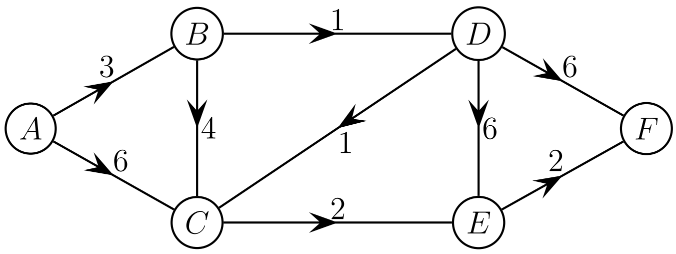
1 Flots dans les réseaux de transport

1.1 Vocabulaire

Les flots sont très utilisés dans la gestion du trafic routier et en réseau.

Définition 1 *Un* ***réseau de transport*** *est un graphe orienté et pondéré pour lequel :*
- *Les pondérations (appelées* ***capacités*** *de l'arc) sont strictement positives.*
- *Il existe deux sommets particuliers : une source et un puits.*
- *le graphe non orienté induit est connexe.*

Exemple 1 *Le graphe suivant est un réseau de transport :*



Remarque 1 *En informatique, un réseau internet est composé de câbles d'une certaine capacité en terme de bande passante. Il faut faire la différence entre les capacités d'un réseau et la quantité réelle d'informations qui peut traverser le réseau.*

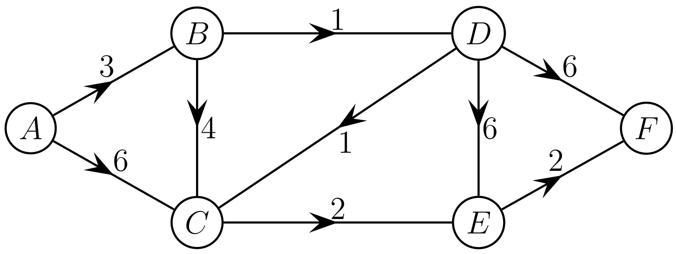
Définition 2 *Soit* $G = (S,\ A,\ C)$ *un réseau de transport. On appelle* ***flot pour le réseau de transport*** G *une application*

$$\varphi : A \to \mathbb{N}$$

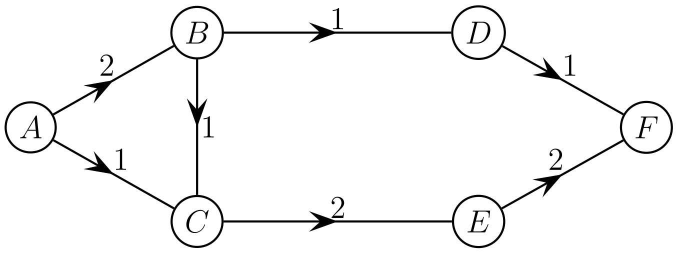
tel que :
- $\forall s \in S - \{source\ ;\ puit\}, \sum_{a\in\Gamma^{+}(s)} \varphi(a) = \sum_{a\in\Gamma^{-}(s)} \varphi(a)$.
  où $\Gamma^{+}(s)$ *est l'ensemble des arêtes sortantes de* s *et* $\Gamma^{-}(s)$ *est l'ensemble des arêtes entrantes de* s.
- $\forall a \in A,\ \varphi(a) \leq C(a)$.

Remarque 2 *Pour un flot donné,* $deg\{source\} = deg\{puit\}$ *cette valeur est appelée* ***valeur du flot*** *noté* $|\varphi|$.

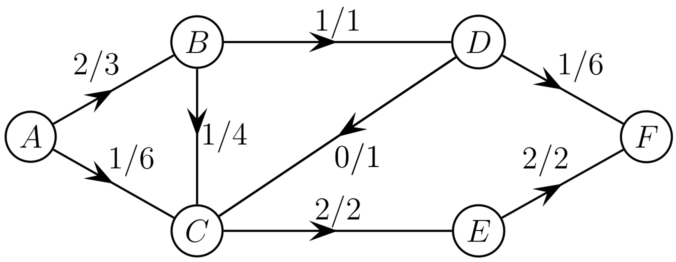
Exemple 2 *A partir du réseau de transport de l'exemple précédant,*



on peut associer le flot suivant :

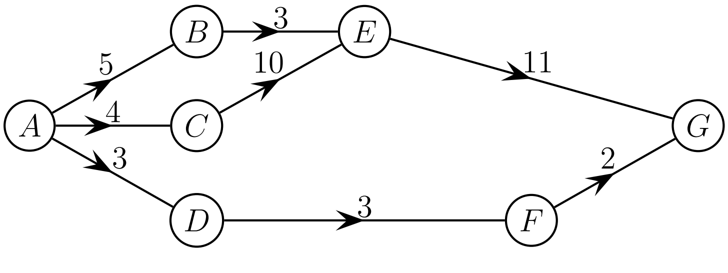


Pour d'avantage de lisibilité, la situation est représenté par :



La valeur du flot $|\varphi| = 3$.

