Матвеев Денис Дмитриевич
Прикладная математика и информатика
Вариант 2

Задача 1. Исследуйте систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = 15x + 13y$$
$$\frac{dy}{dt} = 26x + 20y$$

Для этого найдите координаты особой точки, определите тип особой точки. Постройте фазовый и кинетические портреты с помощью программы Simulink. Подберите масштаб так, чтобы было видно тип особой точки! Определите направление движения по траекториям. (3 графика должно быть: x(t), y(t), y(x)).

1. Особые точки:

$$\begin{cases} 0 = 15x + 13y \\ 0 = 26x + 20y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

2. Устойчивость:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & 13 \\ 26 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(15-\lambda)(20-\lambda) - (26 \times 13) = 0$$

$$\lambda^2 - 35\lambda - 38 = 0$$

$$D = 35^2 + 4 \times 38 = 1377 = (9\sqrt{17})^2$$

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{35 \pm 9\sqrt{17}}{2}$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \implies$ **точка (0, 0) - неустойчивое седло.**

3.

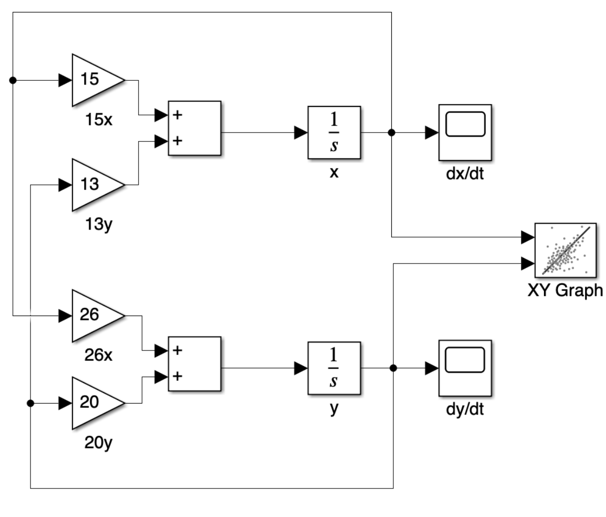

Рис. 1: Схема Simulink

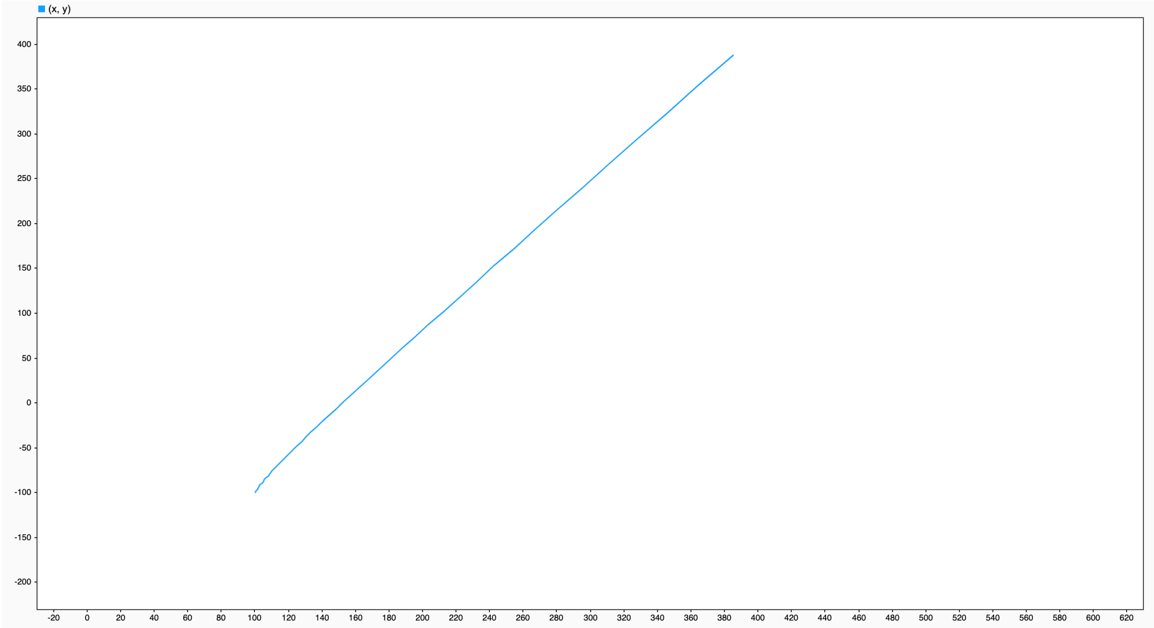

Рис. 2: Фазовый портрет y(x) при x = 100, y = -100

По фазовому портрету видно, как система отдаляется от точки (0, 0), что подтверждает её неустойчивость.

