



Piramide de
Montmartre

Le système référence de coordonnées de Paris, levé géométriquement par le citoyen Verniquet

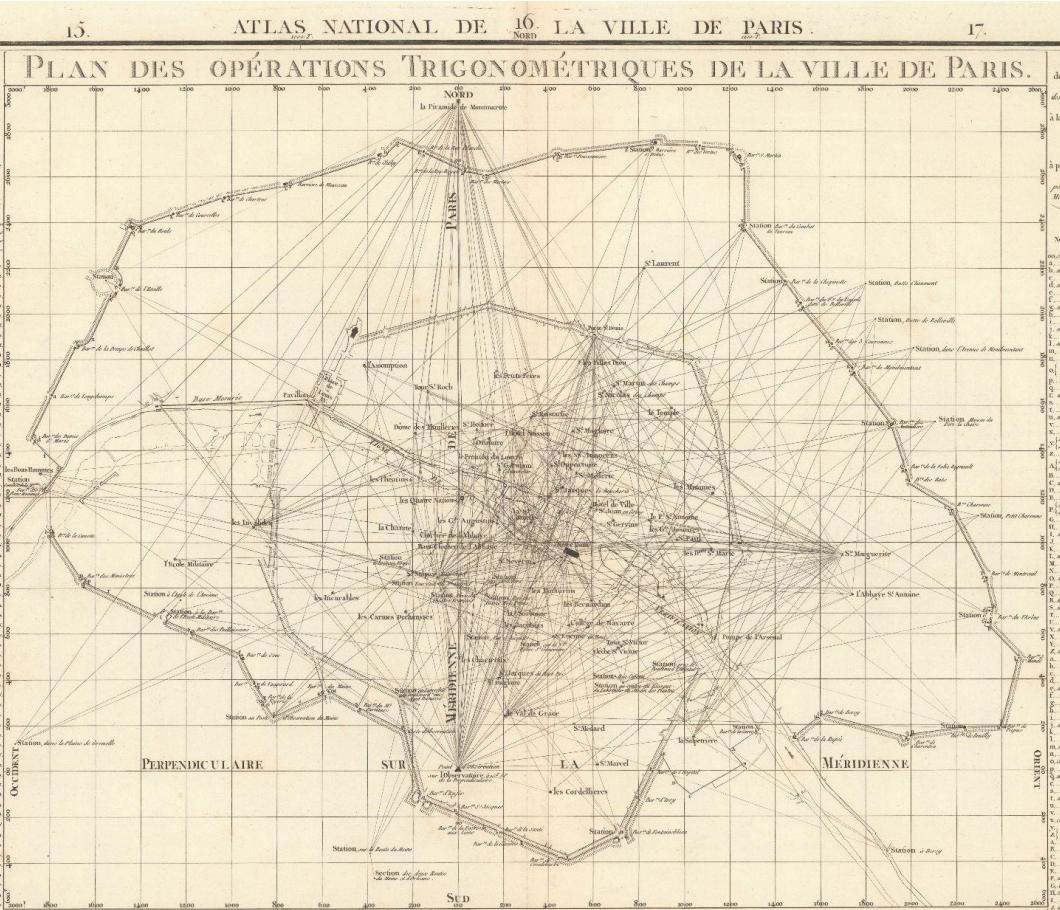
Nathalie Abadie, Stéphane Baciocchi, Pascal Cristofoli, Julien Chadeyron, Bertrand Duménieu, Julien Perret, Yann Ménéroux

Séance n°1 du séminaire BnF/SoDUCo, 11 avril 2022

Introduction

Plan des opérations trigonométriques de la ville de Paris, feuille n°70 de l'atlas gravé, signée par A.J. Mathieu.

Une représentation graphique de l'**armature géométrique** du plan : des objets géographiques mesurés et calculés pour produire **une vue fidèle**, “du dessus”, de la ville.



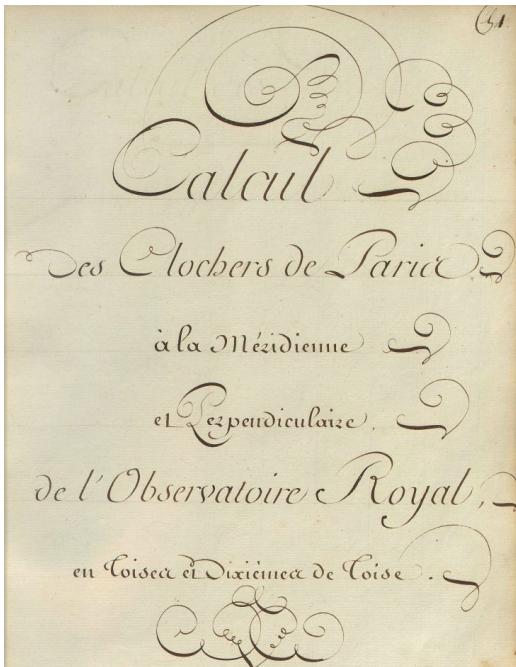
Dessinée sur Ce Cuivre et gravée par A, J, Mathieu.



L'atlas des opérations trigonométriques

[*Atlas des opérations trigonométrique pour la Ville de Paris*] par Edme Verniquet et al.

Arch. nat. MC/RS//687 (ex MC/ET/LVIII/648/A), s.d. [1793-179.?], 516 pp., déposé chez le notaire en 1810.



Pages 51 & 186

« Toutes ces opérations trigonométriques et les calculs des triangles qui assurent la position de tous les points, sont contenus dans un Volume in-folio, ainsi que les opérations qui ont servi à les vérifier.

Toutes ces opérations ont été vérifiées, et portent le caractère de la plus grande exactitude, par les Cottes et autres indications qui en démontrent la justesse. »

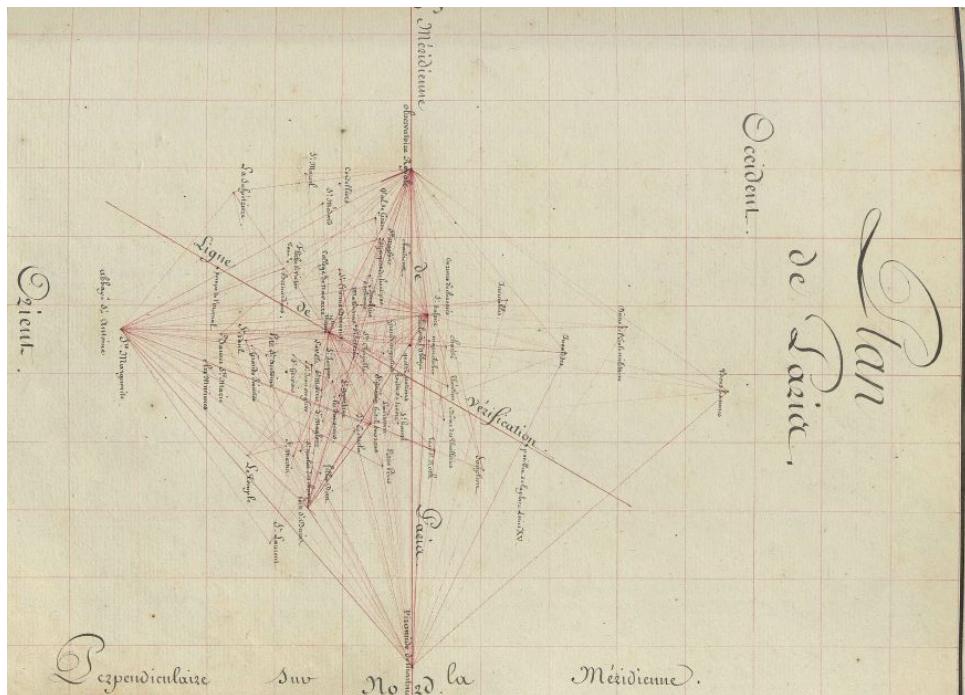
Plan de Paris. Exposé des opérations topographiques qui ont servi à ce plan; Et de son utilité pour les grands intérêts de la République. AN F/17/1052. An II.



La mise au net des carnets de calcul pour la feuille n°70

Plan du mémoire

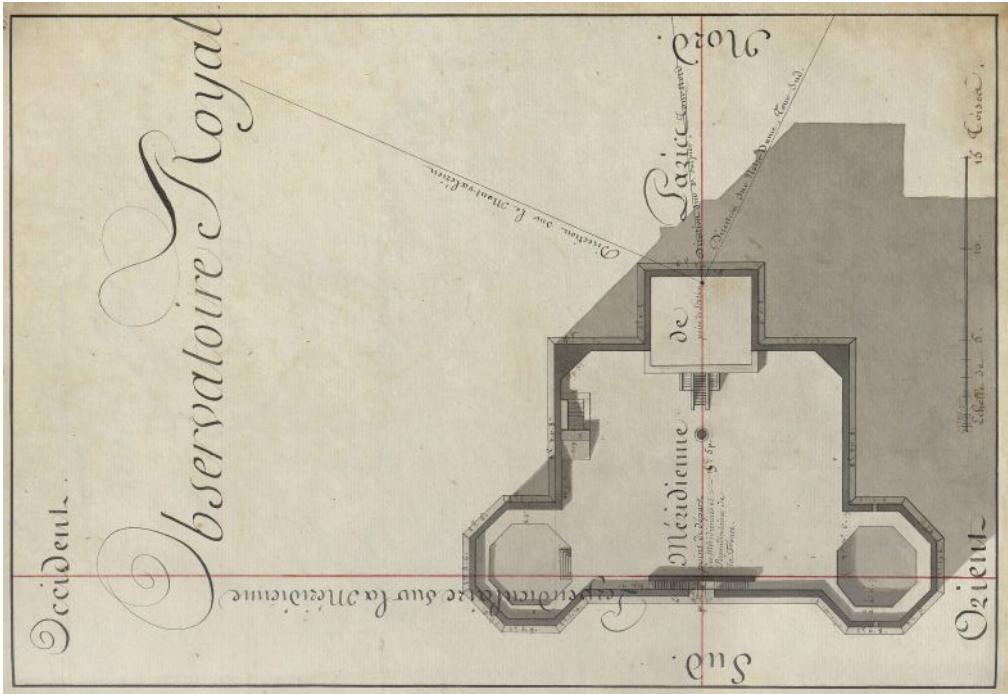
- 1) Plans des stations
 - 2) Observations sur les clochers de Paris
 - 3) Calcul des Observations sur Paris à la Méridienne et Perpendiculaire en toises et dixièmes de toises.
 - 4) Calcul des Nouveaux Boulevards A la Méridienne et Perpendiculaire en Toises et Dixièmes de Toises.
 - 5) Calcul des Anciens Boulevards à la Méridienne et Perpendiculaire
 - 6) Calcul des bases de la rivière depuis la place Louis XV jusqu'à l'Arsenal



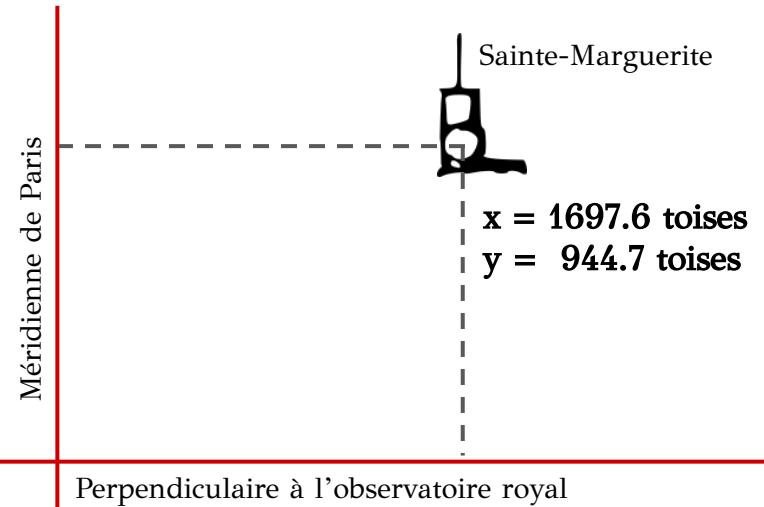
Plan de Paris, p.123, contenant les triangles de 1er et 2e ordre, avec les positions rapportées de tous les monuments mesurés de Paris



Le recueil des calculs de positionnement des monuments de Paris



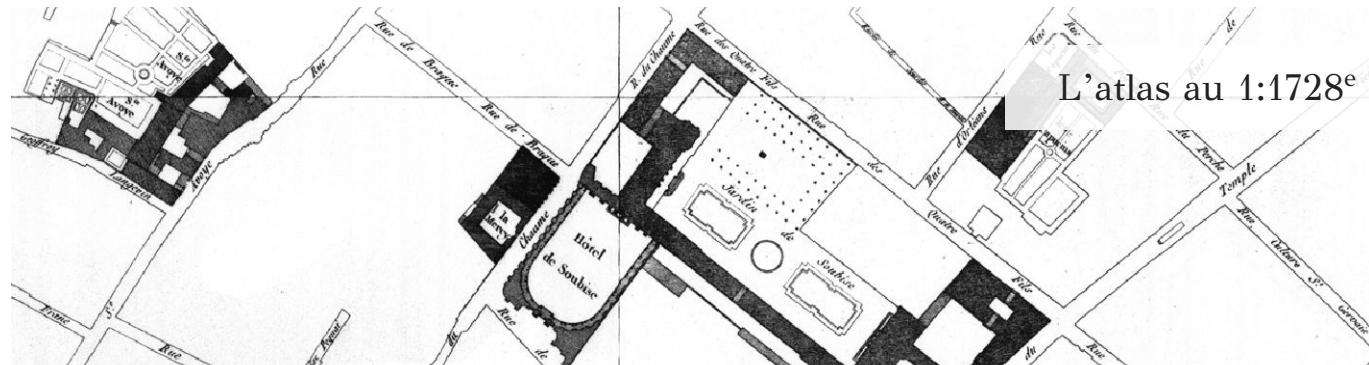
Plan coté de l'observatoire royal, p. 2.



1 toise = 1.949,0363 millimètres
0.1 toise = 20 centimètres

Une cartographie de précision de Paris vers 1790

Un géoréférencement qualifié et appuyé sur les données de construction du plan de Paris ?

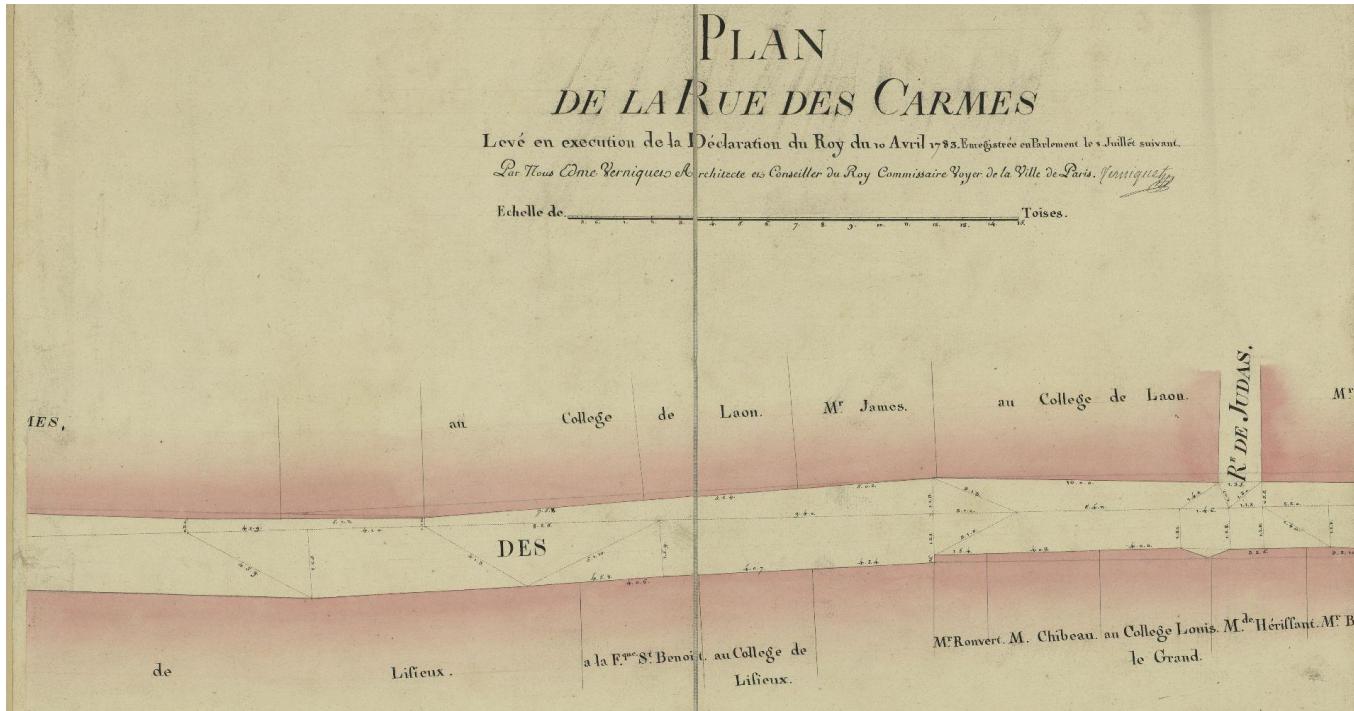


Plan parcellaire de Paris, 1:500^e



Une cartographie de précision de Paris vers 1790

Un support pour localiser & indexer spatialement les plans parisiens du XIX^e ?



Plan de la Rue des Carmes, Levé en execution de la déclaration du Roy du 10 Avril 1783 Enregistrée en Parlement le 8 Juillet Suivant Par Nous Edme Verniquet Architecte Conseiller du Roy Commissaire Voyer de la Ville de Paris, BHVP, ark:/73873/pf0001908896.

Deux chantiers en cours

I. L'armature géométrique du plan d'après l'*atlas des opérations*

- une armature à quatre niveaux
- premier niveau : les grande lignes de support du plan
- second niveau : la triangulation des clochers de Paris
- troisième niveau : des clochers aux piquets
- quatrième niveau : cheminements & plans des rues



II. Un référentiel géo-historique ? Évaluation de la précision et de l'exactitude des opérations trigonométriques

- incertitudes des triangles et cheminements
- un système de coordonnées pour géo-référencer les plans “de Verniquet”.



L'armature géométrique du plan d'après l'*atlas des opérations*

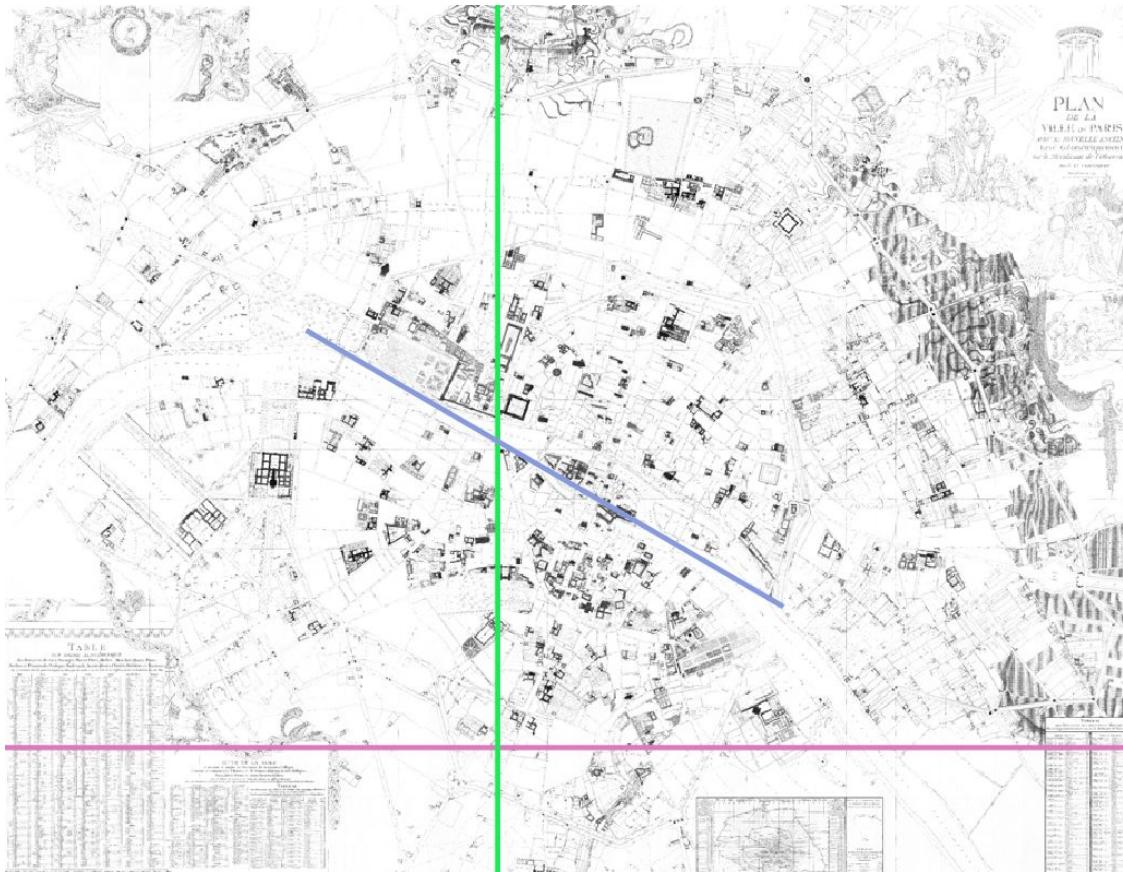




Une armature géométrique à quatre niveaux



Premier niveau : les grandes lignes du plan



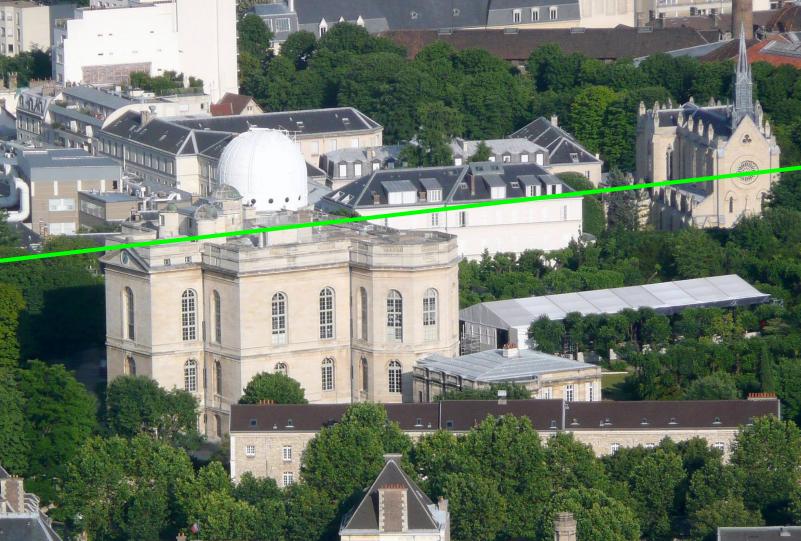
Les trois lignes géographiques structurantes du plan, vues sur l'atlas assemblé.

La méridienne de Paris

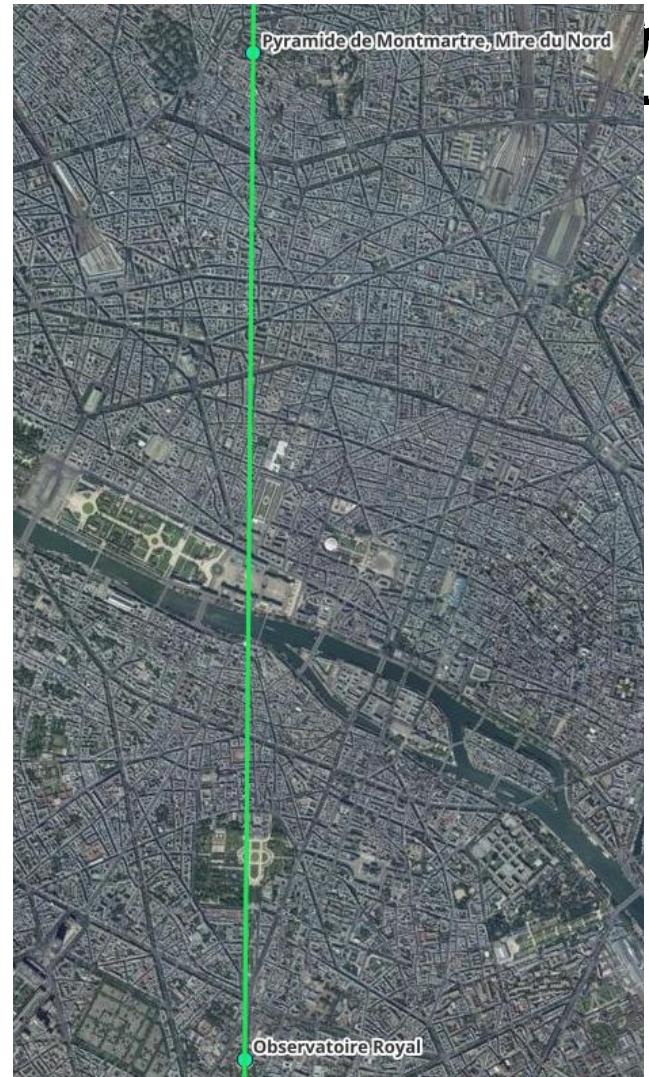
Une ligne géodésique imaginaire, partiellement matérialisée qui constitue l'axe Nord-Sud du plan.

Pyramide de Montmartre installée en 1736.

Observatoire de Paris vu du Nord-Ouest, avec la méridienne.



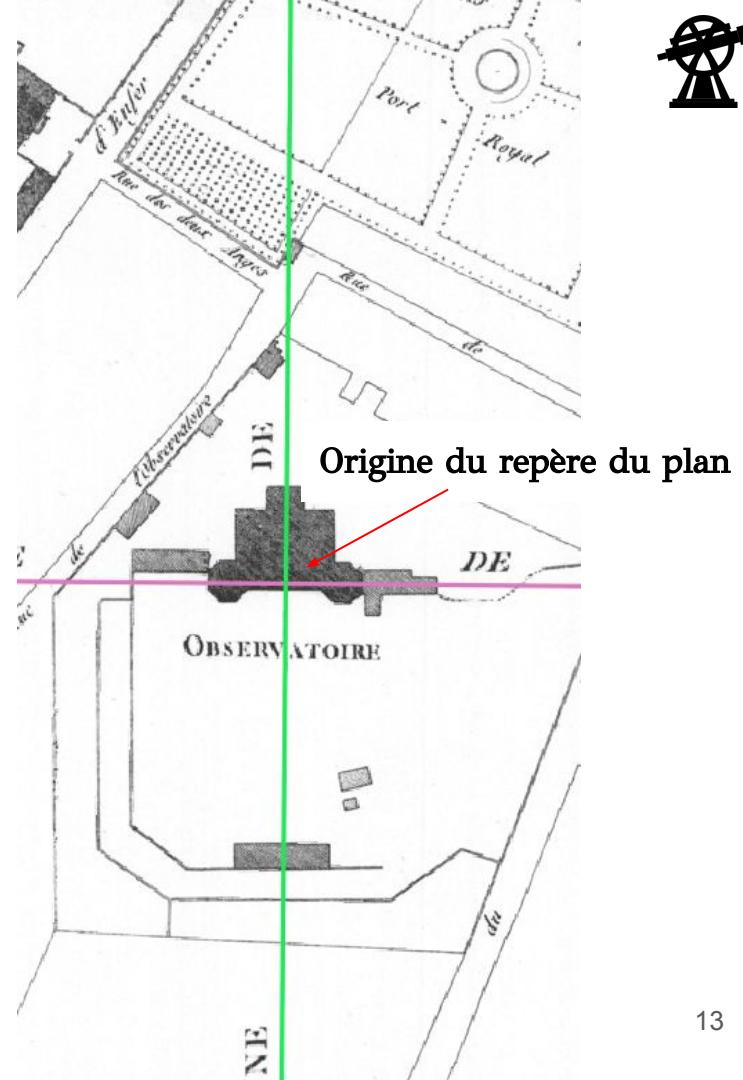
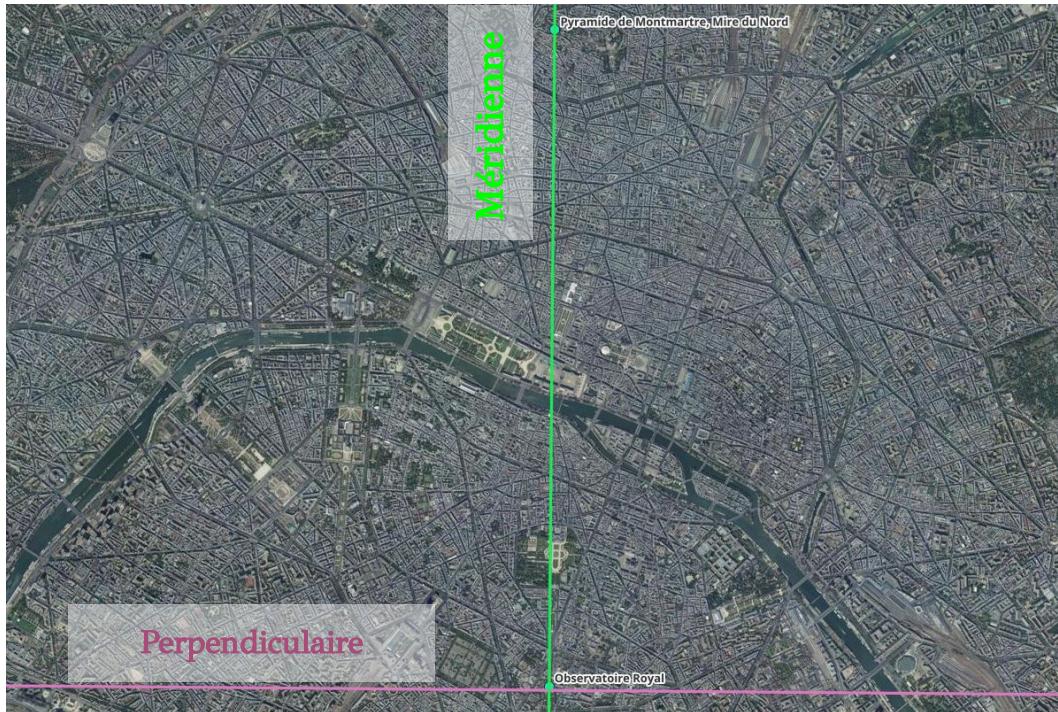
Mire du Nord & Observatoire de Paris. Photos @Wikimedia Commons.





