摺出填充空間的多面體

文／常文武

用多面體填充空間是一個古老的題。建築用長方體磚塊是可以填充空間的最常見多面體。顯然比長方體更特殊的正方體也是可以填充空間的。風靡世界的樂高玩具其實就是一些長方體的組合拼搭。中國人曾發現一種叫鱉臑的四面體是可以填充空間的。在《九章算術》一書中古人用切割長方體的方法發現了它。鱉臑究竟長什麼樣？請讀者跟我透過摺紙來製作幾個把玩一番。

摺紙是一項為人們喜聞樂見又簡便易行的日常娛樂休閒活動。有時，摺紙還可演變為寓教於樂的教學形式，這正是本文談論的主題。

用多面體填充空間是一個古老的話題。建築用長方體磚塊是可以填充空間的最常見多面體（圖 1）。顯然比長方體更

圖 1. 建築用的長方體磚塊

特殊的正方體也是可以填充空間的。風靡世界的樂高玩具其實就是一些長方體的組合拼搭（圖 2）。中國人曾發現一種叫鱉臑的四面體是可以填充空間的。在《九章算術》一書中古人用切割長方體的方法發現了它。鱉臑究竟長什麼樣？還有那些可以填充空間的多面體？本文將請讀者跟我透過摺紙來製作幾個有趣的多面體來玩一番。

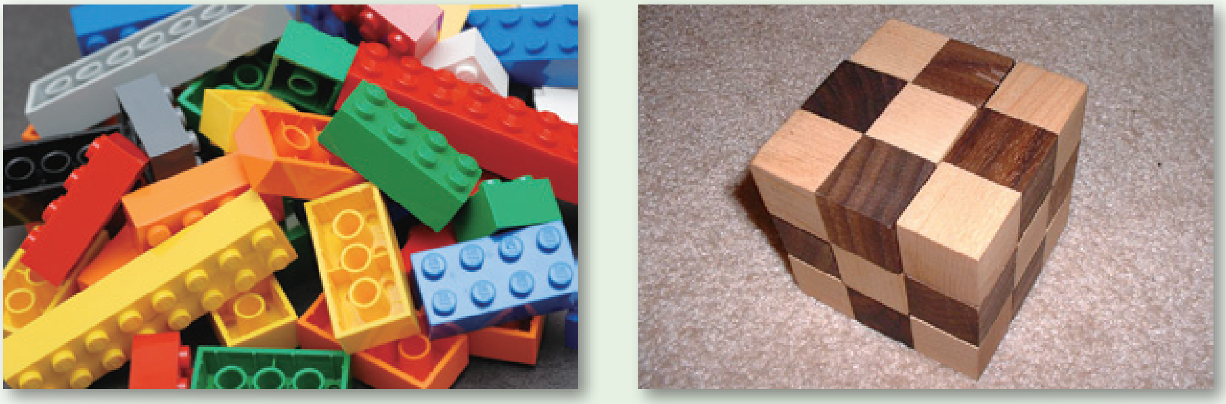

圖 2. 樂高（左）和索瑪方塊（右）玩具（圖片來源：Wikimedia Commons）

從平面鑲嵌到空間填充

除了以上談及的長方體和正方體，為了給大家一個容易理解的填充空間模型，讓我們觀察廣場上的地磚。常見的地磚是一種正六邊形的式樣，就像蜂巢的截面（圖 3）。如果我們挖開來一塊，可以發現它的形狀是正六棱柱。如果將這些正六棱柱的地磚一層層堆疊上去，就可發現正六棱柱能夠填充空間。

