Symplektische q-Schur-Algebren

Sebastian Oehms

Mathematisches Institut B

Universität Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Jahre 1901 begann Issaic Schur in seiner Doktorarbeit [Sc] die Untersuchung der *polynomialen Darstellungen* der generellen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Dabei handelt es sich um Gruppenhomomorphismen $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ derart, daß alle Einträge der Matrix $\varphi(A)$ Polynome in den Einträgen der Matrix A sind. Schur zeigte auf, wie dabei dem Polynomring

$$A_{\mathbb{C}}(n) := \mathbb{C}[X_{ij} \,|\, 1 \leq i, j, \leq n]$$

in den n^2 Unbestimmten X_{ij}, insbesondere dessen *homogenen Summanden*

$$A_{\mathbb{C}}(n, r) := \{f \in A_{\mathbb{C}}(n) |\ f(kA) = k^r f(A) \text{ für alle } k \in \mathbb{C}, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\},$$

eine wichtige Rolle zukommt. Im Gefolge dieser richtungsweisenden Arbeit sind Verallgemeinerung, der dort dargelegten Methoden und Resultate in den unterschiedlichsten Richtungen vorgenommen worden. Einen guten Überblick darüber vermitteln vor allem die beiden Monographien von J.A. Green und S. Martin ([Gr1], [Ma]), die in einer modernen Sprache in diese Theorie einführen.

Im Sinne der algebraischen Geometrie ist $A_{\mathbb{C}}(n)$ der sogenannte Koordinatenring $\mathbb{C}[\mathrm{M}_n(\mathbb{C})]$ der affinen Varietät $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ – der Menge aller $n \times n$-Matrizen. Für den algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}$ ist dies gerade der Ring von regulären Funktionen darauf. Dies läßt sich dahingehend interpretieren, daß die polynomiale Darstellungstheorie der affinen algebraischen Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ der rationalen Darstellungstheorie des affinen algebraischen Monoides $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ gleichkommt.

S. Doty hat kürzlich in Verallgemeinerung davon die polynomiale Darstellungstheorie von abgeschlossenen Untergruppen G vom $\mathrm{GL}_n(K)$ entwickelt, indem er diese auf die rationale Darstellungstheorie der algebraischen Monoide $\overline{G}$ zurückführt ([Dt]). Darin ist K ein unendlicher Körper und $\overline{G}$ der Abschluß von G in der Zariski-Topologie von $\mathrm{M}_n(K)$. Um in Analogie zu $A_K(n)$ eine *graduierte* K-Algebra

$$A_K(G) := K\left[\overline{G}\right]$$

zu erhalten, ist es jedoch nötig, sich auf solche Untergruppen G zu beschränken, die alle (invertierbaren) Vielfachen der Einheitsmatrix enthalten. In diesem Fall ist das Verschwindungsideal $I(\overline{G})$ von $A_K(G)$ in $A_K(n)$ homogen, etwa $I(\overline{G}) = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}_0} I_r$ mit $I_r \subseteq A_K(n, r)$, und damit $A_K(G)$ eine graduierte Algebra mit homogenen Summanden

$$A_K(G,r) := A_K(n,r)/I_r.$$

Die Multiplikation in dem Monoid $\overline{G}$ induziert eine Komultiplikation und die Einbettung der Eins in $\overline{G}$ eine Koeins in $A_K(G)$ auf wohlbekannte Weise, so daß $A_K(G)$ wie im Fall $A_K(n)$ die Struktur einer graduierten K-*Bialgebra* erhält, deren homogene Summanden $A_K(G,r)$ endlichdimensionale Unterkoalgebren sind. Man kann dann die endlichdimensionalen dualen K-Algebren

$$S_K(G,r) := A_K(G,r)^* = \mathrm{Hom}_K(A_K(G,r),K)$$

bilden und erhält in Analogie zur klassischen Situation eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der vom Grad r homogenen polynomialen Darstellungen der Gruppe G und der Kategorie der Darstellungen der Algebra $S_K(G,r)$ ([Dt], Proposition 1.4 und 1.5). S. Doty hat als Beispiele für G die Gruppen $\mathrm{GSp}_n(K)$ und $\mathrm{GO}_n(K)$ der *symplektischen* bzw. *orthogonalen Ähnlichkeiten* behandelt. Die Algebren $S_K(\mathrm{GSp}_n(K),r)$ sind auch von S. Donkin in [Do2] erörtert worden, wo sie als *verallgemeinerte Schur-Algebren* im Sinne von [Do1] erkannt werden. Im Spezialfall $G = \mathrm{GL}_n(K)$ erhält man für $S_K(\mathrm{GL}_n(K),r)$ gerade die von I. Schur in [Sc] eingeführten und von J.A. Green nach ihm benannten Algebren $S_K(n,r) = A_K(n,r)^*$, so daß es sich auch hier um eine Verallgemeinerung dieser Theorie handelt.

Eine Verallgemeinerung von Schur-Algebren in ganz anderer Richtung haben R. Dipper und G. James ([DJ2]) eingeführt, die sogenannten *q-Schur-Algebren*. Diese spielen im Zusammenhang mit der modularen Darstellungstheorie der generellen linearen Gruppen über endlichen Körpern in nichtbeschreibender Charakteristik eine bedeutende Rolle. R. Dipper und S. Donkin habe in [DD] gezeigt, daß diese in Analogie zu den obigen Betrachtungen (bis auf Morita-Äquivalenz) als duale Algebren

$$S_{R,q}(n,r) := A_{R,q}(n,r)^* = \mathrm{Hom}_R(A_{R,q}(n,r),R)$$

homogener Summanden $A_{R,q}(n,r)$ einer graduierten, i.alg. nicht kommutativen R-Bialgebra

$$A_{R,q}(n) := R < X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{nn} > /I$$

aufgefaßt werden können. Diese Bialgebra kann man als Koordinatenring eines "Quantenmonoidschemas" $\mathrm{M}_{n,q}(R)$ ansehen. Darin ist R ein kommutativer Ring mit Eins und einer Einheit $q \in R$. Die spitzen Klammern stehen für den nichtkommutativen Polynomring über R, also die freie Algebra in den Unbestimmten X_{ij}. Die Erzeuger des homogenen Ideals I führen zu folgenden Relationen unter den Restklassen x_{ij} der X_{ij}:

$$\begin{array}{ll} x_{ik}x_{jl} = qx_{jl}x_{ik} & i > j, k \leq l, \\ x_{ik}x_{jl} = x_{jl}x_{ik} + (q-1)x_{jk}x_{il} & i > j, k > l, \\ x_{ik}x_{il} = x_{il}x_{ik} & 1 \leq i,k,l \leq n. \end{array}$$

Im Fall $q = 1$ und $R = K$ erhält man die gewöhnlichen Schur-Algebren. Die q-Schur-Algebren besitzen über dem Ring $Z = \mathbb{Z}[Q, Q^{-1}]$ freie Basen als Z-Modul. Eine erhält man z.B. als duale Basis zur Basis geordneter Monome in $A_{Z,Q}(n,r)$ ([DD]). Dies ist eine q-analoge Version derjenigen Basis, die im klassischen Fall von Schur selbst betrachtet wurde. Eine auf die Belange der Darstellungstheorie besser abgestimmte Basis wurde von R.M. Green ([GR]) eingeführt. Diese ist eine q-analoge Version der *Codeterminanten Basis* im Sinne von J.A. Green ([Gr2]) und *zellulär* im Sinne von J. Graham und G.I. Lehrer ([GL]). Bezüglich jedem kommutativen Ring R, der mittels dem durch $Q \mapsto q$ gegebenen Ringhomomorphismus als Z-Algebra aufgefaßt werden kann, erhält man einen Isomorphismus von R-Algebren

$$R \otimes_Z S_{Z,Q}(n,r) \cong S_{R,q}(n,r).$$

Damit erhält man auch die gewöhnlichen Schur-Algebren durch Grundringerweiterung von $S_{Z,Q}(n,r)$ und, da letztere frei als Z-Modul ist, macht es Sinn von einer Deformation der Schur-Algebren zu sprechen.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns in der Hauptsache mit der graduierten Bialgebra $A^{\mathrm{s}}_K(n) := A_K(\overline{\mathrm{GSp}_n(K)})$ und einer q-analogen Version $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ davon in Analogie zur obigen Bialgebra $A_{R,q}(n)$. Diese fassen wir als Koordinatenring eines Quantenmonoidschemas auf, das im klassischen Fall $q = 1, R = K$ zum *symplektischen Monoid* $\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}$ spezialisiert. Wir werden eine *quantensymplektische* Version von Bideterminaten definieren. Mit deren Hilfe konstruieren wir dann eine endliche freie Basis $\mathbf{B}_r$ des r-ten homogenen Summanden $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ über dem Grundring R. Der Beweis, daß es sich dabei um ein Erzeugendensystem handelt, wird leider nur unter gewissen Einschränkungen für q gelingen und ist dennoch so aufwendig, daß ihm mehr oder weniger das gesamte Kapitel 3 gewidmet ist.

Trotz dieser Einschränkungen gelangen wir zur Definition von *symplektischen q-Schur-Algebren* $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$, die (bis auf bekannte eventuelle Ausnahmen) gerade die dualen Algebren der homogenen Summanden $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ sind. Im klassischen Fall $q = 1, R = K$ ergeben sich somit die symplektischen Schur-Algebren $S^s_K(n,r) := S_K(\mathrm{GSp}_n(K), r)$ im Sinne von [Dt] bzw. [Do2]. Über dem Grundring $Z := \mathbb{Z}[Q, Q^{-1}]$ erhält man freie Basen von $S^{\mathrm{s}}_{Z,Q}(n,r)$ durch Dualisieren der Basen $\mathbf{B}_r$ des torsionsfreien Quotienten von $A^{\mathrm{s}}_{Z,Q}(n,r)$ (eventuelle Torsionselemente darin können explizit angegeben werden). Somit kann man tatsächlich von einer q-Deformation von $S^s_K(n,r)$ sprechen.

Wir werden weiterhin zeigen, daß die Algebren $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ die bereits oben im Zusammenhang mit der q-Codeterminanten Basis von $S_{R,q}(n,r)$ angesprochene Axiomatik einer zellulären Algebra gemäß J. Graham und G.I. Lehrer erfüllen. Dies zeigt, daß man die Darstellungstheorie dieser Algebren weitgehend unter Kontrolle hat, d.h. sie kann in der in [GL] aufgezeigten Art und Weise entwickelt werden. Außerdem wird das dort angegebene Kriterium für die Quasierblichkeit verifiziert. Außerdem wird gezeigt, daß dortiges Kriterium für die *Quasierblichkeit* einer zellulären Algebra erfüllt ist.

Die Arbeit ist in folgender Weise aufgebaut: In Kapitel 1 werden die ko- und bialgebrentheoretischen Grundlagen für die Definition und den Umgang mit den Bialgebren $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ gelegt. Das wesentliche Hilfsmittel dabei ist die sogenannte *FRT-Konstruktion*, die aus der Theorie der Quantengruppen bekannt ist und auf L. Faddeev, N. Reshetikhin und L. Takhtadjian ([RTF]) zurückgeht. Wir werden eine etwas allgemeinere Variante dieser Konstruktion einführen, die es gestattet auch den Koordinatenring $A^{\mathrm{s}}_{K}(n)$ von $\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}$ im klassischen Fall hierdurch zu erhalten (Bemerkung 2.5.1).

In Kapitel 2 erfolgt die Definition der Bialgebren $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ und ihre Beschreibung als Deformationen der Koordinatenringe symplektischer Monoide (Sätze 2.5.3, 2.5.10). Dies läßt sich auch ohne zusätzliche Mühe für den orthogonalen Fall durchführen. In die Definition von $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ gehen neben q weitere $\frac{m(m+1)}{2}$ Parameter ein ($m := \frac{n}{2}$). In Analogie zu einem Resultat von M. Artin, W. Shelter und J. Tate ([AST], Theorem 2), welches sich auf die entsprechende multiparametrische Version der oben beschriebenen Bialgebra $A_{R,q}(n)$ bezieht, zeigen wir, daß die multiparametrische Version von $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ als Koalgebra zu der einparametrigen Version isomorph ist (Satz 2.5.8). Zur Demonstration der in Kapitel 1 eingeführten Methoden behandeln wir auch den wohlbekannten Fall der Bialgebra $A_{R,q}(n)$ in 2.4. Wir leiten ihr Freisein als R-Modul mit Hilfe dieser Methoden und der Strukturtheorie der *Iwahori-Hecke*-Algebra von Typ A gemäß [DJ1] her. Leider ist dieses Verfahren nicht auf $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ übertragbar, da ein der Iwahori-Hecke-Algebra entsprechender Kenntnisstand in Bezug auf die hier maßgebliche *Birman-Murakami-Wenzl*-Algebra fehlt.

Mehr oder weniger das gesamte Kapitel 3 ist dem Beweis der quantensymplektischen Analogie der sogenannten *Straightening Formula* (Korollar 3.13.3) für Bideterminanten gewidmet, aus der wir das Erzeugendensystem $\mathbf{B}_r$ von $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ (bis auf oben erwähnte Einschränkungen) erhalten. Die ersten drei Paragraphen dienen der Definition der quantensymplektischen Bideterminanten und der Beschreibung der Teilmenge $\mathbf{B}_r$ von diesen mit Hilfe von *spiegelsymplektischen Standardtableaus*. Bei diesem Begriff handelt es sich um eine Variante zu den *symplektischen Standardtableaus* nach R.C. King ([Ki]). Die Variante ist nur für den Quantenfall erforderlich. Im klassischen Fall erreicht man die Straightening Formula auch mit symplektischen Standardtableaus.

Die Straightening Formula ist eine direkte Konsequenz aus dem zugehörigen *Straightening Algorithmus*. Diesen haben wir in zwei Teile zerlegt, dessen ersten wir schon in 3.7 beweisen können. Dieser Teil ist die eigentliche Analogie zum gleichen Algorithmus im klassischen Fall für $A_K(n,r)$, wo das Resultat auf D.G. Mead ([Me]), P. Doubilet, G.C. Rota und J. Stein ([DRS]) zurückgeht (vgl. Bemerkung 3.7.8). Die hier gegebene Beweisführung richtet sich nach [Ma], 2.5. Im zweiten Teil des Algorithmus werden die Bideterminanten zu den nicht spiegelsymplektischen unter den Standardtableaus aus dem Erzeugendensystem eliminiert. Dies erfordert eine Betrachtung der quantensymplektischen äußeren Algebra, die sich aufgrund der komplizierten Arithmetik ziemlich langwierig gestaltet (Abschnitte 3.8, 3.9, 3.10 und Anbhang B). Die Bideterminanten werden dann in 3.11 als Koeffizientenfunktionen des Komoduls der äußeren Algebra aufgefaßt. Die Arbeit des gesammten Kapitels mündet in den Basisatz 3.14.12. Als Anwendungen davon im klassischen Fall erhalten wir einige der Resultate aus [Dt], die dort für Körper der Charakteristik Null gezeigt wurden, auch für algebraisch abgeschlossene Körper beliebiger Charakteristik (Korollar 3.14.5 und Satz 4.1.2 bzw. Bemerkung 4.1.3).

