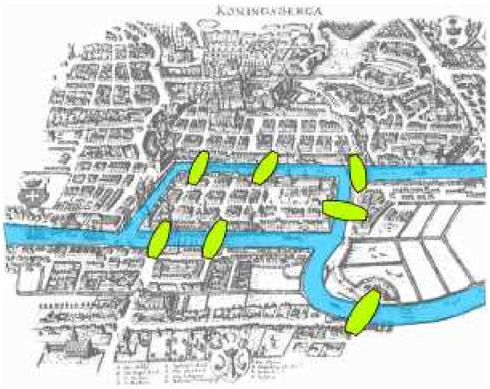
GRAPHES

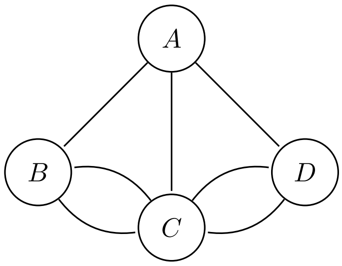
1 Introduction

Origine de la théorie des graphes.
En 1736, Euler s'est demandé si on ne pouvait aller partout dans la ville de Königsberg (Kalinigrad) en n'empruntant qu'une seule fois chaque pont.

De nombreuses applications dans le monde moderne
- circuits électriques
- trafic routier
- trafic aérien : sommets(aéroports), arêtes(vols existants)
- réseaux de communications
- structures de molécules en chimie
- génome en biologie
- relation entre individus en sciences sociales
- gestion des salles pour l'administration

Un promeneur peut-il visiter Königsberg en traversant chaque pont une fois uniquement ?





L' objectif du cours est de comprendre le théorème ci-dessous :

<u>Théorème D'EULER :</u>
Un graphe **NON** orienté G sans sommets isolés, possède une chaîne eulérienne si et seulement si

1. G est connexe.
2. Il a 0 ou 2 sommets de degré impair.

2 Un peu de vocabulaire

<u>Définitions :</u>

On appelle **boucle** une arête (ou arc) dont les extrémités sont identiques.

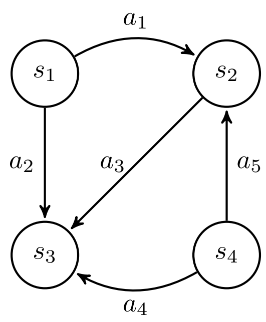
On dira qu'un graphe a des **arêtes doubles** si il a plusieurs arêtes ayant les mêmes extrémités.

2.1 Cas orienté : arc, chemin et circuit

Vocabulaire :

Un **chemin** est dit **simple** s'il ne contient pas deux fois le même arc .
Un chemin est dit **élémentaire** s'il ne contient pas deux arc de même origine ou de même but.
On appelle **circuit** un chemin dont le sommet de départ et celui d'arrivé sont identiques.
Un chemin (ou circuit) **eulérien** est un chemin qui passe une et une seule fois par toutes les arcs du graphe.
Un chemin est **hamiltonien** s'il passe une et une seule fois par tous les sommets.

Exemple :



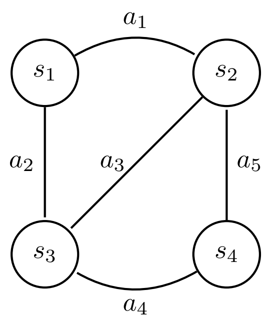
1. Trouver un circuit simple.
2. Trouver un chemin eulérien mais non hamiltonien.

2.2 Cas non orienté : arête, chaîne et cycle

Vocabulaire :

Une **chaîne** est dit **simple** si elle ne contient pas deux fois la même arête .
Une chaîne est dite **élémentaire** si elle ne contient pas deux arêtes de même origine ou de même but.
On appelle **cycle** une chaîne dont le sommet de départ et celui d'arrivé sont identiques.
Une chaîne (ou cycle) **eulérienne** est une chaîne qui passe une et une seule fois par toutes les arêtes du graphe.
Une chaîne est Hamiltonien si elle passe une et une seule fois par tous les sommets.