Perpendiculaire à l'observatoire

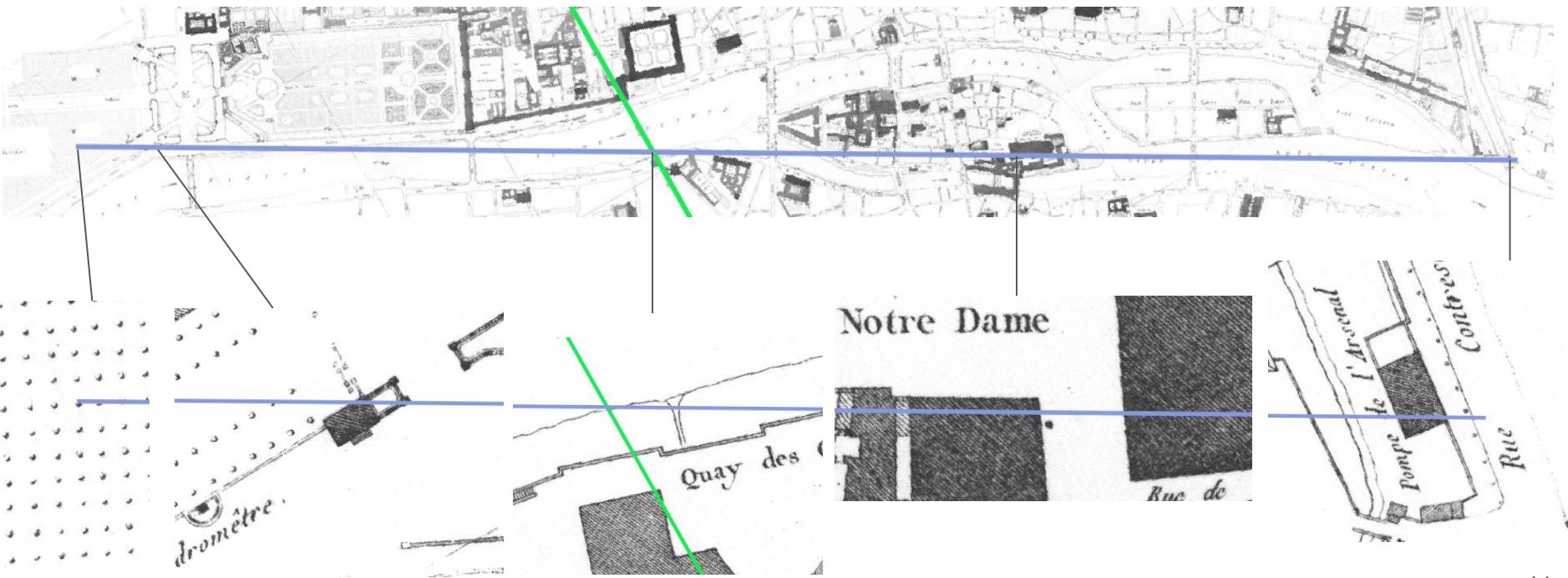
Une ligne droite imaginaire mais identifiable sur le terrain, axe Est-Ouest du plan.





Ligne de vérification

Une ligne oblique, longeant la Seine, matérialisée en 6 points au moins, et passe par la tour Sud de Notre-Dame.



Signal (piquet) Pavillon place Louis XV

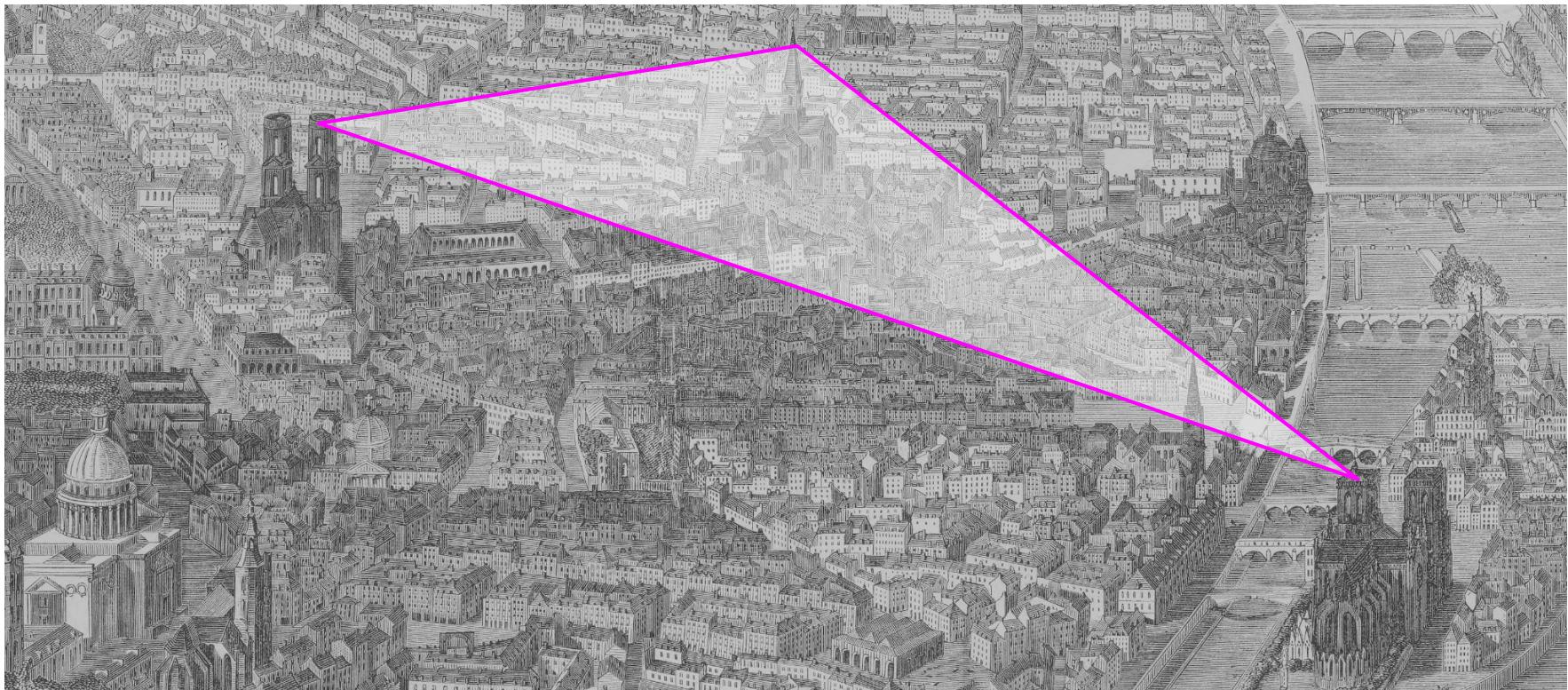
Signal de la section

Tour Sud de Notre-Dame

Pompe de l'Arenal & signal

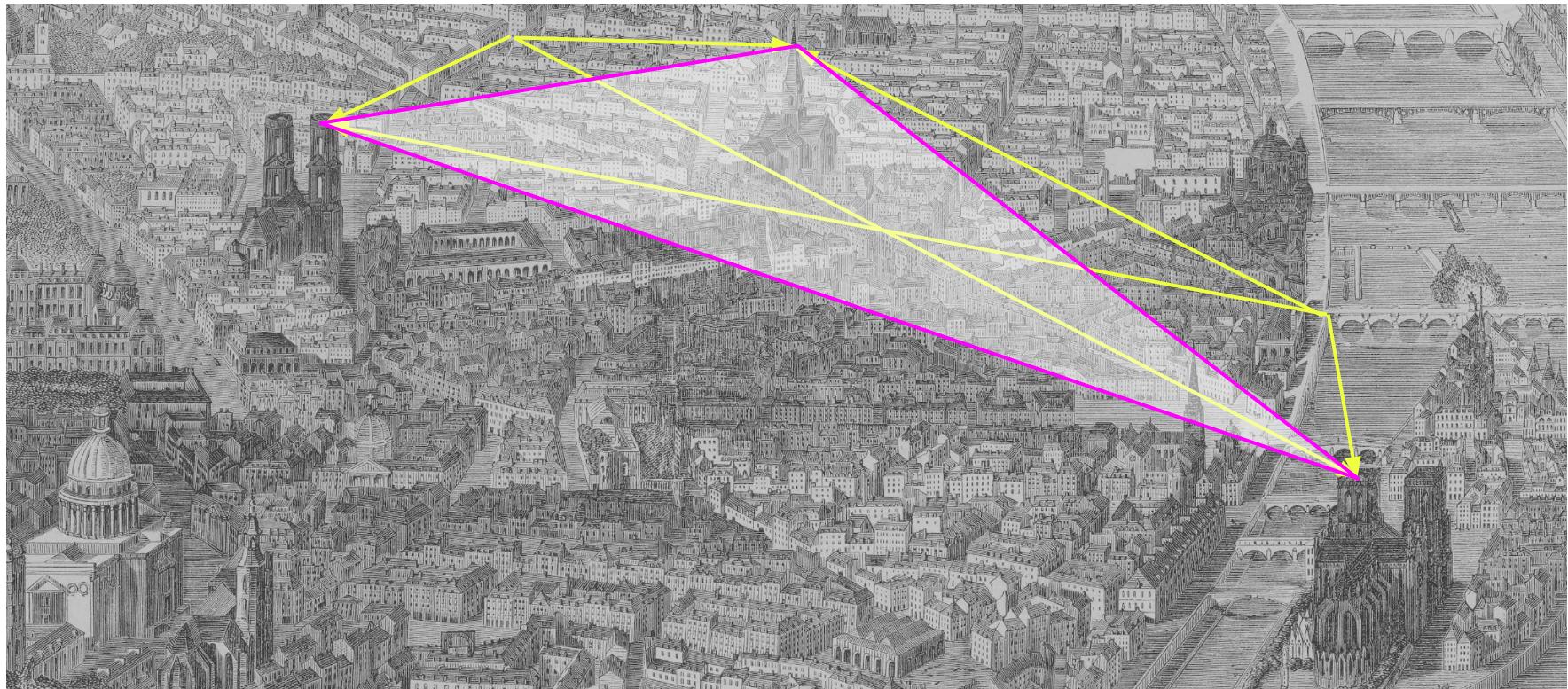


Second niveau : triangulation des clochers de Paris



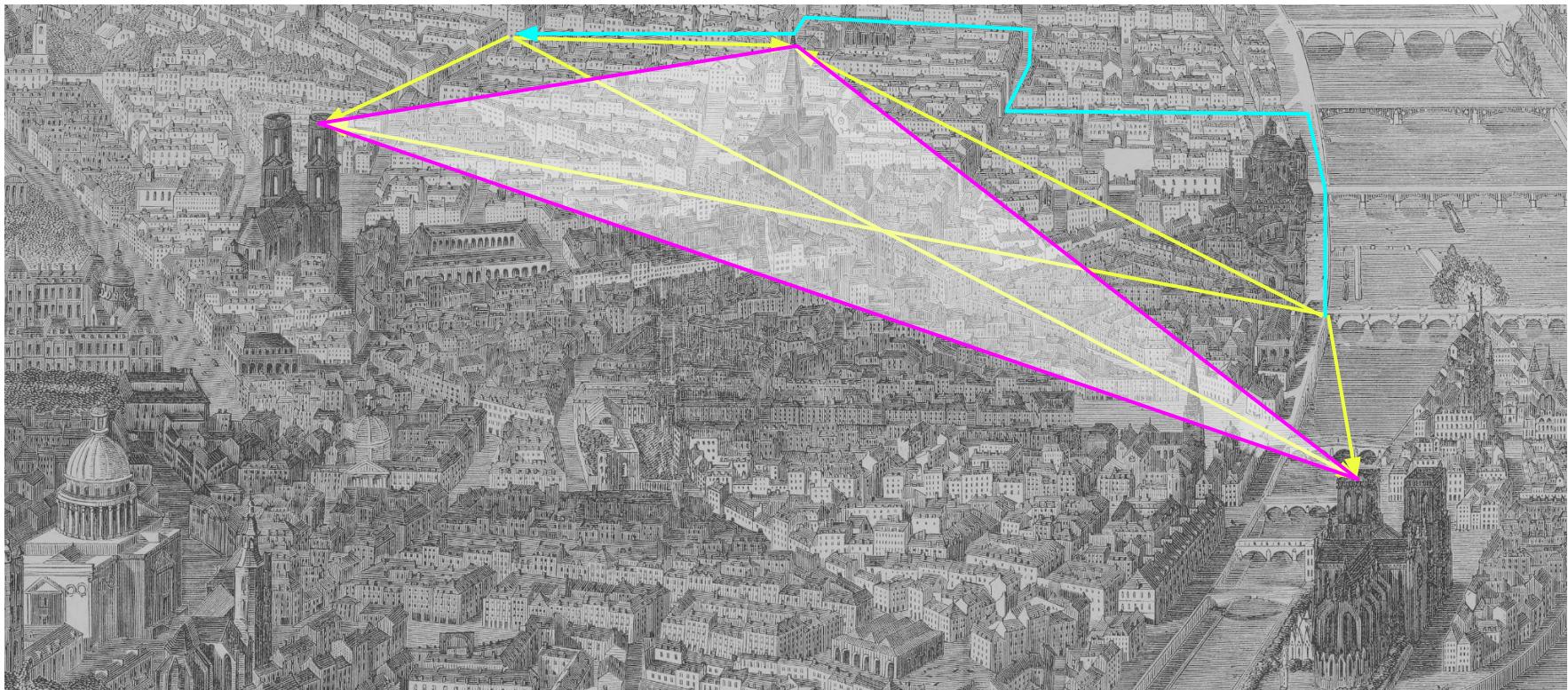


Troisième niveau : triangulation de points au sol





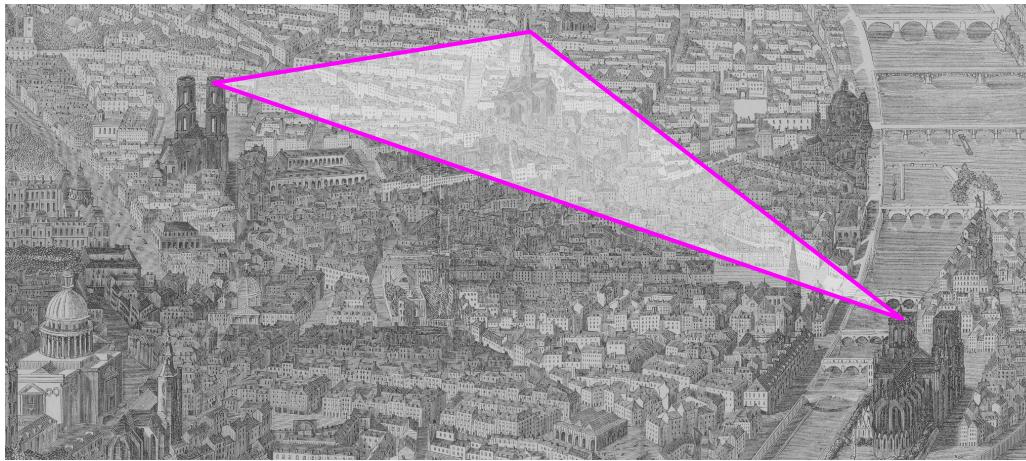
Quatrième niveau : cheminements mesurés au sol



Paris à vol d'oiseau / Dessiné par E. Bourdelin ; gravé par H. Linton. 1860. BnF, ark:/12148/btv1b53062333g

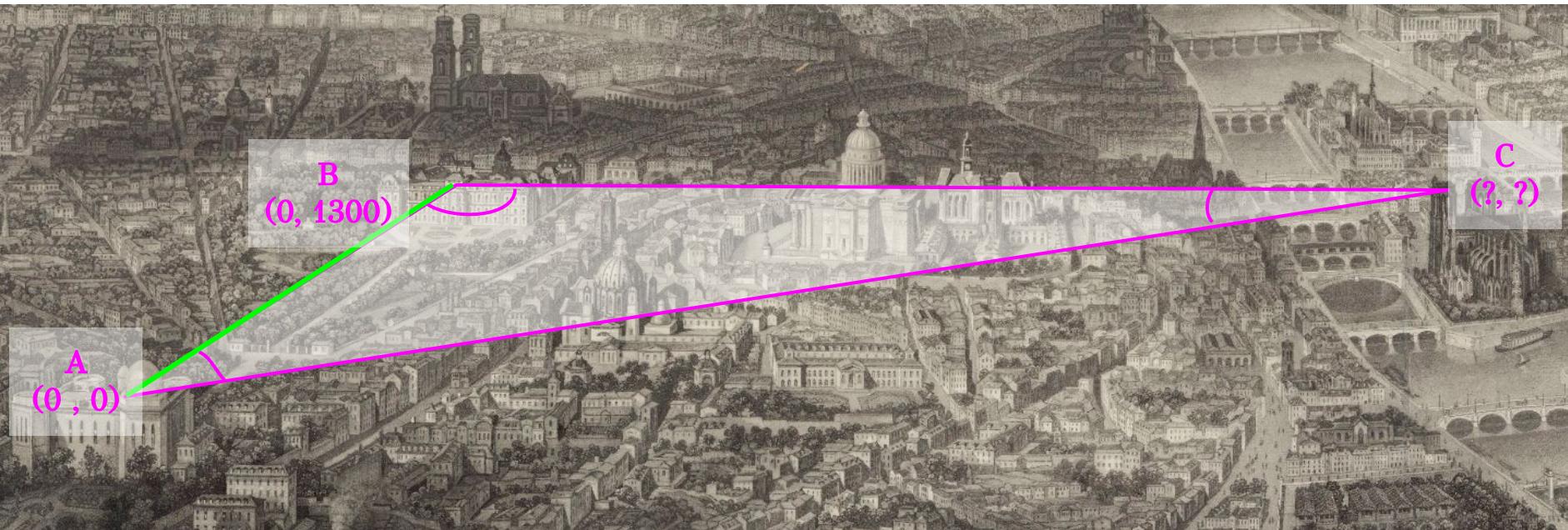


Second niveau : triangulation des clochers & monuments de Paris





Mesurer la ville par triangulation : principe général

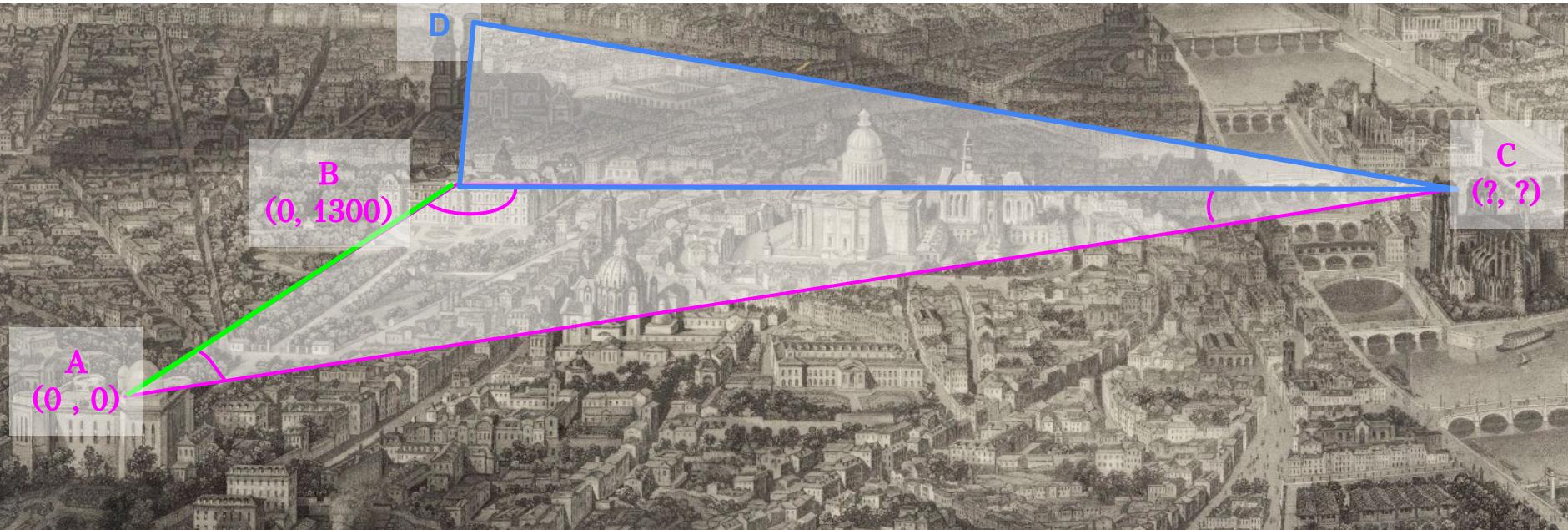


Une méthode fondée sur la **loi des sinus** : $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC} = \frac{\sin(C)}{AB}$

On peut calculer AC et BC si les angles en A, B, C et la longueur AB sont connus



Mesurer la ville par triangulation : principe général



Une méthode fondée sur la **loi des sinus** : $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC} = \frac{\sin(C)}{AB}$

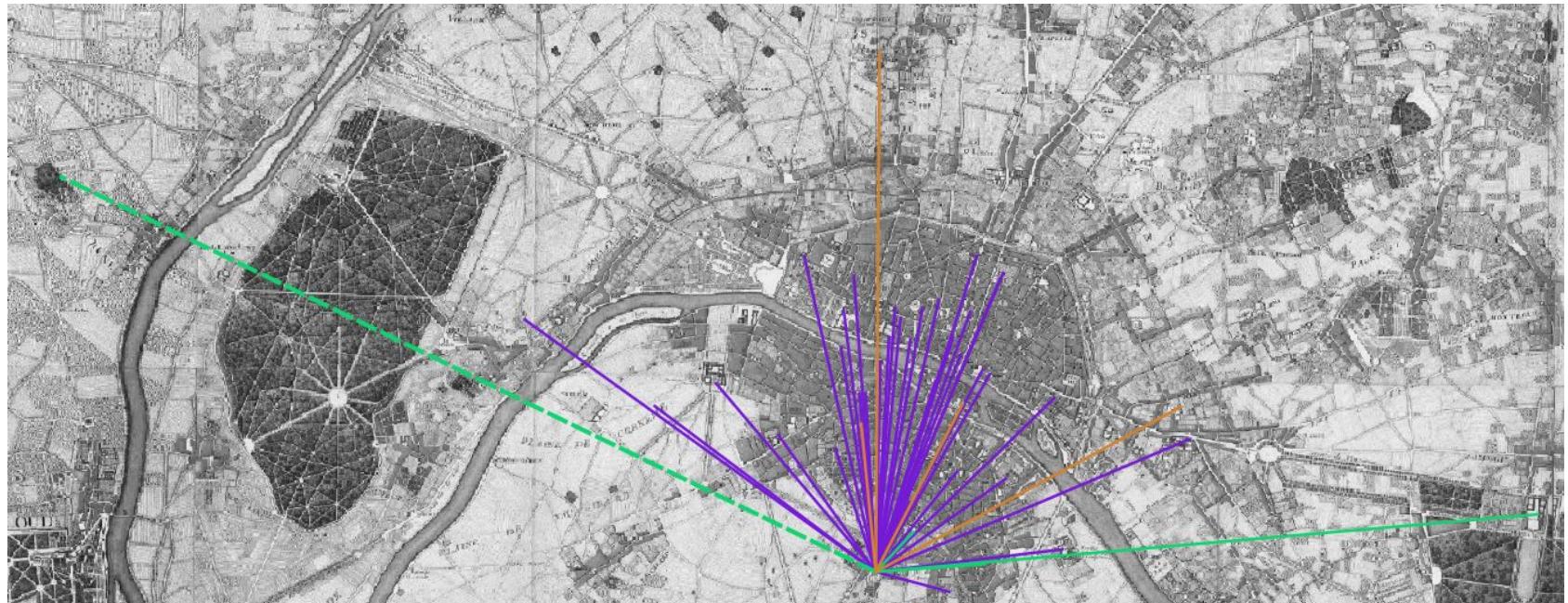
On peut calculer AC et BC si les angles en A, B, C et la longueur AB est connue



Relevés angulaires depuis les “clochers” de Paris

Demi-tour d'horizon de puis la station de l'Observatoire Royal.