Die Anwendungen des Hauptresultates auf die oben definierten symplektischen q-Schur-Algebren erfolgt in Kapitel 4 der Kürze wegen nur noch als Ausblick. Zur besseren Übersicht sind Teile der Arbeit in einen Anhang verlagert. Dabei handelt es sich zum einem um die hauptsächlich in Kapitel 1 benötigten Hilfsmittel hinsichtlich der Moduln über kommutativen Ringen. Zum anderen betrifft es technische Beweise im Zusammenhang mit der quantensymplektischen äußeren Algebra. Weiterhin sind detailiertere Einleitungen an den Kapitelanfängen zu finden.

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank zunächst Prof. Dr. Richard Dipper aussprechen, der mein mathematisches Interesse ausgehend von der synthetischen und algebraischen Geometrie sowie der Topologie auf algebraische Gruppen und deren Darstellungen, die Knotentheorie, die Theorie der Quantengruppen und schließlich auf die Thematik dieser Arbeit gelenkt hat. Wertvolle Anregungen und die stetige Anteilnahme am Fortgang der Arbeit waren mir von großer Hilfe.

Weiterhin bedanke ich mich bei meiner Frau Cornelia Schmid für die unermeßliche indirekte Unterstütung. Insbesondere in Phasen angespanntester Konzentration hat sie mir den Rücken von vielen Unannehmlichkeiten freigehalten und dabei meine Zerstreutheit ertragen.

Herrn Prof. Dr. Wendelin Degen danke ich für seine Bemühungen, die zu meiner Rückkunft an die Universität geführt haben und ohne die diese Arbeit wohl nicht zustande gekommen wäre.

Für hilfreichen Gedankenaustausch per E-Mail bedanke ich mich bei Richard Green, Steffen König, Steve Doty, Steve Donkin, Maria Iano-Fletcher und Zongshu Lin.

Zum Gelingen dieser Arbeit haben schließlich auch viele Gespräche und das angenehme Arbeitsklima in meinem nächsten Kollegenkreis beigetragen. Insbesondere möchte ich dabei Gabi Preissler nennen, die mir auch freundlicherweise durch Korrekturlesen behilflich war.

Kapitel 1

Matrix Ko- und Bialgebren

In diesem Kapitel werden die allgemeinen Grundlagen im Zusammenhang mit Ko- und Bialgebren behandelt, die bei der Definition der Quantenmonoide in Kapitel 2 eine Rolle spielen. Das wesentliche Hilfsmittel ist hier die sogenannte FRT-Konstruktion, die auf L. Faddeev, N. Reshetikhin und L. Takhtadjian ([RTF]) zurückgeht. Allgemeine Betrachtungen zu dieser Konstruktion findet man z.B. in [Ta2], [Ha1], [Su] aber auch in Textbüchern über Quantengruppen (z.B. [CP], [Ka]). Die Ausführungen dieses Kapitels unterscheiden sich von diesen Betrachtungen in dreierlei Hinsicht.

1. Das Augenmerk ist auf die *homogenen Summanden* der bei der FRT-Konstruktion entstehenden *graduierten Matrix Bialgebren* gerichtet. Diese Koalgebren entstehen in dualer Weise zur Bildung des *Zentralisators* (Kommutanten) einer Unteralgebra A eines Endomorphismenringes. Wir nennen diese daher Zentralisator Koalgebren und beschreiben sie in Abhängigkeit von der Unteralgebra A (1.3,1.4).

2. Die Betrachtungen erfolgen über einem beliebigen Integritätsbereich. Dies ist sinnvoll, da die Koordinatenringe der Quantenmonoide bereits über affinen $\mathbb{Z}$-Algebren z.B. über dem Laurentpolynomring $\mathbb{Z}[Q, Q^{-1}]$ in der Unbestimmten Q definiert sind. Beim Vergleich der Zentralisator Koalgebra zu A mit dem Zentralisator von A in 1.5 zeigen sich dabei Unterschiede im Gegensatz zur Betrachtung über einem Körper. Während im Fall eines Körpers beide Konzepte völlig dual zueinander sind, beinhaltet die Zentralisator Koalgebra im allgemeinen mehr Information über die Algebra A als der Zentralisator.

3. Die FRT-Konstruktion wird im üblichen Sinne in Abhängigkeit eines Endomorphismus, der in den Anwendungen stets ein Quanten-Yang-Baxter Operator ist, durchgeführt. Im Hinblick auf unsere Anwendung im Zusammenhang mit *symplektischen* und *orthogonalen Monoiden* in 2.5 ist es jedoch notwendig, die Konstruktion dahingehend zu verallgemeinern, daß sie auch in Bezug auf meherere Endomorphismen durchgeführt werden kann (siehe 1.4 und Bemerkung 2.5.1).

Besonders mühevoll aber auch aufschlußreich ist die oben angesprochene Untersuchung der Zentralisatoren Koalgebren falls R kein Körper ist. Während der Zentralisator $C(A) = \mathrm{End}_A(V)$ von A sich bekannterweise nicht unbedingt stabil unter Grundringerweiterungen $S \to R$ verhält, ist dies für die Zentralisator Koalgebra $M(A)$ von A jedoch stets der Fall, d.h. es gilt stets

$$S \otimes_R M(A) \cong M(S \otimes_R A)$$

als S-Koalgebren (Satz 1.5.9 (b)). Hingegen braucht $M(A)$ weder projektiv noch torsionsfrei als R-Modul zu sein. Wir werden für beide Eigenschaften Kriterien aufstellen (Satz 1.5.6 und 1.5.12). Es wird sich z.B. herausstellen, daß $M(A)$ genau dann projektiv ist, wenn sich $C(A)$ stets stabil unter Grundringerweiterungen verhält und endlich erzeugt ist (Satz 1.5.12 (d)). Weiterhin wird gezeigt, daß stets ein Isomorphismus

$$C(A) \cong M(A)^*$$

von R-Algebren besteht (Satz 1.5.3). Ein Isomorphismus

$$M(A) \cong C(A)^*$$

ist im allgemeinen nicht gegeben. Unter der Voraussetzung der Projektivität von $M(A)$ werden wir einen solchen jedoch in Satz 1.5.8 bestätigen.

In den beiden letzen Paragraphen des Kapitels werden kleinere technische Hilfsmittel zur Verfügung gestellt. Wir beginnen mit der Einführung der Notationen. Diese werden auch in den übrigen Kapiteln verwendet.

1.1 Notationen

Im folgenden sei stets R ein Integritätsbereich mit 1 und V ein freier R-Modul vom Rang n mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. $V^* := \mathrm{Hom}_R(V, R)$ bezeichne den dualen Modul und $\{{v_1}^*, \ldots, {v_n}^*\}$ die duale Basis zu $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Der Endomorphismenring $\mathrm{End}_R(V)$ wird $\mathcal{E}$ genannt, während $\mathcal{E}^* := \mathrm{Hom}_R(E, R)$ den hierzu dualen Modul bezeichnet. Als Basis von $\mathcal{E}$ betrachten wir die Matrixeinheiten e_i^j, gegeben durch $e_i^j(v_k) := \delta_{jk} v_i$ mit $i, j, k = 1, \ldots, n$. Die hierzu duale Basis von $\mathcal{E}^*$ wird mit e_i^{*j} bezeichnet.

Die Spurabbildung $tr : \mathcal{E} \to R$ liefert eine nichtentartete, symmetrische und assoziative Bilinearform auf $\mathcal{E}$ und damit insbesondere einen Isomorphismus ϑ_{tr} von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}^*$, gegeben durch $\vartheta_{tr}(\mu)(\nu) := tr(\mu\nu)$ mit $\mu, \nu \in \mathcal{E}$. Auf den Basiselementen berechnet man $\vartheta_{tr}(e_i^j) = e_j^{*i}$.

Falls nicht anders angegeben steht das Tensorproduktzeichen stets für das Tensorieren über R. Für das r-fache Tensorprodukt $V \otimes \cdots \otimes V$ schreiben wir $V^{\otimes r}$. Zwischen den R-Moduln $\mathcal{E}_r := \mathrm{End}_R(V^{\otimes r})$ und ${\mathcal{E}_r}^* := \mathrm{Hom}_R(\mathcal{E}_r, R)$ hat man auch hier einen Isomorphismus, welcher ϑ_{tr} entspricht und der mit demselben Symbol bezeichnet werden soll.

Wir schreiben $I(n,r) := \underline{n}^{\underline{r}}$ für die Menge der Abbildungen von $\underline{n} := \{1,\dots,r\}$ nach $\underline{r} := \{1,\dots,n\}$. Die Elemente $\mathbf{i} \in I(n,r)$ werden als Multi-Indizes $\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_r)$ aufgefaßt. Basen von $V^{\otimes r}$ und $V^{\otimes r*}$ sind dann durch

$$v_{\mathbf{i}} := v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \quad \text{bzw.} \quad {v_{\mathbf{i}}}^* := (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r})^*$$

gegeben. Der natürliche Homomorphismus von $V^{*\otimes r}$ nach $V^{\otimes r*}$, zu $w_1^*,\dots,w_r^* \in V^*$ und $u_1,\dots,u_r \in V$ gegeben durch

$$w_1^* \otimes w_2^* \otimes \ldots \otimes w_r^*(u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_r) := w_1^*(u_1)w_2^*(u_2)\ldots w_r^*(u_r)$$

ist ein Isomorphismus, da V endlich erzeugt und frei ist. Wir werden ihn künftig in der Notation unterdrücken, d.h. die entsprechenden Moduln bzw. Basiselemente werden als gleich angesehen.

Entsprechend den Basiselementen für $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}^*$ erhält man Basiselemente $e_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$ und $e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}}$ mit $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,r)$ zu $\mathcal{E}_r$ und ${\mathcal{E}_r}^*$. Die natürlichen Isomorphismen zwischen $\mathcal{E}^{\otimes r}$ und $\mathcal{E}_r$ bzw. $\mathcal{E}^{*\otimes r}$ und ${\mathcal{E}_r}^*$ werden ebenfalls in der Notation unterdrückt, so daß nach diesen Identifikationen für die Basiselement gilt:

$$e_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} = e_{i_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^{j_r}$$

$$e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}} = e_{i_1}^{*\ j_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^{*\ j_r}.$$

Man beachte, daß die hier betrachteten Isomorphismen mit ϑ_{tr} kommutieren, d.h. es gilt:

$$\vartheta_{tr}(e_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}) = \vartheta_{tr}(e_{i_1}^{j_1}) \otimes \cdots \otimes \vartheta_{tr}(e_{i_r}^{j_r}).$$

Die oben angegebenen Bezeichnungen werden durch $V^{\otimes 0} = V^{*\otimes 0} = \mathcal{E}_0 = {\mathcal{E}_0}^* = R$ ergänzt.

1.2 Universelle Matrix Ko- und Bialgebren

Definition 1.2.1 (siehe [Ta2]) *Eine Bialgebra (Koalgebra) M über R heißt* Matrix Bialgebra (Matrix Koalgebra) *mit natürlichem Komodul V, falls M als R-Algebra (R-Modul) von Elementen $x_{ij}, 1 \le i,j, \le n$ erzeugt wird, so daß die Komultiplikation Δ und die Koeins ϵ gegeben sind durch*

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \epsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}.$$

V wird mittels der Strukturabbildung

$$\tau_V(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes x_{ij}$$

zu einem M-Rechtskomodul.

Zu einem Endomorphismus $\beta \in \mathrm{End}_R(V^{\otimes 2}) = \mathcal{E}_2$ erhält man durch die bereits erwähnte Konstruktion von L. Faddeev, N. Reshetikhin und L. Takhtadjian ([RTF]) eine Matrix-Bialgebra $\mathcal{M}(\beta)$ mit natürlichem Komodul V, die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: β ist ein Endomorphismus des $\mathcal{M}(\beta)$-Komoduls $V^{\otimes 2}$ und jede weitere Matrix-Bialgebra M mit dieser Eigenschaft ist ein epimorphes Bild von $\mathcal{M}(\beta)$. Dabei wird $\mathcal{M}(\beta)$ als Quotient der Tensoralgebra $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*) = \oplus_{r\in\mathbb{N}_0}\mathcal{E}_r{}^*$ (das ist die freie Algebra auf den Erzeugern e_i^{*j}) nach dem von den Bildern unter $\vartheta_{tr} : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2{}^*$ sämtlicher Kommutatoren $[x, \beta] = x\beta - \beta x$ mit $x \in \mathcal{E}_2$ erzeugten Ideals I definiert (vgl. [Su], Theorem 1 (b)). Da I homogen ist, ist $\mathcal{M}(\beta) = \oplus_{r\in\mathbb{N}_0}\mathcal{M}(\beta)_r$ eine graduierte Algebra mit homogenen Summanden $\mathcal{M}(\beta)_r$ deren jeder eine Unterkoalgebra von $\mathcal{M}(\beta)$ darstellt. Wir weden in 1.4 eine leichte Verallgemeinerung diese Konstruktion geben, in der anstelle von β auch größere Teilmengen $A \subseteq \mathcal{E}_2$ verwendet werden können. Tatsächlich werden wir die Konstruktion in 2.5 für zweielementige Mengen benötigen (siehe Bemerkung 2.5.1).

Wir untersuchen zunächst die *universellen Objekte* zu den Matrix Ko- und Bialgebren und beginnen mit dem Fall der Koalgebren. Dazu betrachten wir die in 1.1 definierten R-Moduln $\mathcal{E}_r{}^* = \mathrm{End}_R(V^{\otimes r})^*$ und ihre Struktur als Matrix-Koalgebren mit natürlichem Modul $V^{\otimes r}$. Man kann sich dabei auf den Fall $r = 1$ zurückziehen, da die $V^{\otimes r}$ ebenso wie V freie R-Moduln eben nur von dem höheren Rang n^r sind.

$\mathcal{E}^*$ erbt die Koalgebrenstruktur von der Algebrenstruktur auf $\mathcal{E}$ auf folgende wohlbekannte Weise: Mit $\bigtriangledown$ sei die Multiplikation

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\bigtriangledown} \mathcal{E}, \ \ \bigtriangledown(\mu \otimes \nu) = \mu\nu \quad \mu, \nu \in \mathcal{E}$$

bezeichnet. Dann erhält man eine koassoziative Abbildung – also eine Komultiplikation – auf $\mathcal{E}^*$ durch die duale Abbildung $\Delta := \bigtriangledown^*$ verkettet mit der Identifikation von $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$ und $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})^*$.

$$\mathcal{E}^* \xrightarrow{\Delta} \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*, \ \ \Delta(\xi)(\mu \otimes \nu) = \xi(\mu\nu), \ \ \mu, \nu \in \mathcal{E}, \ \xi \in \mathcal{E}^*.$$

Die Koeins ϵ ist analog als duale Abbildung der Einbettung

$$R \overset{\mathrm{i}}{\hookrightarrow} \mathcal{E}, \ \ \mathrm{i}(r) = r\mathrm{id}_V, \ \ r \in R$$

definiert: $\epsilon := \mathrm{i}^*$. Da id_V neutrales Element in $\mathcal{E}$ ist erfüllt

$$\mathcal{E}^* \xrightarrow{\epsilon} R^* \cong R, \ \ \epsilon(\xi) = \xi(\mathrm{id}_V), \ \ \xi \in \mathcal{E}^*$$

das Koeinsaxiom. Damit wird $\mathcal{E}^*$ zu einer Koalgebra.