以此類推，所有可以鑲嵌平面的多邊形一旦有一定厚度就可以填充三維的空間了。顯然，這種平凡的多面體填充空間方案也適用於斜棱柱。

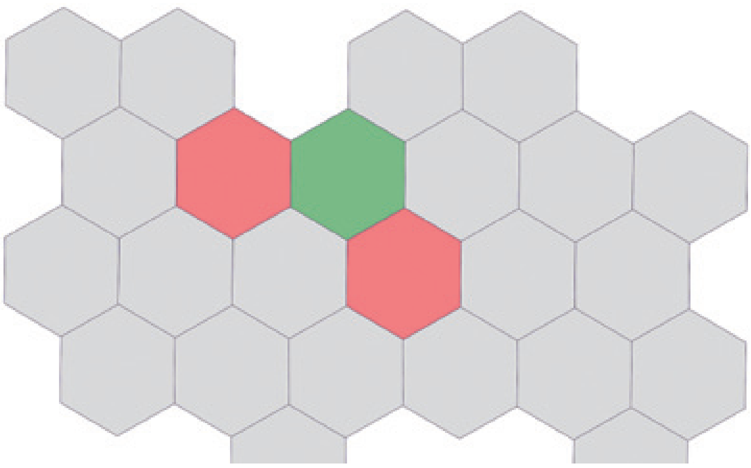

圖 3. 正六邊形的地磚

鱉臑的構造

值得驕傲和自豪的是，中國人在《九章算術》中通過切割長方體發現一款四面體。它的每個面都是直角三角形，中國人發現這一稱為「鱉臑」(讀音為 ㄅㄧㄝ ㄋㄠˋ)的四面體比西方人發現同一結構的時間(1925 年)要早幾百年(圖 4)。

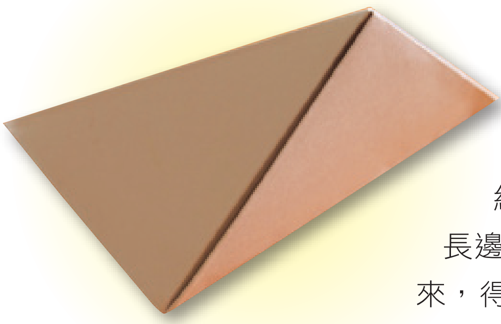
圖 4. 單個鱉臑

製作一個單鱉臑所需材料只是一張 A4 紙。從 A4 紙長邊三等分處裁開來，得到約為 $3：\sqrt{2}$ 的長條紙。

照著圖 5 的步驟就可以完成一個鱉臑。

現在，請用三個鱉臑(需要有兩個互為鏡像)組合拼接成一個三棱柱(圖 6)。一旦成功了，鱉臑能填充空間的道理就不言自明了。這就是《九章算術》中的幾句話所道破的：「邪解立方得兩塹堵；邪解塹堵，其一爲陽馬，一爲鱉臑；陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也。合兩鱉臑成一陽馬，合三陽馬而成一立方，故三而一。」

以最嚴格的填充空間要求，每個元件必須完全相同，那麼如果摒棄鏡像對稱的鱉臑，僅就單一的鱉臑也可以填充空間嗎？

這也是可以的，不妨讓我們試著用三個同一種鱉臑來拼拼看，你可以得到如圖 7 的斜三棱柱。利用我們上節的地磚模型就知道，這個三棱柱可以填充空間，所以，上述單一鱉臑也可以填充空間。