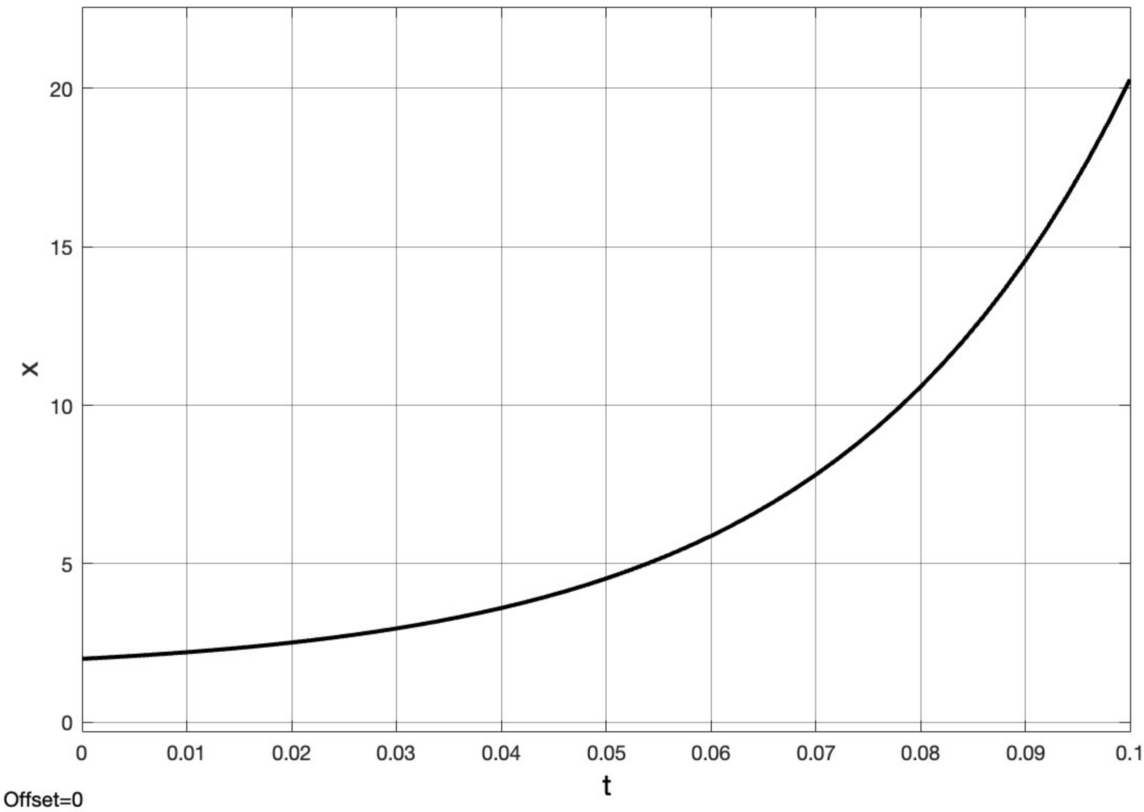

Рис. 3: Кинетический портрет x(t) при x = 2, y = 0.5

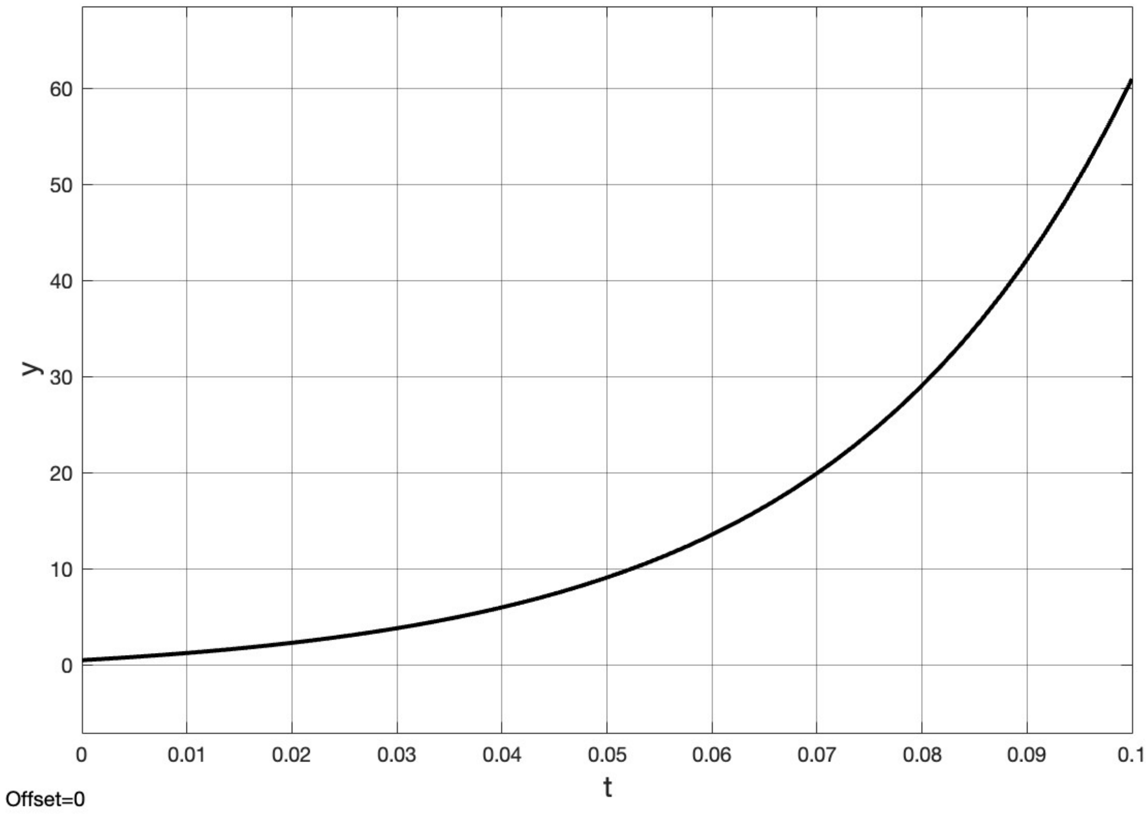

Рис. 4: Кинетический портрет y(t) при x = 2, y = 0.5

Задача 2. Исследуйте нелинейную систему. Найдите особые точки для системы уравнений. Определите тип каждой особой точки. Определите какая/какие из точек обладает/обладают устойчивостью. Постройте фазовый и кинетические портреты исходной системы с помощью программы Simulink.