Bemerkung 1.2.2 *Die hier durchgeführte Konstruktion einer Koalgebrenstruktur auf dem dualen Modul $A^* := \mathrm{Hom}_R(A, R)$ einer beliebigen R-Algebra A ist offenbar stets dann möglich wenn der natürliche Homomorphismus $A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ ein Isomorphismus ist. In diesem Fall nennt man A^* die zur Algebra A* duale Koalgebra.

In diesem Sinne ist also $\mathcal{E}^*$ die zu $\mathcal{E}$ duale Koalgebra. Man erhält hier bezüglich der in 1.1 angegebenen Basis:

$$\Delta(e_i^{*j}) = \sum_{k=1}^{n} e_i^{*k} \otimes e_k^{*j}, \quad \epsilon(e_i^{*j}) = \delta_{ij}.$$

Wir wollen nun die $\mathcal{E}^*$-Rechtskomodulstruktur von V aus der $\mathcal{E}$-Linksmodulstruktur von V ableiten. Dazu beachte man, daß auf Grund letzterer V^* ein $\mathcal{E}$-Rechtsmodul vermöge $(w\mu)(v) := w(\mu v)$ mit $w \in V^*,\ v \in V,\ \mu \in \mathcal{E}$ wird.

Unter Verwendung der Reflexivität $V \cong V^{**}$ und des Isomorphismus zwischen $V^{**} \otimes \mathcal{E}^*$ und $(V^* \otimes \mathcal{E})^*$ erhält man die Komodulstrukturabbildung τ_V als duale Abbildung $\tau_V := (\eta_{V^*})^*$ zur Modulstrukturabbildung $\eta_{V^*} : V^* \otimes \mathcal{E} \to V^*$. Bezüglich der Basen hat man die Formel:

$$\tau_V(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes e_i^{*j}$$

Damit ist $\mathcal{E}^*$ eine Matrix-Koalgebra mit natürlichem Komodul V.

Zu einer beliebigen weiteren Matrix-Koalgebra M mit natürlichem Komodul V erhält man einen Epimorphismus von Koalgebren $\rho : \mathcal{E}^* \to M$ durch $\rho(e_i^{*j}) := x_{ij},\ \ i,j = 1,\ldots,n$, wobei x_{ij} das Erzeugendensystem von M sei. ρ ist wohldefiniert, da $\mathcal{E}^*$ frei mit Basiselementen e_i^{*j} ist. Aus diesem Grund kann man $\mathcal{E}^*$ als *universelle Matrix Koalgebra mit natürlichem Komodul* V betrachten. Die Matrix-Koalgebren lassen sich somit als duales Gegenstück zu den Unteralgebren von $\mathcal{E}$ auffassen.

Eine weitere wichtige Bedeutung von $\mathcal{E}^*$ ergibt sich bei der Untersuchung von Komodulstrukturen auf V für eine beliebige R-Koalgebra C. Denn jede solche Komodulstruktur führt auf einen Koalgebrenhomorphismus von $\mathcal{E}^*$ nach C. Umgekehrt macht jeder solche Koalgebrenhomomorphismus V zu einem C-Komodul, so daß die C-Komodulstrukturen auf V mit den Koalgebrenhomomorphismen von $\mathcal{E}^*$ nach C in eineindeutiger Beziehung stehen.

Als nächstes soll die Tensoralgebra $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*) = \oplus_{r\in\mathbb{N}_0}\mathcal{E}_r{}^*$ als *universelle Matrix Bialgebra* betrachtet werden. Als Algebra ist $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ frei auf den Erzeugern $e_i^{*j},\ \ i,j = i,\ldots,n$. Als Koalgebra ist sie die direkte Summe der Koalgebren $\mathcal{E}_r{}^*$, d.h. $\Delta := \oplus_{r\in\mathbb{N}_0}\Delta_r$ und $\epsilon := \oplus_{r\in\mathbb{N}_0}\epsilon_r$, wobei Δ_r die Komultiplikation (verknüpft mit der Inklusion von $\mathcal{E}_r{}^* \otimes \mathcal{E}_r{}^*$ in $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*) \otimes \mathcal{T}(\mathcal{E}^*) = \oplus_{t\in\mathbb{N}_0}(\oplus_{u+v=t}\mathcal{E}_u{}^* \otimes \mathcal{E}_v{}^*)$) und ϵ_r die Koeins auf der universellen Matrix-Koalgebra $\mathcal{E}_r{}^*$ ist. Dabei ist die Koalgebrenstruktur auf $\mathcal{E}_0^* = R$ gegeben durch $\Delta_0(1) = 1 \otimes 1$ und $\epsilon_0(1) = 1$.

Für das Aneinanderfügen von zwei Multi-Indizes $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_r) \in I(n,r)$ und $\mathbf{j} = (j_1,\ldots,j_s) \in I(n,s)$ schreiben wir $\mathbf{i}+\mathbf{j} = (i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots j_s) \in I(n,r+s)$. Die Multiplikation in $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ ergibt sich dann für Monome $e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}} \in \mathcal{E}_r{}^*,\ e_{\mathbf{k}}^{*\mathbf{l}} \in \mathcal{E}_s{}^*$ zu $e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}} \otimes e_{\mathbf{k}}^{*\mathbf{l}} = e_{\mathbf{i+k}}^{*}{}^{\mathbf{j+l}}$ oder abkürzend $e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}} e_{\mathbf{k}}^{*\mathbf{l}} = e_{\mathbf{i+k}}^{*}{}^{\mathbf{j+l}}$. Die Verträglichkeit zwischen $\bigtriangledown$ und Δ folgt nun aus:

$$\Delta(e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}} e_{\mathbf{k}}^{*\mathbf{l}}) = \sum_{\mathbf{m}\in I(n,r+s)} e_{\mathbf{i+k}}^{*}{}^{\mathbf{m}} \otimes e_{\mathbf{m}}^{*}{}^{\mathbf{j+l}} = \sum_{\mathbf{m}\in I(n,r),\mathbf{p}\in I(n,s)} e_{\mathbf{i+k}}^{*}{}^{\mathbf{m+p}} \otimes e_{\mathbf{m+p}}^{*}{}^{\mathbf{j+l}} =$$

$$\left(\sum_{\mathbf{m}\in I(n,r)} e_{\mathbf{i}}^{*\,\mathbf{m}} \otimes e_{\mathbf{m}}^{*\,\mathbf{j}}\right)\left(\sum_{\mathbf{p}\in I(n,s)} e_{\mathbf{k}}^{*\,\mathbf{p}} \otimes e_{\mathbf{p}}^{*\,\mathbf{l}}\right) = \Delta(e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}})\Delta(e_{\mathbf{k}}^{*\,\mathbf{l}}).$$

Ebenso erhält man $\delta_{\mathbf{i}+\mathbf{k},\mathbf{j}+\mathbf{l}} = \epsilon(e_{\mathbf{i}+\mathbf{k}}^{*\ \mathbf{j}+\mathbf{l}}) = \epsilon(e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}})\epsilon(e_{\mathbf{k}}^{*\,\mathbf{l}}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ so daß tatsächlich die Struktur einer Matrix-Bialgebra mit natürlichem Modul V vorliegt.

$\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ ist universell in dem Sinn, daß jede weitere Matrix Bialgebra M mit natürlichem Komodul V und Erzeugern $x_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n$ ein epimorphes Bild hiervon ist vermöge der Abbildung $e_i^{*j} \mapsto x_{ij}$. Auf Grund der universellen Eigenschaft einer freien Algebra sowie der Anforderungen an Komultiplikation und Koeins von M legt dies offensichtlich einen Bialgebren Epimorphismus fest.

Diese Betrachtungen machen deutlich, daß die Untersuchung von Matrix Bialgebren im wesentlichen dem Studium von Biidealen in $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ gleichkommt. Da wir vornehmlich an Matrix Bialgebren interessiert sind, die von homogenen Biidealen herkommen, also die graduierte Struktur von $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ erben, ist die Betrachtung von Koidealen der Koalgebren ${\mathcal{E}_r}^*$ von Bedeutung, denn als Koalgebren sind solche Matrix Bialgebren stets die direkte Summe über Matrix Koalgebren zu den natrürlichen Moduln $V^{\otimes r}$. Wir können uns dann auf die Untersuchung der Koideale von $\mathcal{E}^*$ beschränken, da sich die universellen Koalgebren nur in der Dimension voneinander unterscheiden. Dies geschieht im nächsten Abschnitt.

1.3 Kommutator Koideale

Ein *Koideal* in einer R-Koalgebra C ist bekanntlich ein R-Untermodul K von C mit $\Delta(K) \subseteq K \otimes C + C \otimes K$ und $\epsilon(K) = 0$. Es ist sofort klar, daß die natürliche Projektion π von C auf den Quotienten C/K nach einem Koideal K ein *Koalgebrenhomomorphismus* ist, d.h. daß $\pi \otimes \pi \circ \Delta = \Delta \circ \pi$ gilt. Für die Umkehrung, daß auch für einen Koalgebrenhomomorphismus π der Kern $K := \ker(\pi)$ ein Koideal ist, reicht es zu zeigen, daß $\ker(\pi \otimes \pi) = K \otimes C + C \otimes K$ ist, da hier offenbar $\pi \otimes \pi(\Delta(K)) = \Delta(\pi(K)) = 0$ gilt. Dies folgt aus dem wohlbekannten, im Anhang aufgeführten Satz A.3.1. Wir bereiten nun die duale Konstruktion zur Bildung des Zentralisators

$$\mathrm{End}_A(V) := \{\mu \in \mathcal{E} \,|\, [\mu,\nu] = 0 \ \ \forall \nu \in A\}$$

bezüglich eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{E}$ von Endomorphismen von V vor. Darin ist $[\mu,\nu] = \mu\nu - \nu\mu$ der Kommutator zweier Endomorphismen. $C(A) := \mathrm{End}_A(V)$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{E}$, derart, daß die Elemente von A zu Homomorphismen des $C(A)$-Moduls V werden, und zwar die größtmögliche mit dieser Eigenschaft. Dual dazu suchen wir nun eine größtmögliche Matrix-Koalgebra $M(A)$ mit natürlichem Komodul V, so daß die Elemente von A zu Endomorphismen des $M(A)$-Komoduls V werden. Hierzu müssen wir ein geeignetes Koideal in $\mathcal{E}^*$ finden. Es sei an den in 1.1 eingeführten R-Modulisomorphismus ϑ_{tr} von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}^*$ erinnert. Wir nennen dann

$$K(A) := \vartheta_{tr}(< [\nu, \mu] | \nu \in A, \mu \in \mathcal{E} >_{R-\mathrm{mod}}) \tag{1.1}$$

das *Kommutator-Koideal* der Teilmenge $A \subseteq \mathcal{E}$. Für einelementige Mengen $A = \{\nu\}$ schreiben wir abkürzend $K(\nu) := K(\{\nu\})$. Zur Rechtfertigung dieser Benennung zeigen wir:

Lemma 1.3.1 *Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{E}$ ist $K(A)$ ein Koideal in $\mathcal{E}^*$.*

Beweis: Da die Summe von Koidealen wiederum ein solches ist, genügt es den Fall zu betrachten, daß A lediglich ein Eement ν besitzt. Man schreibt $\nu = \sum_{i,j} a_{ij} e_i^j$ und berechnet für beliebiege Zahlen $k, l \in \{1, \ldots, n\}$:

$$[\nu, e_k^l] = \sum_i a_{ik} e_i^l - \sum_j a_{lj} e_k^j = \sum_i (a_{ik} e_i^l - a_{li} e_k^i)$$

und daraus

$$\Delta(\vartheta_{tr}([\nu, e_k^l])) = \sum_{i,m} (a_{ik} e_l^{*m} \otimes e_m^{*\,i} - a_{li} e_i^{*m} \otimes e_m^{*\,k}) =$$

$$\sum_{i,m} (e_l^{*m} \otimes (a_{ik} e_m^{*\,i} - a_{mi} e_i^{*k}) + a_{mi} e_l^{*m} \otimes e_i^{*k} - (a_{li} e_i^{*m} - a_{im} e_l^{*i}) \otimes e_m^{*\,k} - a_{im} e_l^{*i} \otimes e_m^{*\,k}) =$$

$$\sum_m (e_l^{*m} \otimes \vartheta_{tr}([\nu, e_k^m]) + \vartheta_{tr}([\nu, e_m^{*\,l}]) \otimes e_m^{*\,k},$$

da $\sum_{i,m} (a_{mi} e_l^{*m} \otimes e_i^{*k} - a_{im} e_l^{*i} \otimes e_m^{*\,k}) = 0$ ist. Insgesamt hat man, da dies für alle k, l gilt:

$$\Delta(K(\nu)) \subseteq K(\nu) \otimes \mathcal{E}^* + \mathcal{E}^* \otimes K(\nu).$$

Weiterhin berechnet man

$$\epsilon(\vartheta_{tr}([\nu, e_k^l])) = \sum_i (a_{ik} \delta_{il} - a_{li} \delta_{ki}) = a_{lk} - a_{lk} = 0,$$

woraus $\epsilon(K(\nu)) = 0$ und damit schließlich die Behauptung folgt. □

Sei nun M eine beliebige Matrix Koalgebra mit natürlichem Komodul V und zugehöriger Strukturabbildung τ_V. Wir betrachten dann die M-Komodul Endomorphismen von V, also

$$\mathrm{End}_M(V) := \{\mu \in \mathcal{E} | \ (\mu \otimes \mathrm{id}_M) \circ \tau_V = \tau_V \circ \mu\}.$$

Es ist klar, daß es sich um eine Unteralgebra von $\mathcal{E}$ handelt.