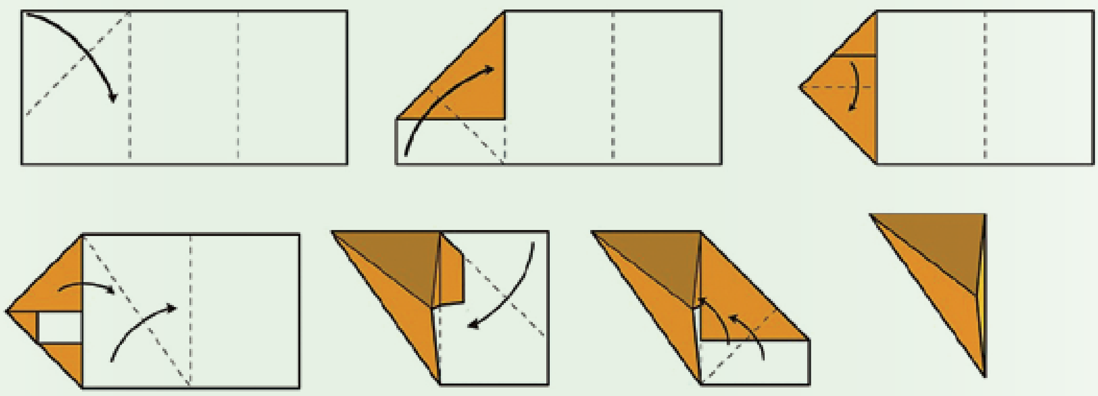
圖 5. 中間區域須是 $1：\sqrt{2}$ 長方形

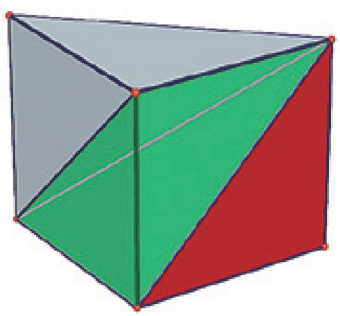
圖 6. 三個鱉臑拼成的塹堵

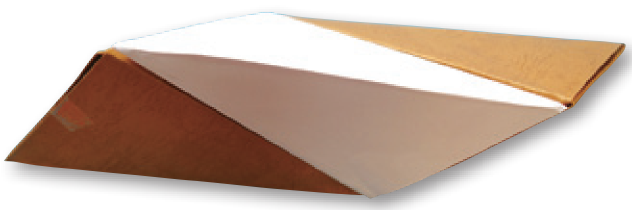
圖 7. 同向的鱉臑拼出的斜三棱柱

孕育在簡單結構中的複雜結構

正方體是一種可以填充空間的簡單多面體，下面利用「星化」正方體的方法產生一種能填充空間的新多面體—菱形 12 面體。

將多面體的每個面尖銳化為一個棱錐得到的多面體的過程就是「星化」。那麼怎麼將正方體星化呢？

想像一下單位正方體的中心（最長對角線的中點）關於正方體的六個面有六個鏡像對稱的像點。這些像點與原正方體的每個面構成的四棱錐就是該面上的星化錐。這六個正四棱錐加上原來的正方體共同組成的多面體就是一個菱形 12 面體。

為何圖 8 是一個 12 面體而不是 24 面體呢？

注意到來自不同星化錐的相鄰側面恰巧平行于原正方體的某對角面。這樣，原正方體的 12 條棱就融化成菱形對角線，24 個面也就成為了 12 個面。

我們可以從正方體填充空間的特性自然推導出菱形 12 面體填充空間的特性。

設想用無數小正方體組成如圖 9 那樣帶空隙的三維空間。

圖 9 只是無限空間的一個局部。這個空間裡每個方塊與周圍 12 個方塊以共棱方式鄰接，但從不共面。也就是說這樣形成的無窮大立體結構像海綿一樣充滿了洞洞眼。

現在讓每個立方體在它的六個面上，向周圍的六個洞洞生出六個四棱錐。這樣每個洞洞被它的上下左右前後伸出的四棱錐正好填滿。這個生長的過程使得原先的正方體都變成了菱形 12 面體，這也就證明整個空間可以被菱形 12 面體填滿了。