Exercice 1 *1. Le graphe orienté ci-dessous est-il un réseau de transport ?*

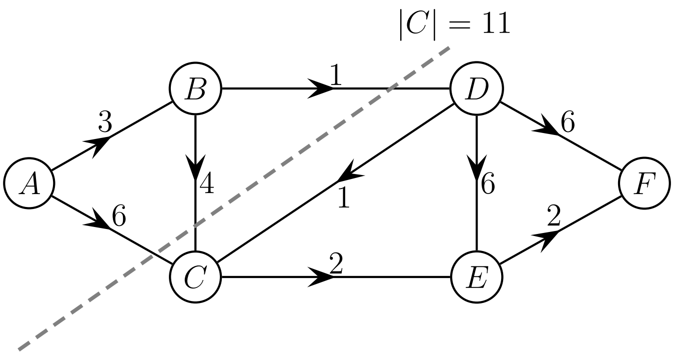


2. Existe t-il un flot φ *associé au graphe G tel que* $|\varphi| = 9$ *?*

1.2 Recherche du flot maximum

Définition 3 *Une coupe sur un réseau de transport est la donnée de deux ensembles* $(S; P)$ *disjoints (intersection vide) l'un contenant la source, l'autre contenant le puits.*
La valeur d'une coupe est la somme des capacités des arêtes qui joignent un sommet de S *à un sommet de* P*. Elle est noté* $|C|$*.*

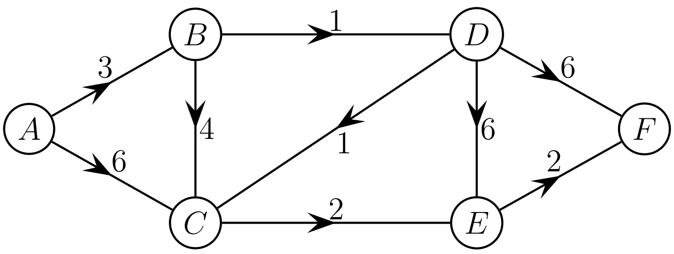
Exemple 3 *La coupe* $C = \{(A, B); (C, D, E, F)\}$ *peut être représentée de la manière suivante :*



La valeur de la coupe est $|C| = 11$.

Théorème 1
Dans un réseau de transport la valeur d'un flot est inférieur à la valeur d'une coupe.
Un flot est maximum si et seulement si sa valeur est égale à la valeur d'une coupe minimale.

Exemple 4 *En reprenant l'exemple précédent, on avait trouvé un flot égale à 3. Trouver une coupe égale à 3. :*

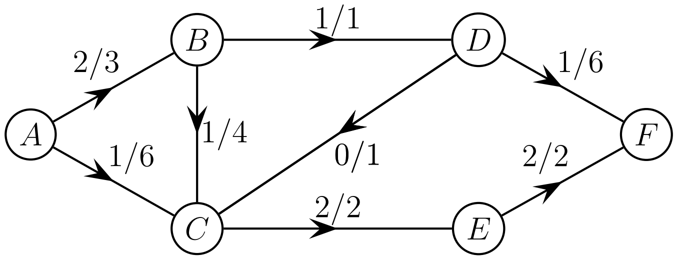


Conclusion : Nous avons un flot et une coupe de même valeur. On peut conclure qu'il s'agit d'un flot maximum.

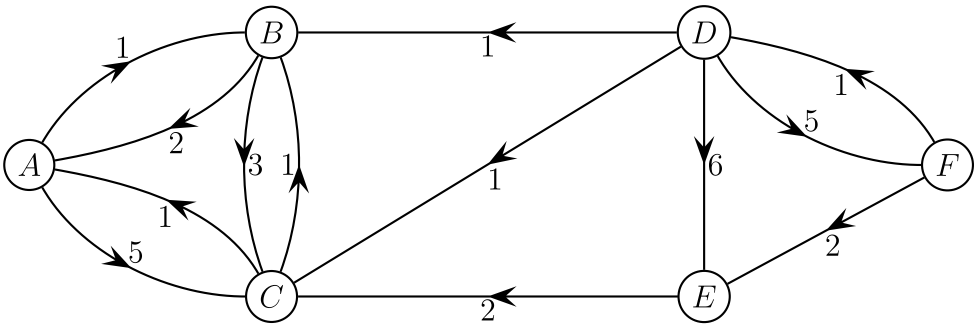
1.3 Le graphe d'écart

Pour augmenter la valeur du flot et pour montrer que le flot est maximum, on peut utiliser un graphe d'écart :

Reprenons le flot :



Le graphe d'écart est :