Lemma 1.3.2 *Sei M eine Matrix Koalgebra mit natürlichem Komodul V und Erzeugern x_{ij} mit $i, j = 1, \ldots, n$ gemäß Definition 1.2.1. Weiter sei $\pi : \mathcal{E}^* \to M$ der Epimorphismus mit $x_{ij} = \pi(e_i^{*j})$. Dann gilt:*

$$\mu \in \mathrm{End}_M(V) \Longleftrightarrow K(\mu) \subseteq \ker(\pi).$$

BEWEIS: Sei $\mu = \sum_{i,j} a_{ij} e_i^j$. Man berechnet einerseits:

$$\tau_V \circ \mu(v_k) = \tau_V(\sum_i a_{ik} v_i) = \sum_{i,j} v_j \otimes a_{ik} x_{ji}$$

und andererseits:

$$(\mu \otimes \mathrm{id}_M) \circ \tau_V(v_k) = \mu \otimes \mathrm{id}_M(\sum_i v_i \otimes x_{ik}) = \sum_{i,j} v_j \otimes a_{ji} x_{ik}$$

Daraus erhält man:

$$\mu \in \mathrm{End}_M(V) \Longleftrightarrow \sum_i (a_{ik} x_{ji} - a_{ji} x_{ik}) = \pi(\sum_i (a_{ik} e_j^{*i} - a_{ji} e_i^{*k})) = 0 \ \forall j,k$$

Nun gilt $\sum_i (a_{ik} e_j^{*i} - a_{ji} e_i^{*k}) = \vartheta_{tr}([\mu, e_k^j])$ und damit $\mu \in \mathrm{End}_M(V) \Longleftrightarrow \pi(K(\mu)) = 0$. □

Korollar 1.3.3 *Sei L ein Koideal in $\mathcal{E}^*$ und $\mu, \nu \in \mathcal{E}$. Dann folgt aus $K(\mu) \subseteq L$ und $K(\nu) \subseteq L$ daß auch $K(\mu\nu) \subseteq L$ und $K(\nu\mu) \subseteq L$ ist.*

BEWEIS: Sei $M := \mathcal{E}^*/L$ die zu L gehörige Matrix Koalgebra. Nach Lemma 1.3.2 gilt $\mu, \nu \in \mathrm{End}_M(V)$ also auch $\mu\nu, \nu\mu \in \mathrm{End}_M(V)$. Die Behauptung des Korollars folgt daraus wiederum aus dem Lemma. □

Gemäß Lemma 1.3.1 kann man einer beliebigen Teilmenge $A \subseteq \mathcal{E}$ die Matrix Koalgebra $M(A) := \mathcal{E}^*/K(A)$ mit natürlichem Modul V zuordnen. Aus Lemma 1.3.2 folgt sofort $A \subseteq \mathrm{End}_{M(A)}(V)$. Überdies gibt es zu jeder Matrix Koalgebra M mit $A \subseteq \mathrm{End}_M(V)$ einen Koalgebren Epimorphismus $\pi : M(A) \to M$, welcher die Erzeuger von $M(A)$ auf die entsprechenden Erzeuger von M abbildet. Dies zeigt, daß $M(A)$ das gesuchte duale Gegenstück zum Zentralisator $C(A) = \mathrm{End}_A(V)$ ist. Wir nennen $M(A)$ die *Zentralisator Koalgebra* von A. Auf Grund des Korollars ist klar, daß sich $M(A)$ nicht ändert wenn A durch die von A erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{E}$ ersetzt wird. Wir wollen daher im Folgenden stets annehmen, daß A eine Unteralgebra von $\mathcal{E}$ ist.

Um die in $M(A)$ geltenden Relationen etwas handlicher zu formulieren, führen wir folgende Notation zu $\mu \in \mathcal{E}$ und den Restklassen x_{ij} der Basiselemente e_i^{*j} von $\mathcal{E}^*$ in $M(A)$ ein:

$$\mu x_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj} \quad \text{und} \quad x_{ij}\mu := \sum_{k=1}^n x_{ik} a_{kj}, \tag{1.2}$$

wobei $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ die *Koeffizientenmatrix* von μ bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V ist, d.h. daß $\mu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e_i^j$ gilt. Insbesondere gilt wegen $a_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ im Fall $\mu = e_k^l$

$$e_k^l x_{ij} = \delta_{ki} x_{lj} \quad \text{und} \quad x_{ij} e_k^l = \delta_{lj} x_{ik}$$

Da demzufolge $\mu x_{ij} - x_{ij}\mu$ gerade die Restklassen von $\vartheta_{tr}([\mu, e^i_j])$ ist, gelten in $M(A)$ die Relationen

$$\mu x_{ij} = x_{ij}\mu \quad \text{für alle } \mu \in A,\ i,j = 1,\ldots,n. \tag{1.3}$$

Eine hinreichende Menge von Relationen erhält man bereits dann, wenn μ ein Algebrenerzeugendensystem von A durchläuft.

1.4 Eine Verallgemeinerung der FRT-Konstruktion

Wir betrachten Familien $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_r)_{r\in\mathbb{N}_0}$ von Algebren über R mit $\mathcal{A}_r \subseteq \mathcal{E}_r$. Man kann $\mathcal{A}$ gemäß Lemma 1.3.1 die folgende Familie von Koidealen K_r in ${\mathcal{E}_r}^*$ zuordnen:

$$K_r := K(\mathcal{A}_r) \tag{1.4}$$

Es sei daran erinnert, daß – wie in 1.1 bemerkt – des öfteren von den natürlichen Homomorphismen zwischen $\mathcal{E}_r$ und $\mathcal{E}^{\otimes r}$ sowie zwischen ${\mathcal{E}_r}^*$ und $\mathcal{E}^{*\otimes r}$ Gebrauch gemacht wird, und daß diese mit den Isomorphismen ϑ_{tr} und den r-fachen Tensorprodunkten von diesen kommutieren. Wir gehen nun der Frage nach, wann

$$I := \oplus_{r\in\mathbb{N}_0} K_r \tag{1.5}$$

ein Ideal in $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ ist. Dazu betrachtet man die Inklusionen $s_r, t_r : \mathcal{E}_r \to \mathcal{E}_{r+1}$ gegeben durch

$$s_r(\mu) = \mu \otimes \mathrm{id}_V,\ t_r(\mu) = \mathrm{id}_V \otimes \mu,\ \mu \in \mathcal{E}_r$$

Definition 1.4.1 *Wir nennen die Familie $\mathcal{A}$* idealverträglich *falls für alle $r \in \mathbb{N}_0$*

$$s_r(\mathcal{A}_r) \subseteq \mathcal{A}_{r+1} \text{ und } t_r(\mathcal{A}_r) \subseteq \mathcal{A}_{r+1}$$

gilt. $\mathcal{A}$ heißt idealverträglich und endlich erzeugt vom Grad u *für eine natürliche Zahl u, falls zusätzlich $\mathcal{A}_r$ endlich erzeugte R-Algebren für $r = 0,\ldots,u$ sind und für alle $r > u$ die Algebra $\mathcal{A}_r$ von $s_{r-1}(\mathcal{A}_{r-1}) + t_{r-1}(\mathcal{A}_{r-1})$ erzeugt wird.*

Man beachte, daß nach Korollar 1.3.3 für eine idealverträgliche und endlich erzeugte Familie $\mathcal{A}$ sämtliche Kommutatorkoideale K_r endlich erzeugte R-Moduln sind (auch dann wenn R nicht noethersch ist). Zu einem Algebrenerzeugendensystem $\{a_i\}_{i\in I}$ von $\mathcal{A}_r$ erhält man ein Erzeugendensystem von K_r durch $\{\vartheta_{tr}([a_i, e^l_k])|\ i \in I,\ k,l = 1,\ldots,n\}$.

Satz 1.4.2 *Die Familie $\mathcal{A}$ sei idealverträglich. Dann gilt:*

(a) I ist ein homogenes Biideal in $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$.

(b) Ist $\mathcal{A}$ endlich erzeugt vom Grad u, so wird das homogenes Biideal I von $\oplus_{m=0}^u K_m$ erzeugt.

BEWEIS: Nach Lemma 1.3.1 sowie der Definition der Koalgebrenstruktur auf $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ aus 1.2 ist I ein Koideal. Zum Beweis, daß I ein homogenes Ideal ist, genügt es, für $a \in K_r$ und $b \in \mathcal{E}_u{}^*$ $a \otimes b \in K_{r+u}$ sowie $b \otimes a \in K_{r+u}$ zu zeigen. Weiterhin genügt es für das Element a einen R-Modul Erzeuger $a = \vartheta_{tr}([\mu, \nu])$ mit $\mu \in \mathcal{E}_r$ und $\nu \in \mathcal{A}_r$ zu betrachten. Es gilt dann $s_{r+u-1} \circ s_{r+u-2} \circ \ldots \circ s_r(\nu) = \nu \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes u}} =: \hat{\nu} \in \mathcal{A}_{r+u}$. Setzt man $\hat{\mu} := \mu \otimes \bar{b}$, wobei $\bar{b}$ das Urbild von b unter ϑ_{tr} ist, so erhält man

$$a \otimes b = \vartheta_{tr}([\mu, \nu]) \otimes b = \vartheta_{tr}([\hat{\mu}, \hat{\nu}]) \in K_{r+u}.$$

Analog zeigt man $b \otimes a \in K_{r+u}$.

Zum Beweis von (b) sei J das von $\oplus_{m=0}^{u} K_m$ erzeugte homogene Ideal in $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$. Teil (a) des Satzes liefert $J \subseteq I$ wegen $\oplus_{m=0}^{u} K_m \subseteq I$. Für die umgekehrte Inklusion wird durch vollständige Induktion $K_r \subseteq J$ gezeigt. Der Induktionsanfang $r = 0, \ldots, u$ folgt per Definition von J. Sei also $r > u$ und $J_r := J \cap \mathcal{E}_r$. Es gilt dann $J_r = J_{r-1} \otimes \mathcal{E}^* + \mathcal{E}^* \otimes J_{r-1}$, denn $j \in J_r$ läßt sich schreiben als $j = \sum_k a_k \otimes b_k \otimes c_k$ mit $a_k \in \mathcal{E}_{r_k}{}^*$, $b_k \in K_{m_k}$, $c_k \in \mathcal{E}_{s_k}{}^*$ mit $m_k \leq u$ und $r_k + m_k + s_k = r$, so daß aus $r_k + s_k \geq 1$ offensichtlich $j \in J_{r-1} \otimes \mathcal{E}^* + \mathcal{E}^* \otimes J_{r-1}$ folgt.

Nun gilt nach Induktionsvorraussetzung $K_{r-1} \subseteq J_{r-1}$ und wegen $J \subseteq I$ auch die umgekehrte Inklusion. Dies ergibt:

$$J_r = K_{r-1} \otimes \mathcal{E}^* + \mathcal{E}^* \otimes K_{r-1} = K(A)$$

mit $A := s_{r-1}(\mathcal{A}_{r-1}) + t_{r-1}(\mathcal{A}_{r-1}) \subseteq \mathcal{E}_r$. Nun ist aber $\mathcal{A}$ endlich erzeugt vom Grad u und folglich wird, $\mathcal{A}_r$ von A als Algebra erzeugt. Eine Anwendung von Korollar 1.3.3 liefert schliesslich $K_r = K(\mathcal{A}_r) \subseteq K(A) = J_r \subseteq J$. $\square$

Gemäß Satz 1.4.2 (a) können wir nun jeder idealverträglichen Familie $\mathcal{A}$ die *graduierte Matrix Bialgebra*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \mathcal{T}(\mathcal{E}^*)/I \tag{1.6}$$

mit natürlichem Komodul V und homogenen Summanden

$$\mathcal{M}(\mathcal{A})_r = \mathcal{E}_r{}^*/K_r = M(\mathcal{A}_r)$$

zuordnen, wobei I das homogene Biideal (1.5) ist. Wir wollen dies als die *FRT-Konstruktion zu* $\mathcal{A}$ bezeichnen.

Bemerkung 1.4.3 *Zu einer endlich erzeugten Unteralgebra $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{E}_2$ erhält man durch die Festlegungen*

$$\mathcal{A}_0 := R,\ \mathcal{A}_1 := R \cdot \mathrm{id}_V \quad \textit{und} \quad \mathcal{A}_r := \langle s_{r-1}(\mathcal{A}_{r-1}) + t_{r-1}(\mathcal{A}_{r-1}) \rangle_{\mathrm{Alg}} \quad \textit{für} \quad r > 2$$

eine idealverträgliche endlich erzeugte Familie vom Grad 2. Alle hier vorkommenden Familien $\mathcal{A}$ sind von dieser Gestalt. Da die Konstruktion in diesem Fall nur von $\mathcal{A}_2$ abhängt, schreiben wir gelegentlich auch $\mathcal{M}(\mathcal{A}_2)$ für $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{M}(\beta)$ wenn $\mathcal{A}_2$ von lediglich einem Element $\beta \in \mathcal{E}_2$ erzeugt wird. Letzteres ist der Spezialfall der übliche FRT-Konstruktion.

Die übliche FRT-Konstruktion $\mathcal{M}(\beta)$ wird in der Regel für einen *Quanten-Yang-Baxter-Operator* durchgeführt. Dies ist ein Endomorphismus $\beta \in \mathcal{E}_2$, welcher der folgenden sogenannten *Quanten-Yang-Baxter-Gleichung* in $\mathcal{E}_3$ genügt:

$$\beta_1\beta_2\beta_1 = \beta_2\beta_1\beta_2 \tag{1.7}$$

Darin ist $\beta_1 := \beta \otimes \mathrm{id}_V$ und $\beta_2 := \mathrm{id}_V \otimes \beta$ zu setzen. Ein solcher Endomorphismus induziert eine Darstellung $\rho_r : R\mathcal{Z}_r \to \mathcal{E}_r$ der Gruppenalgebra $R\mathcal{Z}_r$ der *Artinsche Zopfgruppe* $\mathcal{Z}_r$ auf r Fäden. Die Algebren $\mathcal{A}_r$ ergeben sich dann als die Bilder von $R\mathcal{Z}_r$ unter ρ_r. Wir betrachten dies etwas näher:

Die Artinsche-Zopfgruppe $\mathcal{Z}_r$ besitzt bekanntlich eine Präsentation durch Erzeugende σ_i für $i = 1, \ldots, r-1$, welche den Überflechtungen des i-ten Fadens über den $i+1$-ten entsprechen, und Relationen

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad |i-j| > 1 \tag{1.8}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad i < r-1 \tag{1.9}$$

Ein Vergleich von (1.9) mit (1.7) zeigt, daß eine Darstellung ρ_r zu dem Quanten Yang-Baxter-Operator β durch

$$\rho_r(\sigma_i) := \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}}$$

gegeben ist. Nach obiger Definition der Algebrenfamilie $\mathcal{A}$ zu β, wird $\mathcal{A}_r$ von $\rho_r(\sigma_1), \ldots, \rho_r(\sigma_{r-1})$ erzeugt. Also ist $\mathcal{A}_r$ das Bild von $R\mathcal{Z}_r$.

Eine Anwendung der Konstruktion, die nicht durch die übliche FRT-Konstruktion, also nicht durch Darstellungen der Zopfgruppe, sondern etwa durch Darstellungen der Brauer-Algebren $\mathcal{B}_{R,r}$ zustande kommt wird in 2.5 gegeben (vgl. Bemerkung 2.5.1).

1.5 Zentralisator und Zentralisator Koalgebra

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen den in 1.3 betrachteten Objekten $C(A) = \mathrm{End}_A(V)$ und $M(A) = \mathcal{E}^*/K(A)$ zu einer Unteralgebra $A \subseteq \mathcal{E}$ behandelt werden, wobei $K(A)$ das von A induzierte Koideal gemäß 1.3 ist. $M(A)^*$ trägt stets eine Algebrenstruktur und $C(A)^*$ unter gewissen Vorausetzungen eine Koalgebrenstruktur. Somit hat man A je zwei Algebren und Koalgebren zugeordnet, die wir nun vergleichen wollen.