二元填充空間

如果允許填充空間的基本元素是兩個，除了前文已經談及的正反兩種鱉臑之外，值得關注的一個例子是正八面體和正四面體的組合。

以一個正八面體和兩個正四面體可以拼成一個平行六面體。而平行六面體可填充性是長方體可填充性的自然推論。

要證明圖 10 中的多面體的確是一個平行六面體，關鍵要證明正四面體和正八面體鄰接面融為一個面了。

分別算算兩種多面體的二面角，可以發現：正四面體每個二面角的平面角等於

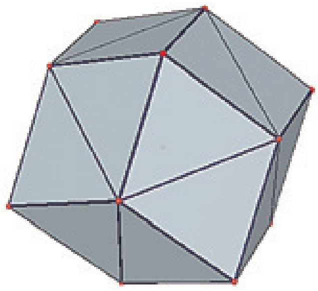
圖 8. 菱形 12 面體填充空間結構

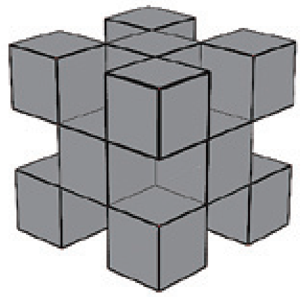
圖 9. 正方體構成的海綿

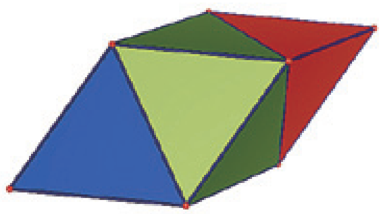
圖 10. 一個正八面體和兩個正四面體形成的平行六面體

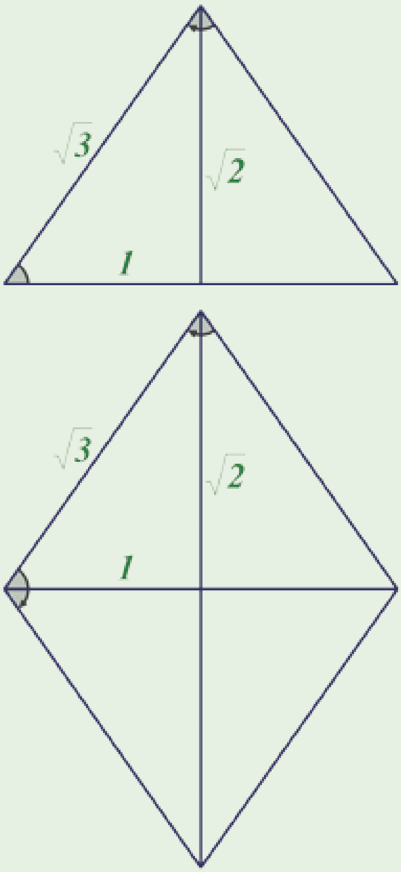

圖 11. 正四面體以及正八面體的側視圖

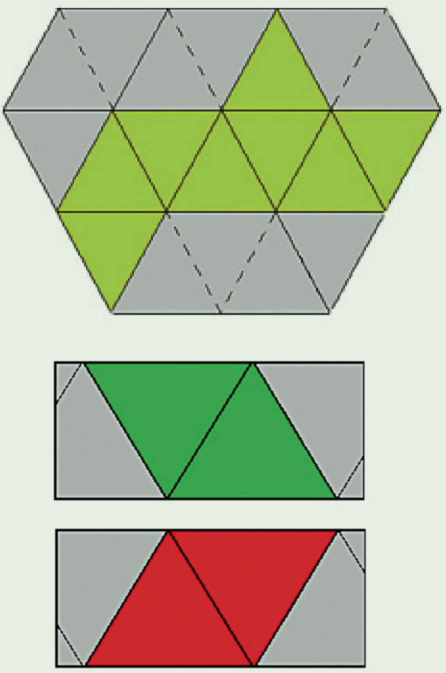

圖 12. 正八面體（上）與卡接正四面體（下）CP 圖

圖 11 左等腰三角形的頂角。而一個正八面體的二面角平面角等於圖 11 右菱形的一個鈍角（圖 11）。所以正四面體和正八面體的的二面角正好互補。從而二者貼合時，露出的面可以融為一個面。

讀者可以方便地用異形紙片製作正八面體和正四面體，以體驗它們在圖 10 中的默契配合（圖 12）。

截角八面體可以填充空間

正八面體在每個角的頂端三分之一處截去一個尖，就形成可以填充空間的一個 14 面體了，這真是有趣。

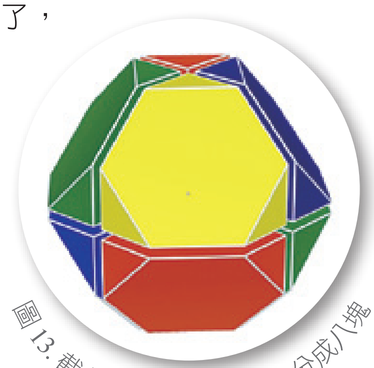

圖 13. 截角八面體可以進一步分成八塊完全相同的多面體

要證明以上斷言，我們先看看截角八面體的大概樣子。

圖 13 雖然看似不像單個的多面體，但是我們先把它的外輪廓視為一個多面體的外輪廓，這個多面體就是截角正八面體。

它為何能夠填充空間呢？

這就需要按照圖 14 實際上表示的樣子，進一步分割截角八面體為八塊。這時我們可以發現一個驚人的事實，這八塊中任何兩塊可以拼出一個正方體。這也附帶指明了每個這樣的七面體也是可填充空間的。