Exemple :



1. Trouver un cycle hamiltonien et non eulérien.
2. Trouver un cycle eulérien et non hamiltonien.

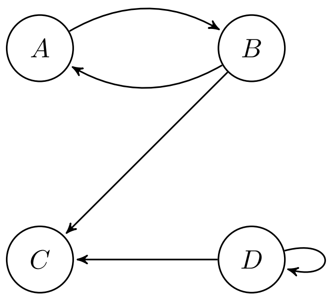
De préférence on utilise le vocabulaire suivant :

Orienté	**NON orienté**
arc	arête
chemin	chaîne
circuit	cycle

3 Représentation mathématique d'un graphe

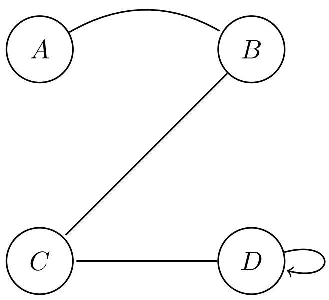
<u>**Définition :**</u> Un graphe orienté (S, A) est la donnée :
— D'un ensemble S dont les éléments sont les sommets du graphe.
— D'un ensemble A dont les éléments , les arcs (arêtes) du graphe sont des couples de S.

Représentation mathématique :
$S = \{A, B, C, D\}$ et $A = \{(A, B), (B, A), (B, C), (C, D), (D, D)\}$



<u>**Définition :**</u> Un graphe orienté (S, A) est la donnée :
— D'un ensemble S dont les éléments sont les sommets(noeuds) du graphe.
— D'un ensemble A dont les éléments , les arêtes (arc) du graphe sont des paires de S.

Représentation mathématique :
$S = \{A, B, C, D\}$ et $A = \{\{A, B\}, \{B, A\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, D\}\}$

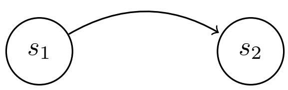


4 Degré

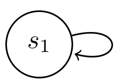
4.1 Cas orienté

Soit $G = (A, S)$ un graphe orienté :

Soit (s_1, s_2) un arc de G
On dit que s_2 est un **successeur** de s_1.
On dit que s_1 est un **prédécesseur** de s_2.



Si $s_1 = s_2$, on dit que l'arc (aretes) est une **boucle**.

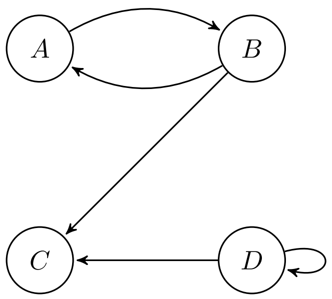


<u>**Définition :**</u>
On note $G(s) = \{t\ S|(s, t) \in A\}$ l'ensemble des successeurs de s.
On note $G_{-1}(s) = \{r\ S|(r, s) \in A\}$ l'ensemble des prédécesseurs de s.

$deg_+ = |G(s)|$ est le degré sortant du sommet s.
$deg_- = |G_{-1}(s)|$ est le degré entrant du sommet s.

$$\boxed{\text{Le degré du sommet } s \text{ est : } deg(s) = deg_+ + deg_-}$$

Exemple :



$G(A) =$	$G_{-1}(A) =$	$deg(A) =$
$G(B) =$	$G_{-1}(B) =$	$deg(B) =$
$G(C) =$	$G_{-1}(C) =$	$deg(C) =$
$G(D) =$	$G_{-1}(D) =$	$deg(D) =$

4.2 Cas non orienté

Le degré du sommet s est : $deg(s) =$ nombre d'extrémités d'arc (d'arêtes) reliée(s) au sommet s.

4.3 Proposition

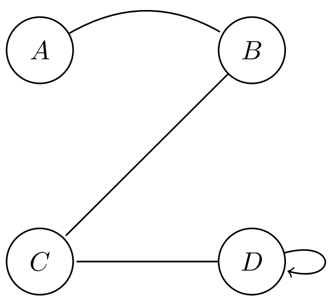
La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe non orienté est égale à deux fois le nombre de ses arêtes.

5 Représentation matricielle

5.1 Matrice d'incidence (cas non orienté)

Définition :
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. La **matrice d'incidence** de G est la matrice J dont les coefficients sont :

$$J_{sa} = \begin{cases} 1 \text{ si } s \in A. \text{ (2 si c'est une boucle)} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



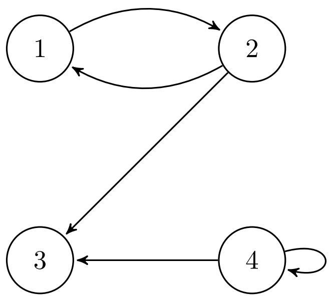
$$\begin{array}{c c} \text{arete / } \textit{sommmet} & \begin{array}{cccc} \text{AB} & \text{BC} & \text{CD} & \text{DD} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

5.2 Matrice d'adjacence

Définition :
Soit $G = (S, A)$ un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n. La **matrice d'adjacence** de G est la matrice M dont les coefficients sont :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i, j) \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

<u>Exemple :</u>



$$\begin{array}{c|c} i \backslash j & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

5.3 Fermeture transitive

<u>Définition :</u> On appelle fermeture transitive d'un graphe (S, A) le graphe (S, A^f) tel que :

$$A^f = \{(s1, s2) \in S \times S | \text{ il existe un chemin (une chaine) de } s_i \text{ à } s_j\}$$

Méthode pour obtenir la fermeture transitive :

M (matrice d'adjacence du graphe) : Chemin de longueur 1 entre deux sommets
M^2 : Chemin de longueur 2 entre deux sommets.
M^3 : Chemin de longueur 3 entre deux sommets.