En violet les visées vers des monuments de Paris; en orange vers des monuments de la triangulation de premier ordre; en vert les visées hors de Paris





Carnet des observations angulaires par station

Une à trois séries d'angles par station

Observations faites sur la Tour St. Sulpice a un Pied du point observé au nord de la Tour nord.			
Point le clocher d'autreuil et l'Ecole Militaire	angles observés .	angles augmentés de 30 secondes .	angles Reduits .
	9. 44. 0	9. 44. 30"	9. 44. 22"
Les Bons-hommes	20. 22. 0	20. 22. 30	20. 22. 21
Les Invalides	20. 56. 20	20. 56. 50	20. 56. 52
Le voignure de la place Louis quinze	58. 53. 30	58. 51. 0	58. 51. 34
Jacobins Rue St. Dominique	57. 22. 30	57. 23. 0	57. 22. 7
La charité	67. 24. 30	67. 25. 0	67. 23. 35
L'Assomption	76. 29. 0	76. 29. 30	76. 29. 15
Les Châtelain	79. 50. 30	79. 51. 0	79. 50. 21
Dôme de l'Chuillierie	86. 38. 0	86. 38. 30	86. 38. 6



Mesurer Paris : observations & instrumentation

Un graphomètre à lunette similaires à ceux sans doute utilisés par les ingénieurs & géomètres du plan

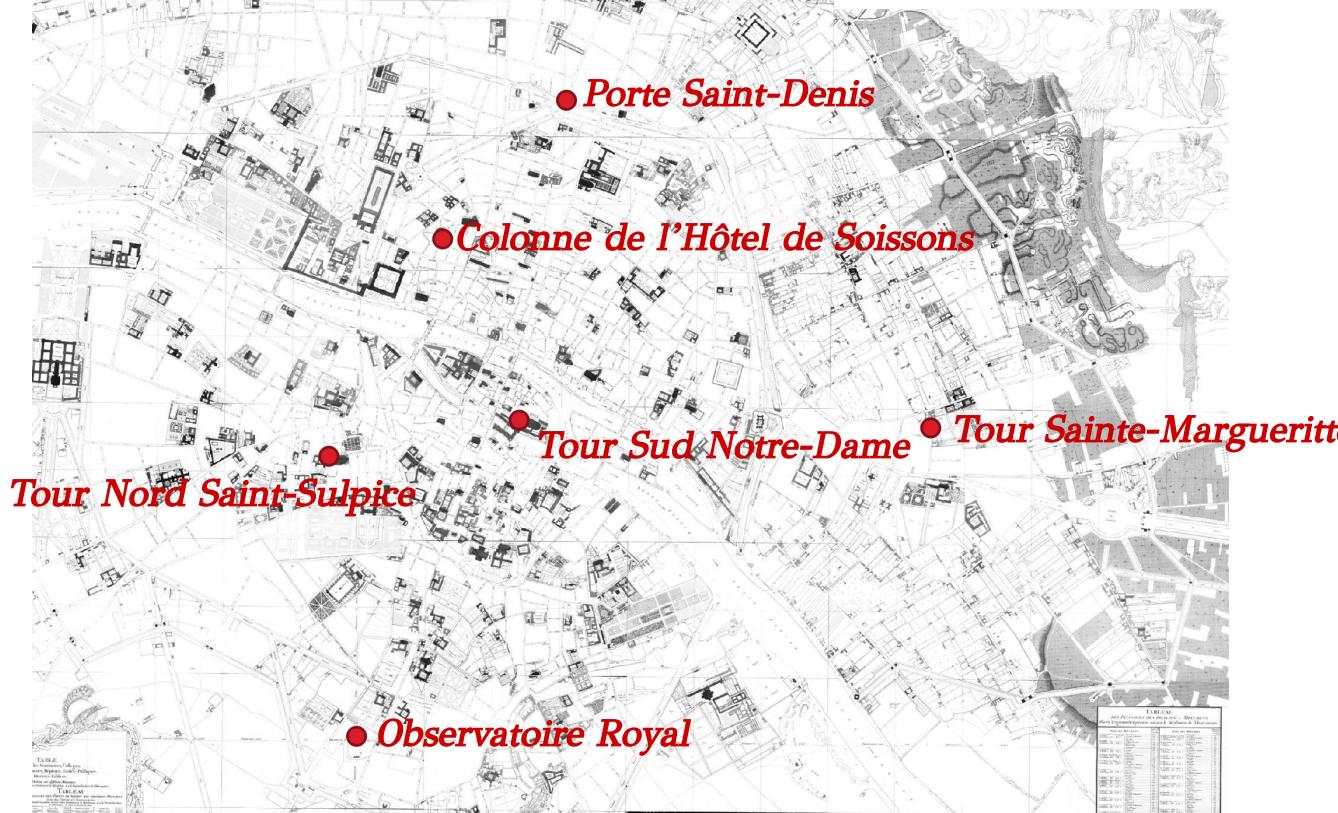


Graphomètre Charot à lunettes de 30 cm, cercle de 22 cm de diamètre, 1775.
Limbe gradué à $\frac{1}{2}$ degré (30 minutes), vernier à 1/10.

Piramide de
Montmartre

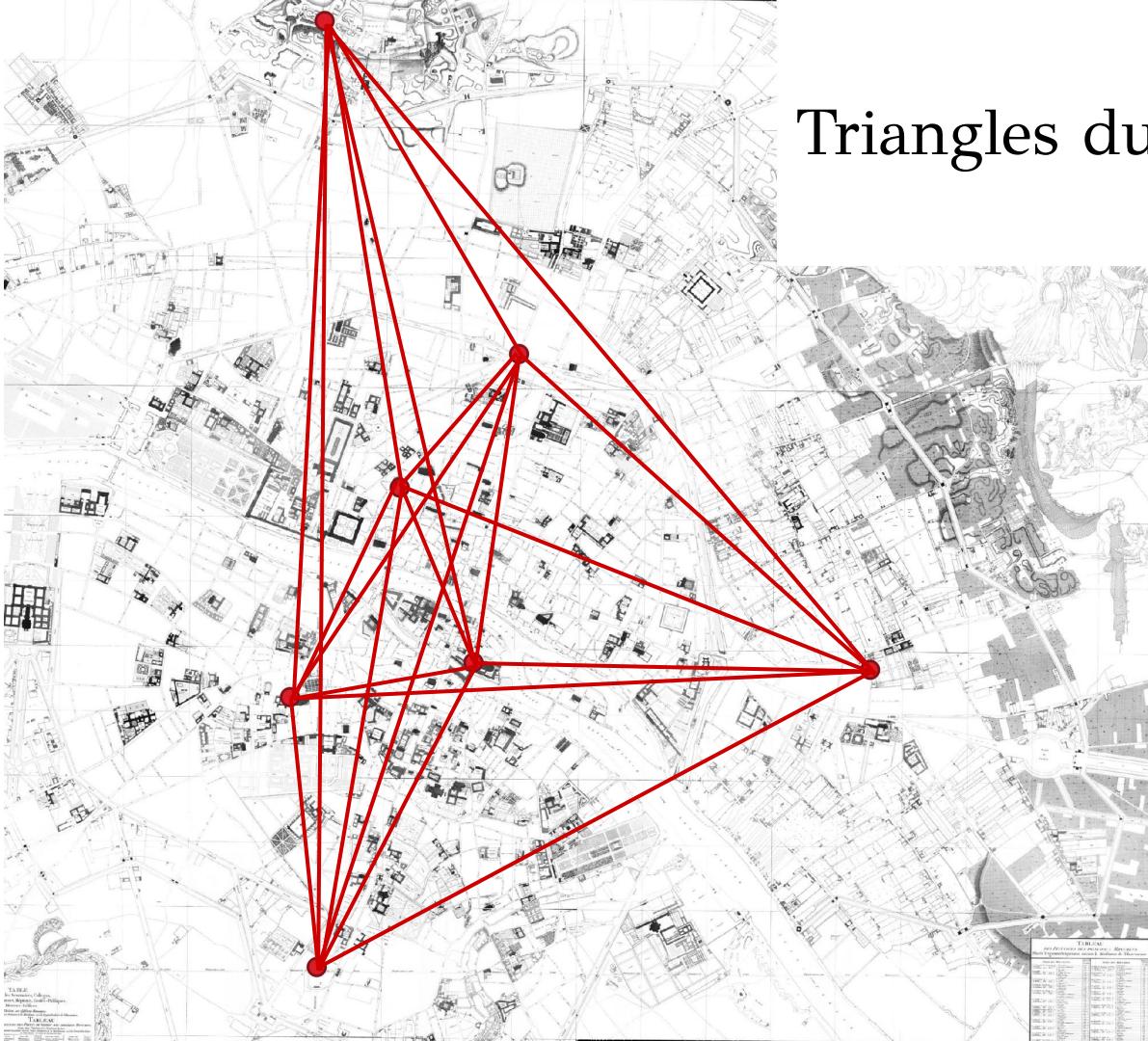


Monuments principaux



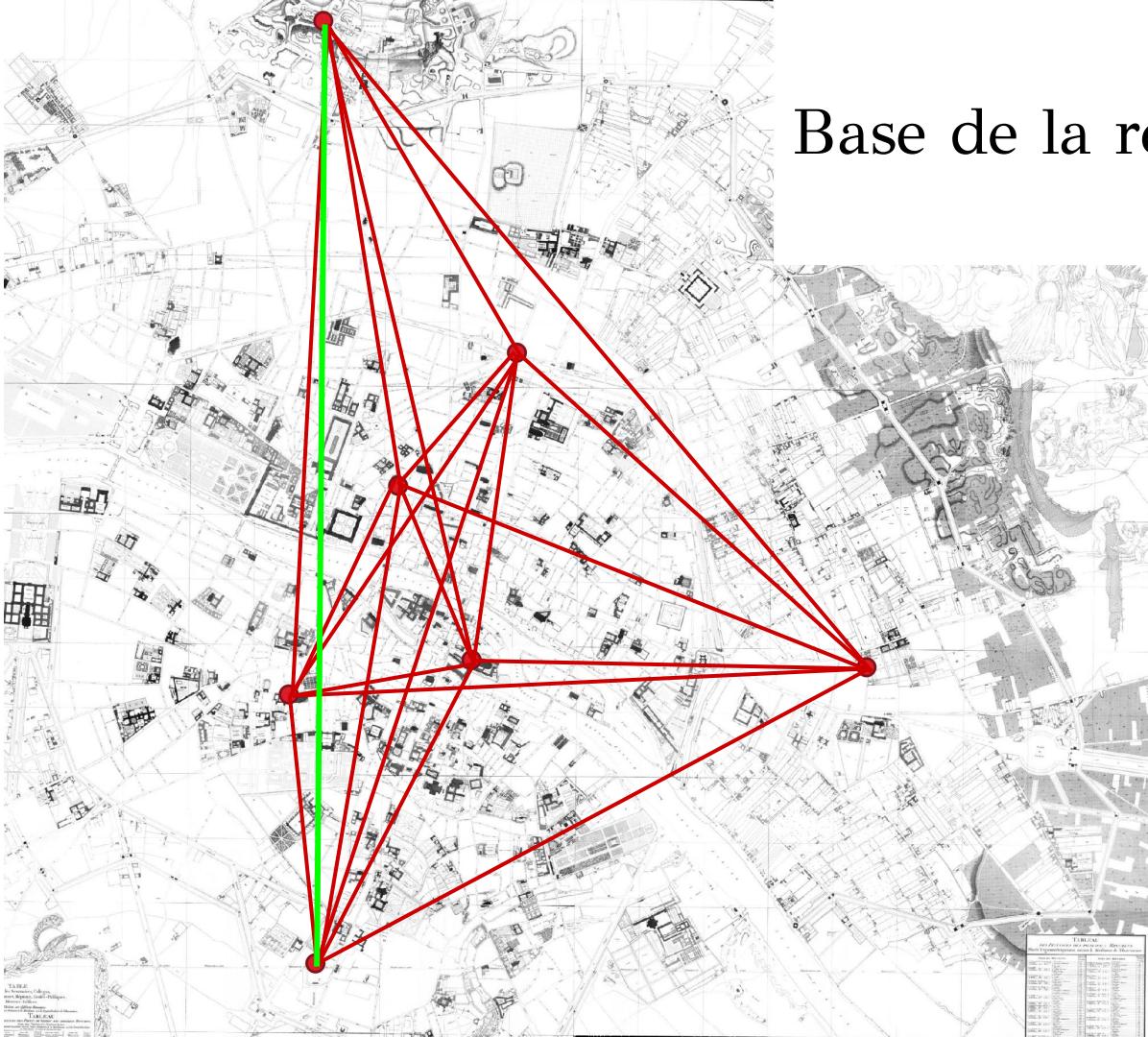


Triangles du 1^{er} ordre





Base de la résolution des triangles



Observatoire-Piramide = 2927 toises

Jeaurat, 1781, La Connaissance des temps, p. 361

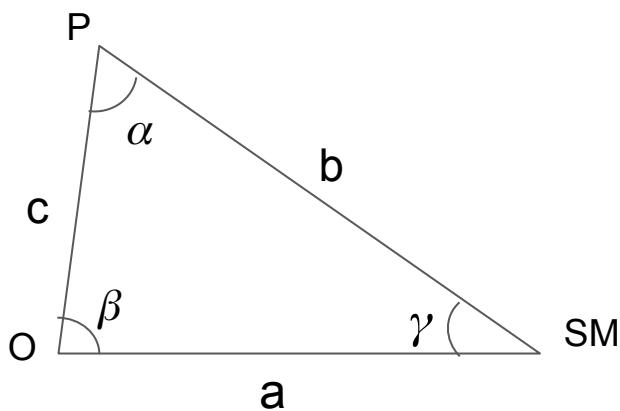
(<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6505804c>) : distance de la Piramide à l'intersection de la Méridienne et de sa perpendiculaire à l'Observatoire.

Station utilisée par Verniquet décalée de 15 toises 5 pieds

→ **Observatoire-Piramide = 2911 toises et 1 pied**



Loi des sinus pour la triangulation

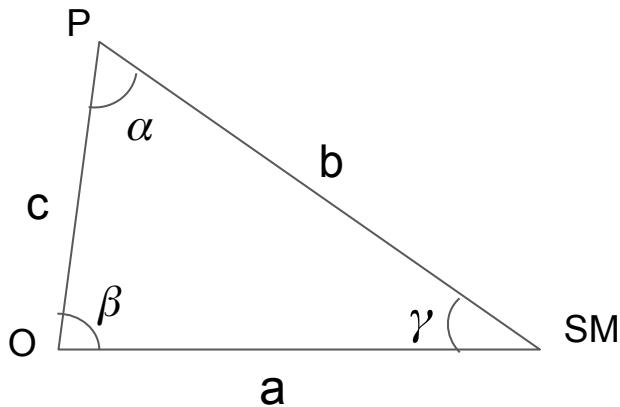


Loi des sinus:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$a = \frac{c * \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

$$b = \frac{c * \sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

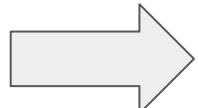


Passage aux logarithmes

Loi des sinus:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

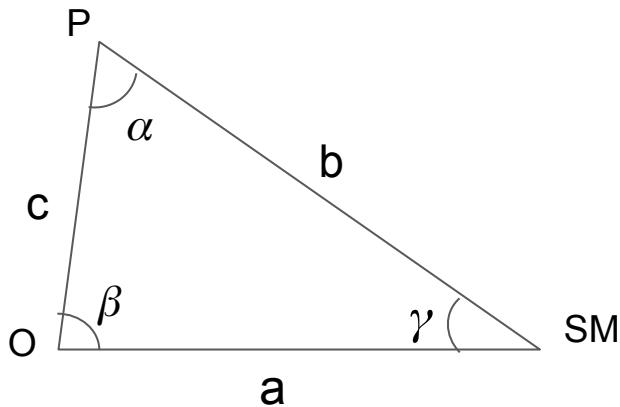
$$a = \frac{c * \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$



$$\log(a) = \log(c) + \log(\sin(\alpha)) - \log(\sin(\gamma))$$

$$b = \frac{c * \sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

$$\log(b) = \log(c) + \log(\sin(\alpha)) - \log(\sin(\beta))$$



Détail de la résolution d'un triangle

Calcul de la base de Sainte-Margueritte:

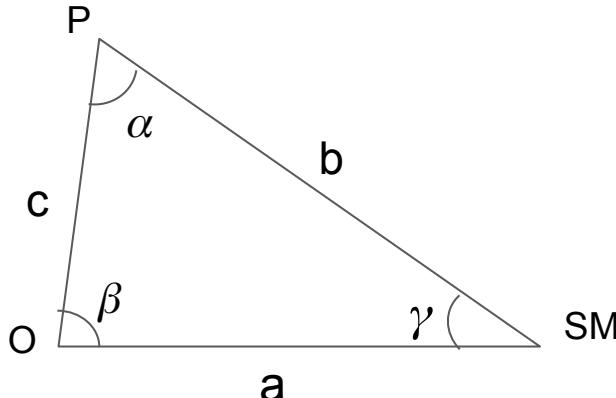
Piramide 40. 34. 51. 3,4640676.

0,0094041.

Observatoire 61. 19. 0. 9,8132583.
3,4734717.

S^e Margueritte. 78. 7. 10. 9,9481411.

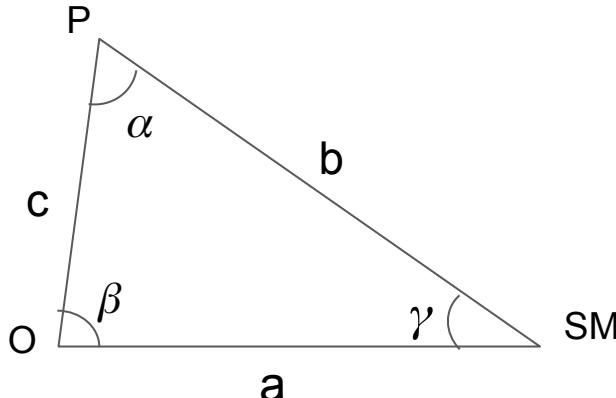
180. 1. 1. 3,2867224. obser^s Marg^t. 1935^{tot}: 2.
3,4166128. S^e Marg^t 2609. 8^a.



Détail de la résolution d'un triangle

Calcul de la base de Sainte-Margueritte:

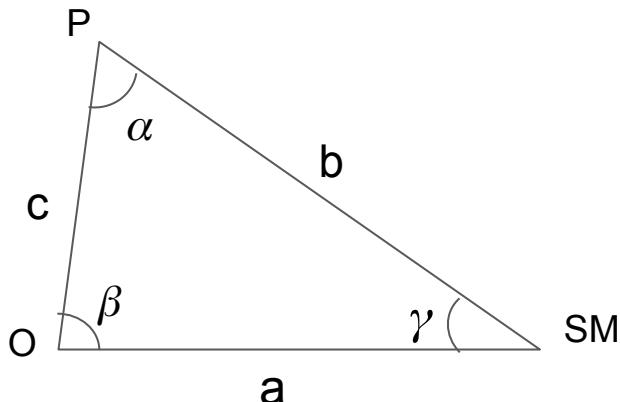
<i>Piramide</i>	40.	34.	51.	3,4640676.		<i>Triangle à résoudre & vérification</i>
<i>Observatoire</i>	61.	19.	0.	0,0094041.		<i>de la fermeture des angles</i>
<i>Sainte Margueritte</i>	78.	7.	10.	9,8132583.		
	180.	1.	1.	3,4734717.		
				9,9481411.		
					3,2867224.	<i>obser. Marg. tot. 2.</i>
					3,4166128.	<i>Sainte Marg. 2609. 8.</i>



Détail de la résolution d'un triangle

Calcul de la base de Sainte-Margueritte:

<i>Piramide</i>	40.	34.	51.	3,4640676.	Calcul des côtés a et b
				0,0094041.	
<i>Observatoire</i>	61.	19.	0.	9,8132583.	Résultats
				3,4734717.	
<i>Sainte Margueritte</i>	78.	7.	10.	9,9481411.	
				480. 1. 1. 3,2867224.	
				3,4166128.	
					observ. Marg. 1933 tot. 2. S. Marg. 2609. 8 ² .



Détail de la résolution d'un triangle

$$\log(a) = \log(c) + \log(\sin(\alpha)) - \log(\sin(\gamma))$$

Calcul de la base de Sainte-Margueritte:

Pyramide 40. 34. 51. 3,4640676.

0,0094041.

Observatoire 61. 19. 0. 9,8132583.
3,4734717.

S^e Margueritte. 78. 7. 10. 9,9481411.

480. 1. 1. 3 2867224. obser^s Marg^t. 1933^{tot}. 2.
3,4166128. S^e Marg^t 2609. 8^z.

Manuel de trigonométrie
pratique de l'abbé Delagrive:

$$\log(c) \quad (1)$$

$$-\log(10^{10} * \sin(\gamma)) \quad (2)$$

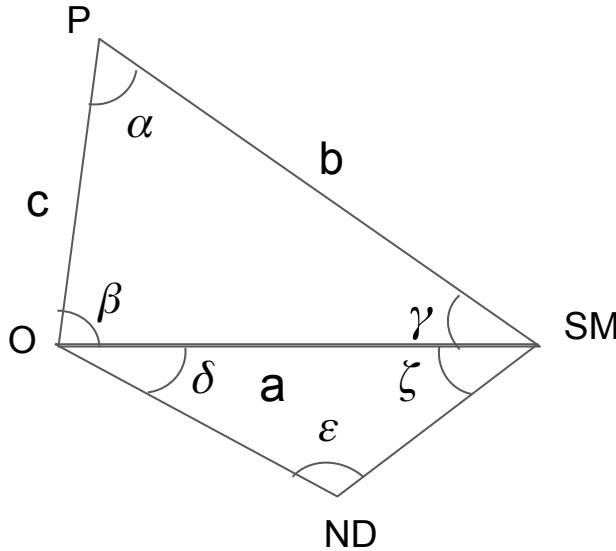
$$\log(10^{10} * \sin(\alpha)) \quad (3)$$

$$(1) + (2) \quad (4)$$

$$\log(10^{10} * \sin(\beta)) \quad (5)$$

$$\log(a) = (4) + (3) - 10 \quad (6)$$

$$\log(b) = (4) + (5) - 10 \quad (7)$$



Détail de la résolution d'un triangle

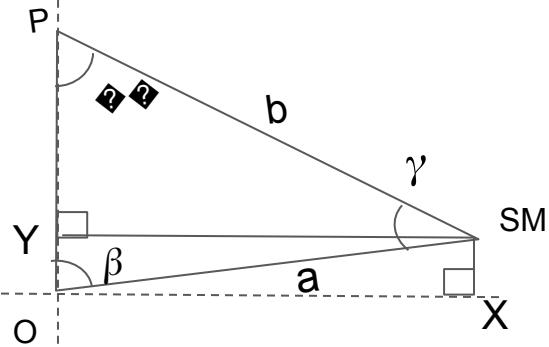
Stratégies de gestion des erreurs pour les côtés des triangles :

- **Compensation:** moyennes des valeurs obtenues pour chaque triangle.
- **Vérification:** calculs à partir des angles augmentés et comparaison avec les valeurs obtenues à partir des angles observés.

Observatoire Marguerite 3,2867324.

$$\begin{array}{r} 3,2865849 \\ \hline 6,4723173. \end{array}$$

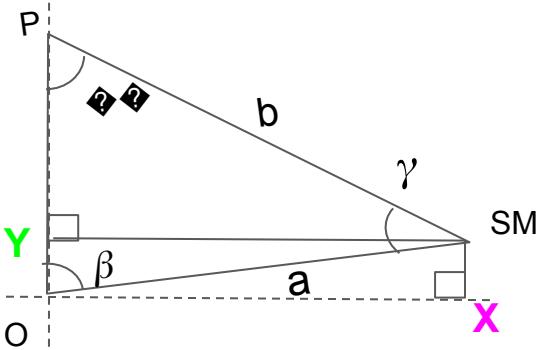
3,2866586 Proportion 1934¹⁰: 9⁹:



Détail de la résolution d'un triangle

Calculs des coordonnées de Sainte-Margueritte:

(1)	b	b	a	a
(2)	$\log(10^{10} * \sin(\alpha))$	$\log(10^{10} * \sin(90 - \alpha))$	$\log(10^{10} * \sin(\beta))$	$\log(10^{10} * \sin(90 - \beta))$
(1)+(2)-10	$\log(OX)$	$\log(OP - OY)$	$\log(OX)$	$\log(OY)$



Calcul des coordonnées du sommet inconnu

Calculs des coordonnées de Sainte-Margueritte:

(1)	b	b	a	a
(2)	$\log(10^{10} * \sin(\alpha))$	$\log(10^{10} * \sin(90 - \alpha))$	$\log(10^{10} * \sin(\beta))$	$\log(10^{10} * \sin(90 - \beta))$

(1)+(2)-10	$\log(OX)$	$\log(OP - OY)$	$\log(OX)$	$\log(OY)$
------------	------------	-----------------	------------	------------

Car diagramme

$$40. 34. 51. 3. 41. 66. 128. 3. 41. 66. 128. 3. 28. 66. 987. 3. 28. 66. 987.$$

$$\text{par l'observ. } 9. 81. 32. 983. 9. 88. 09. 952. 9. 94. 31. 411. 9. 68. 12. 126.$$

$$61. 19. \underline{24} \quad 162.$$

$$3. 22. 987. 35. 3. 29. 71. 442. 3. 28. 97. 998. 2. 96. 787. 19.$$

$$1697. 7. \underline{1982. 2.} \quad 2927. \quad 1697. 4. \quad 928. 69$$

$$\underline{944. 8.} \quad 944. 49.$$



Que nous apprend le mémoire sur la construction du plan?

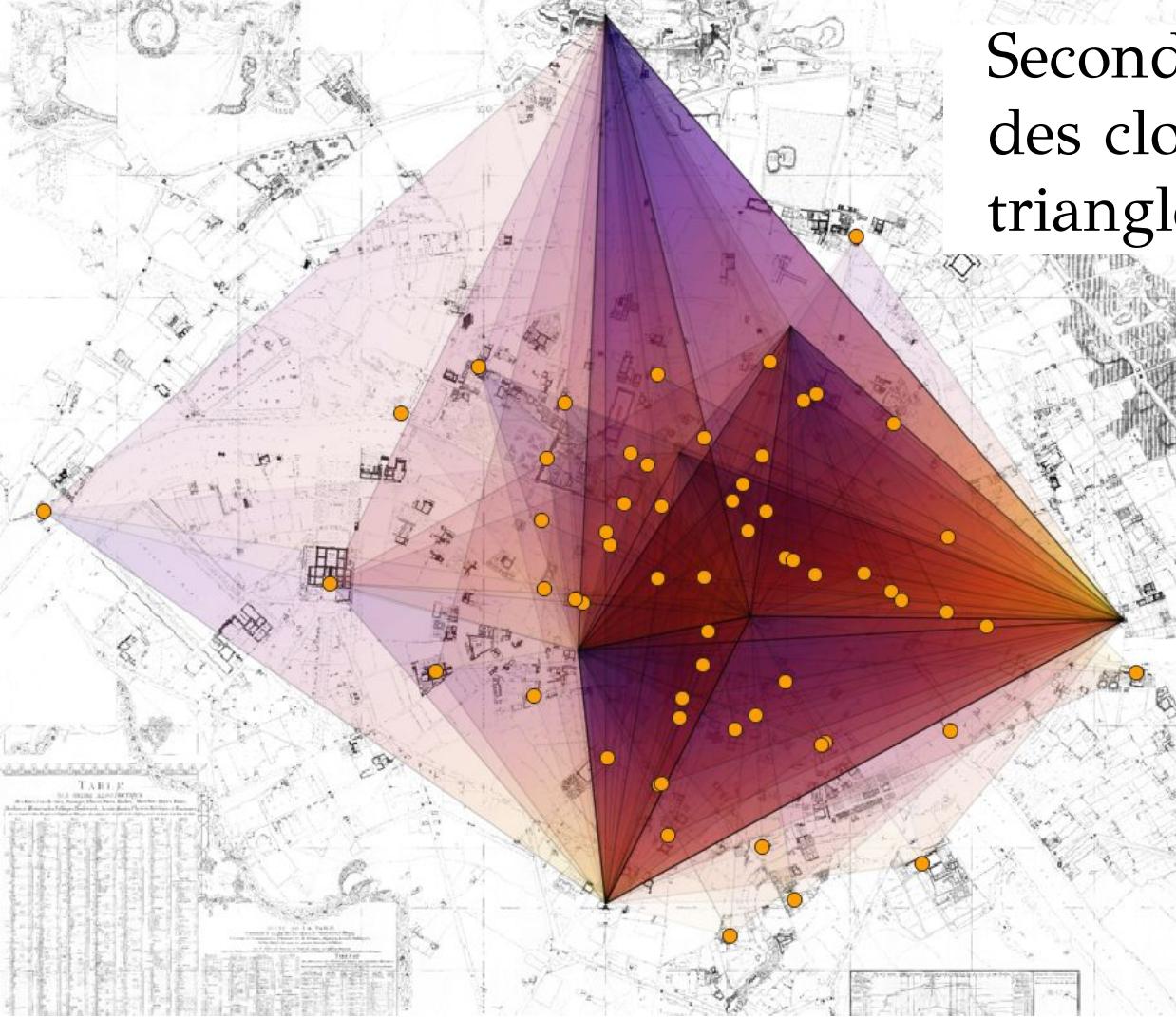
1

- ❖ Stratégie de construction itérative
- ❖ Volume des mesures et des calculs :
 - 2 sommets de triangles connus,
 - 5 sommets de triangles à localiser,
 - 19 triangles résolus soient 57 angles mesurés,
 - $19 * 10 * 4 + 19 \sim 779$ calculs à réaliser pour chaque série de mesures.
→ et donc autant de risques d'erreurs!
- ❖ Stratégies de maîtrise des erreurs et de leur propagation :
- ➔ **de mesure** : encadrement des erreurs des demi-cercles, multiplication des mesures (et possible compensation sous-jacente), vérifications (sommes d'angles, etc.), calculs de "moyennes proportionnelles".
- ➔ **de calcul**: utilisation des logarithmes, résolution des tables, "étalement" des sinus, multiplication des calculs et des vérifications, des calculs reproductibles.