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2xy - 3x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = 2y - xy - y^2$$

1. Особые точки:

$$\begin{cases} 0 = 3x - 2xy - 3x^2 \\ 0 = 2y - xy - y^2 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Устойчивость:

$$a = \frac{dP}{dx} = 3 - 2y - 6x$$
$$b = \frac{dP}{dy} = -2x$$
$$c = \frac{dQ}{dx} = -y$$
$$d = \frac{dQ}{dy} = 2 - x - 2y$$

Для точки (0,0):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = 2$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \implies$ **точка (0, 0) - неустойчивая (узел).**

Для точки (0,2):

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -2$$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \implies$ **точка (0, 2) - устойчивая (узел).**

Для точки (1,0):

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -3$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \implies$ **точка (1, 0) - неустойчивая (седло).**

Для точки (-1, 3):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-3-\lambda) + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \implies$ **точка (-1, 3) - неустойчивая (седло).**

3.

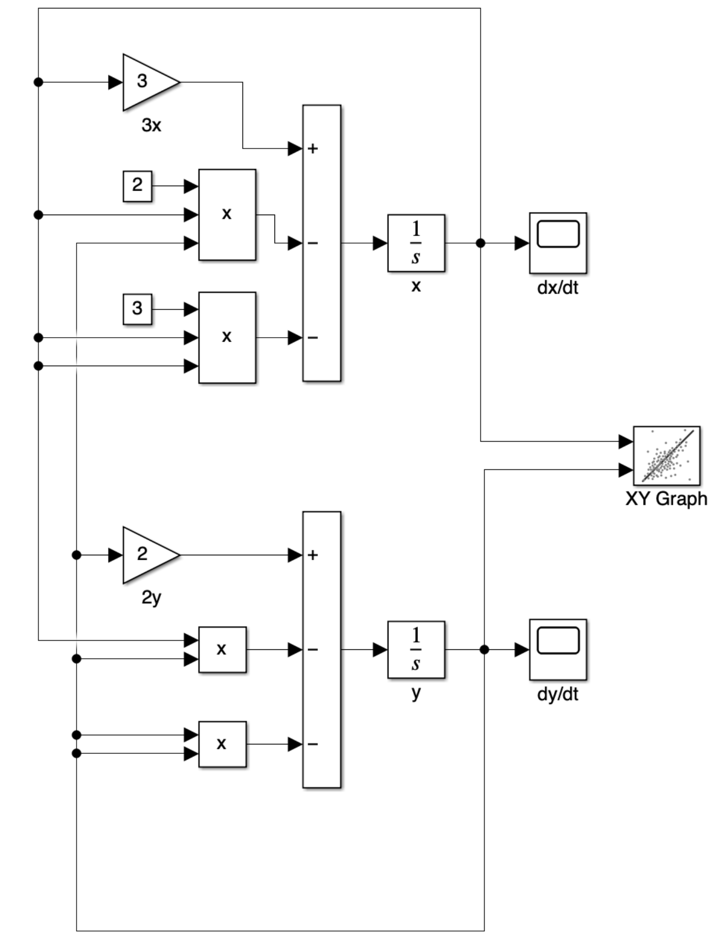

Рис. 5: Схема Simulink

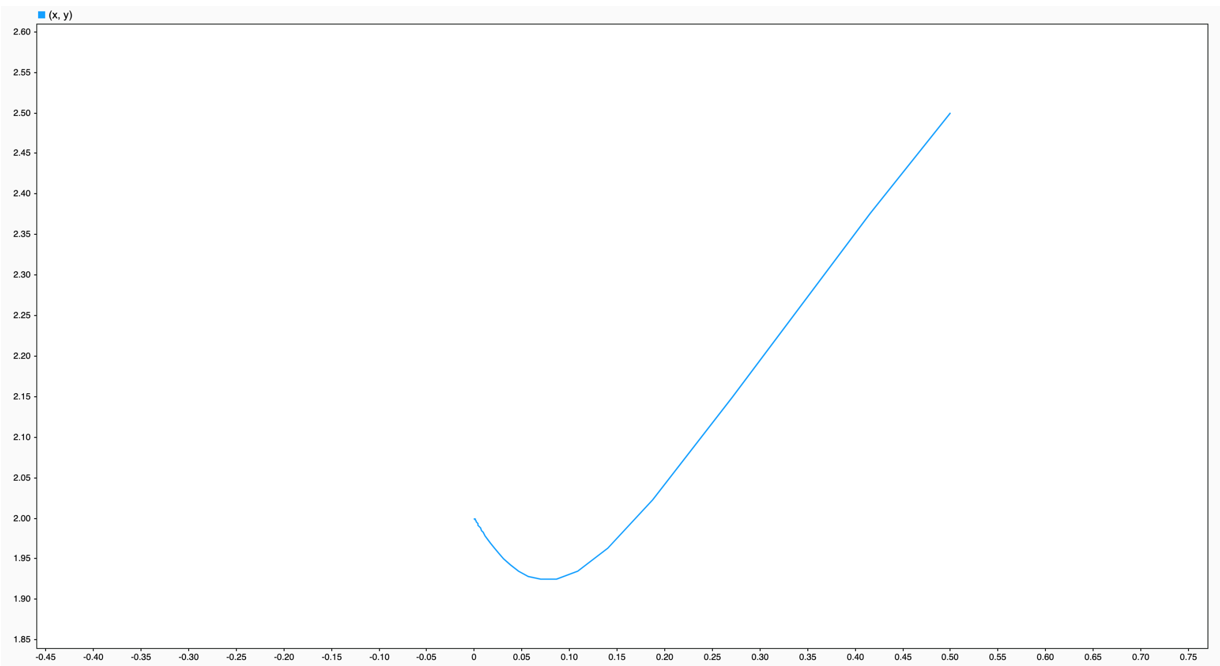

Рис. 6: Фазовый портрет y(x) при x = 0.5, y = 2.5

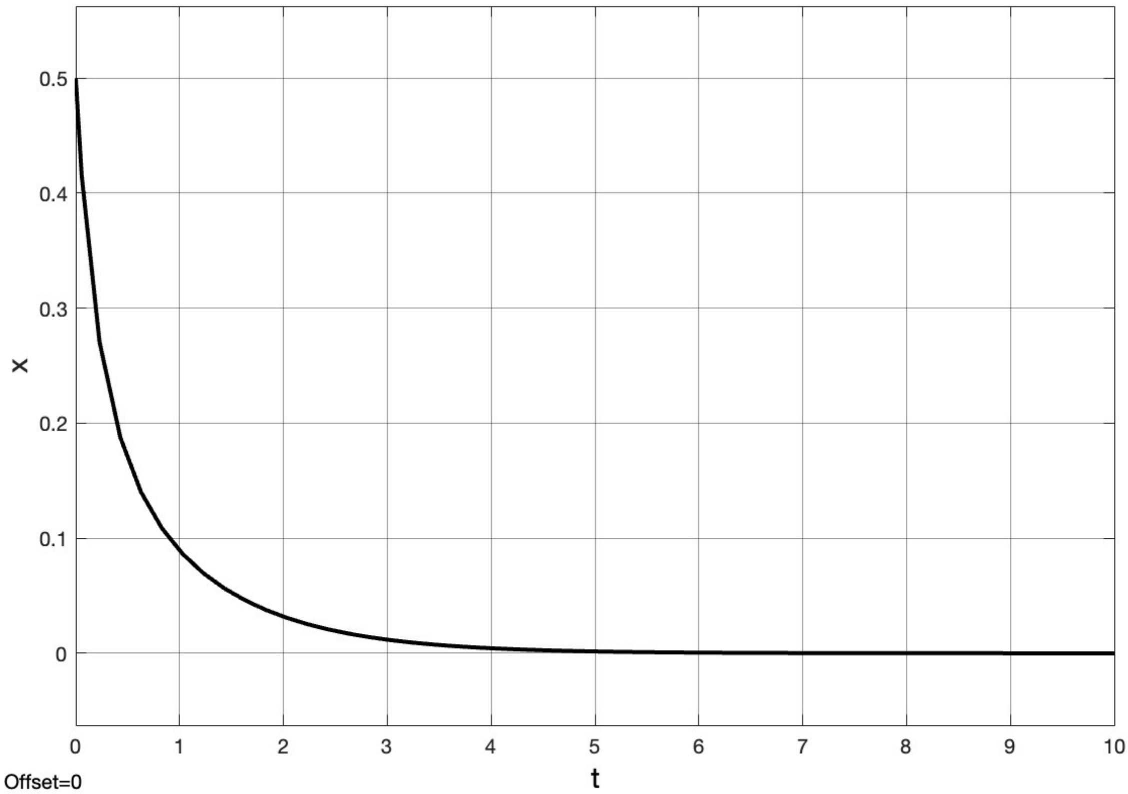

Рис. 7: Кинетический портрет x(t) при x = 0.5, y = 2.5

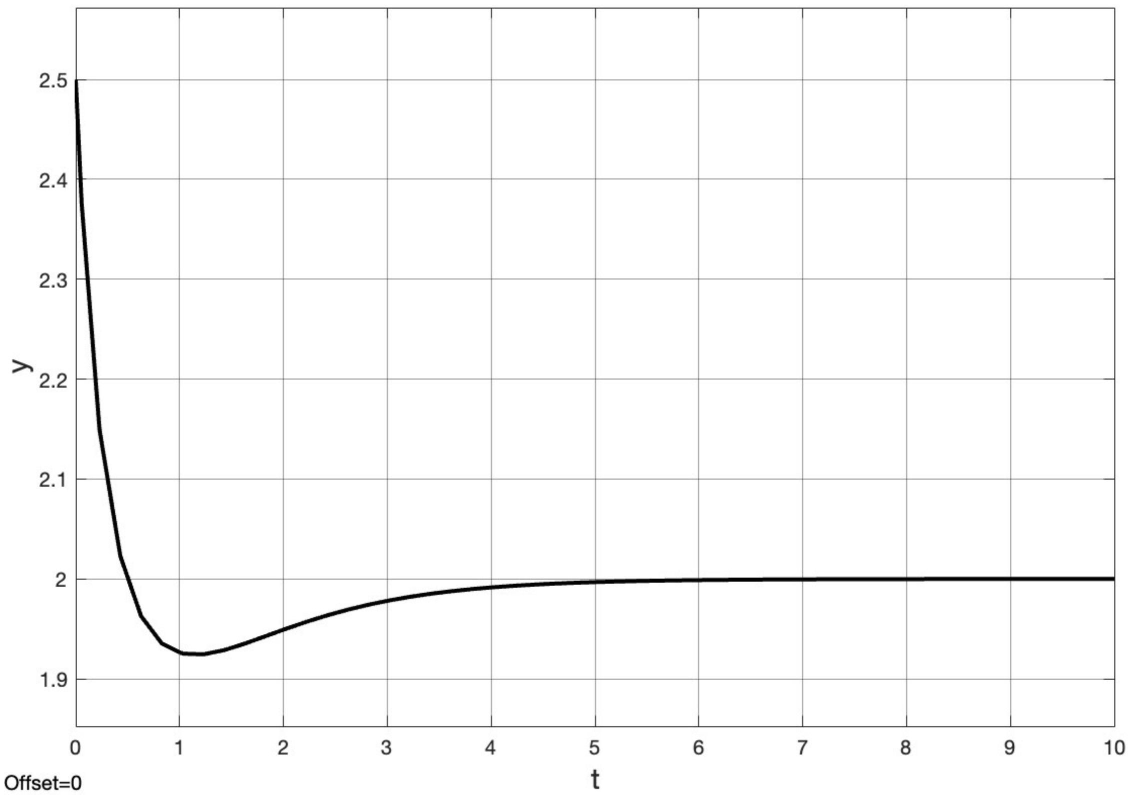

Рис. 8: Кинетический портрет y(t) при x = 0.5, y = 2.5

Из кинетических портретов видно, что x и y стремятся к 0 и 2 соответственно, что свидетельствует об устойчивости точки (0, 2).