1.5.1 Die Vergleichsätze

Für $x, a, b \in \mathcal{E}$ gilt offenbar $tr(b[x,a]) = tr(x[a,b])$. Da tr nichtentartet ist, folgt:

$$\vartheta_{tr}([x,a])(b) = tr(b[x,a]) = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{E} \iff [a,b] = 0. \tag{1.10}$$

Daraus erhält man unter Verwendung der Bezeichnungen $()^{\perp}$ und $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}$ bzw. $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}^*}$ aus Anhang A.1 für Komplement und Auswerteabbildung

Lemma 1.5.1 *Es gilt* $K(A)^{\perp} = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(C(A))$ *sowie* $K(A)^{\perp^{\perp}} = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}^*}(C(A)^{\perp})$

Beweis: Nach Definition gilt $K(A) = \vartheta_{tr}(< [a,x] | a \in A, x \in \mathcal{E} >_{R-\mathrm{mod}})$. Aus (1.10) ergibt sich $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(b)(\vartheta_{tr}([x,a])) = \vartheta_{tr}([x,a])(b) = 0$ für alle $x \in \mathcal{E}$ und $a \in A$ genau dann, wenn $[a,b] = 0$ für alle $a \in A$, also genau dann wenn $b \in C(A)$ gilt. Für den zweiten Teil der Aussage bleibt $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}^*}(C(A)^{\perp}) = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(C(A))^{\perp}$ zu zeigen. Dies folgt aus Gleichung (A.1) aus dem Anhang. □

Es sei daran erinnert, daß zu einer beliebigen Koalgebra M über R der duale R-Modul $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ von M eine Algebrenstruktur durch das *Faltungsprodukt*

$$\mu\nu := (\mu \otimes \nu) \circ \Delta \quad \text{für alle } \mu, \nu \in M^*$$

erbt, wobei für $\mu \otimes \nu$ streng genommen das Bild unter dem natürlichen Homomorphismus $M^* \otimes M^* \to (M \otimes M)^*$ zu nehmen ist. Wir nennen M^* die *duale Algebra von* M. Für einen Koalgebrenhomomorphismus $\pi : M \to N$ folgt wegen

$$\pi^*(vw)(x) = vw(\pi(x)) = (v \otimes w) \circ \Delta_N(\pi(x)) =$$

$$(\pi^*(v) \otimes \pi^*(w)) \circ \Delta_M(x) = (\pi^*(v)\pi^*(w))(x)$$

mit $v, w \in N^*$ und $x \in M$, daß $\pi^* : N^* \to M^*$ zu einem Algebrenhomomorphismus wird, wobei zur besseren Unterscheidung die Komultiplikationen von N und M durch Δ_N und Δ_M bezeichnet sind. Also ist die Konstruktion funktoriell.

Im Spezialfall $M = \mathcal{E}^*$ erhält man eine Algebrenstruktur auf $\mathcal{E}^{**}$. Wir wollen zeigen, daß die Auswerteabbildung $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{**}$ ein Algebrenhomomorphismus ist. Dazu berechnet man zu $\mu, \nu \in \mathcal{E}$

$$e_i^{*j}(\mu\nu) = \sum_k e_i^{*k}(\mu) e_k^{*j}(\nu) = \Delta(e_i^{*j})(\mu \otimes \nu)$$

Nun gilt $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(\mu) \otimes \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(\nu) = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}}(\mu \otimes \nu)$ unter der Identifizierung von $\mathcal{E}^{**} \otimes \mathcal{E}^{**}$ via $(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)^*$ mit $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})^{**}$ und damit für alle e_i^{*j}

$$\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(\mu\nu)(e_i^{*j}) = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}}(\mu \otimes \nu)(\Delta(e_i^{*j})) =$$

$$(\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(\mu) \otimes \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(\nu)) \circ \Delta(e_i^{*j}) = (\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(\mu)\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}(\nu))(e_i^{*j}).$$

Also ist $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}$ ein Algebrenisomorphismus.

Lemma 1.5.2 *Sei* M *eine Matrix Koalgebra und* $\pi : \mathcal{E}^* \to M$ *die natürliche Projektion mit* $K := \ker(\pi)$. *Dann ist* $\rho := \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}^{-1} \circ \pi^* : M^* \to \mathcal{E}$ *ein Monomorphismus von* R*-Algebren mit* $\mathrm{im}(\rho) = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}^{-1}(K^{\perp})$.

Beweis: Nach den Vorbemerkungen ist die zur natürlichen Projektion π duale Abbildung $\pi^* : M^* \to \mathcal{E}^{**}$ ein Algebrenhomomorphismus. Da $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ rechtsexakt ist muß π^* injektiv sein, und man überprüft, daß $\mathrm{im}(\pi^*) = K^{\perp}$ gilt. Den Vorbemerkungen zufolge ist aber auch $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}$ ein Algebrenhomomorphismus und damit auch ρ. □

Satz 1.5.3 (1.Vergleichsatz) *Die Algebren $C(A)$ und $M(A)^*$ sind isomorph. Ein Isomorphismus ist gegeben durch ρ.*

Beweis: Dies folgt aus den Lemmata 1.5.1 und 1.5.2 wegen $\mathrm{im}(\rho) = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}^{-1}(K^\perp) = C(A)$. □

Bevor wir in einem zweiten Vergleichsatz der Frage nachgehen, wann $C(A)^*$ die Struktur einer Koalgebra von $C(A)$ erbt, und wann dann umgekehrt $M(A)$ isomorph zu $C(A)^*$ ist, betrachten wir zuvor den Zusammenhang von ρ mit der Komodulstruktur bzw. Modulstruktur von V. Diesbezüglich berechnet man für alle $f \in M(A)^*$, gegeben durch $f(x_{ij}) = c_{ij} \in R$ für $i, j \in \underline{n}$, und $v_j \in V$ für $j \in \underline{n}$

$$(\mathrm{id}_V \otimes f) \circ \tau_V(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i c_{ij} \otimes 1 = \rho(f)(v_j) \otimes 1.$$

Also erhält man (unter der Identifizierung $V \otimes R = V$) die Beziehung

$$(\mathrm{id}_V \otimes f) \circ \tau_V = \rho(f). \tag{1.11}$$

Daraus erhalten wir (für spätere Verwendung)

Lemma 1.5.4 *Sei $M(A)$ freier R-Modul. Dann ist ein R-Untermodul U von V genau dann $M(A)$-invariant wenn er $C(A)$-invariant ist.*

Beweis: Gilt $\tau_V(U) \subseteq U \otimes M(A)$, so folgt sofort aus (1.11) und Satz 1.5.3, daß U invariant unter $C(A)$ ist (auch dann, wenn $M(A)$ nicht frei ist). Für die umgekehrte Implikation nehmen wir eine Basis $b_1, \ldots, b_s$ von $M(A)$ an, deren duale Basis in $M(A)^*$ durch $f_1, \ldots, f_s$ gegeben sei. Für einen $C(A)$-Untermodul $U \subseteq V$ ist dann $\tau_V(U) \subseteq U \otimes M(A)$ zu zeigen. Zu $u \in U$ gibt es eine eindeutige Darstellung

$$\tau_V(u) = \sum_{i=1}^{s} u_i \otimes b_i$$

mit $u_i \in V$. Aus (1.11) erhält man $u_i = \rho(f_i)(u)$ und daraus $u_i \in U$ wegen $\rho(f_i) \in C(A)$. □

Es mag sein, daß sich die Vorrausetzung "$M(A)$ frei" in dem Lemma zu torsionsfrei abschwächen läßt, bei etwas aufwendigerer Beweisführung. Daß man auf letzteres allerdings nicht verzichten kann, soll durch das folgende Beispiel gezeigt werden:

Beispiel: Sei $R = \mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Z}^2$, $a := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und A die von a erzeugte Unteralgebra in $\mathcal{E} = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2)$. Man berechnet dann

$$M(A) = \mathbb{Z}x_{11} \oplus \mathbb{Z}x_{22} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})x_{21} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})x_{12}.$$

Also ist wegen $x_{21} \neq 0$ das Element $\tau_V(v_1) = v_1 \otimes x_{11} + v_2 \otimes x_{21}$ nicht in $v_1 \otimes M(A)$ enthalten und folglich der eindimensionale Aufspann von v_1 kein $M(A)$-Unterkomodul von V. Andererseits ist dies offensichtlich ein Untermodul von

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \mid k,l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Also muß man für Lemma 1.5.4 wenigstens das Torsionsfreisein von $M(A)$ vorraussetzen.

Wir bereiten nun den angekündigten zweiten Vergleichsatz vor. Dazu betrachten wir die zur Inklusion $\iota : C(A) \hookrightarrow \mathcal{E}$ duale Abbildung $\iota^* : \mathcal{E}^* \to C(A)^*$. Wegen (A.2) und Lemma 1.5.1 gilt

$$K(A) \subseteq \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}^*}^{-1}(K(A)^{\perp\perp}) = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}^*}^{-1}(\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}^*}(C(A)^{\perp})) = C(A)^{\perp} = \ker(\iota^*)$$

also faktorisiert ι^* zu einem R-Modul Homomorphismus

$$\theta : M(A) \to C(A)^*.$$

Lemma 1.5.5 *Der Kern von θ ist der Torsionsuntermodul von $M(A)$*

Beweis: Nach Lemma A.1.2 ist $\mathrm{Ev}_{\mathcal{E}^*}^{-1}(K(A)^{\perp\perp})/K(A)$ der Torsionsuntermodul von $M(A)$. Nach obiger Rechnung ist dies aber gerade der Kern $C(A)^{\perp}/K(A)$ von θ. $\square$

Dies liefert unmittelbar

Korollar 1.5.6 (Kriterium des Torsionsfreiseins) *Es sind äquivalent:*

(a) $M(A)$ *ist torsionsfrei*

(b) $K(A) = C(A)^{\perp}$

(c) θ *ist injektiv.*

Bemerkung 1.5.7 *Die Abbildung θ ist genau dann surjektiv wenn die Erweiterungsgruppe $Ext^1_R(\mathcal{E}/C(A), R)$ trivial ist, also insbesondere wenn $\mathcal{E}/C(A)$ projektiv, d.h $C(A)$ direkter Summand in $\mathcal{E}$ ist.*

Nach Bemerkung 1.2.2 und Lemma A.3.2 können wir zu jeder als R-Modul endlich erzeugten und projektiven R-Algebra A auf die in 1.2 beschriebene Weise eine duale Koalgebra A^* zuweisen. Die Konstruktion ist funktoriell, denn ist $\alpha : A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus zwischen zwei solchen R-Algebren, dann folgt aus der Kommutativität von α mit den Multiplikationen $\bigtriangledown_A$ und $\bigtriangledown_B$ von A und B die Kommutativität von α^* mit den Komultiplikationen $\Delta_A = {\bigtriangledown_A}^*$ und $\Delta_B = {\bigtriangledown_B}^*$, was die Koalgebrenhomomorphie von α^* zeigt.

Ist nun C eine Unteralgebra von $\mathcal{E}$, die endlich erzeugt und projektiv als R-Modul ist, so induziert die Inklusion $\iota : C \to \mathcal{E}$ den Koalgebrenhomomorphismus $\iota^* : \mathcal{E}^* \to C^*$ mit $C^{\perp} = \ker(\iota^*)$. Insbesondere ist $C^{\perp}$ ein Koideal. In unserer Situation ist $C = C(A)$ und $K(A) \subseteq C(A)^{\perp}$, so daß man den Koalgebrenhomomorphismus $\theta : M(A) \to C(A)^*$ aus Korollar 1.5.6 erhält. Zusammenfassend gilt nun:

Satz 1.5.8 (2. Vergleichsatz) *Falls der Zentralisator $C(A)$ von A ein direkter Summand in $\mathcal{E}$ ist, so besitzt $C(A)^*$ eine Koalgebrenstruktur und man erhält einen Epimorphismus $\theta : M(A) \to C(A)^*$ von Koalgebren, dessen Kern der Torsionsuntermodul von $M(A)$ ist.*

1.5.2 Verhalten unter Grundringerweiterungen

Wir betrachten den Funktor $()^S$ von der Katagorie der R-Moduln in die Kategorie der S-Moduln für einen Erweiterungsring S von R. (Definition siehe (A.3)). Wir lassen für S wie für R Integritätsbereiche mit Einselement zu und gehen davon aus, daß ein Ringhomomorphismus vorliegt, bezüglich dem wir S als eine R-Algebra auffassen. Falls der Erweiterungsring S von R ein Körper ist, so sprechen wir von einer *Spezialisierung* der betrachteten Moduln und Morphismen. Die Sprechweise ist gerechtfertigt durch den Fall, wo $R = S[x_1, \dots, x_k]/\text{Ideal}$ eine affine Algebra über dem algebraisch abgeschlossenen Körper S ist, und der Ringhomomorphismus $R \to S$, welcher umgekehrt S zu einer R-Algebra macht, durch die Substitution von Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in S$ anstelle der Unbestimmten $x_1, \dots, x_k$ gegeben ist.

Für Spezialisierungen $R \to S$ entsteht die Frage, ob die Dimension des Vektorraumes $M(A)^S$ für alle Körper S die gleiche ist. Die Antwort auf diese Frage ist nötig, um der graduierten Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ aus Abschnitt 1.4 eine Hilbertreihe zuordnen zu können. Falls R ein Dedekindring ist, so impliziert das Torsionsfreisein von $M(A)$ eine positive Antwort. Für allgemeinere Grundringe – und solche treten hier auf – benötigt man den Begriff des *lokalen Freiseins* eines Moduls. Die diesbezüglich verwendeten Hilfsmittel aus der Kommutativen Algebra sind im Anhang A.2 zusammengestellt.

Das eine Ziel der folgenden Ausführungen ist, ein Kriterium für das lokale Freisein von $M(A)$ zu finden. Setzt man vorraus, daß R Noethersch ist, so trifft dies genau dann zu wenn $M(A)$ projektiv ist. Das zweite Ziel ist eine Antwort auf die Frage, wie gut der Funktor $()^S$ mit den Bildungen von Zentralisatorkoalgebren in den Katagorien von R bzw. S-Moduln kommutiert. Während dieselbe Frage in Bezug auf die Bildung des Zentralisators im Allgemeinen keine positive Antwort zuläßt (ein hinreichendes Kriterium ist bekannterweise die Flachheit von S über R), werden wir hier ohne Einschränkungen an S eine positive Antwort erhalten (siehe Satz 1.5.9 (b)). Erstaunlicherweise wird sich auch herausstellen, daß sich $C(A)$ wenigstens dann gut unter dem Funktor $()^S$ verhält, wenn $M(A)$ projektiv ist (Satz 1.5.12 (d)).