Second niveau : des clochers de Paris aux triangles

Les clochers du 2^{ème} ordre





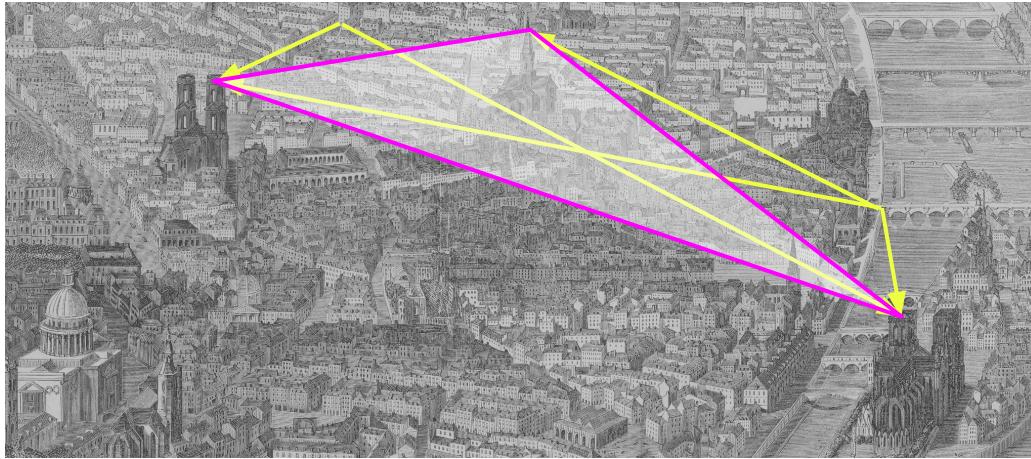
Que nous apprend le mémoire sur la construction du plan?

2

- ❖ Mêmes calculs pour la résolution des triangles
- ❖ Volume des mesures et des calculs :
 - 59 sommets de triangles à localiser,
 - 246 triangles résolus soient 738 angles mesurés,
 - $246 * 10 * 4 \sim 9840$ calculs à réaliser pour la série des angles augmentées seulement.
→ et donc autant de risques d'erreurs!
- ❖ Stratégies de maîtrise des erreurs et de leur propagation :
Identique à celles utilisée pour les triangles d'ordre 1 sauf:
 - pas de calcul de moyennes pour les côtés des triangles,
 - pas de double série de calculs avec les angles observés.



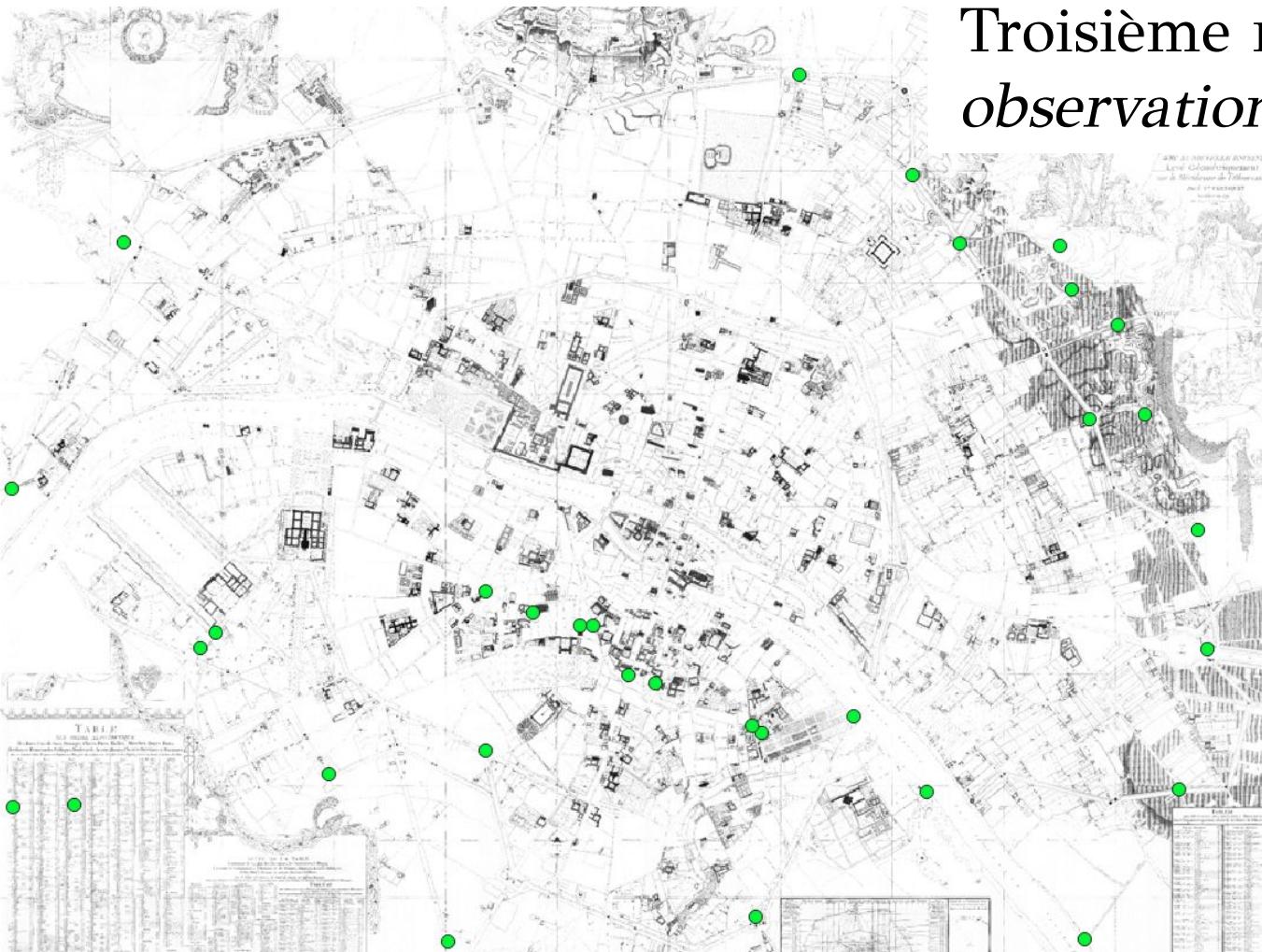
Troisième niveau : *observations au sol & piquets*





Troisième niveau : *observations au sol & piquets*

*Les triangles
du 3^{ème} ordre*



- Points au sol
- Points “virtuels” matérialisés par des piquets

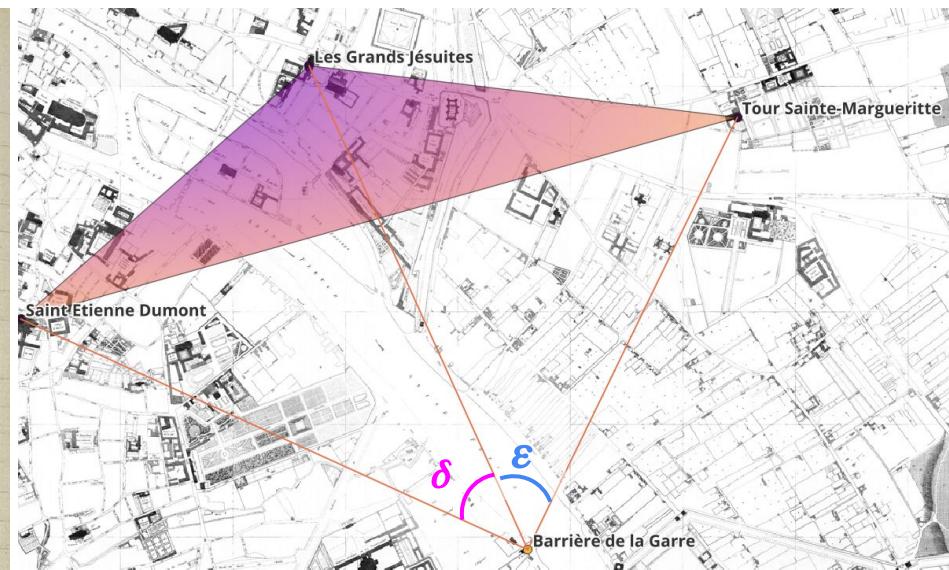


Troisième niveau : *observations au sol & piquets*

Exemple filé : détermination de la position du mur de la *Barrière de la Garre* à l'aide du triangle entre les clochers de Saint-Étienne-du-Mont, des Grands Jésuites et de Sainte-Marguerite.

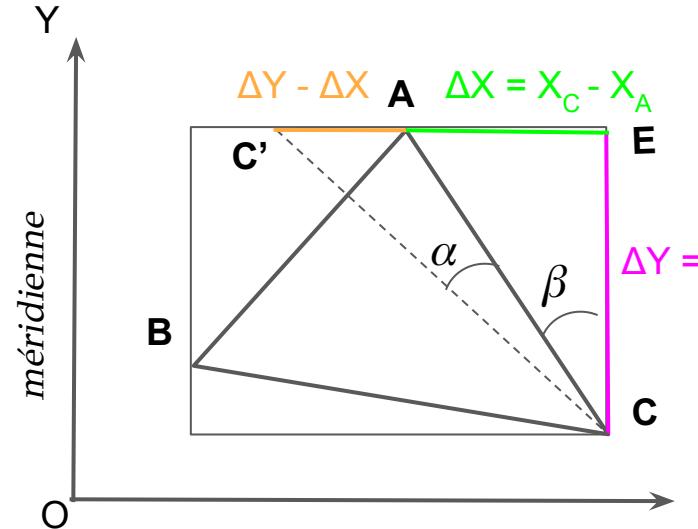
Les positions des clochers sont déjà connues. Les angles δ et ε sont mesurés sur le terrain.

148.)
Station à la
Barrière de la Garre.
Angles Observés.
Entre St. Etienne Dumont et les Grands Jésuites
St. Marguerite.





Troisième niveau : *observations au sol & piquets*



Première étape: calculer les côtés du triangle ABC:

Handwritten calculations showing the solution of a triangle ABC using the Sines rule:

Sides calculated:

618.6	7.0163737	45.	0.1242369
450.4	1.7937904	3. 41 44.	1.7097786
963.0	8.8101641	48 41 44.	1.8340199
62.2	0.90	41 18 16.	682.3
15510.3173	1331		
418.4			

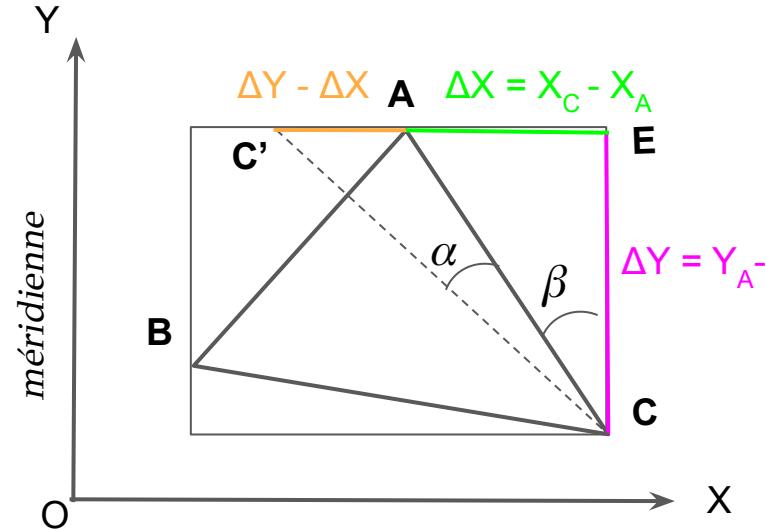
Final result:

682.3. 3. 41 18 16.

St. Steeme ales
4. Jeunier,



Troisième niveau : *observations au sol & piquets*



Première étape: calculer les côtés du triangle ABC:

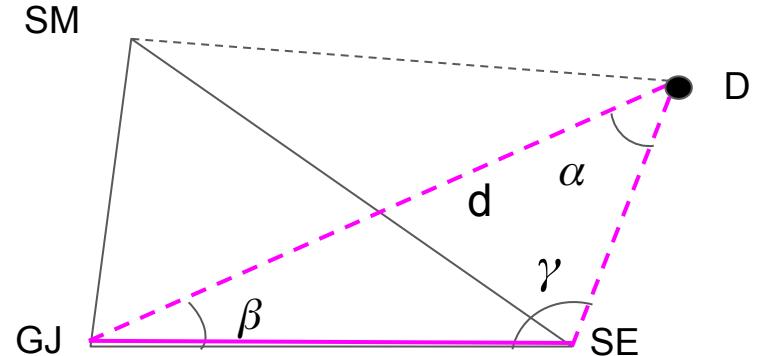
$$\frac{10 - \log(\Delta X + \Delta Y)}{\log(\Delta X - \Delta Y)} \quad \frac{45}{\alpha} \quad \frac{\log(\sin(\beta))}{\log(\Delta X)}$$

$$\frac{10 + \log(\tan(\alpha))}{45 + \alpha} \quad \frac{45 + \alpha}{45 - \alpha = \beta} \quad \frac{\log(AC)}{\log(BC)}$$

ΔX	618 . 6.	7.0163737	45.	0.1242969
ΔY	450 . 4.	1.7937904.	3. 44 44.	2.7097786.
$\Delta X + \Delta Y$	968 . 0.	8.8101641	48 41 44.	2.8340195.
$\Delta X - \Delta Y$	62 . 2.	0290	41 18 16.	682 . 3. 4. Jeune ales 4. Jeunet,



Troisième niveau : *observations au sol & piquets*

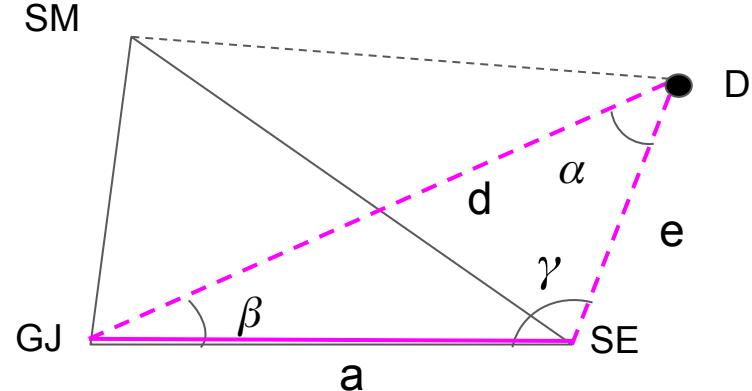


Deuxième étape: calculer les côtés des triangles

- D.SM.GJ
- D.SE.GJ
- D.SM.SE



Troisième niveau : *observations au sol & piquets*



Deuxième étape: calculer les côtés des triangles

- D.SE.GJ
- D.SM.GJ
- D.SM.SE

Manuel de trigonométrie
pratique de l'abbé Delagrive:

$$\log(a) \quad (1)$$

$$-\log(10^{10} * \sin(\alpha)) \quad (2)$$

$$\log(10^{10} * \sin(\beta)) \quad (3)$$

$$(1) + (2) \quad (4)$$

$$\log(10^{10} * \sin(\gamma)) \quad (5)$$

$$\log(a) = (4) + (3) - 10 \quad (6)$$

$$\log(b) = (4) + (5) - 10 \quad (7)$$

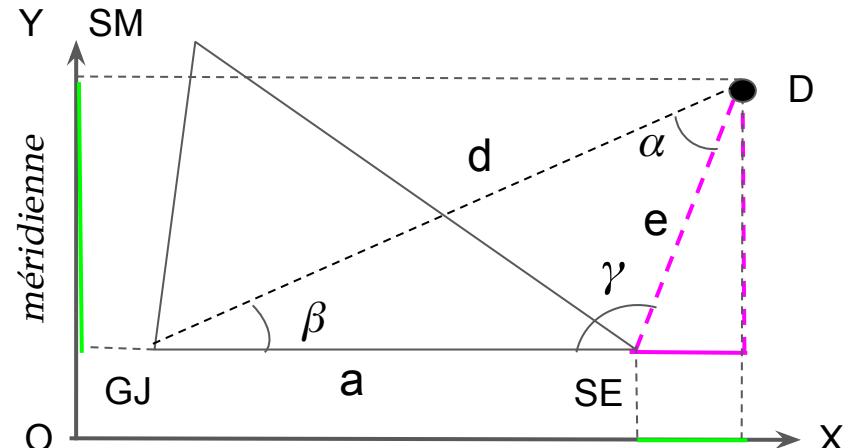
S. Échelles ...	65. 14. 8.	0,1812832.
log. Nominale.	73. 3 38	2,8340195.
Station	41 12 19.	9,9598246.
	<hr/>	<hr/>
	186 0 1	3,0152987.
		9,9807313.
		SL.
		<hr/>
		2,9751309.
		2,9960351.

944.3.
990 9.

d
e



Troisième niveau : *observations au sol & piquets*



Troisième étape: calculer les coordonnées de la station

Sav. S. Etienne			
gisement SE.GJ	48 44 44.	2,9960963	log(e)
angle γ	65. 44 . 8.	2,9960263	log(sin(γ))
gisement SE.D	114. 25. 52.	9,9592528	log(sin(gD.SE))
gisement D.SE	65 34 8.	9,6165701	
		76.. 92.	
		8,9552867	
		2,6126096.	
log S. Etienne Station		902 1 409 . 8.	Δ _x et Δ _y
S. Etienne Station		493 2 . 7 586 4 .	X _{SE} et Y _{SE}
		1329 3 176 6.	



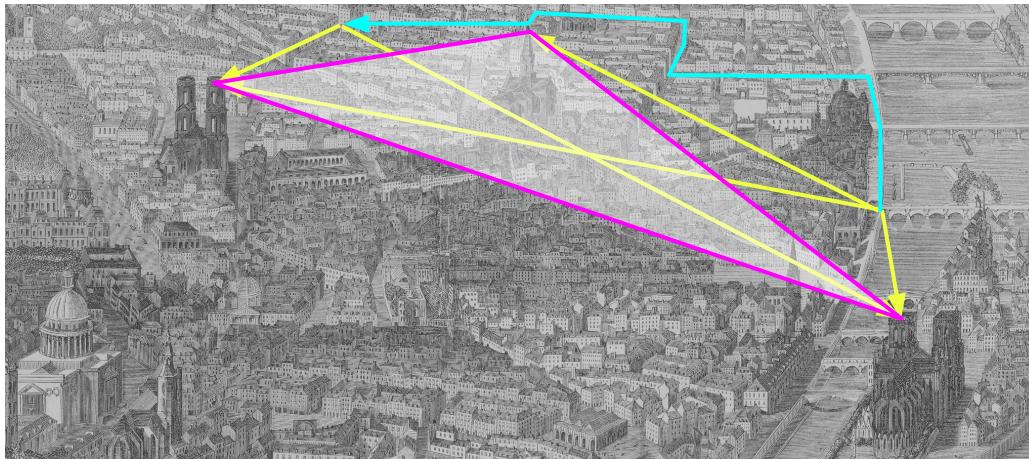
Que nous apprend le mémoire sur la construction du plan?

3

- ❖ Stratégie de construction itérative
- ❖ Volume des mesures et des calculs :
 - 32 points de station à localiser,
 - 32 stations * 2 triangles visés par station * 3 sommets = 192 résolutions de triangles
 - 192 résolutions * 35 calculs ~ 6720 calculs à réaliser.
→ et donc autant de risques d'erreurs!
- ❖ Stratégies de maîtrise des erreurs et de leur propagation :
- ➔ **de mesure** : compensation (3 triangles résolus par station et calculs des coordonnées moyennes) + 1 vérification (visées de la station vers 2 triangles connus) + 1 compensation supplémentaire (calcul des coordonnées moyennes des deux résultats précédents).
- ➔ **de calcul**: privilégié les stratégies de calcul connues et maîtrisées.

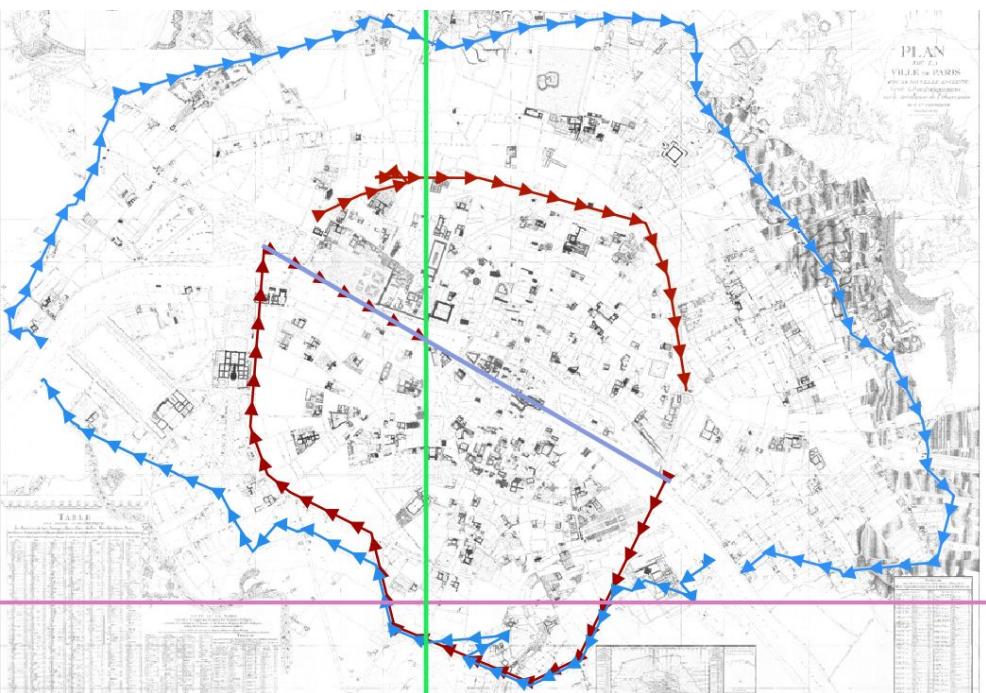


Quatrième niveau : cheminements et accrochage des plans particuliers des rues

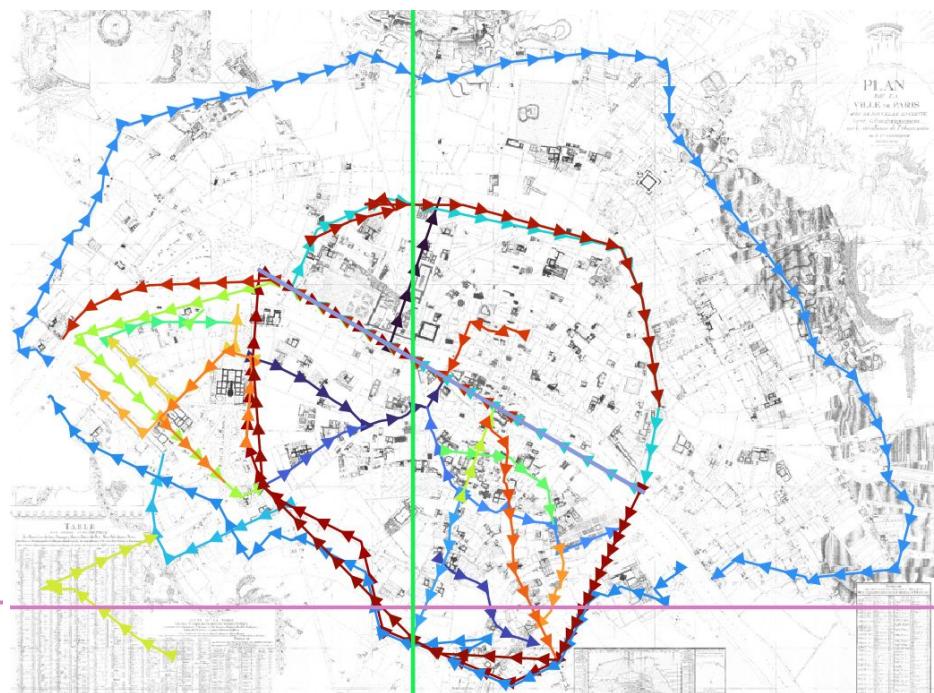




Quatrième niveau : cheminements & raccord aux rues



Cheminements structurants : bases des anciens boulevards et murs de Paris.



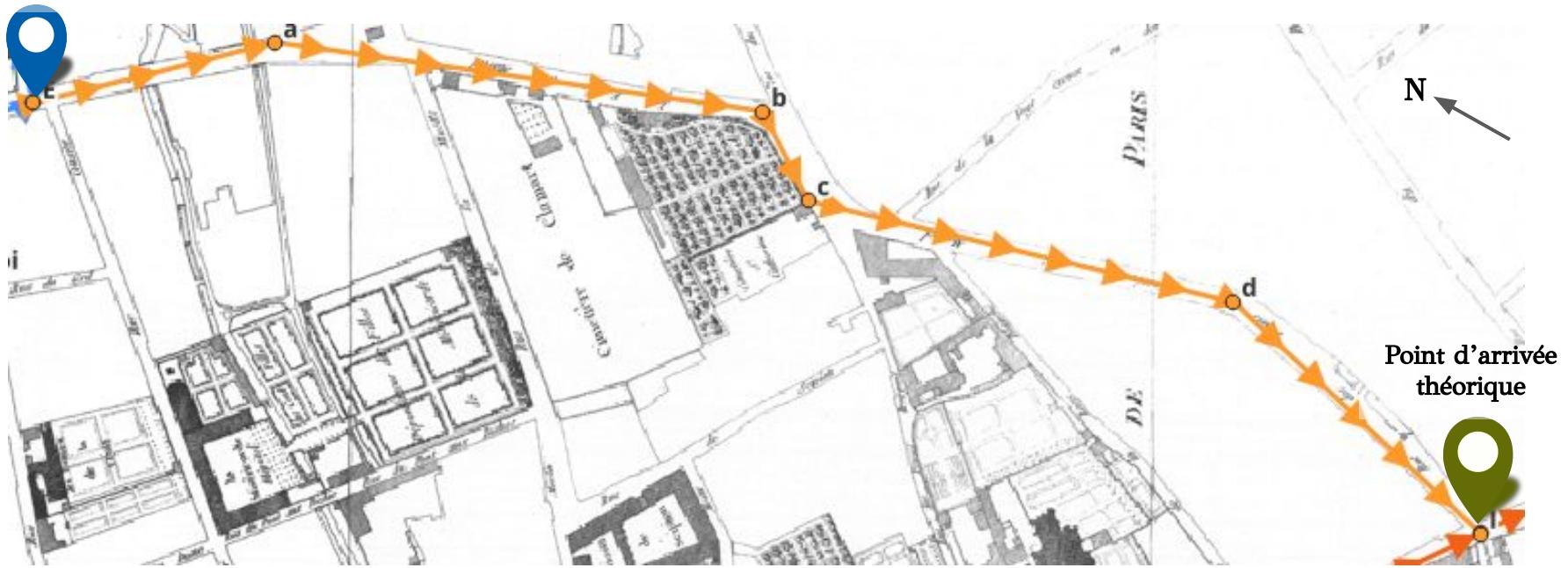
Cheminements dans les rues. Travail en cours.



Quatrième niveau : cheminement & raccord aux rues

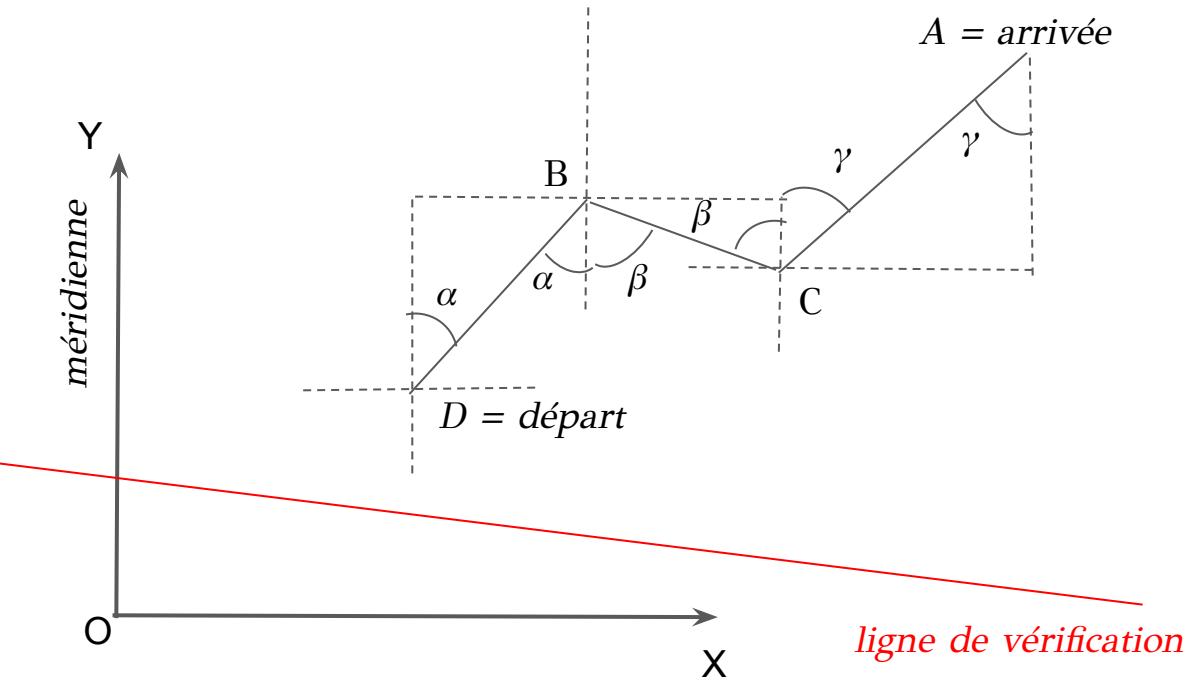
“Reprise au point E rue du Jardin du Roi pour arriver au point I rue Moufetard”, cheminement de 780 mètres.