Построим еще несколько фазовых портретов в окрестности других точек:

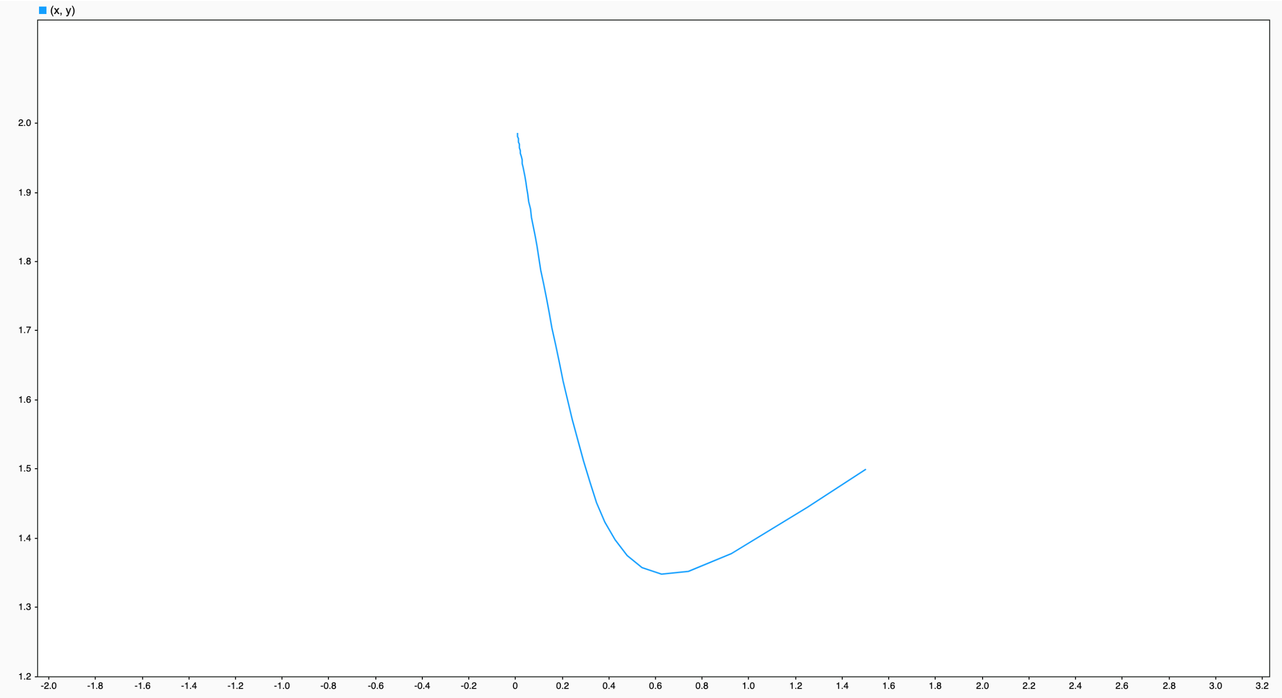

Рис. 9: Фазовый портрет y(x) при x = 1.5, y = 1.5

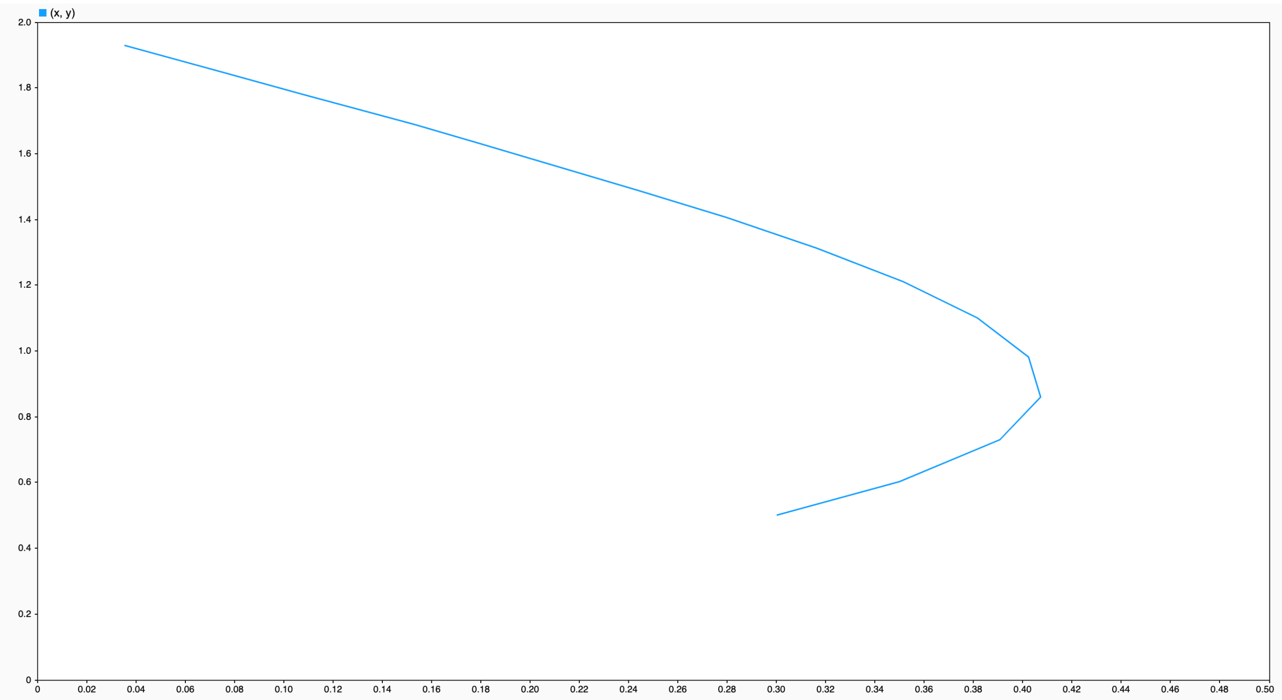

Рис. 10: Фазовый портрет y(x) при x = 0.3, y = 0.5

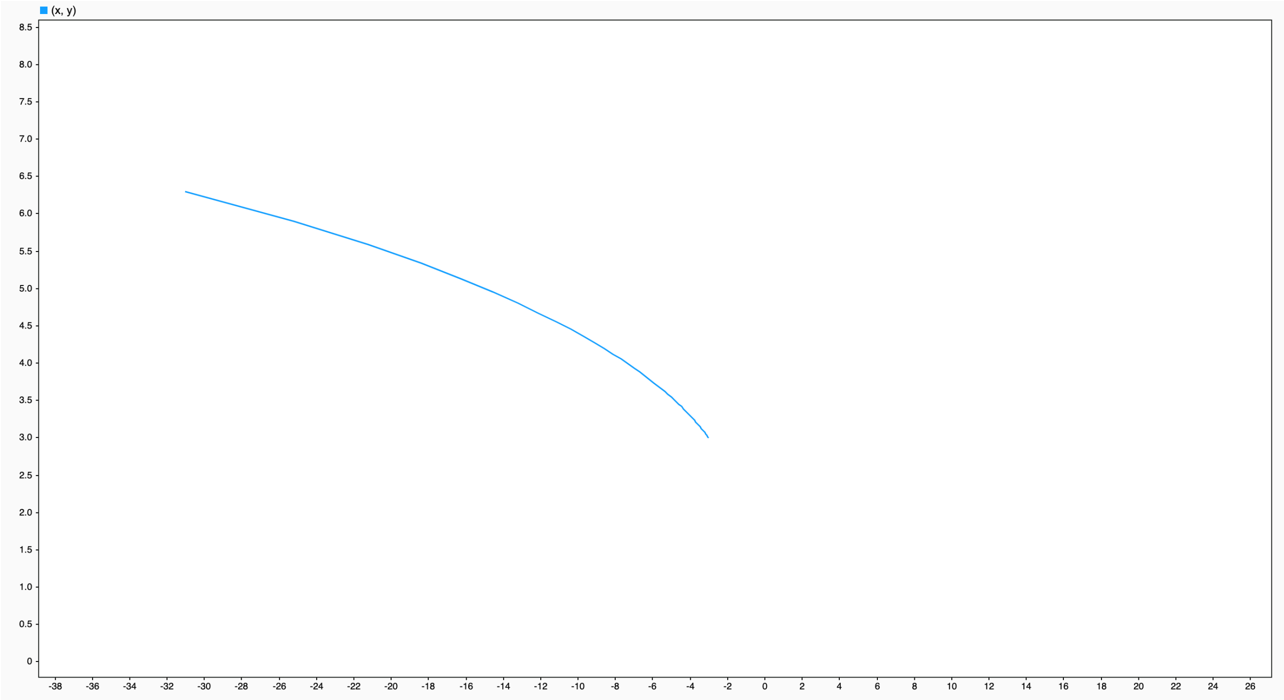

Рис. 11: Фазовый портрет y(x) при x = -2, y = 3

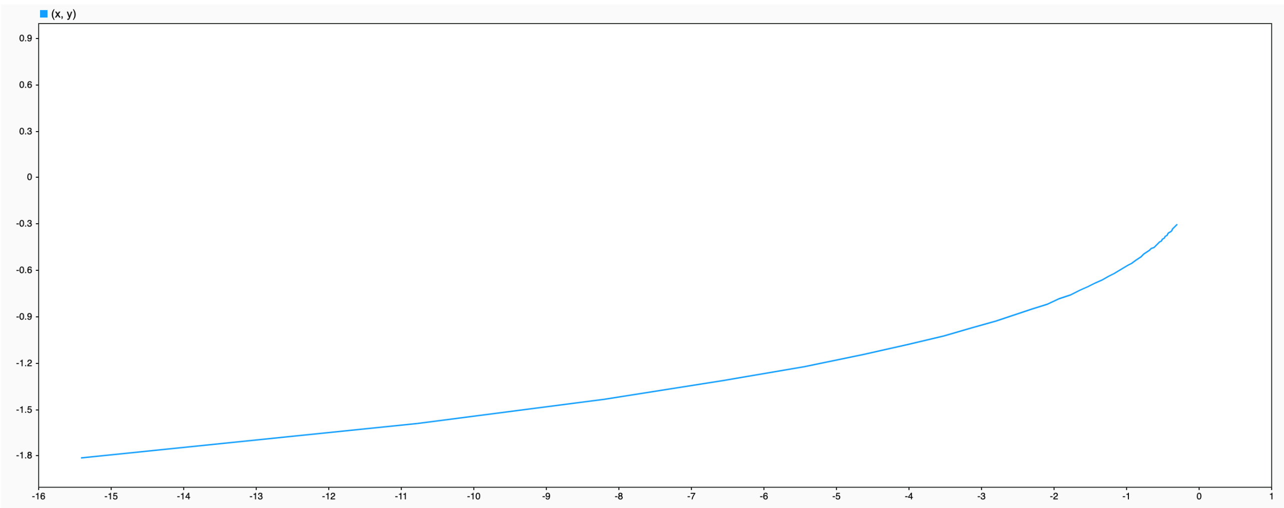

Рис. 12: Фазовый портрет y(x) при x = -0.3, y = -0.3

Задача 3. Составьте математическую модель (2 и более (до 5) дифференциальных уравнений), описывающую динамику численности различных групп населения при распространении инфекционного заболевания среди всей популяции. За основу возьмите SIR-модель. Она делит популяцию на 3 класса: S - восприимчивые (от англ. susceptible), I - инфицированные (от англ. infected), R - невосприимчивые (от англ. removed). Пусть заболевание носит следующий характер: заражение при контакте с заболевшим происходит с очень большой вероятностью. Выздоровевшие особи (человек) не могут заразиться снова. От данного