4. 定积分

- **常规计算技巧**
  - 利用 N-L 公式—— $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
    - 如果在积分区间的内部存在函数F(x)的无定义点，应该将积分区间从无定义点处拆开，拆分成若干个小积分之和，使得无定义点在积分区间的端点处；也可以在计算积分之前，利用周期性和对称性，提前将无定义点从积分区间内部移出（计算时注意正负趋向性）
  - 利用定积分的几何意义
  - 利用奇偶性简化计算
    - 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$
    - 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$
  - 利用周期性平移和缩小积分区间：
    若 $f(x)$ 可积且周期为 T，则 $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$
  - 利用 Wallis 公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdot\dots\cdot\frac{2}{3}, & n\text{为奇数} \end{cases}$，简化积分计算
  - 利用一个常见的积分公式——设 $f(x)$ 连续，则 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$
  - 补充：
    遇到 $\sqrt{x-x^2}$，可设 $x=\sin^2 t$
- **利用区间再现公式简化计算：**
  $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$
  - 对于积分 $\int_a^b x^m(a+b-x)^n\mathrm{d}x$（其中 m,n 为正整数），当 m 很小，而 n 很大时，利用区间再现得到 $\int_a^b x^m(a+b-x)^n\mathrm{d}x = \int_a^b (a+b-x)^m x^n\mathrm{d}x$
  - 广义奇偶性（中心对称）→令 $t=x-x_1$
  - 恒等变形
    反三角函数有关的恒等式
    (1) $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$,
    (2) $\arctan x + \arctan\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$,
    (3) $\arctan x + \arctan\frac{x+1}{x-1} = \frac{3\pi}{4}$.
  - 补充1：
    形如 $\int\frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$（其中 $\sin(a-b)\neq 0$）的积分
    - 分子凑sin((x+a)-(x+b))，拆开后得到tan便于计算
  - 补充2：
    $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x \xlongequal{2x\mapsto x} -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$
    - 延伸1：
      $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}\ln(\sin x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$
    - 延伸2：
      $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$
- **三角函数定积分技巧**
  - 设 $I_n = \int_0^{2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，$J_n = \int_0^{2\pi}\cos^n x\,\mathrm{d}x$，则有以下结论：
    (1) 对于任意正整数 n，均有 $I_n = J_n$
    (2) 当 n 是偶数时，$I_n = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$
    (3) 当 n 是奇数时，$I_n = 0$
  - Dirichlet 核与 Fejer核
    - $\frac{\sin 2nx}{\sin x} = 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$
    - $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$
    - 补充：数列思想+和差化积公式的应用
      - 设 $I_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则 $I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 2\cos 2nx\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\sin 2nx}{n}\right|_0^{\pi} = 0$
      - 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$，则 $a_{n+1} - a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$
        $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin(n+1)x + \sin nx)(\sin(n+1)x - \sin nx)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$
- **综合题型**
  - 被积函数中含有变限积分函数
    - 求函数表达式→建立微分方程
    - 利用分部积分：将被积函数中除变限积分以外的函数全部凑到 d 后面去，然后分部积分消掉变上限积分函数
    - 利用二重积分：积分号里套积分，视为累次积分，交换积分次序即可
      - **例题** 设 $f(x)$ 为非负连续函数，满足 $f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = \sin^4 x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$
        解： $f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{t\mapsto x-t} f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \cos^4 x$，于是
        $\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = 2\int_0^x\cos^4 t\,\mathrm{d}t$，令 $x = \frac{\pi}{2}$，得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3\pi}{8}}$.(非负连续函数积分值为正)
      - **类题** 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $x > -1$ 时，$f(x)\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + 1\right] = \frac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$，求 $f(x)$
        解： $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + 1\right]^2 = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，于是 $\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + 1\right)^2 - 1 = 2\int_0^x\frac{te^t}{2(1+t)^2}\mathrm{d}t = \frac{e^x}{x+1} - 1$，
        $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = -1 \pm\sqrt{\frac{e^x}{x+1}}$，求导：$f(x) = \pm\frac{x}{2x+2}\sqrt{\frac{e^x}{x+1}}$.
  - 被积函数中含有导函数：只需把导函数凑到 d 后面，然后分部积分即可
  - 已知一个积分，求另一个积分
    - 利用分部积分，思考把谁凑进去才能实现两个积分相互转化
    - 换元法
  - 利用“定积分的结果是一个数字”来求解某些待定函数的问题：*f*(*x*)的具体形式已经完全告诉，只是其表达式中含有一个未知的积分
    - 等式两边再次积分，得到一个关于该积分的方程，即可解出该待定积分
    - 待定系数法（设积分为未知数）
  - 利用分部积分，导出积分的递推公式
    - **证明** 利用数学归纳法，$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{2}\sin^2 x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$.
      $I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin(n-1)x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x[\sin nx\cos x - \cos nx\sin x]\mathrm{d}x$
      $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos nx\,\mathrm{d}(\cos x) = I_n + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,\mathrm{d}\cos^n x$
      $= I_n + \left.\frac{1}{n}\cos nx\cos^n x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\,\mathrm{d}x = 2I_n - \frac{1}{n}$,
      有递推公式：$I_n = \frac{1}{2}\left(I_{n-1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}I_{n-1} + \frac{1}{2n}$.
  - 分段函数的定积分：只需将积分区间拆开，在每一段上分别积分，然后相加即可