Point de départ
connu





Quatrième niveau : cheminements & raccord aux rues



$$X_B = X_D + DB * \sin(\alpha)$$
$$Y_B = Y_D + DB * \sin(90 - \alpha)$$

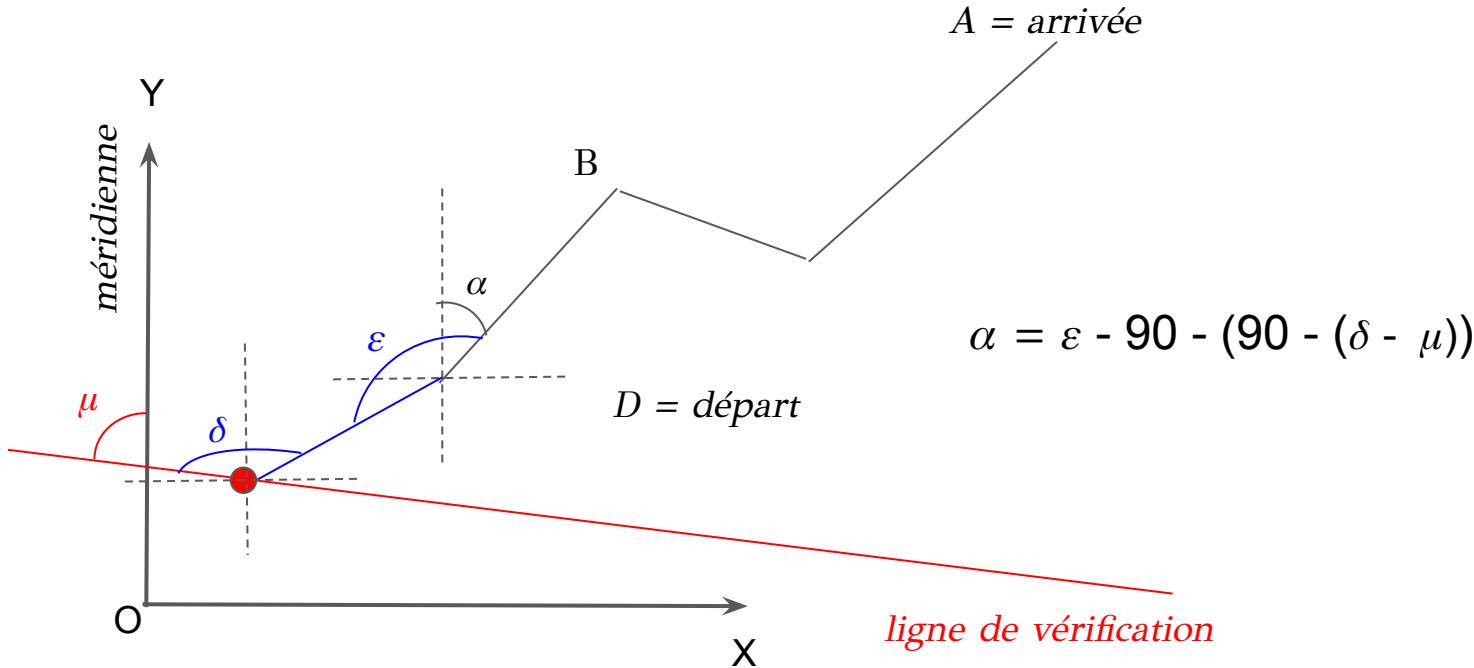
$$\beta = DBC - \alpha$$

$$X_C = X_B + BC * \sin(\beta)$$
$$Y_C = Y_B + BC * \sin(90 - \beta)$$

$$\gamma = BDA - \beta$$

$$X_A = X_C + CA * \sin(\gamma)$$
$$Y_A = Y_C + CA * \sin(90 - \gamma)$$

Cheminements & raccord aux rues: le rôle de la ligne de vérification et des cheminements des boulevards





Calculs des cheminements

angle $\delta - \mu$
angle ε
angle α

longueur Fa

Angle à la meridienne.	F. Point de départ.....	481, 46.	1199, 46.
M.M. Point d'Arrivé.....	1223, 49.	2999, 28.	Meridienne
			Perpendiculaire
20, 25, 10.			
89, 2, 0.			
68, 36, 50.	1, 319, 314, 3.	1, 319, 314, 3.	
	9, 969, 017, 0.	9, 961, 877, 5.	
Lat...Fa.			
Base.....	1, 288, 934, 9.	0, 883, 19, 48.	
20, 86.	19, 42.	7, 60.	
	481, 46.	1199, 46.	
	500, 88	1191, 86.	
68, 36, 50			
+46, 27, 30	1, 789, 779, 22.	1, 789, 779, 22.	
	9, 990, 152, 1	9, 928, 889, 4.	
77, 50, 40.			
Par....ab.	1, 779, 944, 3.	1, 118, 183, 6.	
	60, 24	12, 97.	
Base.	500, 88.	1191, 86.	
61, 63.	561, 12.	1204, 88.	
	563, 12.	1204, 88.	

log (Fa)
log(sin(α)) log(sin(90°- α))

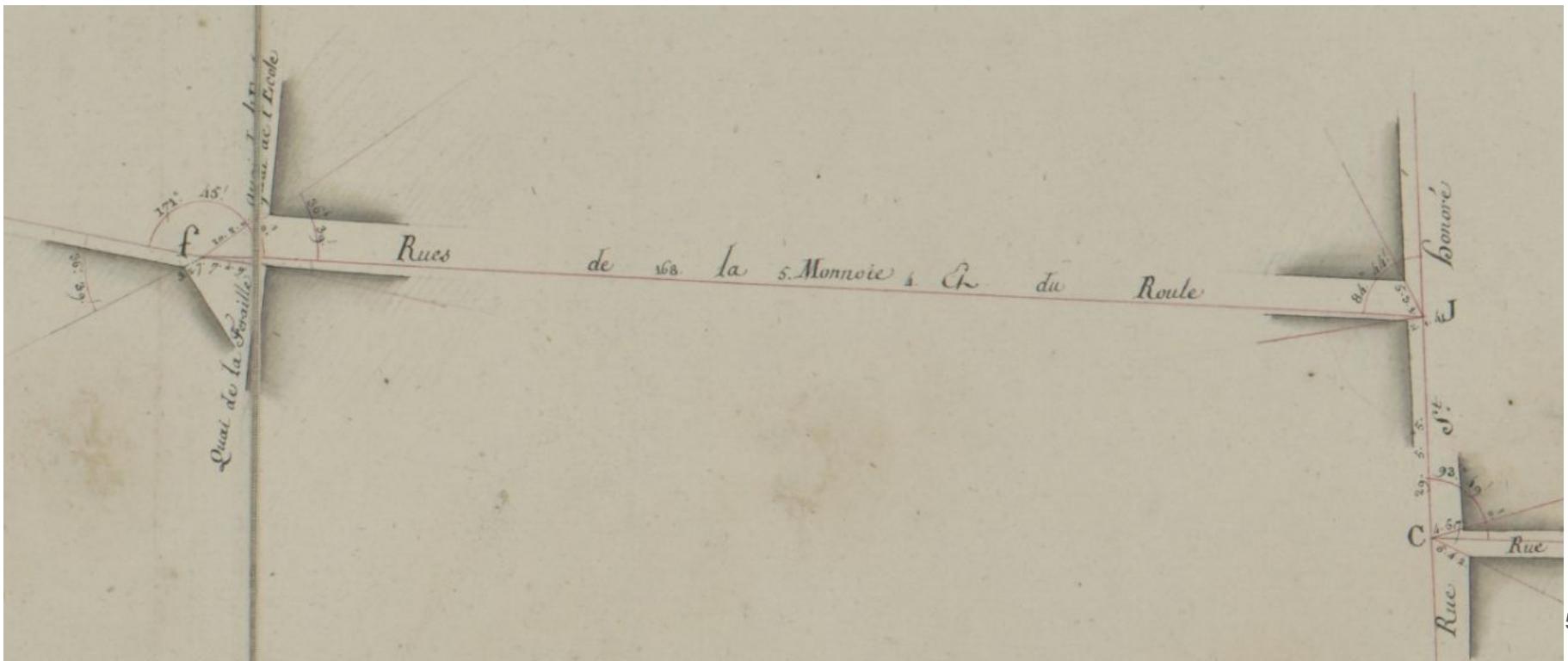
ΔX ΔY
 X_F Y_F

X_a Y_a



Accrochage des plans particuliers des rues à l'armature

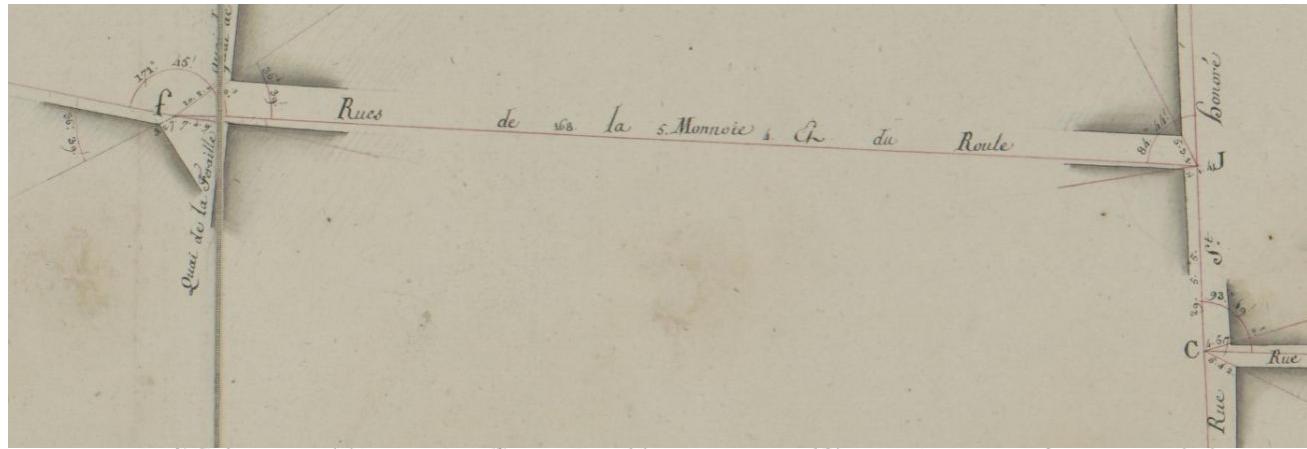
Extrait d'une planche minute de rues, "Pont Neuf, quai de la Feraille, quai de l'Ecole, rues de la Monnaie et du Roule, rue St. honoré, rue de la Tonellerie [etc.]". BHVP, 4-PLA-1261, ark:/73873/pf0001970980.





Accrochage des plans particuliers des rues à l'armature

Extrait de la minute : rue de la Monnoie



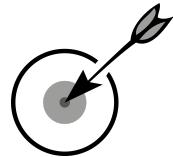


Que nous apprend le mémoire sur la construction du plan?

4

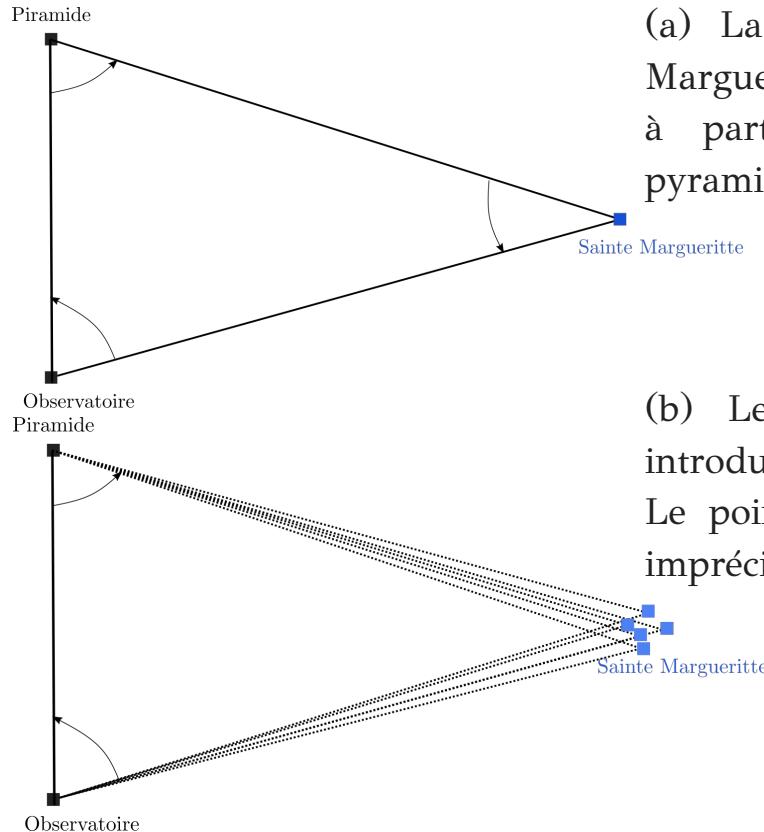
- ❖ Stratégie de construction itérative
- ❖ Volume des mesures et des calculs :
 - une soixantaine de polygonales à calculer,
 - plusieurs centaines de mètres par polygonale, voire plusieurs kilomètres pour les plus longues ~ entre 2 et quelques dizaines de points par polygonale
 - ~ 11 calculs par point
→ et donc autant de risques d'erreurs!
- ❖ Stratégies de maîtrise des erreurs et de leur propagation :
- **de mesure** : nouveau type de mesures: les longueurs des intervalles, polygonales rattachées avec points de départ et d'arrivée connus: fermeture très proche du point d'arrivée théorique → stratégie de compensation non encore identifiée.
- **de calcul**: -

Un référentiel géo-historique ? Évaluation de la précision et de l'exactitude des opérations trigonométriques



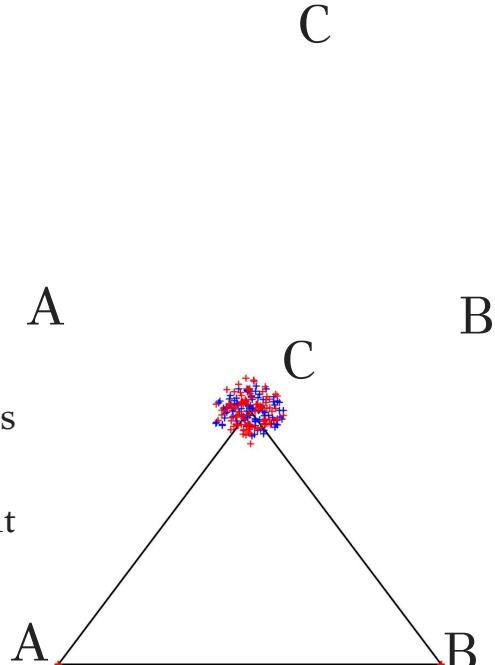


Incertitudes des positions des monuments de Paris



(a) La position du clocher de Sainte Marguerite est calculée par triangulation à partir des points connus de la pyramide et de l'observatoire.

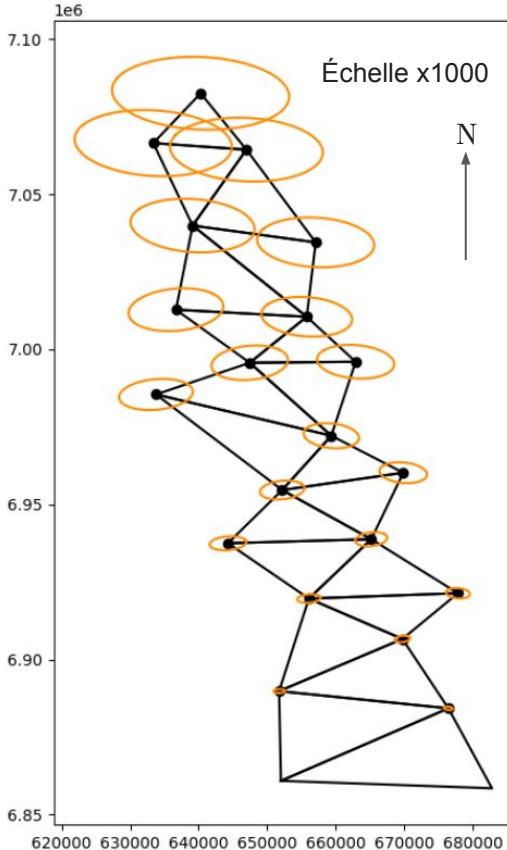
(b) Les erreurs des mesures d'angles introduisent une erreur aléatoire. Le point de Sainte Marguerit(t)e devient imprécis.



Variations de la position du point C lorsque les angles sont bruités.



Propagation des erreurs de mesures angulaires

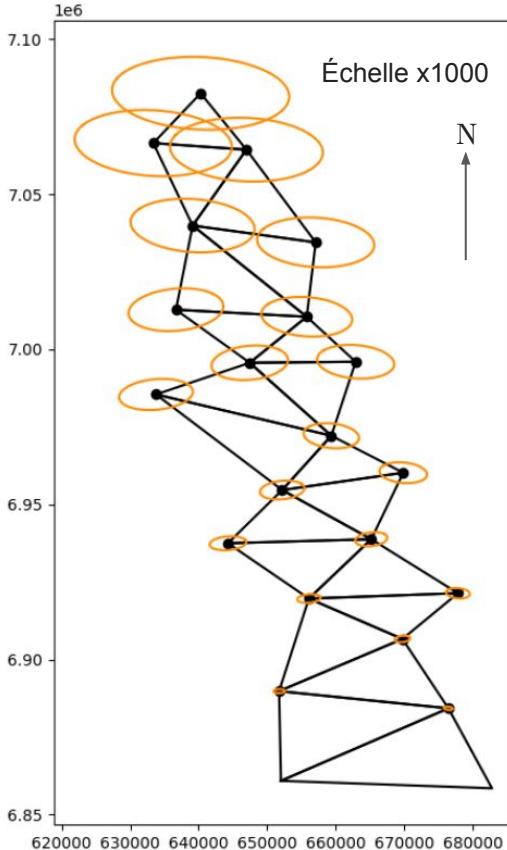


Ellipse d'incertitude : une représentation graphique de l'incertitude sur la position d'un point calculé par triangulation, avec une erreur angulaire.

VIDÉO ELLIPSE 1



Propagation des erreurs de mesures angulaires



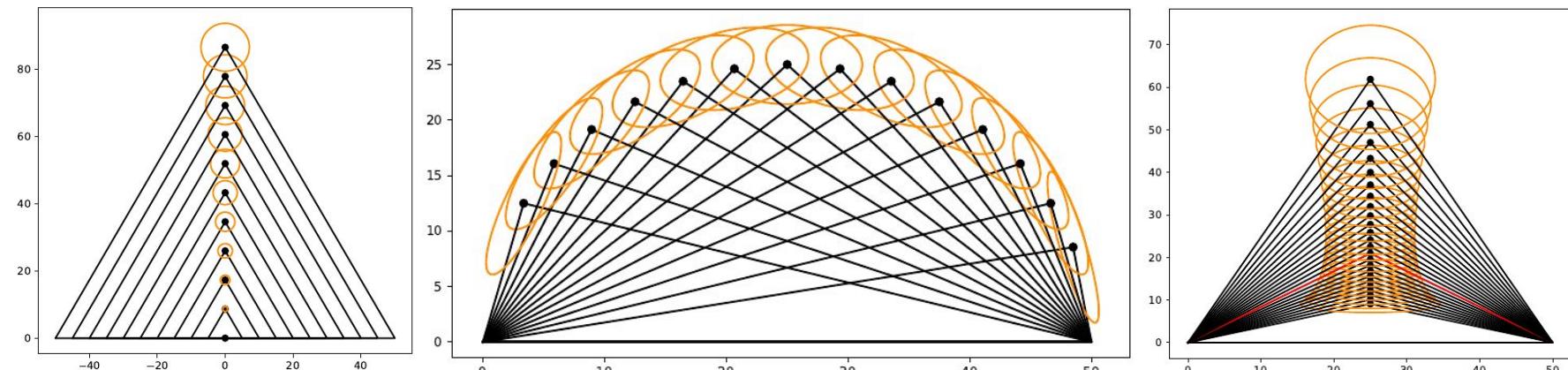
Ellipse d'incertitude : une représentation graphique de l'incertitude sur la position d'un point calculé par triangulation, avec une erreur angulaire.

VIDÉO ELLIPSE 1



Impacts de la forme et de la taille des triangles

Ellipses d'incertitude de position en X et Y d'un point triangulé



(a) Pour différentes longueurs de base, de 0 à 100m

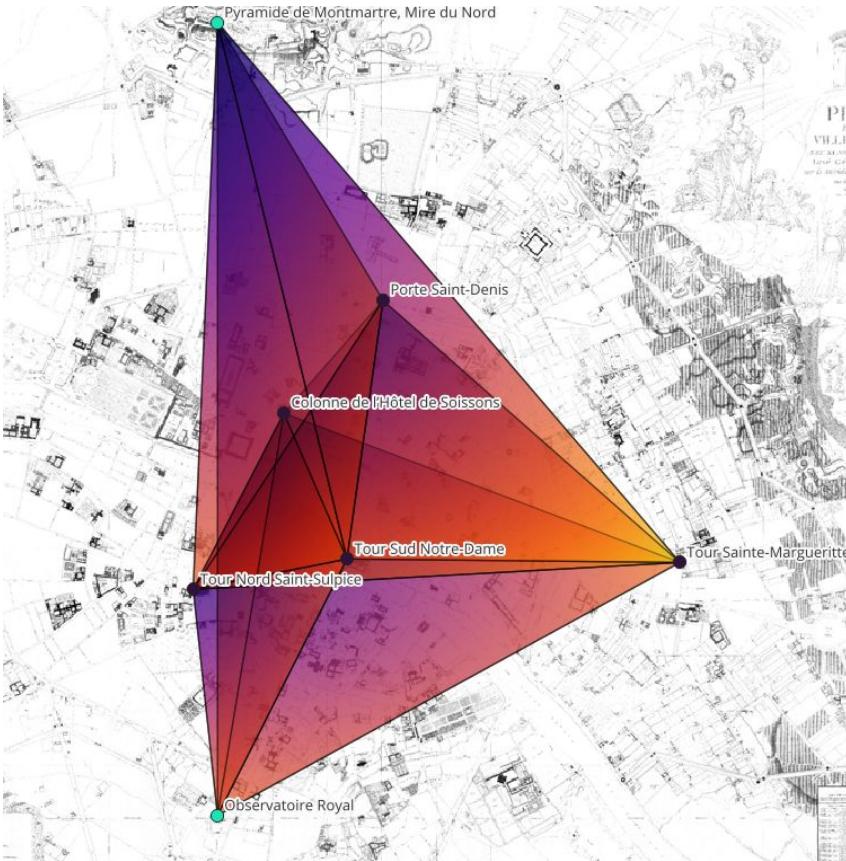
(b) Pour différentes positions du point triangulé

(c) Pour différentes profondeurs du point triangulé



Les instruments & la méthode de résolution permettent-ils une précision au 1/10^e de toise ?

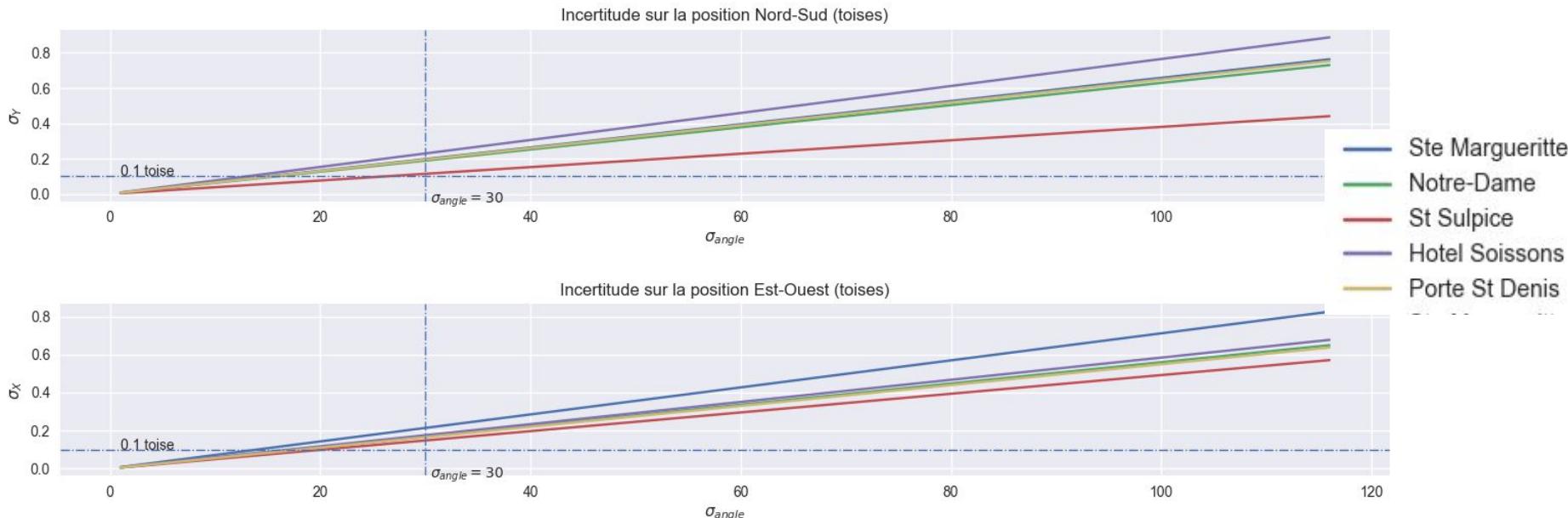
19 triangles de premier ordre pour 7 monuments, donc 5 à déterminer.





Impacts des erreurs angulaires sur les premiers monuments

Propagation des erreurs de mesure d'angles sur les positions des sommets des triangles 1^{er} ordre. Avec 30" d'erreur sur les angles, l'incertitude sur la position des sommets est de **0.16 toises sur l'axe Nord-Sud et 0.15 toises sur l'axe Est-Ouest**.



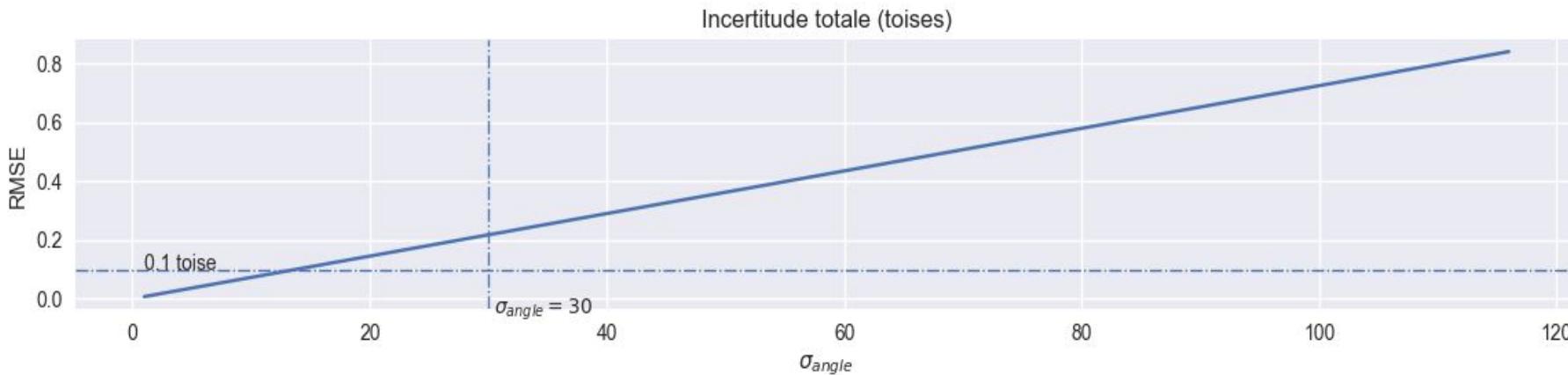


Impacts des erreurs angulaires sur les premiers monuments

Incertitude de position globale de tous les sommets de premier ordre.