Bekannterweise hat man zu R-Moduln W und U natürliche Homomorphismen

$$\eta_S(W, U) : \mathrm{Hom}_R(W, U)^S \to \mathrm{Hom}_S(W^S, U^S)$$

auf Erzeugern durch $\eta_S(W, U)(s \otimes e)(t \otimes v) := st \otimes e(v)$ für alle $s, t \in S, e \in \mathrm{Hom}_R(W, U), v \in W$ gegeben. Im Spezialfall $W = U = V$ führen wir die Bezeichnungen

$$\mathcal{E}_S := \mathrm{End}_S(V^S), \;\; \zeta_S := \eta_S(V, V) : \mathcal{E}^S \to \mathcal{E}_S$$

für den Ring der S-linearen Endomorphismen des S-Moduls V^S und den entsprechenden Homomorphismus ein. Beachte, daß ζ_S stets ein Isomorphismus ist, da V als frei vorrausgesetzt wurde. Ist $\{(e_S)_i^{\,j} |\ 1 \leq i,j \leq n\}$ die Basis aus Matrixeinheiten von $\mathcal{E}_S$ bezüglich der Basis $\{1 \otimes v_i |\ 1 \leq i \leq n\}$ von V^S, so gilt offenbar $\zeta_S(1 \otimes e_i^j) = (e_S)_i^{\,j}$. Entsprechend der Bezeichnung $\mathcal{E}_S$ setzen wir

$$A_S := \zeta_S \circ (\iota_A)^S(A^S) = \zeta_S(A^{S\succ})$$

für das Bild der Algebra A^S in $\mathcal{E}_S$. Darin bezeichnet $A^{S\succ}$ (wie in Anhang A) das Bild von A^S unter der von der Einbettung $\iota_A : A \hookrightarrow \mathcal{E}$ induzierten Abbildung $(\iota_A)^S$, d.h. $A^{S\succ} = (\iota_A)^S(A^S)$. Ebenso erhält man durch Einschränkung der ζ_S die Homomorphismen

$$\eta_S : C(A)^S \to C(A_S) = \mathrm{End}_{A_S}(V^S)$$

auf Erzeugern dementsprechend durch $\eta_S(s \otimes b)(t \otimes v) := st \otimes b(v),\ s,t \in S, b \in C(A), v \in V$ gegeben. Man beachte, daß es sich in beiden Fällen um Algebrenhomorphismen handelt, wenn man die Algebrenstruktur von $\mathcal{E}^S$ und $C(A)^S$ durch komponentenweise Multiplikation erklärt. Weiter beachte man, daß aufgrund der Beziehung $\iota_{C(A_S)} \circ \eta_S = \zeta_S \circ (\iota_{C(A)})^S$ die Abbildung η_S genau dann injektiv ist, wenn $(\iota_{C(A)})^S$ injektiv ist, und genau dann surjektiv wenn $\zeta_S(C(A)^{S\succ}) = C(A_S)$ gilt.

In Analogie zu η_S sollen nun Homomorphismen $\rho_S : K(A)^S \to K(A_S)$ und $\mu_S : M(A)^S \to M(A_S)$ konstruiert werden. Dazu ist es erforderlich den Isomorphismus

$$\chi_S := {\zeta_S}^{*-1} \circ \psi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}^{*S} \to (\mathcal{E}_S)^*$$

zu betrachten. Darin ist ψ_W (wie im Anhang A.1) der natürliche Homomorphismus von W^{*S} nach W^{S*}, der im Fall $W = \mathcal{E}$ aufgrund des Freiseins von $\mathcal{E}$ ein Isomorphismus ist. Zunächst soll gezeigt werden, daß es sich um Koalgebrenhomorphismen handelt. Dabei wird die Koalgebrenstruktur auf C^S für eine beliebige Koalgebra C folgendermaßen erklärt: Die Komultiplikation ist durch Δ^S verknüpft mit dem natürlichen Homomorphismus $\lambda_{C,C}$ aus Anhang A.3 von $(C \otimes C)^S$ nach $C^S \otimes C^S$ gegeben während die Koeins gerade ϵ^S ist. ${\mathcal{E}_S}^*$ und $\mathcal{E}^{S*}$ sind gemäß Bemerkung 1.2.2 als die duale Koalgebren zu den Algebren $\mathcal{E}_S$ und $\mathcal{E}^S$ aufzufassen.

Als duale Abbildung eines Algebrenhomomorphismus ist ${\zeta_S}^*$ aus Gründen der Funktorialität ein Morphismus von Koalgebren. Für $\psi_{\mathcal{E}}$ folgt dies aufgrund der Natürlichkeit der Transformationen ψ_W und $\lambda_{U,W}$. Daraus ergibt sich die entsprechnde Eigenschaft für χ_S. Dies läßt sich natürlich auch explizit durch Betrachtung der Basen $\{1 \otimes e_i^{*j} |\ 1 \leq i,j \leq n\}$ und $\{(e_S)_i^{*j} |\ 1 \leq i,j \leq n\}$ von $\mathcal{E}^{*S}$ und $(\mathcal{E}_S)^*$ bestätigen, auf denen man $\chi_S(1 \otimes e_i^{*j}) = (e_S)_i^{*j}$ erhält. Ebenso einfach verifiziert man die Kommutativität

$$\chi_S \circ {\vartheta_{tr}}^S = \vartheta_{tr\,S} \circ \zeta_S \tag{1.12}$$

anhand der Basen. Darin ist $\vartheta_{tr\,S}$ der durch die Spurabbildung induzierte Isomorphismus von $\mathcal{E}_S$ nach $(\mathcal{E}_S)^*$. Bezeichnet man die Urbilder der Kommutator-Koideale $K(A)$ und $K(A_S)$ unter ϑ_{tr} beziehungsweise $\vartheta_{tr\,S}$ mit

$$L(A) := \vartheta_{tr}^{-1}(K(A)) = <[\nu,\mu] | \nu \in A, \mu \in \mathcal{E}>_{R-\mathrm{mod}}$$

beziehungsweise

$$L(A_S) :=< [\nu,\mu] | \nu \in A_S, \mu \in \mathcal{E}_S >_{S-\text{mod}},$$

so folgt auf Grund der Algebrenisomorphie von ζ_S

$$\zeta_S(L(A)^{S^{\succ}}) = L(A_S).$$

Zusammen mit (1.12) ergibt sich daraus

$$\chi_S(K(A)^{S^{\succ}}) = K(A_S). \tag{1.13}$$

Insbesondere ist $K(A)^{S^{\succ}}$ ein Koideal in $\mathcal{E}^{*S}$ und $M(A)^S \cong \mathcal{E}^{*S}/K(A)^{S^{\succ}}$ eine Koalgebra.
Wir können nun die natürlichen Homomorphismen ρ_S und μ_S angeben:

$$\rho_S := \chi_S \circ (\iota_{K(A)})^S : K(A)^S \to K(A_S) = \vartheta_{tr\,S}(L(A_S))$$

und

$$\mu_S : M(A)^S \to M(A_S) = (\mathcal{E}_S)^*/K(A_S)$$

ist die auf Grund von 1.13 existierende Faktorisierung von χ_S.

Satz 1.5.9 *Sei S eine beliebige kommutative R-Algebra. Dann gilt:*

(a) ρ_S ist surjektiv und genau dann injektiv, wenn $(\iota_{K(A)})^S$ injektiv ist.

(b) μ_S ist ein Isomorphismus von S-Koalgebren.

Beweis: Der Beweis folgt sofort aus den Definitionen der Abbildungen und (1.13). □

Wir ziehen Konsequenzen in Bezug auf die FRT-Konstruktion aus 1.4. Nach den obigen Ausführungen ist klar wie man zu einer Bialgebra B über R eine S-Bialgebrenstruktur auf $S \otimes_R B$ erhält.

Satz 1.5.10 (Grundring Erweiterung) *Sei $\mathcal{A}$ eine idealverträgliche Familie von Unteralgebren $\mathcal{A}_r \subseteq \mathcal{E}_r$ und $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ die zugehörige FRT-Konstruktion. S sei ein weiterer Integritätsbereich, der mittels einem Ringhomomorphismus $R \to S$ als R-Algebra aufgefaßt werde. Dann gibt es einen Isomorphismus μ_S von graduierten Matrix-Bialgebren über S*

$$\underline{\mu}_S : S \otimes_R \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A}_S),$$

der auf den Erzeugern – den Restklassen x_{ij} von $1 \otimes e_i^{*j}$ – durch $\underline{\mu}_S(x_{ij}) = y_{ij}$ gegeben ist, wobei y_{ij} die Restklasse von $(e_S)_i^{*j}$ in $\mathcal{M}(\mathcal{A}_S)$ sei und mit $\mathcal{A}_S = (\mathcal{A}_{r\,S})_{r \in \mathbb{N}_0}$ die idealverträgliche Familie der Unteralgebren $\mathcal{A}_{r\,S}$ von $\mathcal{E}_{r\,S}$ gemeint ist.

BEWEIS: Zunächst hat man einen Algebrenisomorphismus $\underline{\chi}_S$ von $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)^S$ nach $\mathcal{T}(\mathcal{E}_S{}^*)$ auf Erzeugern durch $\underline{\chi}_S(1 \otimes e_i^{*j}) = (e_S)_i^{*j}$ gegeben. Die Einschränkung davon auf den r-ten homogenen Sumanden $\mathcal{E}_r{}^{*S}$ stimmt (unter unseren Identifizierungen zwischen $\mathcal{E}^{*\otimes r}$ und $\mathcal{E}_r{}^*$ usw.) mit dem obigen χ_S überein. Nach (1.13) und den obigen Ausführungen faktorisiert $\underline{\chi}_S$ zu dem graduierten Bialgebrenisomorphismus $\underline{\mu}_S$. $\square$

Ist die R-Algebra S ein Körper, so folgt aus den Sätzen 1.5.3 und 1.5.9 (b)

$$\dim_S(C(A_S)) = \dim_S(M(A_S)^*) = \dim_S((M(A)^S)^*) = \dim_S(M(A)^S) \tag{1.14}$$

Dies ergibt mit Korollar A.2.2

Korollar 1.5.11 *$M(A)$ ist genau dann lokal frei, wenn für jede Spezialisierung S die Dimensionsgleichung $\dim_S(C(A_S)) = \dim_Q(C(A_Q))$ gilt, wobei Q der Quotientenkörper von R ist.*

Satz 1.5.12 (Kriterium der Projektivität) *Sei R ein Noetherscher Integritätsbereich. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) $M(A)$ ist projektiv.

(b) $M(A)$ ist lokal frei.

(c) $M(A)$ ist torsionsfrei und $C(A)$ ein direkter Summand in $\mathcal{E}$.

(d) η_S ist für jede Spezialisierung S ein Isomorphismus.

(e) ρ_S ist für jede Spezialisierung S ein Isomorphismus.

BEWEIS: Die Äquivalenz zwischen (a), (b) und (e) folgt aus Lemma A.2.6, wobei in Bezug auf (e) auch Satz 1.5.9 (a) zu beachten ist. Es wird nun (c) und (d) aus (a), (b) und (e) abgeleitet. Zunächst liefert die wegen (a) zerfallende Sequenz

$$0 \to K(A) \to \mathcal{E}^* \to M(A) \to 0$$

eine ebenfalls zerfallende Sequenz

$$0 \to M(A)^* \to \mathcal{E}^{**} \to \mathcal{E}^{**}/K(A)^\perp \to 0.$$

Da $\mathrm{Ev}_\mathcal{E}$ nach Lemma 1.5.1 einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{E}^{**}/K(A)^\perp$ und $\mathcal{E}/C(A)$ induziert folgt, daß $\mathcal{E}/C(A)$ projektiv ist, so daß auch die Sequenz

$$0 \to C(A) \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}/C(A) \to 0$$

zerfällt. Dies zeigt, daß $C(A)$ ein direkter Summand in $\mathcal{E}$ ist. Weiterhin impliziert dies nach Lemma A.2.6 die Injektivität der η_S. Zum Beweis der Surjektivität beachte man, daß das gleiche Lemma das lokale Freisein von $C(A)$ liefert. Beachtet man zudem, daß η_Q auf Grund des Flachseins des Quotientenkörpers Q ein Isomorphismus ist, so erhält man unter Berücksichtigung von Satz 1.5.3 und Gleichung (1.14) für jede Spezialisierung S die Dimensionsgleichung

$$\dim_S(C(A)^S) = \dim_Q(C(A)^Q) = \dim_Q(C(A_Q)) =$$

$$\dim_Q(M(A)^Q) = \dim_S(M(A)^S) = \dim_S(C(A_S)).$$

Also muß η_S auch surjektiv sein und es folgt (d). Als projektiver Modul ist $M(A)$ aber insbesondere auch torsionsfrei, so daß auch (c) gezeigt ist. Unter der Annahme von (d) folgt für jede Spezialsierung S aus Gleichung (1.14)

$$\dim_S(C(A)^S) = \dim_S(C(A_S)) = \dim_S(M(A)^S)$$

und da nach Lemma A.2.6 $C(A)$ lokal frei ist, muß dies dann wegen Korollar A.2.2 auch für $M(A)$ gelten. Da ein lokal freier Modul insbesondere torsionsfrei ist, bleibt für die Implikation (d) $\Rightarrow$ (c) zu zeigen, daß $C(A)$ direkter Summand in $\mathcal{E}$ ist. Dies ist unter der Annahme von (d) auf Grund von Lemma A.2.6 (e) erfüllt.

Zum Beweis von (a) aus (c) verwendet man den zweiten Vergleichsatz (Satz 1.5.8). Nach (c) ist θ einen Isomorphismus zwischen $M(A)$ und $C(A)^*$. Als direkter Summand von $\mathcal{E}$ ist $C(A)$ projektiv. Daher muß auch $C(A)^*$ projektiv sein und es folgt (a). □

Korollar 1.5.13 *Ist R Noethersch, so ist $M(A)$ genau dann frei, wenn $C(A)$ frei und $M(A)$ projektiv ist.*

Beweis: Verwende 1.5.12 (c) und Satz 1.5.8. □

Beispiel: Sei $R = \mathbb{Z}$ und $V = \mathbb{Z}^4$. Weiter sei

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E} = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^4)$$

und $A :=< a >$ das Algebrenerzeugnis von a in $\mathcal{E}$. Jeder beliebige Körper S ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra also eine Spezialisierung in dieser Situation. Für einen Körper der Charakteristik ungleich 2 besitzt a^S das Minimalpolynom $t^2 - 2t$ und in Charakteristik 2 ist es t^2. Das bedeutet, daß für jede Spezialisierung S die Algebra A_S zweidimensional ist. Es folgt (etwa mit Lemma A.2.6), daß A ein direkter Summand in E ist. Dennoch kann $M(A)$ nicht projektiv sein (was in diesem Fall natürlich auch frei bedeuten würde). Denn für einen Körper der Charakteristik ungleich 2 ist a^S diagonalisierbar und man berechnet $\dim_S(C(A_S)) = 2^2 + 2^2 = 8$, während für einen Körper der Charakteristik 2 $\dim_S(C(A_S)) = 9$ gilt. Damit kann $M(A)$ nach Korollar 1.5.11 nicht lokal frei, also auch nicht frei sein.

1.6 Komodulalgebren von Matrix Bialgebren

Eine *Komodulalgebra* über einer Bialgebra B ist eine Algebra über demselben Grundring R, die zudem eine B-Komodulstruktur besitzt, derart daß Multiplikation und Einbettung der Eins Morphismen von B-Komoduln sind.

Da die in Kapitel 3 zu betrachtende *quantensymplektische äußere Algebra* eine solche Komodulalgebra bezüglich einer Verallgemeinerten FRT-Konstruktion im Sinne von 1.6 ist, untersuchen wir zunächst wie solche Komodulalgebren in Bezug auf Matrix Bialgebren zustande kommen. Dabei beginnen wir mit der universellen Matrix Bialgebra $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ aus Abschnitt 1.2. Da $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ eine Bialgebra ist, erhält man (mittels der Multiplikation) induzierte Komodulstrukturen auf den Tensorprodukten $V^{\otimes r}$ des natürlichen Moduls V (dies sind gerade die Komodulstrukturen der Unterkoalgebren ${\mathcal{E}_r}^*$). Dadurch wird auch die Tensoralgebra $\mathcal{T}(V) := \oplus_{r\in\mathbb{N}_0} V^{\otimes r}$ sowie $\mathcal{T}(V)\otimes\mathcal{T}(V)$ zu einem $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ Komodul. Darin ist $V^{\otimes 0} := R1_{\mathcal{T}(V)}$ für den eindimensionalen Komodul mit $\tau_{V^{\otimes 0}}(1_{\mathcal{T}(V)}) := 1_{\mathcal{T}(V)} \otimes 1_{\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)}$ zu setzen.