$M^f = M \vee M^2 \vee M^3 \vee \ldots \vee M^n$ où n est le nombre de n ?uds.(matrice d'adjacence de la fermeture transitive)

$$M^f(i, j) = 0 \Longleftrightarrow \text{il n'y a pas de chemin reliant } i \text{ à } j$$

Exemple :

Calcul de M^2 :

En Python :

```
import numpy as np
M1=np.matrix([[0,1,0,0], [1,0,1,0],[0,0,0,0],[0,0,1,1]])
M2=np.dot(M1,M1)
print M2
```

Interprétation de $M^2 =$:

$$\begin{array}{cc} i \backslash j & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

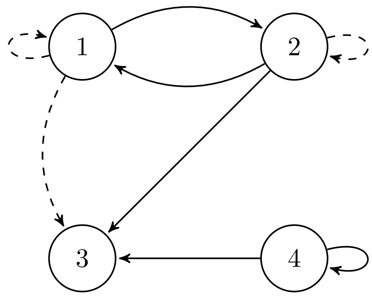
1 chemin de longueur 2 qui relie le sommet A au sommet A.
1 chemin de longueur 2 qui relie le sommet A au sommet B.
1 chemin de longueur 2 qui relie le sommet B au sommet B.
1 chemin de longueur 2 qui relie le sommet D au sommet C.
1 chemin de longueur 2 qui relie le sommet D au sommet D.

Interprétation de $M^2 =$:

Matr. d'adj de la fermeture transitive :
$M^f = M \vee M^2 \vee M^3 \vee M^4 =$

$$\begin{array}{cc} i \backslash j & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Graphe de la fermeture transitive :



6 Connexité

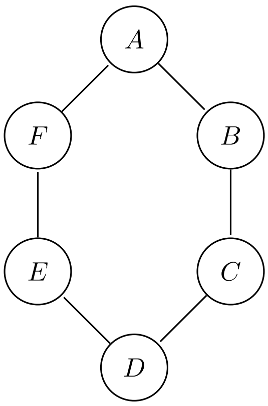
Définition : Un graphe G non orienté est **connexe** si pour tout couple de sommet (s_1, s_2) il existe un chemin allant de s_1 à s_2.

Définition : Un graphe G orienté est **fortement connexe** si pour tout couple de sommet (s_1, s_2) il existe un chemin allant de s_1 à s_2.

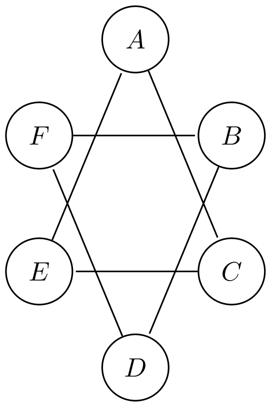
Autrement dit : La matrice d'adjacence de la fermeture transitive de G n'a aucun coefficient nul.

Exemple :

CONNEXE



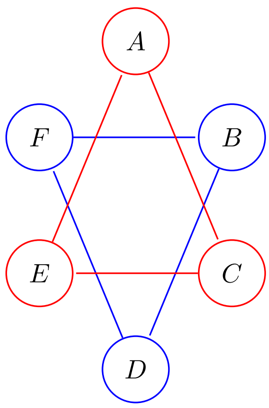
NON CONNEXE



Remarques :

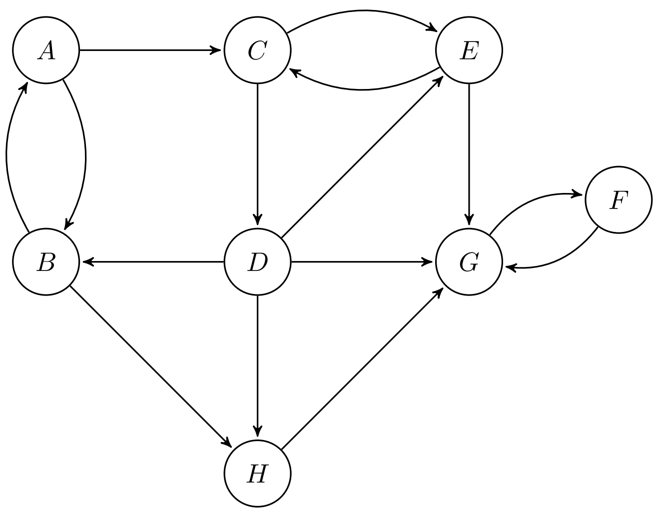
Un graphe NON connexe admet au moins deux composantes connexes :