Avec $30''$ d'erreur sur les angles, la précision des sommets des triangles est de **0.21 toise**.

L'incertitude de position est cohérente avec le nombre de chiffres significatifs donnés (1 décimale, 0.1 toise)





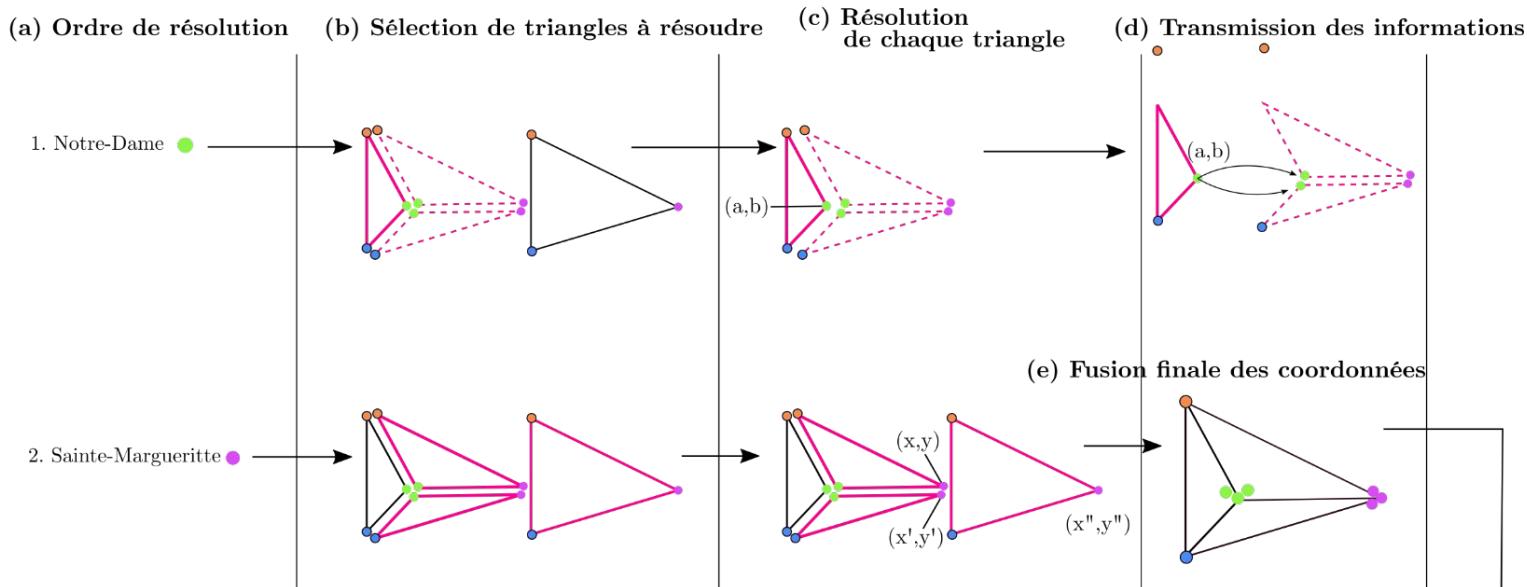
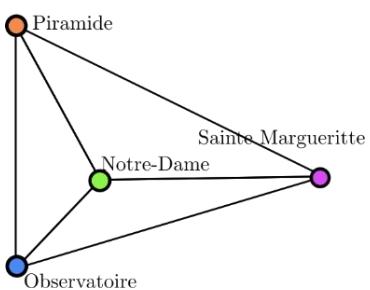
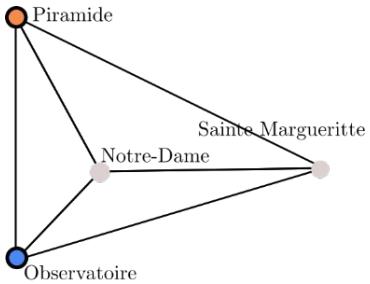
Aurait-il été possible de faire mieux avec les mêmes moyens ?

La stratégie de résolution des triangles consiste à résoudre chaque sommet dans l'ordre. D'abord Ste-Marguerite, puis Notre-Dame (tour Sud), Saint-Sulpice (tour Nord), colonne de l'hôtel de Soissons, Porte Saint-Denis.





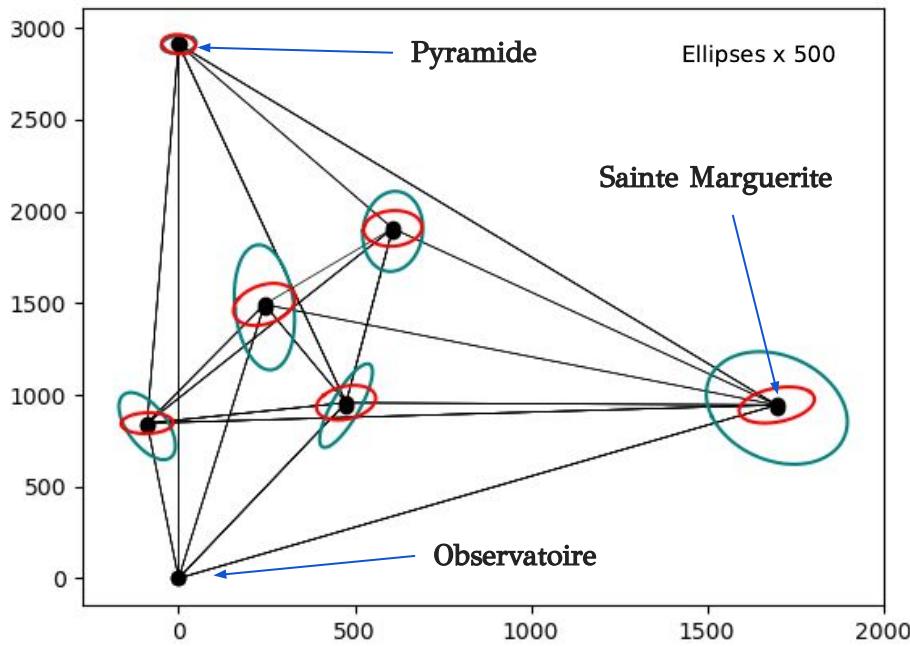
Détails de la résolution itérative des triangles



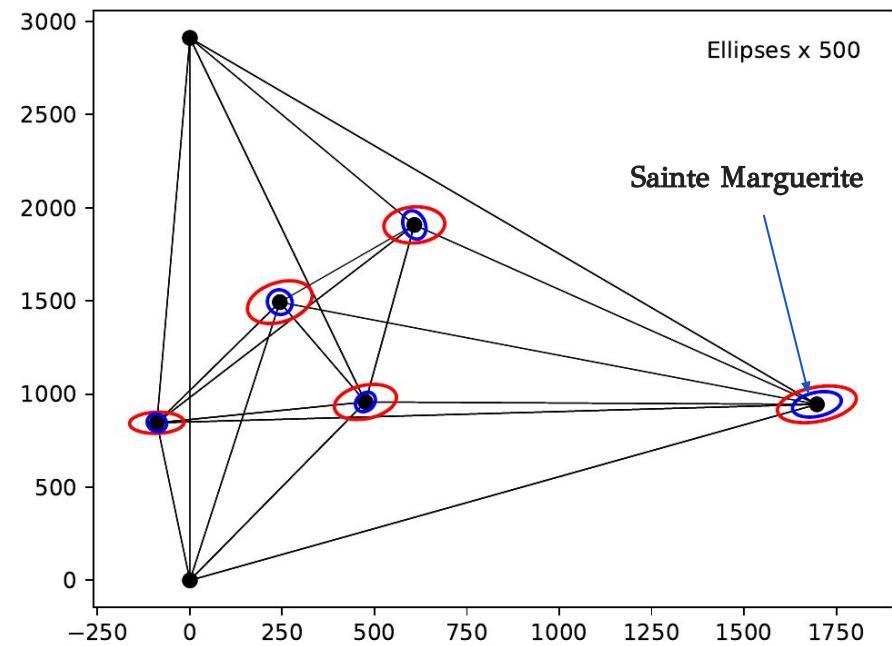


Comparaisons à des stratégies de résolution alternatives

Moyenne des ellipses d'incertitude de 6480 stratégies déterministes ou stochastiques (en bleu). En rouge, la résolution du mémoire des opérations trigonométriques.



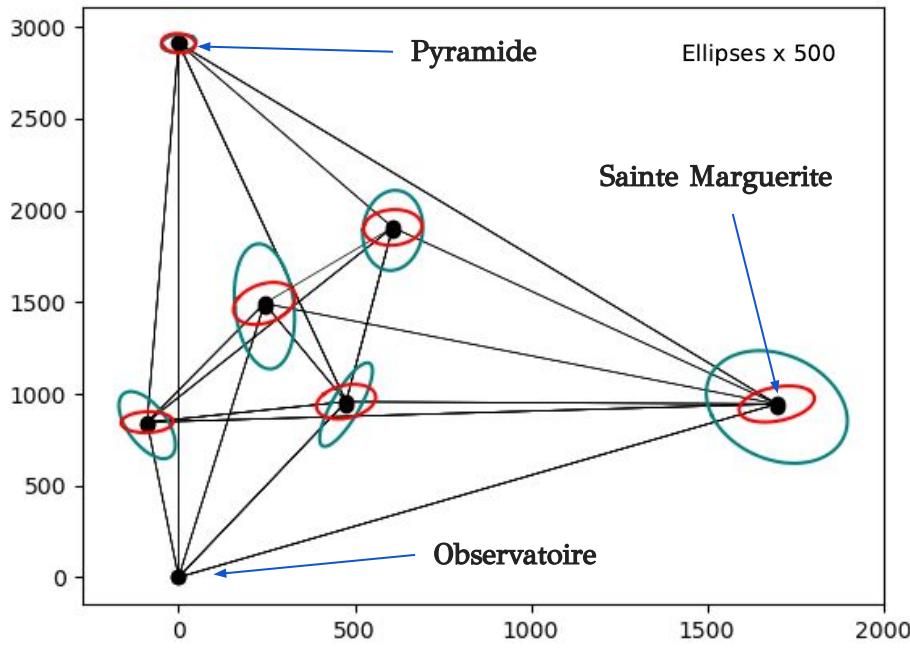
Comparaison à une résolution avec compensation globale des erreurs. En jaune les ellipses d'incertitude du mémoire des opérations.



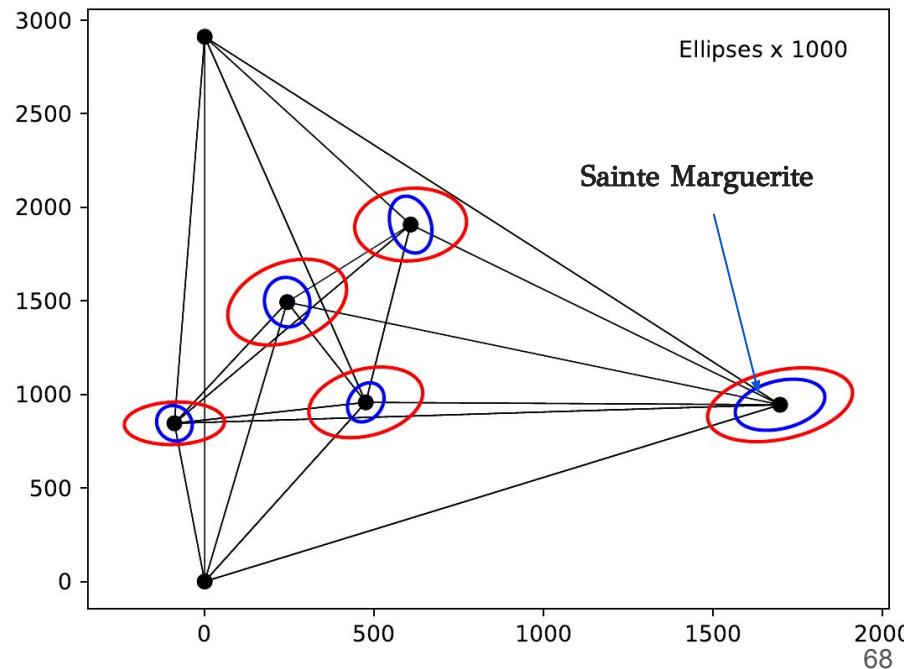


Comparaisons à des stratégies de résolution alternatives

Moyenne des ellipses d'incertitude de 6480 stratégies déterministes ou stochastiques (en bleu). En rouge, la résolution du mémoire des opérations trigonométriques.

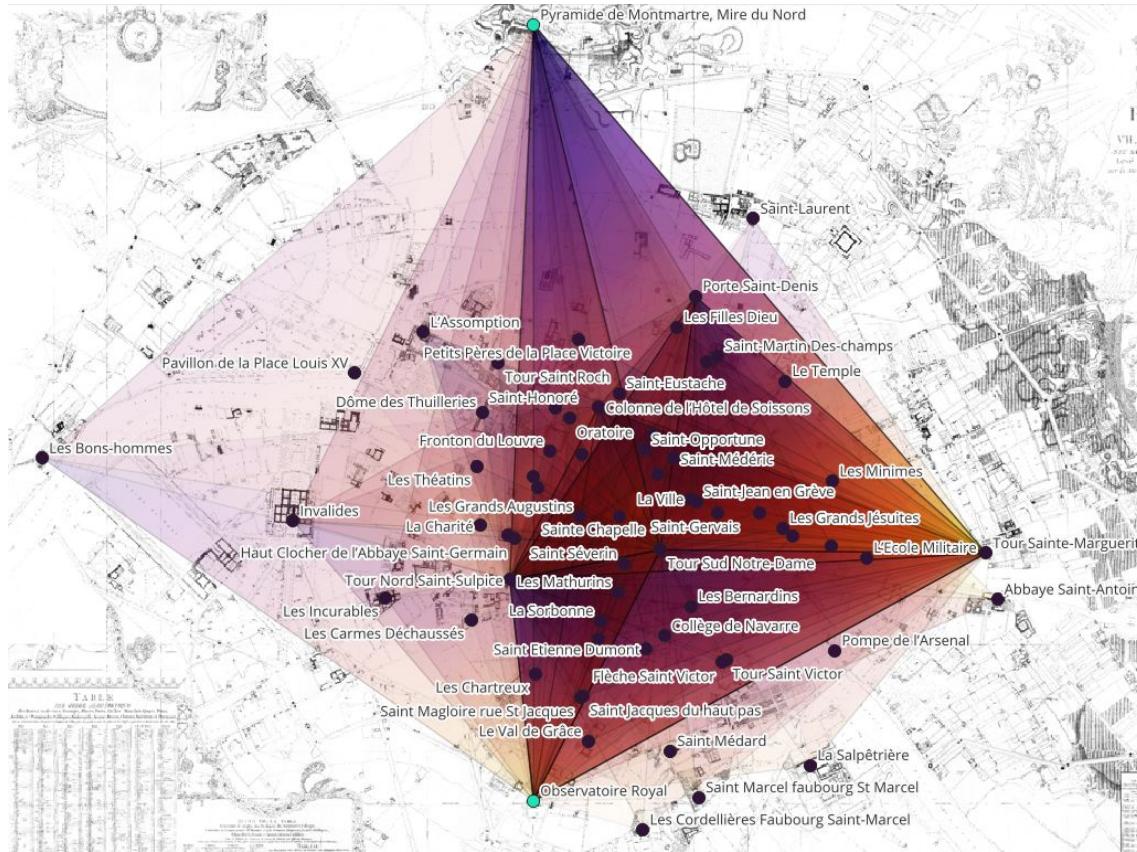


Comparaison à une résolution avec compensation globale des erreurs. En jaune les ellipses d'incertitude du mémoire des opérations.





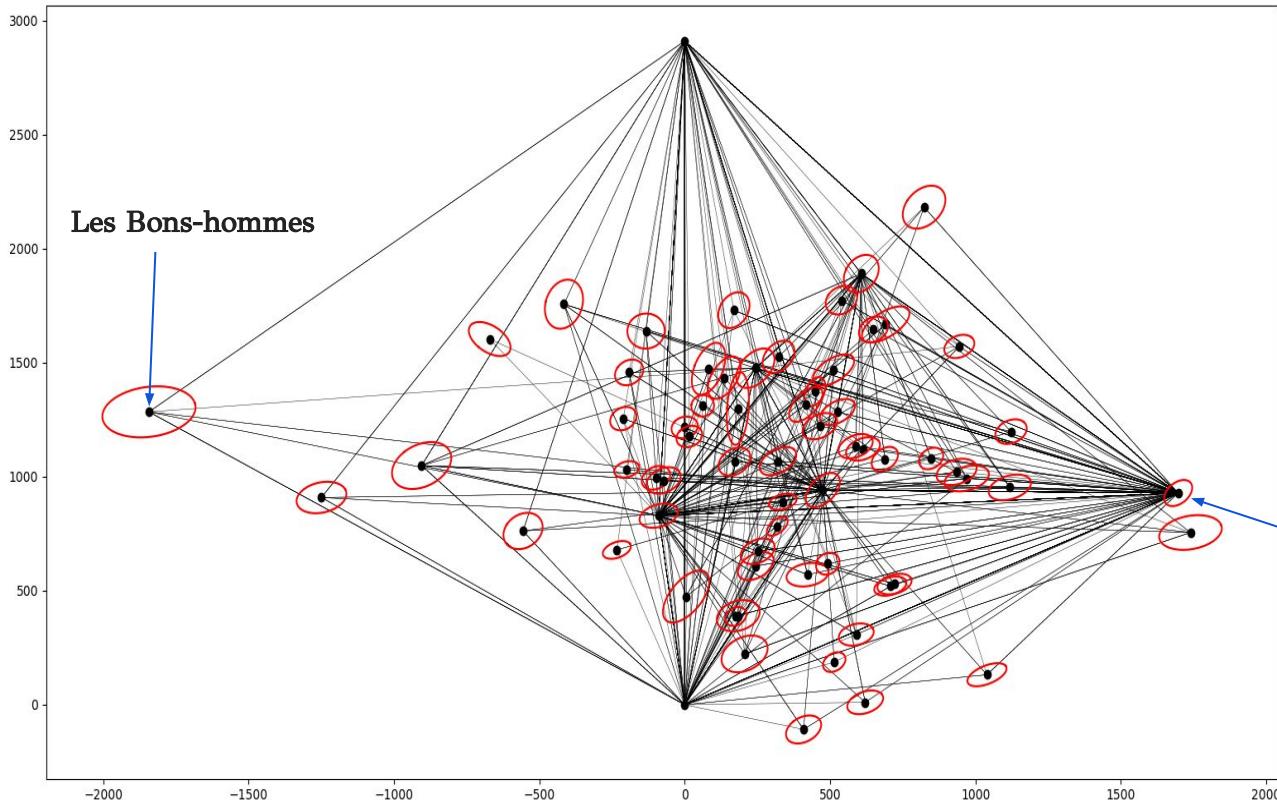
Propagation aux triangles de second ordre



19 triangles de premier ordre
246 triangles de second ordre
59 “clochers de Paris” à déterminer



Propagation aux triangles de second ordre



Ellipses d'incertitude sur les positions des clochers de Paris, (x300).

Les triangles du premier ordre sont résolus d'après la stratégie du mémoire des opérations.

Ceux du second ordre d'après une stratégie approximée.

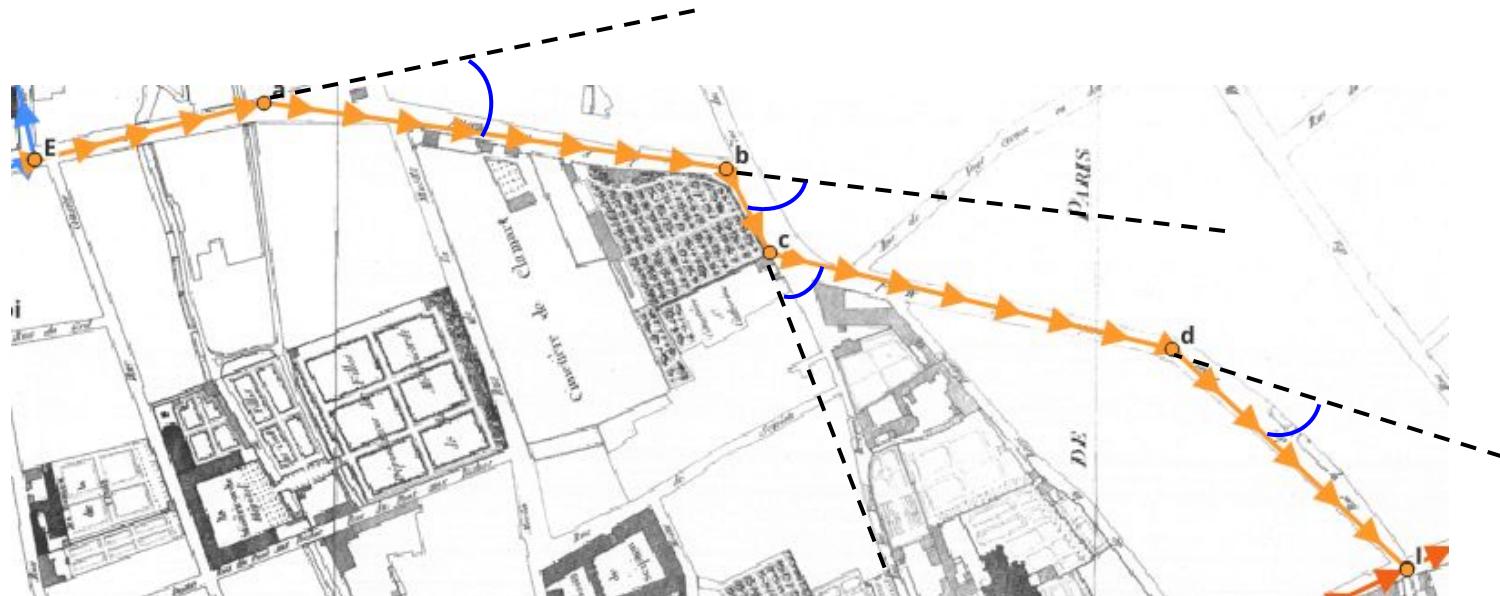
Sainte Marguerite



Modélisation des incertitudes à l'échelle des cheminements

Construction d'un de 3 modèles de propagation d'incertitudes sur des cheminements polygonaux rattachés aux monuments de Paris sommets des triangles de 1er et 2e ordre :

- pour les instruments probables de la fin du XVIII^e siècle (1 m/km de chaîne - 30" sur les angles)
- pour des instruments de mauvaise qualité : (5 m/km de chaîne - 2'30" sur les angles)
- pour des instruments de haute qualité : (0.2 m/km de chaîne - 6" sur les angles)





Modélisation des incertitudes à l'échelle des cheminements

Les incertitudes dues aux cheminements sont calculées à chaque nœud du réseau vectorisé du plan.



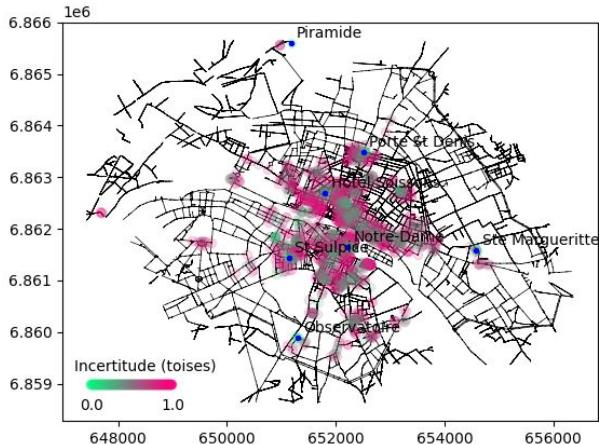


Modélisation des incertitudes à l'échelle des cheminements

Simulation sur le réseau des rues vectorisées depuis l'atlas de Verniquet géoréférencée

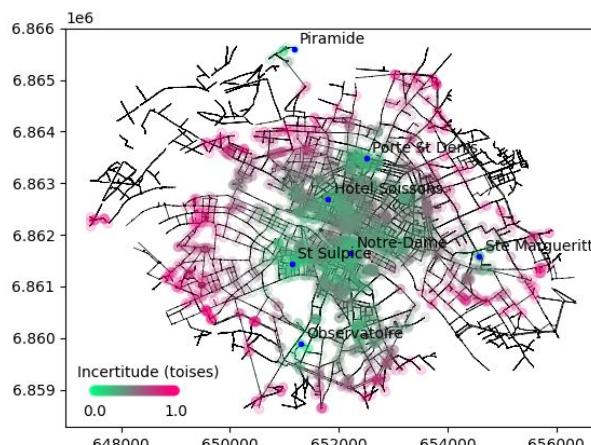
Mauvaise qualité

5 m/km de chaîne, 2°30" sur les angle



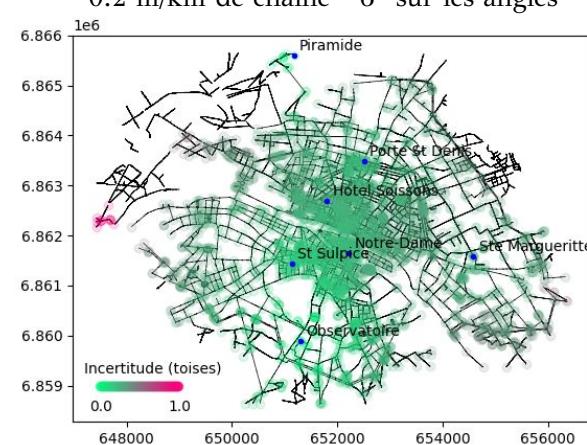
Instruments fin du XVIII^e siècle

1 m/km de chaîne - 30" sur les angles



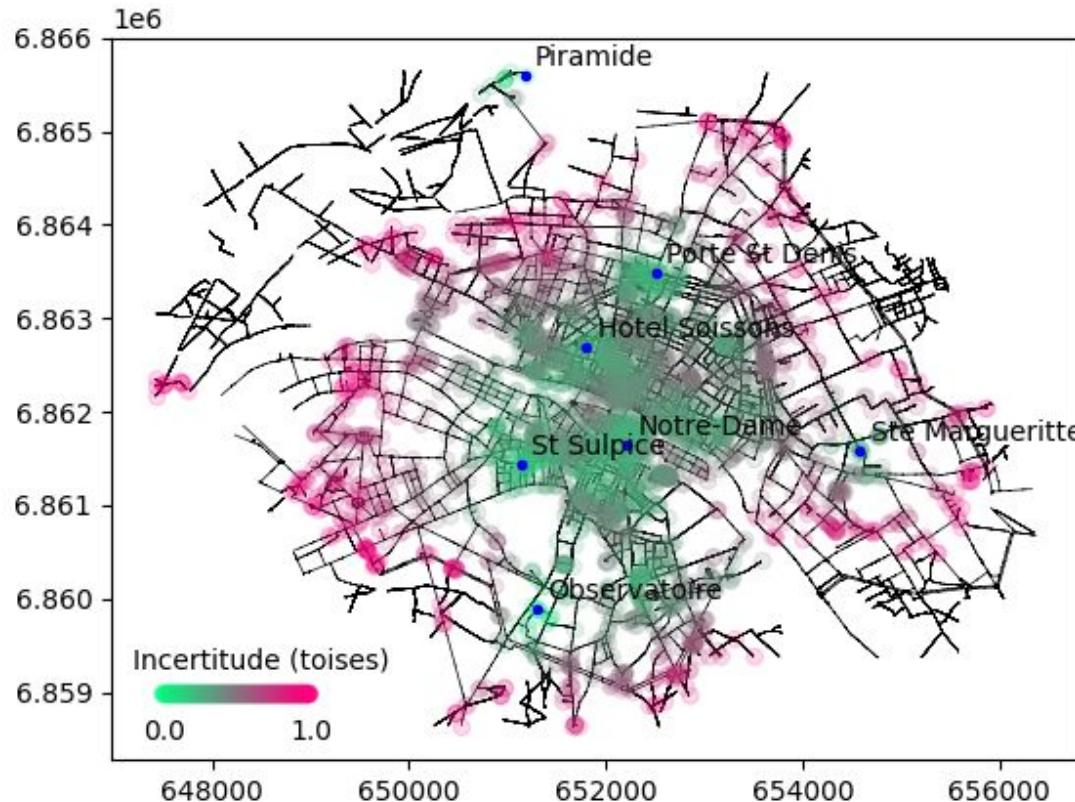
Haute qualité

0.2 m/km de chaîne - 6" sur les angles





Modélisation des incertitudes à l'échelle des cheminements

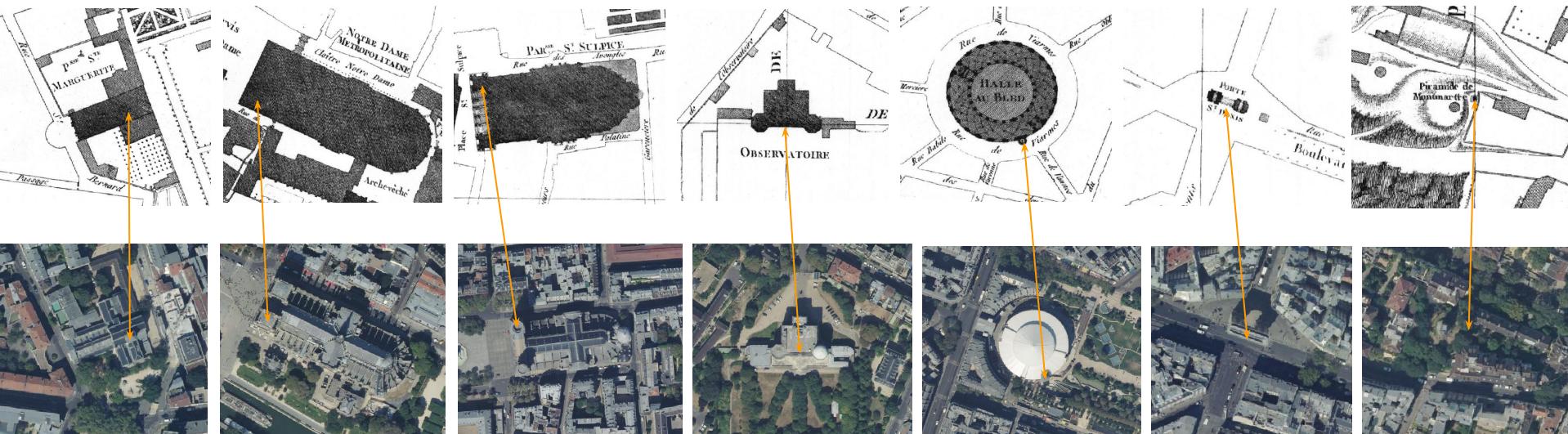


Instruments fin du XVIII^e siècle
1 m/km de chaîne - 30" sur les angles



Un système de coordonnées pour géoréférencer les plans “de Verniquet”

La mise en correspondances des monuments de Paris avec leurs localisations réelles permet de mesurer l'exactitude des positions des monuments de Paris, puis de géoréferencer le plan.