就算這是真的，又怎麼説明原物也是可以填充空間呢？

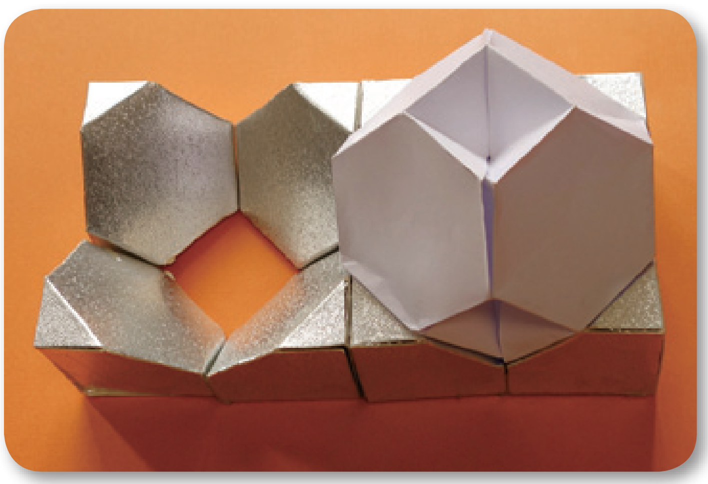

圖 14. 自己包住自己的截角八面體折疊玩具

原來，當我們按照兩兩配對形成正方體後，再以正方體來填充空間，那麼這時相鄰的正方體正好復原了打碎了的截角八面體。這個現象在一個玩具裡可以觀察得更明顯（圖 14）。

如果讀者想驗證一下這個奇妙的玩具效果，可以照圖 15 展開圖製作一個簡易的翻折結構。

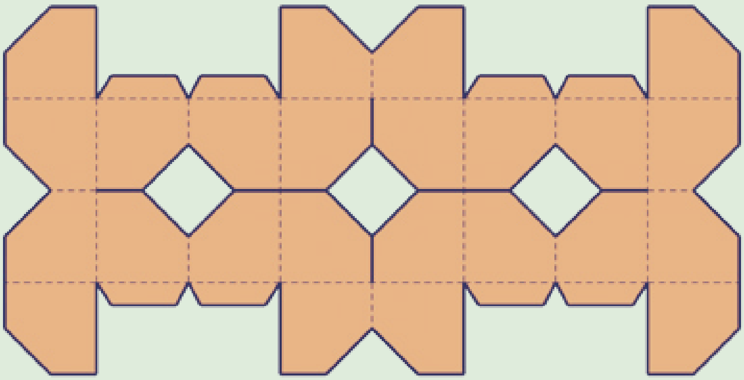

圖 15. 可拼出截角八面體的八個連體 7 面體展開圖

尾聲

2008 年北京奧運會游泳館是二元組合填充空間的一個經典範例。這個有「水立方」美稱的建築用了兩種多面體氣囊來填充完成（圖 16）。兩種多面體以 1:3 的數量來配比。居一份的是 12 面體，居三份的是 14 面體，都不是正多面體。根據計算，它們對於空間填充的效率是很高的：把單位體積空間分割為固定數量的空間所用的表面積最少。

在認識空間填充規律的進程中，自然界還有一種生物甚至超過了人類—蜜蜂創造的蜂巢。蜂巢的結構是半開放的菱形 12 面體，據測算這樣的結構耗費的蜂蠟最省。

本文介紹了多面體填充空間的幾個例子。從面數較少的算起，有鱉臑四面體、正方體、4-8 聯合體、菱形 12 面體、截角正八面體、12-14 聯合體。當然自然界還存在更多的可填充空間的多面體，這就有待讀者去發現研究了。

圖 16. 2008 年北京奧運會游泳館「水立方」即是用了兩種多面體氣囊來填充完成（圖片來源：Wikimedia Commons）

常文武
上海復旦大學數學博士、香港「摺友會」副會長，曾合著有《動手動腦 玩轉數學》等專書