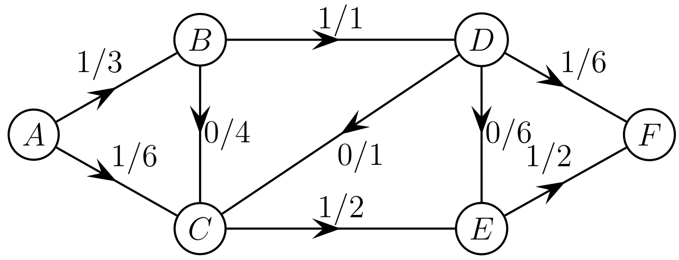


Autrement dit, entre chaque sommet, le graphe d'écart donne la possibilité d'augmentation ou de diminution du flot. Par exemple entre A et B, le flot peut être augmenté de 1 et diminué de 2. Les arêtes de poids nuls ne sont pas représentées.

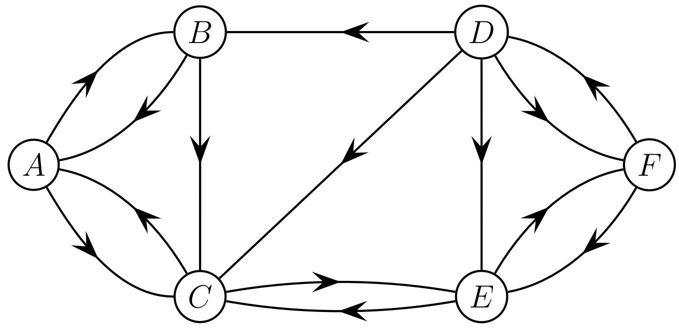
Proposition 1 *Dans un réseau de transport, tout flot peut être augmenté de la valeur du minimum du poids des arêtes d'un chemin reliant la source au puits.*

Dans le graphe d'écart précédent il n'y a pas de chemin qui va de A à F. Nous ne pouvons donc pas augmenté le flot. Il est maximum.

En revanche considérons le flot suivant :



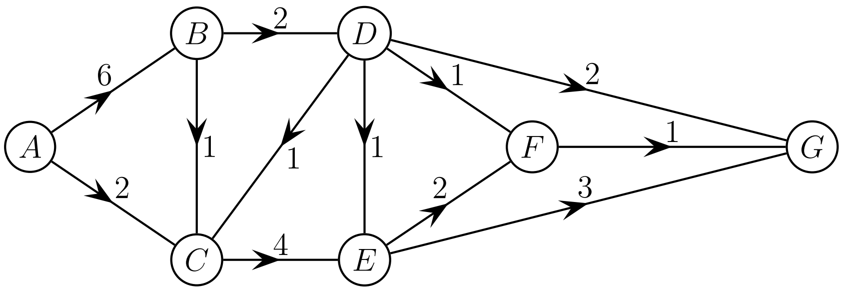
Compléter le graphe d'écart associé :



Le chemin (A, B, C, E, F) va de A à F, le poids minimum des arêtes du chemin est 1 donc nous pouvons augmenter de 1 le flot sur toute les arêtes de ce trajet (On parle de **flot d'augmentation**).

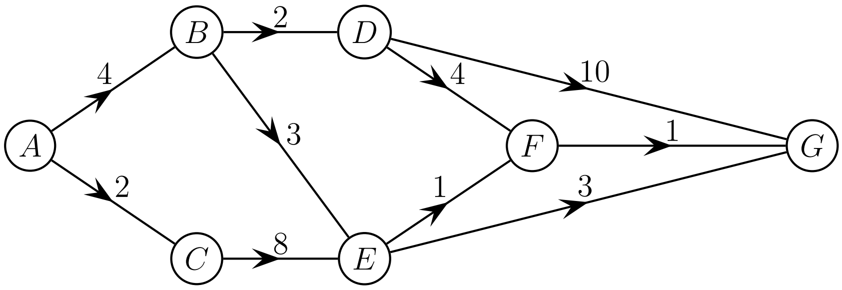
Remarque 3 *Les plus curieux(ses) iront se documenter sur l'algorithme de Ford-Fulkerson qui permet de déterminer un flot maximum de manière algorithmique.*

Exercice 2 *Considérons le réseau de transport de source A et de puits G.*



1. *Trouver un flot maximum pour ce réseau. Nous montrons que le flot est maximum en trouvant une coupe minimum.*
2. *Construire le graphe d'écart pour le flot maximum et vérifier qu'il n'existe pas de chemin allant de A à G.*

Exercice 3 *Considérons le réseau de transport de source A et de puits G.*



1. *Trouver un flot maximum pour ce réseau. Nous montrons que le flot est maximum en trouvant une coupe minimum.*
2. *Construire le graphe d'écart pour le flot maximum et vérifier qu'il n'existe pas de chemin allant de A à G.*