Sainte Marguerite

Tour Sud de
Notre-Dame

Tour Nord de
Saint Sulpice

Point d'origine de
l'observatoire

Colonne de l'hôtel
de Soissons

Porte Saint Denis

Pyramide de
Montmartre

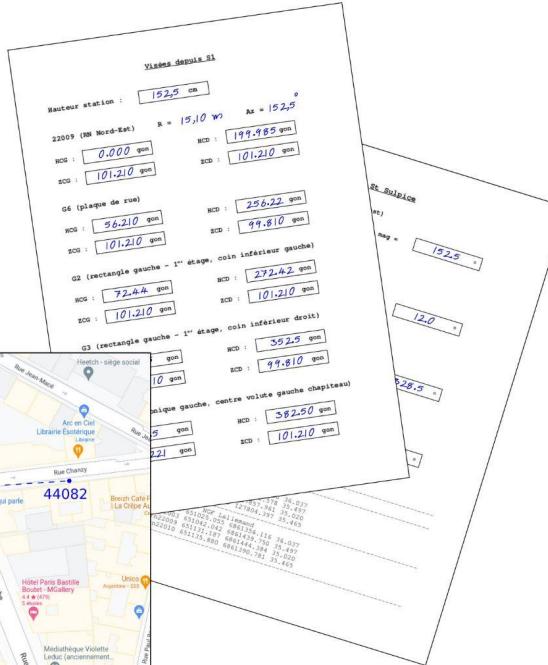
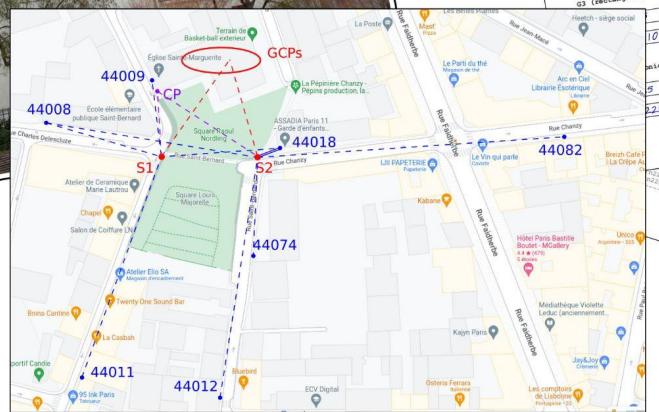


Comment mesurer ce que l'on ne peut atteindre ?



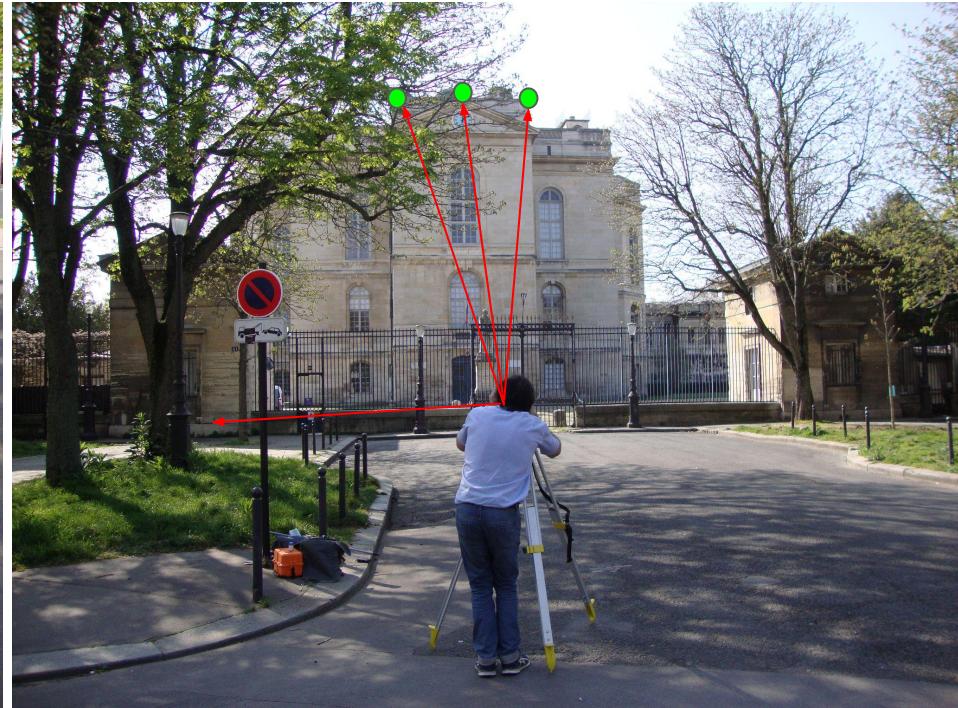


Mesure par triangulation et appui sur le réseau de nivellation de Paris





Triangulation de points choisis, appuyés sur le réseau de nivellation de Paris





Points relevés à Sainte-Marguerite & à l'observatoire

Sainte Marguerite : 11 points ciblés, précision ~0.1m



Observatoire : 3 points ciblés, précision $\pm 0.12\text{m}$

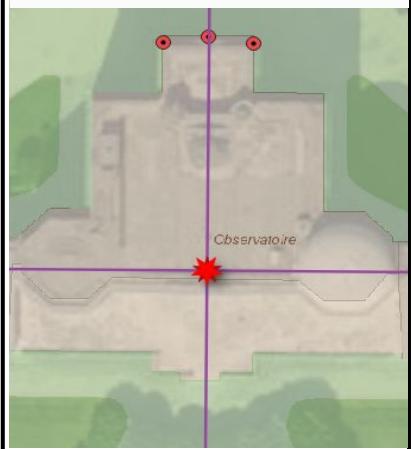




Construction du système de coordonnées du plan de Paris

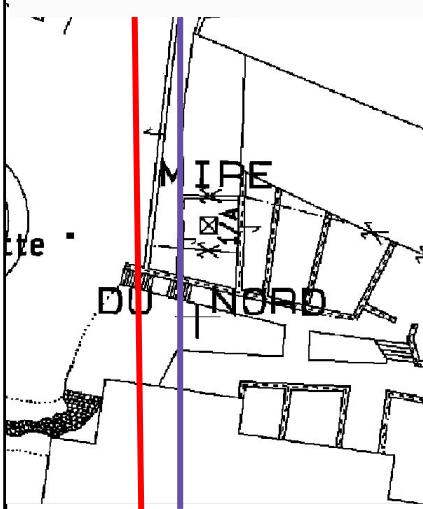
Point d'origine du repère
du plan

2° 20' 11.493"
48° 50' 10.882"



Correction du méridien

1.7024"



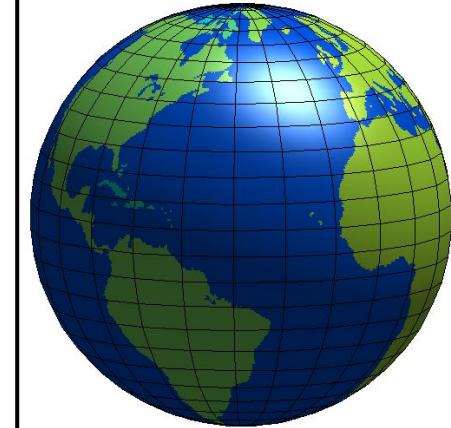
Facteur d'échelle
toise / mètre

1 toise = 1.949,0363 mm

Echelle de Mètres.
1000
Echelle de Quinze Cent Toises

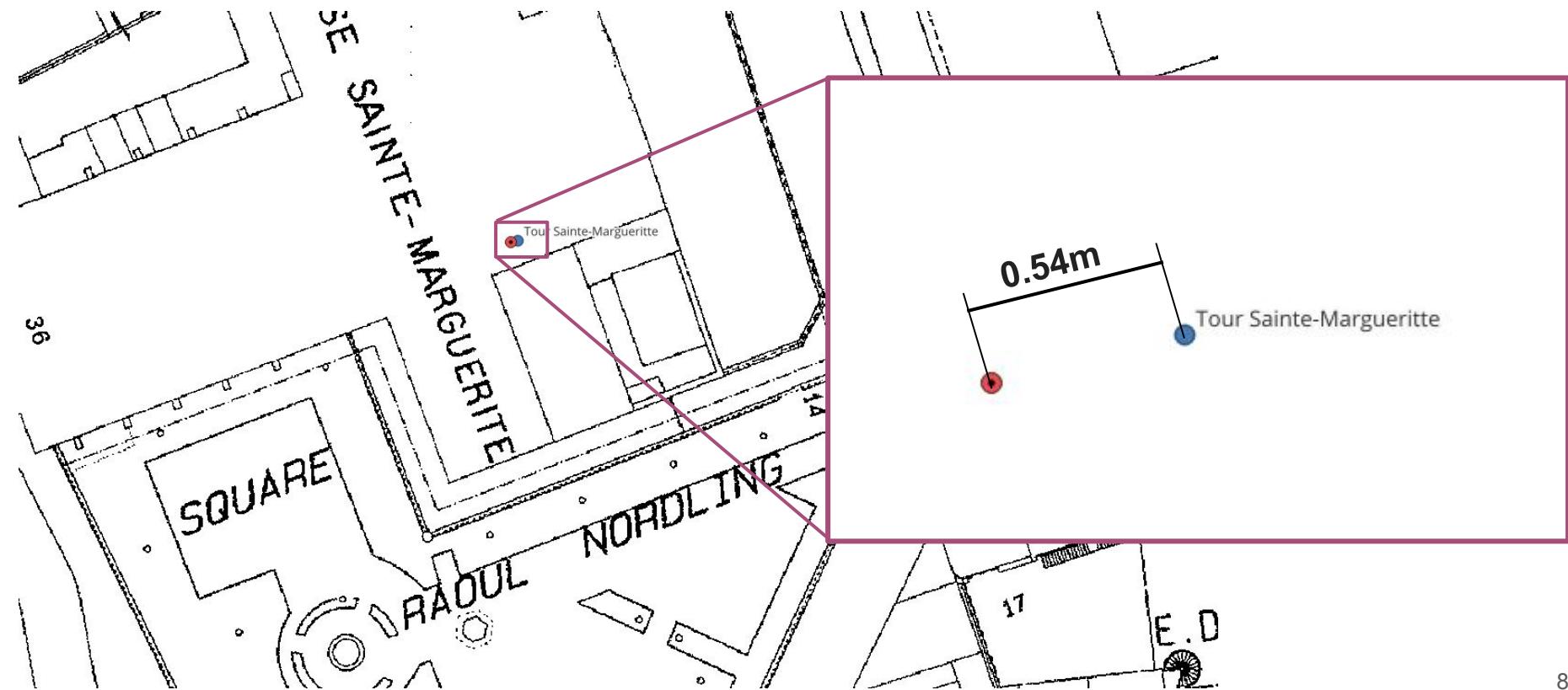
Modèle de la Terre

R = 6371 km





Projection des sommets des triangles de premier ordre



Conclusion

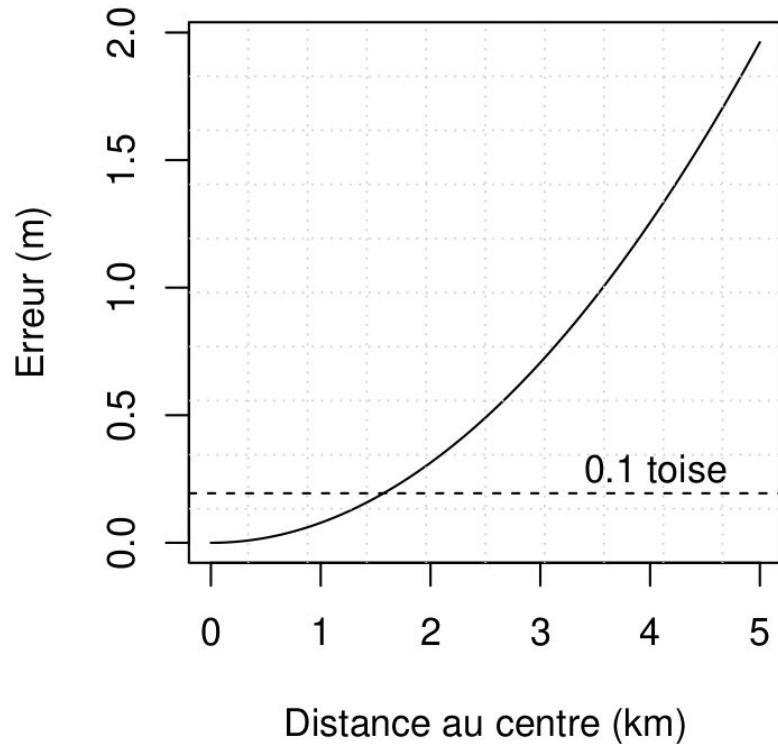
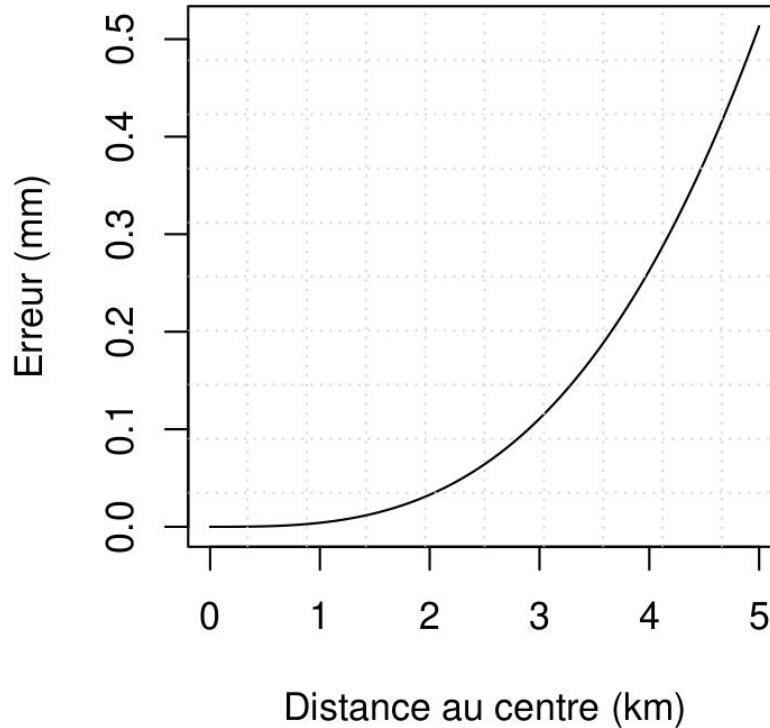
Un référentiel géographique pour géoréférencer les fonds
cartographiques parisiens ?

MERCI DE VOTRE ATTENTION

SUPPLÉMENTS



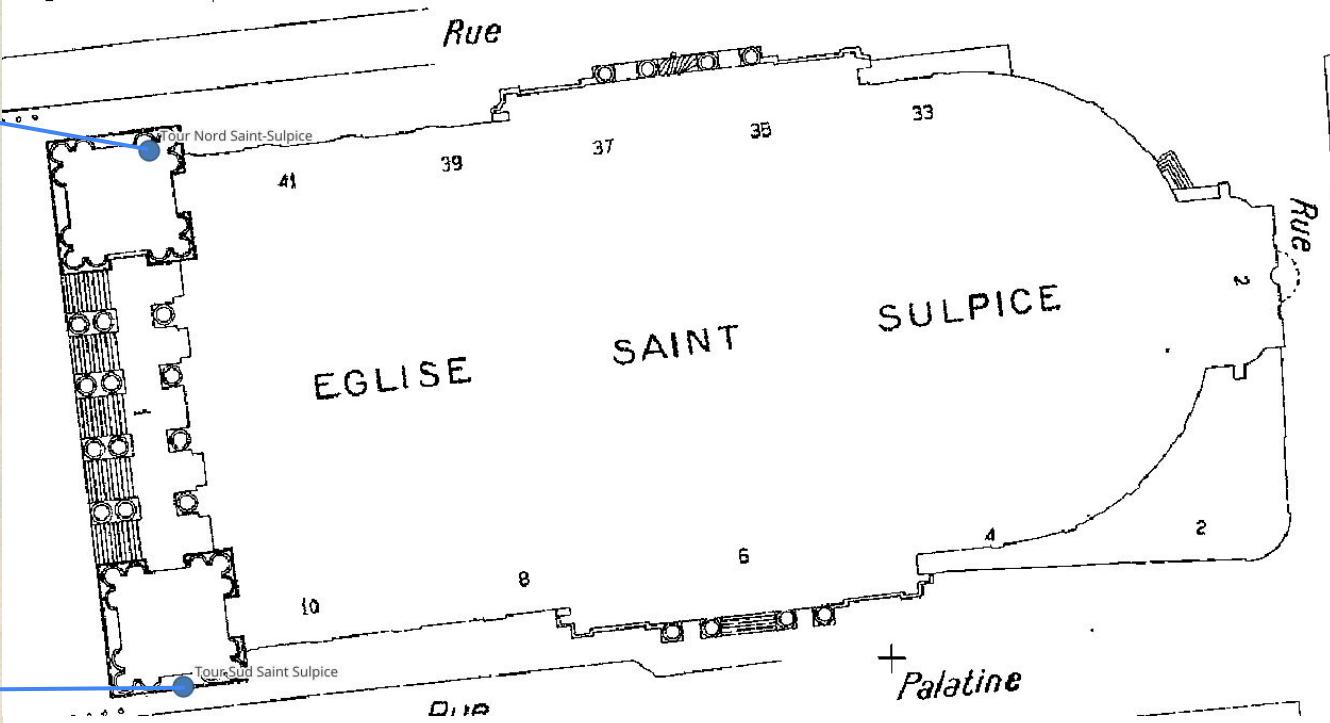
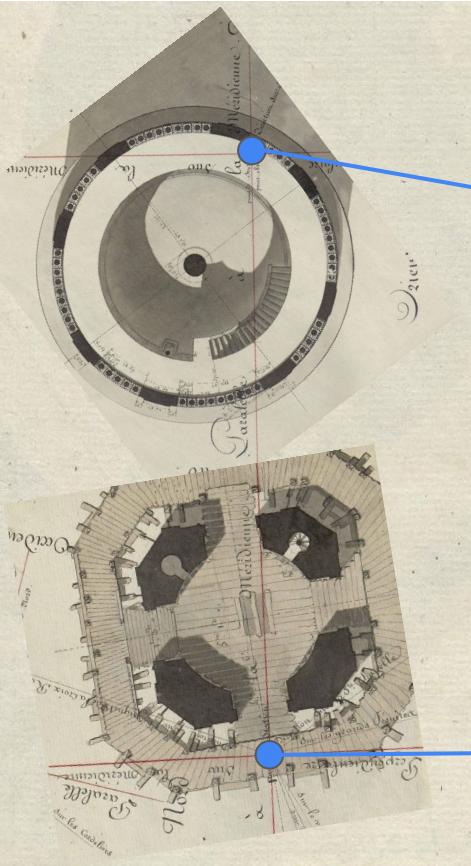
Erreurs due à la rotundité de la Terre



À gauche en planimétrie, à droite en altimétrie

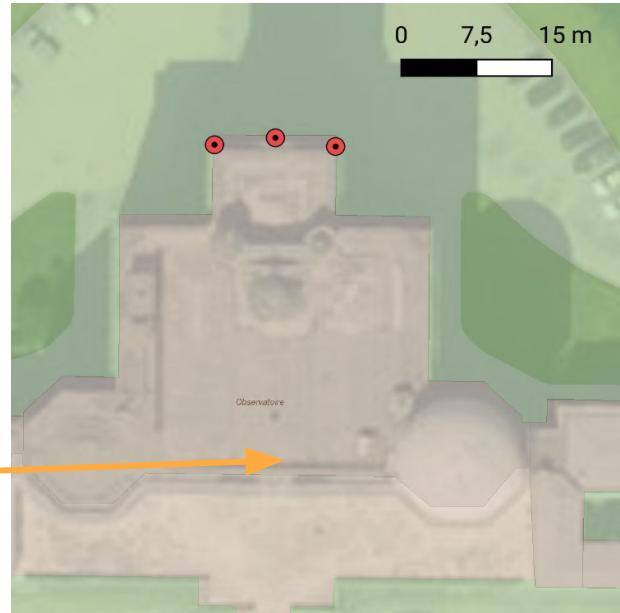
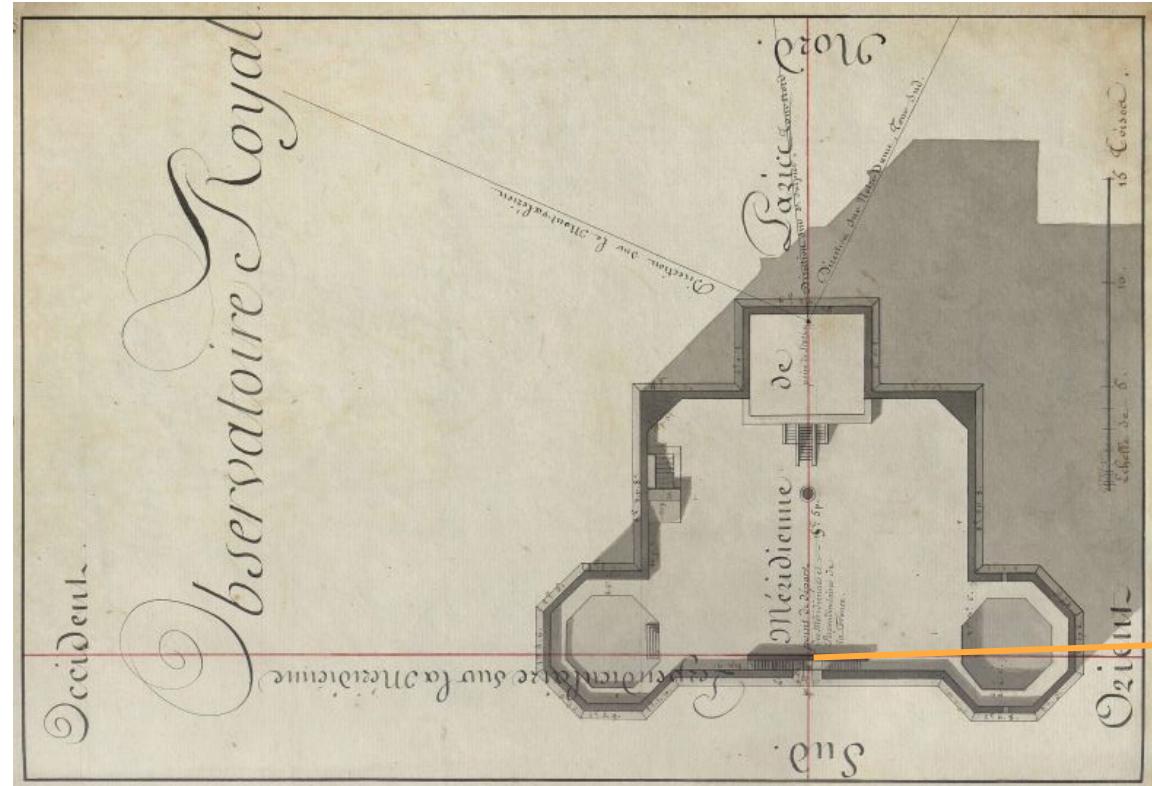


Projection des sommets des triangles de premier ordre



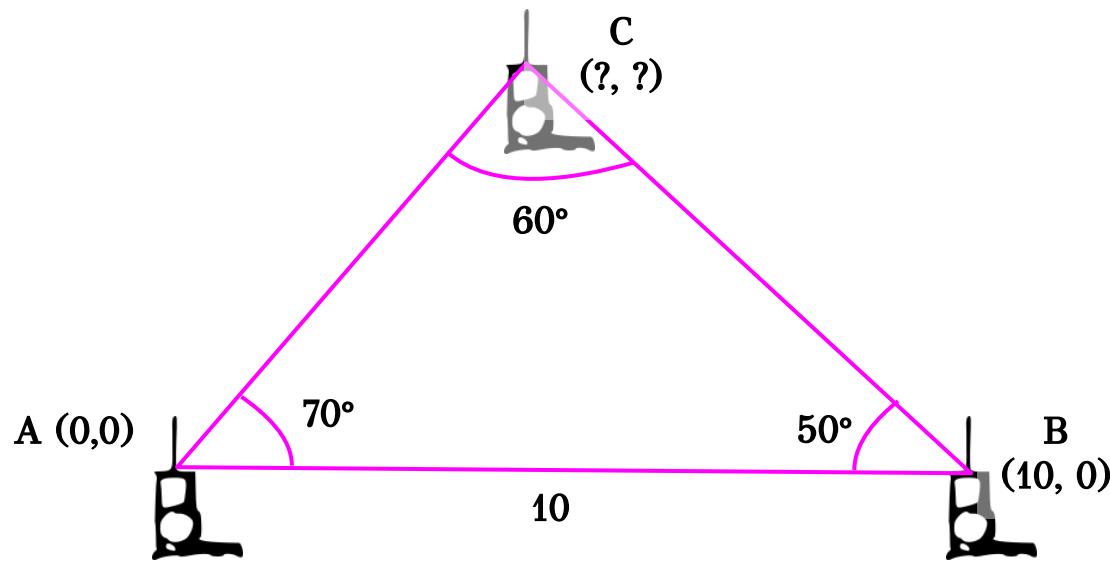


Détermination des coordonnées géographiques de l'observatoire





Mesurer la ville par triangulation : principe général



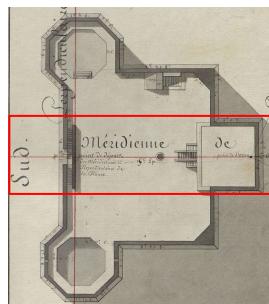
Une méthode fondée sur la loi des sinus : $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC} = \frac{\sin(C)}{AB}$

On peut calculer AC et BC si les angles en A, B, C et la **base** AB est connue



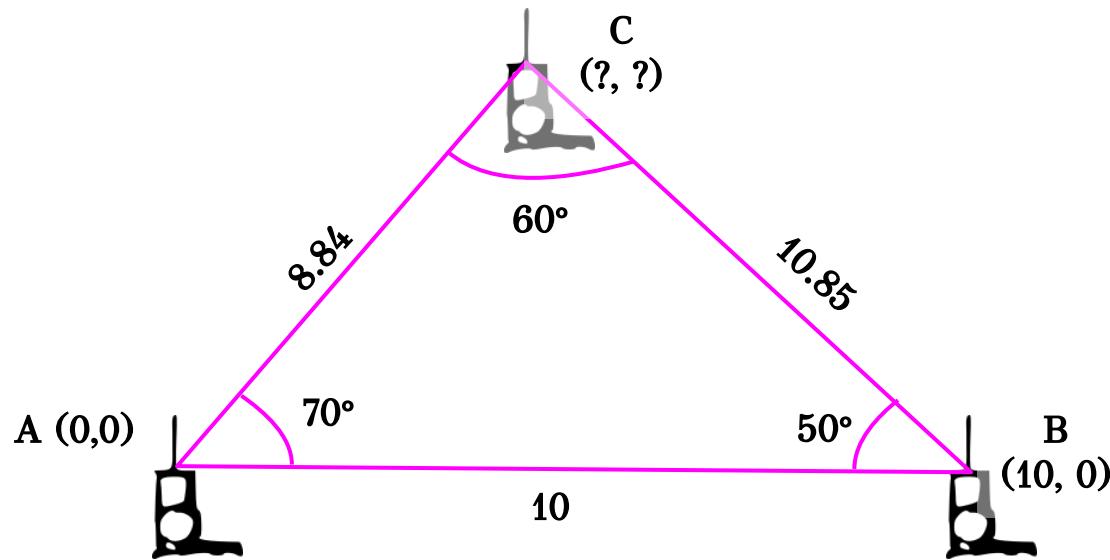
Mesure du point d'origine de la projection du plan

Dessin et cotes du point d'origine du repère orthonormé du plan.