Wir wollen zeigen, daß die Multiplikation $\widetilde{\bigtriangledown} : \mathcal{T}(V)\otimes\mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)$ sowie die Einbettung der Eins $\tilde{\mathrm{i}} : R \to \mathcal{T}(V)$ Morphismen von $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$-Komoduln sind, wodurch die Bezeichnung von $\mathcal{T}(V)$ als $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$-Komodulalgebra gerechtfertigt wird.

Dazu schreiben wir wiederum $v_{\mathbf{i}} := v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r} \in V^{\otimes r}$ für einen Multi-Index $\mathbf{i} \in I(n,r)$. Somit gilt für die Multiplikation von zwei homogenen Elementen der Tensoralgebra: $\widetilde{\bigtriangledown}(v_{\mathbf{i}} \otimes v_{\mathbf{j}}) = v_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}$. Damit berechnet man:

$$\widetilde{\bigtriangledown} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)} \circ \tau_{V^{\otimes r}\otimes V^{\otimes s}}(v_{\mathbf{i}} \otimes v_{\mathbf{j}}) = \sum_{\mathbf{k}\in I(n,r),\,\mathbf{l}\in I(n,s)} v_{\mathbf{k}+\mathbf{l}} \otimes {e^*_{\mathbf{k}+\mathbf{l}}}^{\mathbf{i}+\mathbf{j}} =$$

$$\sum_{\mathbf{m}\in I(n,r+s)} v_{\mathbf{m}} \otimes {e^*_{\mathbf{m}}}^{\mathbf{i}+\mathbf{j}} = \tau_{V^{\otimes r+s}} \circ \widetilde{\bigtriangledown}(v_{\mathbf{i}} \otimes v_{\mathbf{j}}),$$

woraus die Behauptung im Fall der Multiplikation folgt. In Bezug auf die Einbettung der Eins folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition der Komodulstruktur von $V^{\otimes 0}$.

Ein Morphismus zwischen Koalgebren $\theta : M \to N$ führt bekanntlich zu einem Restriktionsfunktor von der Kategorie der M-Komodul in die Kategorie der N-Komoduln, wobei die N-Komodulstruktur eines M-Komoduls W durch die Verkettung

$$W \stackrel{\tau_W}{\to} W \otimes M \stackrel{\mathrm{id}_W \otimes \theta}{\to} W \otimes N$$

gegeben ist. Man erhält

Satz 1.6.1 *Für jede Matrix Bialgebra $\mathcal{M}$ ist die Tensoralgebra $\mathcal{T}(V)$ über dem natürlichen Komoduls V eine Komodulalgebra. Ist $U \subseteq V^{\otimes r}$ ein Unterkomodul, so ist auch das von U erzeugte Ideal I in $\mathcal{T}(V)$ ein Unterkomodul und $\mathcal{T}(V)/I$ eine graduierte Komodulalgebra bezüglich $\mathcal{M}$.*

Beweis: Nach den Vorbemerkungen bleibt zu zeigen, daß für einen Unterkomodul U von $V^{\otimes r}$ das davon erzeugte Ideal I ebenfalls ein Unterkomodul ist. I ist offensichtlich ein homogenes Ideal. Folglich ist $\mathcal{T}(V)/I$ graduiert und man sich auf die Betrachtung homogener Elemente beschränken kann. Sei also $x \in I$ homogen vom Grad $s \geq r$. Dann gilt $x = \sum_i v_i u_i w_i$ mit $u_i \in U$ und homogenen $v_i, w_i \in \mathcal{T}(V)$, deren Grade zu $s - r$ summieren. Wir lassen nun der Einfachheit halber das Tensorzeichen für die Multiplikation in $\mathcal{T}(V)$ fort und wählen die Bezeichnungen

$$\tau(v_i) = \sum_j \bar{v_{ji}} \otimes a_{ji}, \quad \tau(u_i) = \sum_k \bar{u_{ki}} \otimes b_{ki}, \quad \tau(w_i) = \sum_l \bar{w_{li}} \otimes c_{li},$$

mit $\bar{u_{ki}} \in U$, homogenen $\bar{v_{ji}}, \bar{w_{li}} \in \mathcal{T}(V)$, deren Grade den v_i bzw. w_i entsprechen und $a_{ji}, b_{ki}, c_{li} \in \mathcal{M}$. Darin steht τ für die Strukturabbildung des Komoduls $\mathcal{T}(V)$. Die oben gezeigte Tatsache, daß $\widetilde{\bigtriangledown}$ ein Morphismus von $\mathcal{M}$ Komoduln ist, zeigt dann

$$\tau(x) = \sum_{i,j,k,l} \bar{v_{ji}} \bar{u_{ki}} \bar{w_{li}} \otimes a_{ji} b_{ki} c_{li} \in I \otimes \mathcal{M}.$$

Damit ist I ein Unterkomodul von $\mathcal{T}(V)$. Durch Standardverifikation anhand von Diagrammen bestätigt man, daß die Multiplikation von $\mathcal{T}(V)/I$ wiederum ein Morphismus von $\mathcal{M}$ Komoduln ist. $\square$

1.7 Stabilisatorkonstruktion für Bialgebren

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit einer etwas Allgemeineren Situation. Es handelt sich um das bialgebrentheoretische Gegenstück zur Konstruktion des Stabilisators in einem Monoid bezüglich der Operation desselben auf einer Menge. Sei R wieder ein beliebiger Integritätsbereich und B diesmal eine beliebige R-Bialgebra mit (als R-Modul) freiem Komudul V. Die definierende Matrix für V sei wie in 1.2 mit $(x_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ bezeichnet, d.h. für die Komodul Strukturabbildung τ_V gelte bezüglich der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V:

$$\tau_V(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes x_{ij}.$$

Aufgrund der Identität $(\tau_V \otimes \mathrm{id}_B)\tau_V = (\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\tau_V$ bestätigt man die wohlvertraute Formel $\Delta(x_{ij}) = \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}$. Allerdings brauchen wir hier nicht zu verlangen, daß die x_{ij} die Bialgebra B erzeugen. Wir nennen die x_{ij} die *Koeffizientenfunktionen* des Komoduls V bezüglich der obigen Basis. Sei $0 \neq v := \sum_j a_j v_j \in V$, $a_j \in R$ vorgegeben. Wir setzen $x_i := \sum_j a_j x_{ij}$, so daß $\tau_V(v) = \sum_i v_i \otimes x_i$ und $\epsilon(x_i) = a_i$ gilt. Wir wollen einen größtmöglichen Bialgebrenquotienten von B finden, bezüglich dem v einen eindimensionalen Unterkomodul $U :=< v >$ von V aufspannt. Dazu betrachten wir das von

$$\{\mu_{ij} := a_j x_i - a_i x_j | \ i,j = 1, \ldots, n\}$$

aufgespannte Ideal I in B.

Lemma 1.7.1 *Das Ideal I ist unabhängig von der Basiswahl in V.*

BEWEIS: Falls $w_i,\ i = 1, \ldots, n$ eine weitere Basis von V ist mit $v_i = \sum_j a_{ij} w_j,\ a_{ij} \in R$, erhält man für $y_j := \sum_i a_{ij} x_i$ unmittelbar $\tau_V(v) = \sum_j w_j \otimes y_j$, sodaß bezüglich der neuen Basis das von den Elementen $\bar{\mu_{ij}} := \epsilon(y_j) y_i - \epsilon(y_i) y_j,\ i, j = 1, \ldots, n$ aufgespannte Ideal $\bar{I}$ betrachtet wird. Man berechnet dann $\bar{\mu_{ij}} = \sum_{k,l} a_{kj} a_{li} \mu_{kl}$ woraus $\bar{I} \subseteq I$ folgt. Analog erhält man $I \subseteq \bar{I}$. $\square$

Wir erinnern an den Begriff eines *gruppenähnlichen Elementes g* einer Koalgebra. Ein solches erfüllt die Eigenschaften $\epsilon(g) = 1$ und $\Delta(g) = g \otimes g$ und kann somit als Koeffizientenfunktion eines eindimensionalen Komoduls interpretiert werden. Umgekehrt sind alle solchen Koeffizientenfunktionen gruppenähnlich.

Lemma 1.7.2 *Die von Null verschiedenen Zahlen a_i seien Einheiten in R. Dann ist I ein Biideal und für die Bialgebra B/I ist der von v erzeugte eindimensionale R-Untermodul $U =< v >$ von V ein Unterkomodul, dessen Koeffizientenfunktion das gruppenähnliche Element $g := a_k^{-1} x_k + I$ für ein k mit $a_k \neq 0$ ist, d.h es gilt $\tau_V(v) = v \otimes g$ bezüglich der Bialgebra B/I. Ist J ein weiteres Biideal in B, derart daß U auch bezüglich B/J ein Unterkomodul ist, so gilt $I \subseteq J$.*

BEWEIS: Wegen $\epsilon(x_i) = a_i$ gilt $\epsilon(\mu_{ij}) = 0$. Folglich ist I im im Kern des Algebrenhomomorphismus ϵ enhalten. Wir zeigen nun $\Delta(I) \subseteq I \otimes B + B \otimes I$ unter Verwendung von $(\tau_V \otimes \mathrm{id}_B)\tau_V = (\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\tau_V$. Man hat:

$$a_k \tau_V(v) = \sum_i v_i \otimes a_k x_i = \sum_i v_i \otimes (a_i x_k + \mu_{ik}) = v \otimes x_k + \sum_i v_i \otimes \mu_{ik}$$

Dies bestätigt die vorletzte Behauptung des Lemmas und liefert einerseits:

$$(\tau_V \otimes \mathrm{id}_B)(a_k^2 \tau_V(v)) = v \otimes x_k \otimes x_k + \sum_i v_i \otimes \mu_{ik} \otimes x_k + a_k \sum_{i,j} v_j \otimes x_{ji} \otimes \mu_{ik} =$$

$$v \otimes x_k \otimes x_k + \sum_i v_i \otimes (\mu_{ik} \otimes x_k + a_k \sum_j x_{ij} \otimes \mu_{jk})$$

und andererseits:

$$(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)(a_k^2 \tau_V(v)) = a_k v \otimes \Delta(x_k) + a_k \sum_i v_i \otimes \Delta(\mu_{ik})$$

Daher erhält man wegen

$$v \otimes x_k \otimes x_k - a_k v \otimes \Delta(x_k) = v \otimes (\sum_j a_j x_{kj} \otimes x_k - \sum_{i,j} a_k a_i x_{kj} \otimes x_{ji}) =$$

$$v \otimes (\sum_j x_{kj} \otimes (a_j x_k - a_k x_j) = v \otimes (\sum_j x_{kj} \otimes \mu_{jk})$$

schließlich

$$a_k \sum_i v_i \otimes \Delta(\mu_{ik}) = v \otimes (\sum_j x_{kj} \otimes \mu_{jk}) + \sum_i v_i \otimes (\mu_{ik} \otimes x_k + a_k \sum_j x_{ij} \otimes \mu_{jk})$$

Dies zeigt, daß für alle i und j wenigstens $a_k\Delta(\mu_{ik})$ in $B \otimes I + I \otimes B$ liegt. Falls a_k invertierbar ist, ist man hiermit fertig. Für invertierbares a_i nutzt man die Beziehung $\mu_{ik} = -\mu_{ki}$ aus. Gilt sowohl $a_i = 0$ als auch $a_k = 0$, so folgt $\mu_{ik} = 0$ und damit trivialerweise $\Delta(\mu_{ik}) \in B \otimes I + I \otimes B$. Da I von den μ_{ik} erzeugt wird und Δ ein Algebrenhomomorphismus ist, folgt $\Delta(I) \subseteq B \otimes I + I \otimes B$ und damit die Behauptung über die Biidealeigenschaft von I. Zum Beweis der Minimalität sei $g' \in B$, derart, daß $g' + J \in B/J$ die Koeffizientenfunktion des eindimensionalen B/J-Unterkomoduls $< v >$ ist. Also gilt $\tau_V(v) = v \otimes g' = \sum_i v_i \otimes a_i g'$ modulo $V \otimes J$. Da die v_i eine Basis von V bilden, erhält man wegen $\tau_V(v) = \sum_i v_i \otimes x_i$ zunächst $a_i g' - x_i \in J$ für alle i. Daraus folgert man dann $a_j x_i - a_i x_j \in J$, also $I \subseteq J$. □

Es sei bemerkt, daß, falls B eine Hopfalgebra ist, das Biideal I nicht unbedingt ein Hopfideal zu sein braucht. Für kommutative Hopfalgebren hat man jedoch keine Probleme.

Wir werden das obenstehende Lemma stets mehrfach auf dieselbe Bialgebra anwenden und jedesmal ein anderes gruppenähnliches Element g erhalten. Da wir gerne deren Übereinstimmung hätten, zeigen wir

Lemma 1.7.3 *Sei B eine Bialgebra mit zwei gruppenähnlichen Elementen g und g'. Dann ist das von $g - g'$ erzeugte Ideal I in B ein Biideal.*

Beweis: Da ϵ und Δ Algebrenhomomorphismen sind, genügt es wiederum die Koidealeigenschaften auf dem Erzeuger $g - g'$ zu überprüfen. Zum einen gilt $\epsilon(g - g') = 1 - 1 = 0$ zum anderen $\Delta(g - g') = g \otimes g - g' \otimes g' = (g - g') \otimes g + g' \otimes (g - g') \in I \otimes B + B \otimes I$. □

Korollar 1.7.4 *Seien a_i und x_i wie in Lemma 1.7.2 gegeben und g' ein beliebiges gruppenähnliches Element in B. Dann ist das als Erzeugnis von $\{x_i - a_i g' |\ i = 1, \ldots, n\}$ (unabhängig von der Basiswahl in V) definierte Ideal ein Biideal in B. Das eindimensionale R-Modul-Erzeugnis von $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ ist ein B/I-Unterkomodul mit Koeffizientenfunktion g'.*

Beweis: Man wende die beiden Lemmata nacheinander an und vergewissere sich, daß das dabei entstehende Ideal von den obenstehenden Elementen erzeugt wird. □

Kapitel 2

Klassische algebraische Monoide und ihre Quantisierung

Es werden zunächst symplektische und orthogonale Monoide $\mathrm{SpM}_n(K)$ und $\mathrm{OM}_n(K)$ für einen unendlichen Körper K gemäß [Dt] eingeführt (siehe auch [Gg]). S. Doty hat in der erwähnten Arbeit gezeigt, daß diese mit den Zariski-Abschlüssen der Gruppen symplektischer bzw. orthogonaler Ähnlichkeiten $\mathrm{GSp}_n(K)$ und $\mathrm{GO}_n(K)$ in $\mathrm{M}_n(K)$ übereinstimmen. Wir benötigen diese Übereinstimmung jedoch nicht. Wir werden sie vielmehr als Nebenprodukt im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers der Charakteristik Null am Ende dieses Kapitels (Korollar 2.6.3) und im symplektischen Fall für beliebige Charakteristik am Ende von Kapitel 3 (Korollar 3.14.7) erhalten. In 2.1 werden die Bialgebren $A^{\mathrm{s}}_K(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_K(n)$ im klassischen Fall definiert, jedoch nicht wie in der Einleitung angedeutet als Koordinatenringe von $\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}$ bzw. $\overline{\mathrm{GO}_n(K)}$ sondern als Quotienten von $A_K(n)$ nach gewissen explizit gegebenen Biidealen. Auch hier werden wir die Übereinstimmung im Fall des algebraisch abgeschlossenen Körpers der Charakteristik Null am Ende dieses Kapitels (Satz 2.6.1) bzw. im symplektischen Fall für beliebige Körpercharakteristik in Korollar 3.14.5 erhalten.