Définition :
La **composante connexe** d'un sommet s d'un graphe G est égale à la réunion de s avec l'ensemble des sommets s' de G tels qu'il existe une chaîne joignant s à s'.



Exemple :

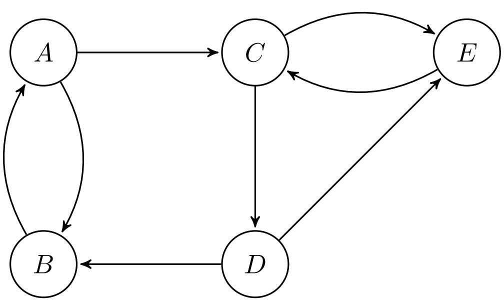
Trouver trois sous graphes fortement connexes.

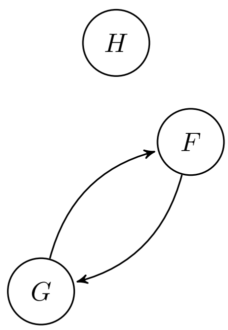


Vocabulaire :

On obtient un **graphe partiel** d'un graphe G en lui retirant des arêtes, et on obtient un **sous-graphe** de G en lui retirant des sommets, ainsi que toutes les arêtes dont ces sommets sont des extrémités.

Voici les sous-graphes fortement connexes :





7 Théorème d'Euler

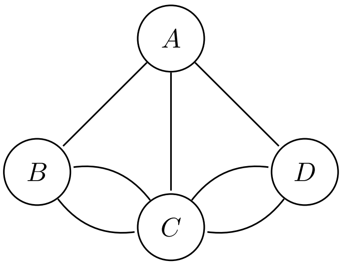
7.1 Non orienté

THEOREME :
Un graphe **NON** orienté G sans sommets isolés, possède une chaîné eulérienne si et seulement si

1. G est connexe.
2. Il a 0 ou 2 sommets de degré impair.

Remarque :
Dans le cas où il n'y a aucun sommet de degré impair, cette chaîne eulérienne est un cycle.
Dans le cas où il y en a deux, ce sont les extrémités de la chaîne.

Exemple (Réponse au problème) :



Deg(A)=

Deg(B)=

Deg(C)=

Deg(D)=

Conclusion :

7.2 Orienté

THEOREME (cas circuit) :
Un graphe orienté admet un circuit eulérien si et seulement si il est connexe et que pour tout sommet :

le degré entrant est égale au degré sortant.

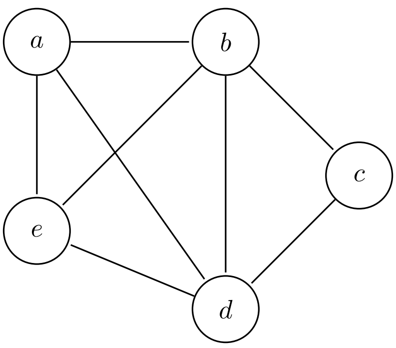
THEOREME (cas chemin) :
Un grahe orienté admet un chemin eulérien si et seulement si il est connexe et que pour tout sommet le degré entrant est égale au degré sortant sauf les deux sommets source s et destination d qui sont tels que :

$$d_-(s) = d_+(s) - 1$$

$$d_-(d) = d_+(d) + 1$$

Exemple :

Dessiner un graphe avec une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien)



$\boxed{\text{BILAN}}$

L'exercice ci-dessous permet de vous tester sur la connaissance du vocabulaire et sur la maîtrise des quelques techniques.

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté tel que :
— $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
— $A = \{(x, y) \in S \times S | x \text{ divise } y\}$

1. Degré de chaque sommet.
2. Matrice d'incidence.
3. Matrice d'adjacence.
4. Fermeture transitive.
5. G est -il connexe ? si non, donner les composantes connexes.
6. G possède t-il une composante connexe qui admet une chaîne eulérienne ?
7. G possède t-il une composante connexe qui admet une cycle eulérien ?