Mesurer la ville par triangulation : principe général

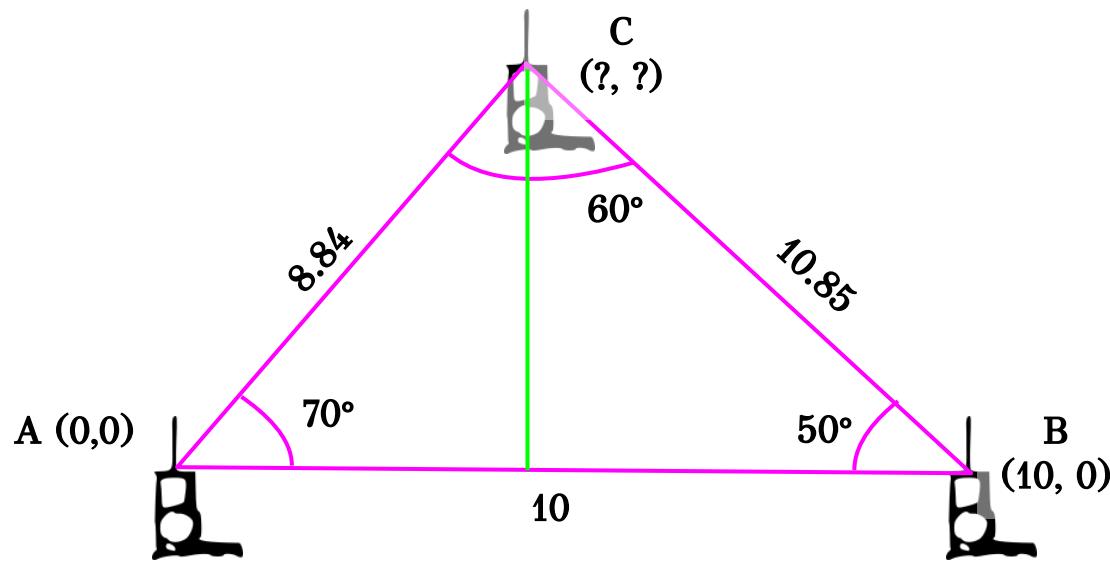


Une méthode fondée sur la loi des sinus : $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC} = \frac{\sin(C)}{AB}$

On peut calculer AC et BC si les angles en A, B, C et la **base** AB est connue



Mesurer la ville par triangulation : principe général



Une méthode fondée sur la loi des sinus : $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC} = \frac{\sin(C)}{AB}$

On peut calculer AC et BC si les angles en A, B, C et la **base** AB est connue

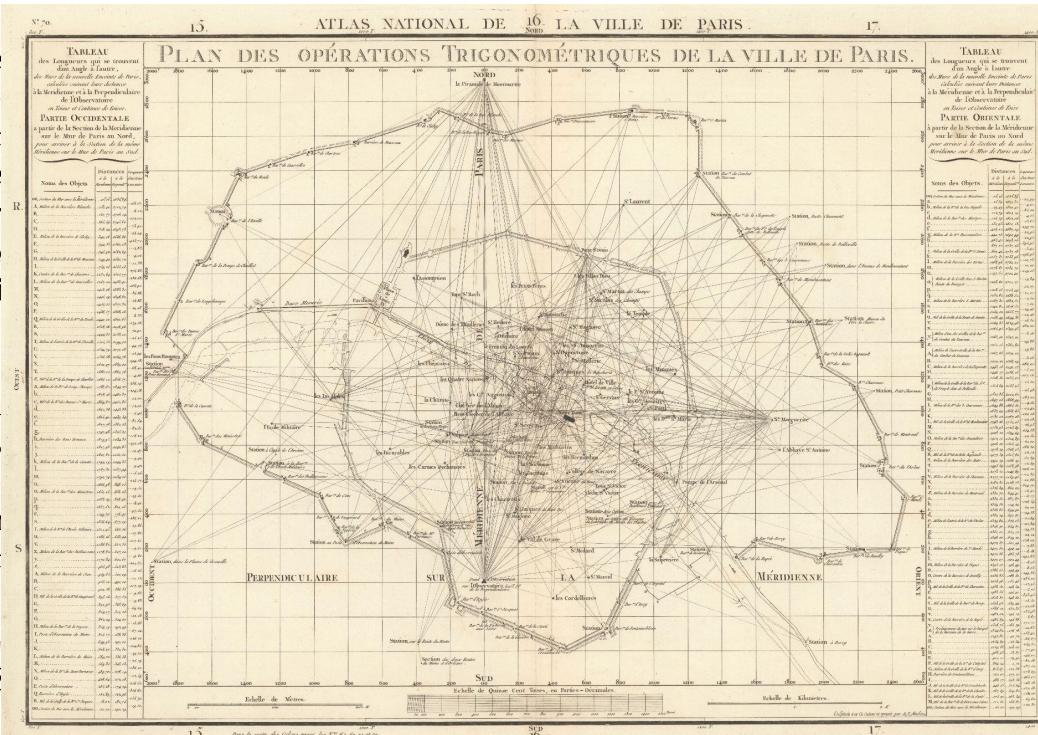


Mise à l'épreuve des opérations du plan, 2022

« C'est en présence des CC. Lacroix & Lalande, que le CC. Verniquet & Mathieu ont placé les points de principaux monumens de Paris, suivant les résultat des calculs qui en ont déterminé les distances des une aux autres; Ils ont été portés ensuite selon leur distances des perpendiculaires à la méridienne. Et **de ces deux opérations, il en est résulté un parfait rapport.**

Comme, depuis qu'il est achevé, ce plan a été mis sous les yeux des principaux savans & artistes, ils ont eu la faculté de **vérifier & de s'assurer de sa justesse**. Néanmoins nous les invitons tous, & particulièrement les mathématiciens & géomètres à se donner cette satisfaction. »

Journal général de la littérature de France, [...], p. 18
vol. 2, 1799. BnF, ark:/12148/bpt6k92604b

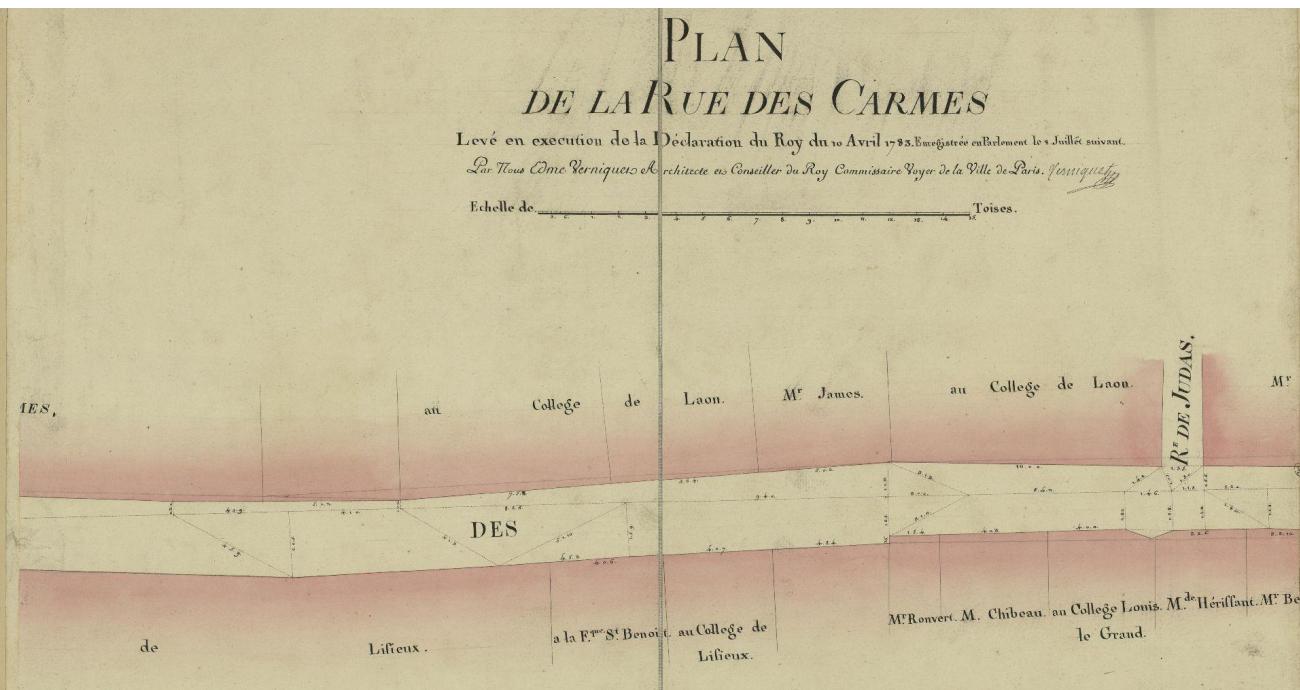


Feuille n° 71 de l'atlas gravé figurant l'armature géométrique du plan



Les sources des opérations trigonométriques

Minutes des plans particuliers des rues, cul-de-sac, passage, place publique, marché, carrefour, quai; du cours de la rivière; des boulevards, etc.
BHVP, Série des plans de Paris d'E. Verniquet



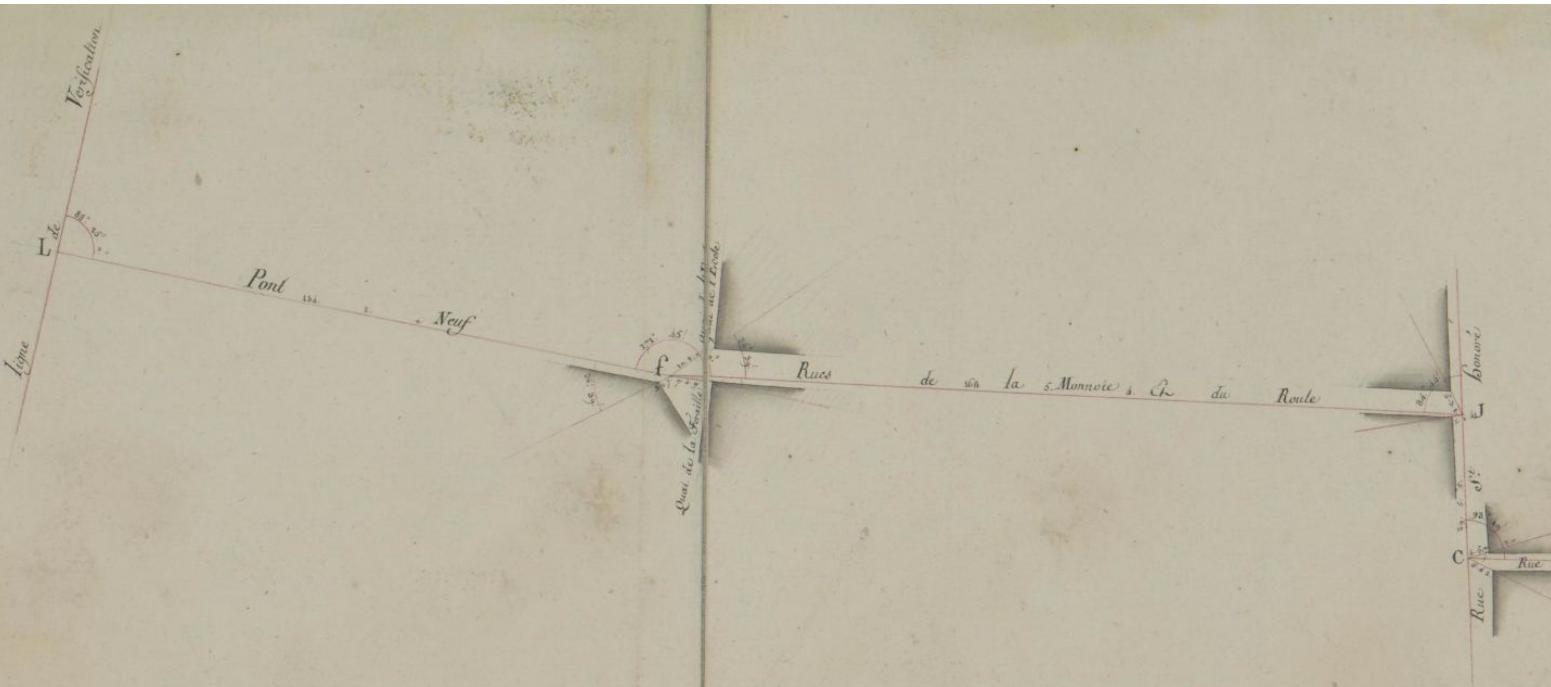
Plan de la Rue des Carmes, Levé en execution de la déclaration du Roy du 10 Avril 1783
Enregistrée en Parlement le 8 Juillet Suivant Par
Nous Edme Verniquet Architecte Conseiller du Roy Commissaire Voyer de la Ville de Paris,
BHVP, ark:/73873/pf0001908896.



Les sources des *opérations trigonométriques*

Minutes des plans particuliers des rues, cul-de-sac, passage, place publique, marché, carrefour, quai; du cours de la rivière; des boulevards, etc.

BHVP, Série des plans de Paris d'E. Verniquet



Pont Neuf, quai de la
Ferrière, quai de
l'Ecole. [...]
BHVP,
ark:/73873/pf0001970980



Introduction - mise à l'épreuve du plan, 1794, 2022

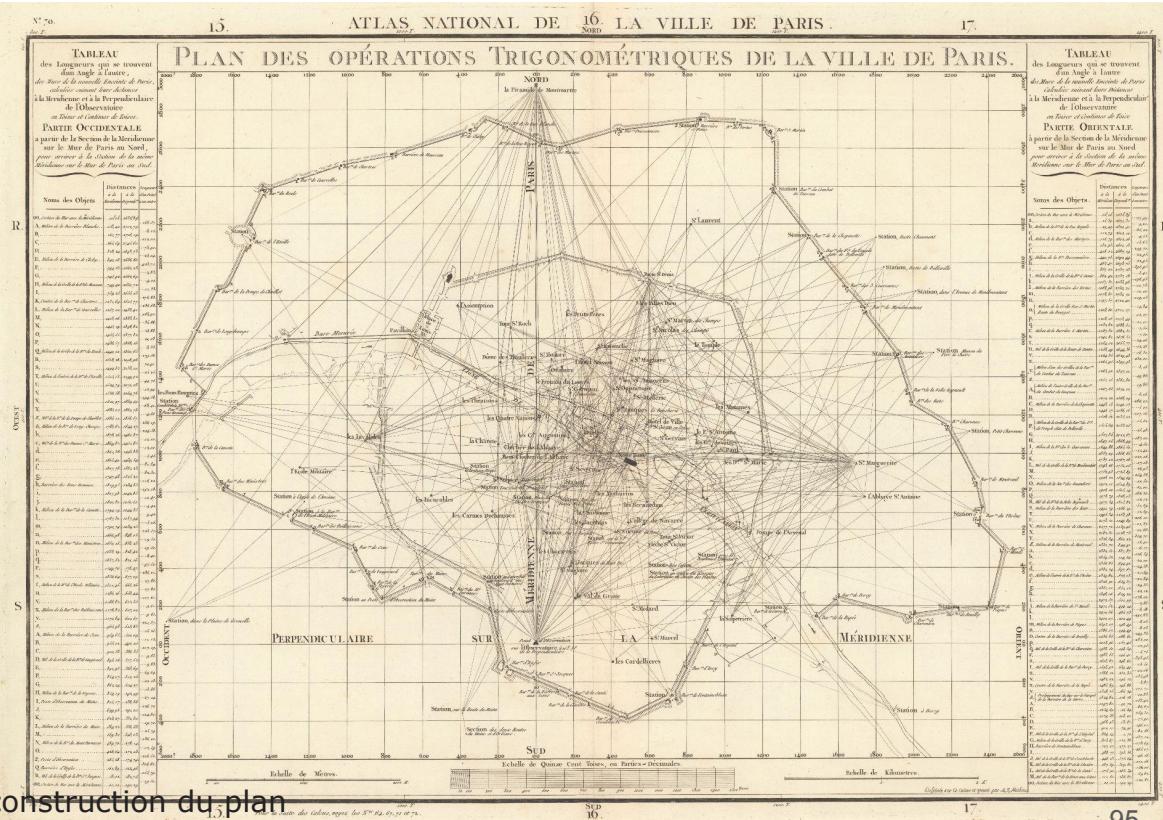
une démonstration technique & scientifique (introduction)

- . replacer le plan de Verniquet dans l'historique de la cartographie scientifique : Cassini, Delagrive, Jeaurat.
 - . le plan comme instrument technique d'administration de la ville : replacer le plan dans le projet de 1774.

définir les termes importants : cartographie géométrique, levé topographique, "opérations trigonométriques"

Énoncer les objectifs:

- une analyse critique des opérations de construction du plan
 - Feuille n° 71 de l'atlas g



Observations brutes de terrain (folios 15-42)

Mesures d'angles faites depuis plusieurs stations.

Pour chaque station :

- un ou plusieurs tour d'horizons (série d'observations)
 - une ouverture de préférence sur un point différent de ceux objets de l'étude et très éloigné (=zéro des mesures)

- puis enchaînement des lectures d'angles de tous les points visés, en principe dans le sens horaire

The image shows a page of handwritten surveying notes. At the top, it reads "Observations Faites à" and "Notre-Dame Couv-Sud". A red box highlights "Notre-Dame Couv-Sud". A green box highlights the text "Entre un petit arbre à côté d'un moulin et". Below this, there is a table with columns for the station name, angle in degrees, minutes, and seconds. The table includes the following data:

Station	Degrés	Minutes	Secondes
Saint-Nicolas du Chardonneret	3	25	30
Saint-Martin	6	27	45
Saint-Marcel, milieu de la Couv.	7	18	0
Le Collège Navarre	12	24	30
Saint-Hippolyte	12	23	30
Saint-Hippolyte, flèche à l'ouest	12	28	0
Les cordelières de la Rue St. Jacques	18	58	15

Observations brutes de terrain

Mesure de distance (facteur d'échelle) :

- évocation lapidaire d'une base au crayon de papier folio 16
- planche 70 : détail de la base mesurée par les équipes de Verniquet
- reprise d'une mesure admise de la distance Observatoire - Piramide de Montmartre)

Instruments de mesure

Des observations de mesures d'angle peuvent s'envisager :

- la forme des instruments : aucune mesure $> 180^\circ \Rightarrow$ demi-cercle
- leur précision : 10", 15" ou 30" selon les tours d'horizons (mais précision des verniers ou précision de l'interprétation de la lecture d'angle ?)

L'information de la précision des mesures d'angle est une information qui peut être utile pour la qualification.

Mesure de distance : pas d'information permettant d'avoir des détails sur les instruments et les modes opératoires, et la précision des mesures.

Tours d'horizon + précision des mesures

Ouvertures et points visés supplémentaires non utilisés pour les calculs par les équipes de Verniquet : peuvent permettre de constituer des triangles supplémentaires et servir pour la base de nouveaux calculs complémentaires plus précis

Certains points indéterminés au moment du lever (ex: ‘un clocher’) peuvent être retrouvés a posteriori (encadré par l’enchaînement des mesures) et compléter la documentation des mesures.

Ces points géodésiques parfois très éloignés ont pu resservir pour des triangulations ultérieures (Ancienne Triangulation des Ingénieurs Géographes) donc leurs coordonnées peuvent être retrouvées et utilisées dans le cadre de cette étude, ou les lieux existent toujours et peuvent être encore déterminés.

Avec les informations de précisions des angles mesurés, toutes ces informations peuvent servir de base à une compensation par moindres carrés pour une détermination ré-actualisée des coordonnées de bases de la cartographie de Verniquet.

Bilan des tours d'horizons

Station	Tour d'horizon	Folio	Nombre de visées	Précision apparente	Ecart type (MMSS)
Notre-Dame Tour Sud	1	17-18	40	15"	4'0"
	2	18-19	23	15"	1'11"
	3 (erreur sur l'ouverture)	19	18	10"	2'22"
	4	19-20	10	10"	3'28"
	5 (non déclaré)	19	2	10"	8'33"
Observatoire	1	20-21	14	10"	0'44"
	2 (non déclaré)	21-22	42	10"	1'0"
Colonne de l'Hotel Soissons	1	22-23	30	30"	8'10"
	2	23-24	11	10"	7'32"
	3	24	11	30"	0'53"
	4 (non déclaré)	24	9	30"	5'32"
	5	24	7	30"	4'14"
Saint-Sulpice Tour Nord (excentrée)	1	25	12	10"	15'38"
	2	25	10	10"	1'31"
	3	25-26-27	45	10"	3'35"
	4	27	3	30"	1'27"
Ste Marguerite (excentrée)	1	27-28-29	54	10"	1'50"
	2	29	2	10"	4'17"
	3	29	3	10"	3'1"
Piramide de Montmartre (excentrée)	1	30	4	10"	0'34"
	2	30	11	10"	0'17"
	3	30-31	32	10"	3'25"
Porte Saint-Denis (excentrée)	1	32	11	15"	3'13"
	2	32-33	27	10"	5'14"
	3 (inexploitable)	33	2	30"	-

Précision apparente	Moyenne de l'erreur angulaire de visée (MMSS)	Ecart-type de l'erreur angulaire de visée (MMSS)
10"	3'56"	3'47"
15"	2'48"	1'10"
30"	4'3"	2'40"



La mise au net des carnets de relevés pour la feuille n°70

Plan du mémoire

- 1) Plans des stations
- 2) Observations sur les clochers de Paris
- 3) Calcul des Observations sur Paris à la Méridienne et Perpendiculaire en toises et dixièmes de toises.
- 4) Calcul des Nouveaux Boulevards A la Méridienne et Perpendiculaire en Toises et Dixièmes de Toises.
- 5) Calcul des Anciens Boulevards à la Méridienne et Perpendiculaire
- 6) Calcul des bases de la rivière depuis la place Louis XV jusqu'à l'Arsenal

« [...] Le répertoire Général de toutes les opérations trigonométriques qu'il a fallu faire pour établir les bases de ce grand plan et les figure des points de station, de manière à le rapporter, **s'il lui arrivoit quelques accidents, avec la même exactitude;** au moyen des plans particuliers de réduction des rues, Monumens & qui sont joints à ce répertoire. »

La source de la planche n° 70 de l'atlas gravé ?

“Partie méridionale
des Murs de Paris”,
p. 138.

“Observations sur Paris”, p.131

lettres Alphabetiques Correspondantes à la feuille n° 70. de l'Atlas											
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Q	R	M	L	K	J	I	H	G	F	E	D
C	B	A	S	Z	X	V	U	T	R	Q	P
lettres Alphabetiques Correspondantes aux Plans Particuliers.											
Y	Z	S	A	B	C	D	E	F	G	H	I
M	N	O	P	Q	R	S	T	V	U	X	Z
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	V	U	X

la 8 ^e chapelle	49.	9	32.	0.002	9218
le Val de Grace	24	40.	8.	2.9310668	
Station	96.	10	20.	9.8788202.	
				36.	
	180.	0.	0.	2.9335916.	
				9.7949604.	
				24h.	
				2.8124194.	
				2.6889764.	

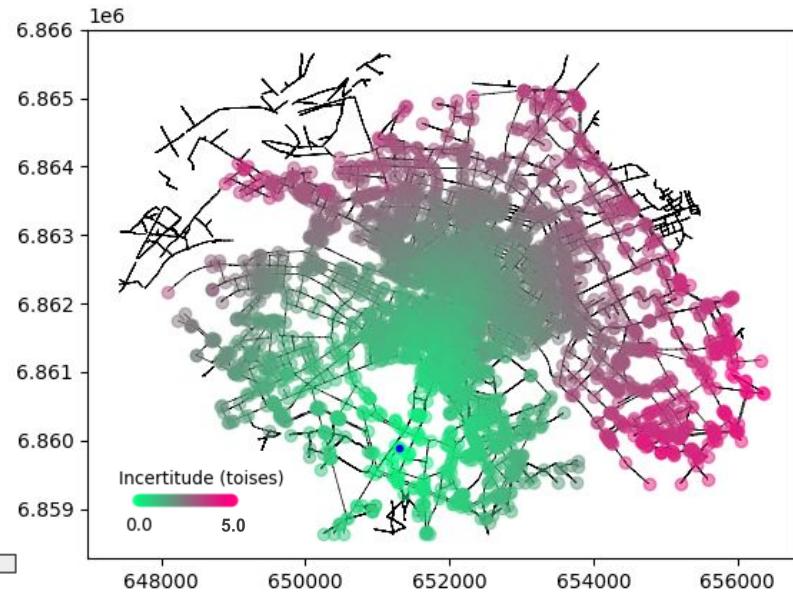
au levé de grue	2.8124194	2.8124194	2.8124194
74. 40. 8.	9.6963021	9.9500738.	9.9500738.
26. 57. 0.	2.4687179.	2.7621892.	2.7621892.
294. 2.	978. 7.	170. 9.	75. 4.
206. 7.	239. 7.	87. 9.	817. 9.
649. 2.	levé de grue station	87. 9.	298. 0.
1488. 1.	la 8 ^e chapelle Station	817. 9.	893. 3.



Modélisation des incertitudes à l'échelle des cheminements

Calcul de la propagation des incertitudes sur les polygonales pour 66 sommets. L'incertitude minimale en chaque point du réseau est conservée.

À l'observatoire



À Sainte-Marguerite