заболевания умирают, но редко. Инфекция типа ветряная оспа. Исходя из собственных обоснований подберите значения параметров модели, примерно соответсвующие реальности. Численность и среднюю продолжительность жизни возьмите для любого города России. Постройте графики динамики численности различных групп населения с течением времени при различных начальных значениях. Проведите исследование: может ли данная инфекция погубить всю численность населения данного города? Может ли данная инфекция перестать существовать среди населения? Уменьшится ли численность населения при занесении дан- ной инфекции в исследуемый "город"?

Для более точного моделирования распространения инфекционных заболеваний типа ветряная оспа, у которой есть некоторый латентный период, когда инфицированный еще не проявляет симптомов, можно расширить модель SIR, добавив латентную группу. Эта модификация превращает её в SEIR-модель, где E (от англ. Exposed) - те, кто находятся в инкубационном периоде.

Составим модель:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbb{S}}{dt} = -\alpha\frac{\mathbb{S}\mathbb{I}}{N} \\ \frac{d\mathbb{E}}{dt} = \alpha\frac{\mathbb{S}\mathbb{I}}{N} - \beta\mathbb{E} \\ \frac{d\mathbb{I}}{dt} = \beta\mathbb{E} - \gamma\mathbb{I} \\ \frac{d\mathbb{R}}{dt} = \gamma\mathbb{I} \end{cases}$$

- N - общая численность населения, $N = \mathbb{S} + \mathbb{E} + \mathbb{I} + \mathbb{R}$.
- $\alpha = 0.5$ - коэффициент скорости передачи инфекции (коэф. заражаемости)
- $\beta = \frac{1}{14}$ - инкубационный период (в среднем 14 дней)
- $\gamma = \frac{1}{14}$ - скорость выздоровления (где 14 - среднее время болезни)

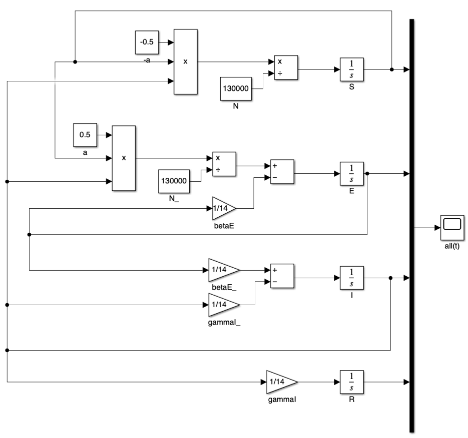

Рис. 13: Схема модели

Пусть N = 130000 (население города Обнинск).

Рассмотрим динамику численности различных групп населения с течением времени при различных начальных значениях:

- S(0) = 129990, E(0) = 0, I(0) = 10:

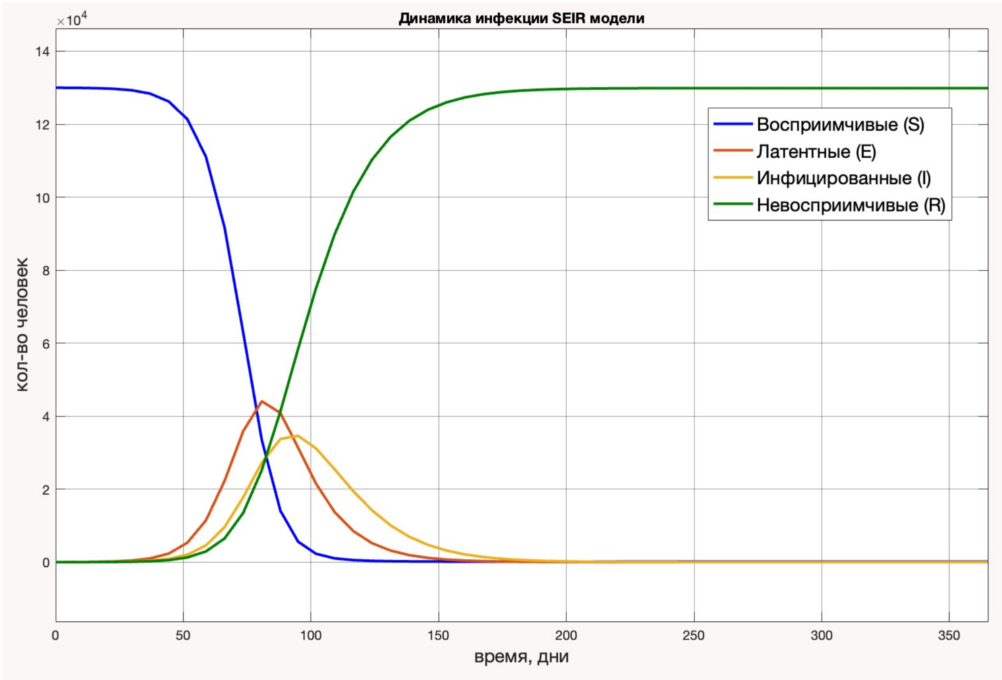

Рис. 14: динамика численности различных групп с течением времени при S(0) = 129990, E(0) = 0, I(0) = 10

- S(0) = 129910, E(0) = 30, I(0) = 60:

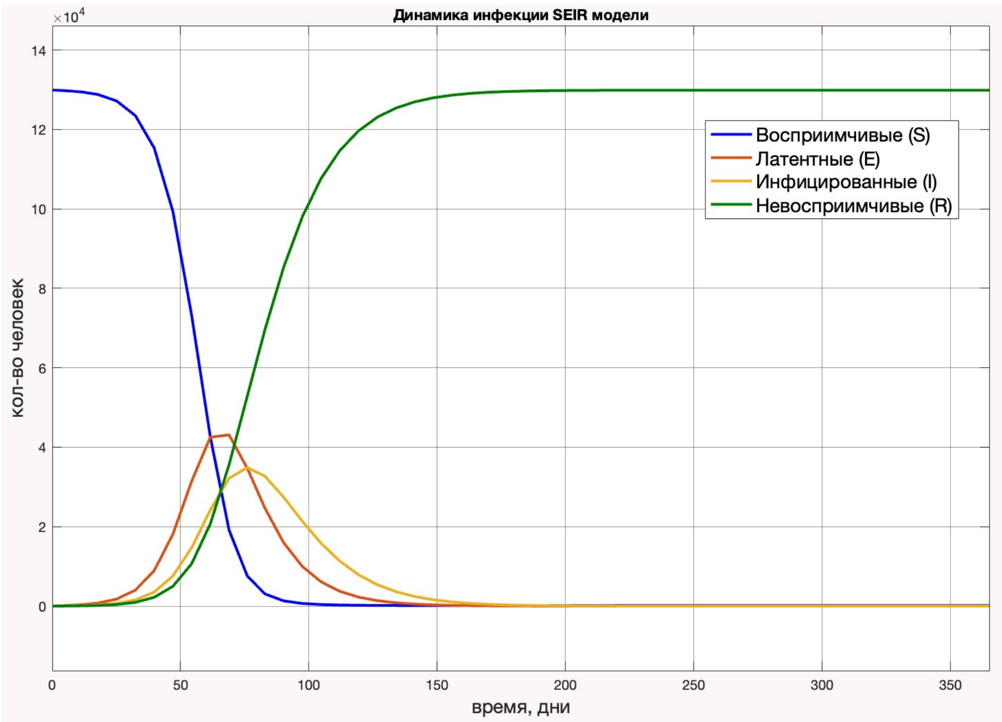

Рис. 15: динамика численности различных групп с течением времени при S(0) = 129910, E(0) = 30, I(0) = 60

- S(0) = 121000, E(0) = 3000, I(0) = 6000:

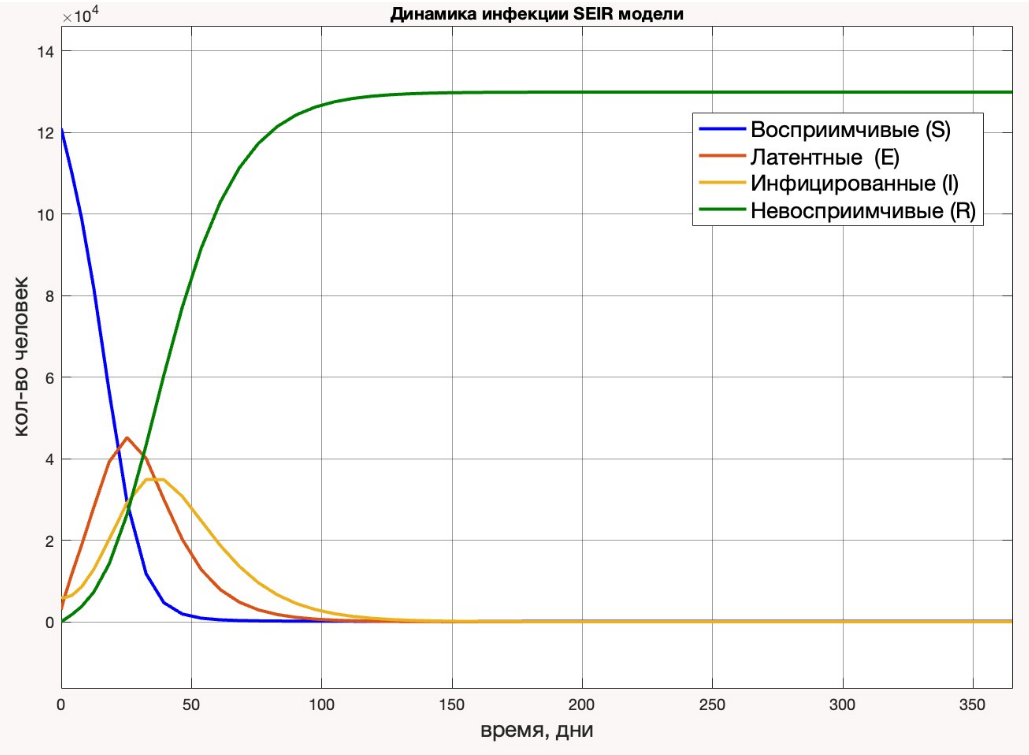

Рис. 16: динамика численности различных групп с течением времени при S(0) = 121000, E(0) = 3000, I(0) = 6000

Динамика распространения инфекции зависит от начального количества латентных и инфицированных. Чем их больше в начале, тем быстрее и интенсивнее распространяется инфекция.

- Может ли данная инфекция погубить всю численность населения данного города?

  Нет, согласно модели, инфекция не приводит к полному уничтожению населения. Смертность ветряной оспы - 1 на 1000000 случаев. Поэтому зараженные либо выздоравливают, либо остаются в группе восприимчивых.

- Может ли данная инфекция перестать существовать среди населения?

  Да, модель показывает, что с течением времени число инфицированных снижается до очень малого уровня, что указывает на возможность исчезновения инфекции из популяции.

- Уменьшится ли численность населения при занесении данной инфекции в исследуемый "город"?

  Численность населения не уменьшается из-за инфекции, поскольку уровень смертности от ветряной оспы очень низок.