$”，解出$p$和$q$即可
    - 当被积函数中出现不用角度的三角函数时，先用倍角公式统一角度，其中sinxcosx可用((sinx+cosx)²-1)/2代替
    - 对于形如$\int\sin ax\cdot\sin bx\,\mathrm{d}x\,(a\neq b)$之类的题，我们可以直接采用积化和差公式
    - 利用二倍角公式升幂缩角：
      $\sin x=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
      $\cos x=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
      $\tan x=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
    - $I_n=\int\sec^n x\,\mathrm{d}x\,(n\geqslant 3)$
      - 要点1：$(tan(x))'=sec^2(x)$
      - 要点2：$sec^2(x)=1+tan^2(x)$
      - n为偶数，直接凑dtanx：
        $$\int\sec^4x\mathrm{d}x=\int\sec^2x\sec^2x\mathrm{d}x=\int\sec^2x\mathrm{d}(\tan x)=\int(1+\tan^2x)\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{3}\tan^3x+\tan x+C.$$
      - n为奇数，分部积分+积分重现：
        $$\int\sec^3x\mathrm{d}x=\int\sec x\mathrm{d}(\tan x)=\sec x\tan x-\int\tan^2x\sec x\mathrm{d}x=\sec x\tan x-\int(\sec^2x-1)\sec x\mathrm{d}x=\sec x\tan x-\int\sec^3x\mathrm{d}x+\int\sec x\mathrm{d}x=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|-\int\sec^3x\mathrm{d}x,$$
      - 补充：$I_n=\int\tan^{n-2}x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x\mathrm{d}(\tan x)-\int\tan^{n-2}x\mathrm{d}x=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$。
    - 特例2：观察式子结构，进行添项和裂项
      $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[x+a-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C,$$
      其中C为任意常数.
    - 特例1：因式分解+换元法
      $f(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3x+\cos^3x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x)}$
- **换元法**
  - 整体换元
    - 一般来说，只要见到被积函数中出现了“$\sqrt{一次函数}$、$\sqrt{\frac{一次函数}{一次函数}}$、$\sqrt{e^{ax}+b}$、$\sqrt{\frac{e^{ax}+b}{e^{ax}-b}}$”，可以直接将整个根号令成$t$，达到消去根号的作用。
    - 注1：有时换元以后不用解出dx，而应直接分部积分。因为如果把具体计算出来的话，反而会升高分母的阶，导致整个积分的次数特别高。
    - 注2：为了同时消去$\sqrt[3]{x}$和$\sqrt{x}$的根号，很明显需要令$x=t^6$。这说明我们在换元的时候，不要拘泥于具体的形式，而应该具体问题具体分析。总之记住一点——换元的目的是简化被积函数。
    - 补充1：分子有理化后裂开
      $$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
    - 补充2：
      因为
      $$\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x^2-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x,$$
      故令$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$，则$\mathrm{d}x=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$，于是
      $$原式=\int\frac{(t^3-1)^2}{4t^3}\cdot t\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t=\int\left(-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$
  - 三角换元
    - 类型1：若根号里面没有一次项，只有平方项和常数项
      - 基本思路：
        ① 形如“$\sqrt{a^2-x^2}$”，则令$x=a\sin t$；
        ② 形如“$\sqrt{a^2+x^2}$”，则令$x=a\tan t$；
        ③ 形如“$\sqrt{x^2-a^2}$”，则令$x=a\sec t$；
      - （注：有时候不一定非要出现根号才用三角换元，如：$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$，也可以利用三角换元+二倍角处理）
    - 类型2：若根号里面含有一次项，则需先对根号里面的二次函数配方，消去一次项后，转化为类型1处理
    - 补充：一切可化为$\int\frac{1}{(x+d)\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$和$\int\frac{1}{(x+d)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$的不定积分，都可以先用倒代换$x+d=\frac{1}{t}$，将被积函数大大简化后再积分。
- **分部积分**
  - 口诀：按照“反对幂指三”的顺序，谁排在后面，就把谁凑到微分符号后面去，然后分部积分
  - 注1：在分部积分时，要善于在d后面增减一个恰当的常数，使得分部积分以后的式子更加简洁。
  - 注2：当被积函数为指数函数和三角函数的乘积时，需要连续两次使用分部积分，达到“积分重现”的目的。需要注意的是，这两次分部积分凑到d后面的函数必须是同一种类的函数，否则会原路返回。
  - 补充1：利用分部积分，对分母进行降阶
  - 补充2：利用分部积分，实现“积分抵消”
    - 基本思路：把一个积分拆成两个积分，其中一个积分I_1暂时不动，另一个积分I_2使用分部积分，而分部积分后得到的新积分刚好和I_1相互抵消
    - 题源：$[e^xf(x)]'=e^x[f(x)+f'(x)]$
    - 注：有时候需要对两个积分同时使用分部积分，使得分部积分以后的两个新的积分相互抵消
  - 补充3：对复杂因子求导，期待出现奇迹
    - 基本思路：当被积函数中的某一部分出现了一个比较复杂的“整体”时（复合函数或两个函数的乘积），可以尝试对这个整体求导，观察导函数的特点（如恰为被积函数的分子），便于后续的凑微分等操作
    - 模版：$\int\frac{1+xf'(x)}{x(1+xe^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int\frac{[1+xf'(x)]e^{f(x)}}{xe^{f(x)}(1+xe^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int\frac{[xe^{f(x)}]'}{xe^{f(x)}(1+xe^{f(x)})}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{xe^{f(x)}}{1+xe^{f(x)}}\right|+C$
    - 补充1：对于指数型和对数型的分子，要具备由导数推原函数的敏感性
    - 补充2：$\int\frac{x+\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-x\cdot\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x+\sin x\cos x}{(1-x\tan x)^2\cos x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x\tan x-1)^2}\mathrm{d}x\tan x=\frac{1}{1-x\tan x}+C$