Als Vorbereitung zur Definition der graduierten Matrix Bialgebren $A_{R,q}(n)$, $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_{R,q}(n)$ in 2.4 und 2.5 mit Hilfe der FRT-Konstruktion aus Kapitel 1 betrachten wir zunächst die Birman-Murakami-Wenzlund Iwahori-Hecke-Algebren (Typ A) und Darstellungen von diesen auf den r-fachen Tensorprodukten von V. Diese führen dann zu den *idealverträglichen Familien* von Unteralgebren der Endomorphismenringe $\mathcal{E}_r = \mathrm{End}_R(V^{\otimes r})$ wie sie bei der FRT-Konstruktion gemäß 1.4 benötigt werden. Diese Darstellungen beruhen auf der Kenntnis von sogenannten *Quanten-Yang-Baxter* Operatoren, auf deren Herkunft (aus der Theorie der Quantengruppen) hier nicht näher eingegangen werden soll. Verweise auf Orginalliteratur findet man etwa in [Ha2], von wo die hier betrachteten Operatoen entnommen wurden.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, erfolgt die Betrachtung der wohlbekannten Bialgebra $A_{R,q}(n)$ hier nun zum Zweck der Demonstration der in Kapitel 1 eingeführten Methoden. Das Hauptresultat des Kapitels sind die Sätze 2.5.3 und 2.5.10 aufgrund derer wir die lineare Unabhängigkeit der in Kapitel 3 betrachteten Menge $\mathbf{B}_r$ von Bideterminanten erreichen. Ebenso zeigen diese Resultate, daß es sich bei $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_{R,q}(n)$ um Deformationen der Bialgebren $A^{\mathrm{s}}_R(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_R(n)$ handelt.

2.1 Symplektische und orthogonale Monoide

Sei $K = R$ zunächst ein beliebiger (unendlicher) Körper und $J^{\mathrm{o}}, J^{\mathrm{s}} \in V^{\otimes 2^*}$ eine symmetrische bzw. schiefsymmetrische nichtentartete Bilinearform. Für die Gram-Matrizen der Bilinearformen bezüglich der vorgegebenen Basis von V benutzen wir dieselben Symbole. Wir fixieren nun folgende Bezeichnungen (vgl. [Dt], 4.2)

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{O}_n(K) := & \{A \in \mathrm{GL}_n(K) |\ A^t J^{\mathrm{o}} A = J^{\mathrm{o}}\}, \\
\mathrm{Sp}_n(K) := & \{A \in \mathrm{GL}_n(K) |\ A^t J^{\mathrm{s}} A = J^{\mathrm{s}}\}, \\
\mathrm{OM}_n(K) := & \{A \in \mathrm{M}_n(K) |\ A^t J^{\mathrm{o}} A = A J^{\mathrm{o}} A^t = d^{\mathrm{o}}(A) J^{\mathrm{o}}\}, \\
\mathrm{SpM}_n(K) := & \{A \in \mathrm{M}_n(K) |\ A^t J^{\mathrm{s}} A = A J^{\mathrm{s}} A^t = d^{\mathrm{s}}(A) J^{\mathrm{s}}\}, \\
\mathrm{GO}_n(K) := & \mathrm{GL}_n(k) \cap \mathrm{OM}_n(K), \\
\mathrm{GSp}_n(K) := & \mathrm{GL}_n(k) \cap \mathrm{SpM}_n(K).
\end{array}$$

Darin ist A^t die zu A transponierte Matrix und $d^{\mathrm{o}} : \mathrm{OM}_n(K) \to K$ bzw. $d^{\mathrm{s}} : \mathrm{SpM}_n(K) \to K$ sind geeignete Funktionen. Tatsächlich sind es rationale Charaktere der beiden abgeschlossenen Monoide (wie wir in Satz 2.1.1 sehen werden). Wir nennen sie die *Dilatationskoeffizientenfunktionen* und ihre Werte die *Dialatationskoeffizienten*. $\mathrm{OM}_n(K)$ bzw, $\mathrm{SpM}_n(K)$ heißen das *orthogonales* bzw. *symplektisches Monoid* und $\mathrm{GO}_n(K)$ bzw. $\mathrm{GSp}_n(K)$ die Gruppe der *orthogonalen bzw. symplektischen Ähnlichkeiten* oder auch die *generelle orthogonale bzw. symplektische Gruppe.*

Offensichtlich sind die Abschlüsse $\overline{\mathrm{GO}_n(K)}$ und $\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}$ in der Zariski-Topologie von $\mathrm{M}_n(K)$ abgeschlossene Untermonoide von $\mathrm{OM}_n(K)$ bzw. $\mathrm{SpM}_n(K)$. S. Doty ([Dt], Corollary 5.5 (f))) hat wie oben erwähnt gezeigt, daß tatsächlich $\mathrm{OM}_n(K) = \overline{\mathrm{GO}_n(K)}$ und $\mathrm{SpM}_n(K) = \overline{\mathrm{GSp}_n(K)}$ gilt.

Bekannterweise gibt es nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearformen nur in gerader Dimension $n = 2m$. Weiterhin ist unabhängig von der Struktur des Körpers K jede nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearform in die Form

$$J^{\mathrm{s}} := \sum_{i=1}^{m} v_i{}^* \otimes v_{i'}{}^* - v_{i'}{}^* \otimes v_i{}^*$$

mit $i' := n - i + 1$ transformierbar. Nichtentartete symmetrische Bilinearformen gibt es zwar in jeder Dimension, allerdings sind sie nicht für jeden Körper K alle zueinander ähnlich. Ist aber K algebraisch abgeschlossen so ist jede soche Form zu

$$J^{\mathrm{o}} := \sum_{i=1}^{n} v_i{}^* \otimes v_{i'}{}^*$$

ähnlich. Wir wollen daher o.B.d.A. annehmen, daß J^{s} und J^{o} von dieser Form sind und zeigen daß die beiden Monoide abgeschlossen in $\mathrm{M}_n(K)$ sind. Dazu setzen wir

$$f_{ij} := \sum_{k=1}^{m} x_{ik}x_{jk'} - x_{ik'}x_{jk} \quad \text{und } \bar{f}_{ij} := \sum_{k=1}^{m} x_{ki}x_{k'j} - x_{k'i}x_{kj}$$

für den Fall des symplektischen Monoides bzw.

$$f_{ij} := \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{jk'} \quad \text{und } \bar{f}_{ij} := \sum_{k=1}^{n} x_{ki}x_{k'j}$$

für den Fall des orthogonalen Monoides, wobei x_{ij} wiederum die Koordinatenfunktionen in $A_K(n)$ bezeichnen. Es gilt dann

Satz 2.1.1 *Die beide Monoide* $\mathrm{SpM}_n(K)$ *und* $\mathrm{OM}_n(K)$ *sind die Nullstellenmengen der folgenden Menge von Polynomen:*

$$F := \{f_{ij}, \bar{f}_{ij}, f_{ll'} - \bar{f}_{kk'} \mid 1 \leq i < j \leq n, i \neq j',\ 1 \leq l \leq k \leq \frac{n+1}{2}\}$$

und damit abgeschlossen in $\mathrm{M}_n(K)$*. Das von* F *erzeugte Ideal* I_K^{s} *(bzw.* I_K^{o} *im orthogonalen Fall) ist ein Biideal in* $\mathrm{M}_n(K)$*. Die Dilatationskoeffizientenfunktionen* d^{s} *und* d^{o} *sind jeweils durch die von* l *unabhängige Restklasse des Polynoms* $f_{ll'}$ *gegeben und Multiplikativ. Also sind es rationale Charaktere der beiden Monoide.*

Beweis: Zur Vermeidung umständlicher Schreibweisen behandeln wir nur den Fall $\mathrm{SpM}_n(K)$. Daß die Bedingung $f(A) = 0$ für alle $f \in F$ an $A \in \mathrm{M}_n(K)$ notwendig und hinreichend für $A \in \mathrm{SpM}_n(K)$ ist, prüft man leicht nach. Es sind nämlich genau die Bedingungen dafür, daß $A^t J^{\mathrm{s}} A$ mit $A J^{\mathrm{s}} A^t$ übereinstimmt und von J^{s} linear abhängig ist. Zum Nachweis der übrigen Behauptungen verwenden wir die in 1.7 entwickelten Resultate. Dabei hat man anstelle der dort verwendete Indizes $i, j, \ldots$ Multi-Indizes $\mathbf{i} = (i_1, i_2)$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2), \ldots$ zu setzen. Man erhält dann bezüglich der Operation von $\mathrm{M}_n(K)$ von rechts auf $V^{\otimes 2}$ in der Notation aus 1.7:

$$a_{\mathbf{j}} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } j_1 \neq j_2' \\ \epsilon_{j_1} & \text{für } j_1 = j_2' \end{array} \right\} \quad x_{\mathbf{i}} = f_{i_1 i_2}$$

Darin ist $\epsilon_i = 1$ für $1 \leq i \leq m$ und $\epsilon_i = -1$ für $m < i \leq n$. Das durch Lemma 1.7.2 gegebene gruppenähnliche Element g ist demnach zu jedem Index $\mathbf{i} = (i, i')$ durch die Restklasse des Elementes

$$g_i := a_{\mathbf{i}}^{-1} x_{\mathbf{i}} = \epsilon_i \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_{ij} x_{i'j'} = \epsilon_i f_{ii'}$$

gegeben. Die Unabhängigkeit vom Index i ergibt sich aus den Relationen, die man durch die $\mu_{\mathbf{ij}}$ zu

$$\mu_{\mathbf{ij}} = a_{\mathbf{i}} x_{\mathbf{j}} - a_{\mathbf{j}} x_{\mathbf{i}} = \begin{cases} 0 & \text{für } i_1 \neq i_2' \text{ und } j_1 \neq j_2' \\ \epsilon_{j_1} f_{i_1 i_2} & \text{für } j_1 = j_2' \text{ aber } i_1 \neq i_2' \\ \epsilon_{i_2} f_{j_1 j_2} & \text{für } i_1 = i_2' \text{ aber } j_1 \neq j_2 \\ g_i - g_j & \text{für } i := i_1 = i_2' \text{ und } j := j_1 = j_2' \end{cases}$$

berechnet. Auf analoge Weise erhält man bezüglich der Operation von $\mathrm{M}_n(K)$ von links auf $V^{\otimes 2}$ das zugehörigen gruppenähnliche Elementes g' durch die Restklassen der

$$g'_i := \epsilon_i \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_{ji} x_{j'i'} = \epsilon_i \bar{f}_{ii'}$$

und es ergeben sich folgende Relationen, welche auch hier die Unabhängigkeit vom Index i bestätigen

$$\mu'_{\mathbf{ij}} = \begin{cases} 0 & \text{für } i_1 \neq i'_2 \text{ und } j_1 \neq j'_2 \\ \epsilon_{j_1} \bar{f}_{i_2 i_2} & \text{für } j_1 = j'_2 \text{ aber } i_1 \neq i'_2 \\ \epsilon_{i_2} \bar{f}_{j_1 j_2} & \text{für } i_1 = i'_2 \text{ aber } j_1 \neq j_2 \\ g'_i - g'_j & \text{für } i := i_1 = i'_2 \text{ und } j := j_1 = j'_2 \end{cases}$$

Aus Lemma 1.7.2 folgt nun, daß das von den $\mu_{\mathbf{ij}}$ erzeugte Ideal I das kleinstmögliche ist, so daß die Bilinearfomen J^{s} bzw. J^{o} einen eindimensionalen $A_K(n)/I$-Rechts-Unterkomodul von $V^{*\otimes 2}$ bilden. Entsprechendes gilt für die Polynome $\mu'_{\mathbf{ij}}$ bezüglich der Operation von links. Verlangt man nun auch noch, daß die Dilatationskoeffizienten in beiden Fällen gleich sind, also $g = g'$, so wird man auf die Menge

$$F' := \{\mu_{\mathbf{ij}}, \mu'_{\mathbf{ij}}, g_i - g'_j \mid \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,2),\ 1 \leq i, j \leq n\}$$

geführt. Das hiervon erzeugte Ideal ist aber offensichtlich gleich dem von F erzeugten. Zweimalige Anwendung von Lemma 1.7.2 zeigt dann zusammen mit Lemma 1.7.3, daß es sich bei den von F erzeugten Idealen I_K^{s} und I_K^{o} um Biideale handelt. Hinsichtlich der Behauptung über die Dilatationskoeffizienten, ist noch die Multiplikativität zu zeigen. Diese folgt aus der Gruppenähnlichkeit des Elementes g aus Lemma 1.7.2. $\square$

Es ist leicht zu sehen, daß $ng = \sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{j=1}^{n} g'_j = ng'$ eine Folgerelation der $\mu_{\mathbf{ij}}$ und $\mu'_{\mathbf{ij}}$ für $\mathbf{ij} \in I(n,2)$ ist. Für einen Körper, dessen Charakteristik kein Teiler von n ist, liegt also $g - g'$ im Idealerzeugnis dieser Polynome. Da beide Ideale von homogenen Elementen 2. Grades erzeugt werden, sind sie offensichtlich homogen. Wir werden sie später (Satz 2.5.3) mit Hilfe der FRT-Konstruktion aus 1.4 auf eine zweite Weise gewinnen.

Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K stimmen die Verschwindungsideale $I(\mathrm{SpM}_n(K))$ bzw. $I(\mathrm{OM}_n(K))$ der beiden Monoide aufgrund des Satzes genau mit den Radikalen $\sqrt{I_K^{\mathrm{s}}}$ und $\sqrt{I_K^{\mathrm{o}}}$ überein. Wir werden später einsehen, daß für einen Körper der Charakteristik Null tatsächlich $I(\mathrm{OM}_n(K)) = I_K^{\mathrm{o}}$ und $I(\mathrm{SpM}_n(K)) = I_K^{\mathrm{s}}$ gilt (etwa als Konsequenz aus Satz 2.6.1). Dies wurde auch in [Dt] (Theorem 9.5 (a)) gezeigt. Im Fall des symplektischen Monoides werden wir dies auch für beliebige Charakteristik zeigen (Korollar 3.14.5).

Die Polynome f_{ij} und $\bar{f}_{ij}$ liegen bereits in $A_{\mathbb{Z}}(n)$ und damit auch in $A_R(n) \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} A_{\mathbb{Z}}(n)$ für jeden beliebigen Integritätsbereich R. Damit sind die Biideale I_R^{s} und I_R^{o} auch über R definiert. In Analogie zu $A_R(n)$ betrachten wir daher die graduierten Matrix-Bialgebren

$$A^{\mathrm{s}}_R(n) := A_R(n)/I^{\mathrm{s}}_R \quad \text{und} \quad A^{\mathrm{o}}_R(n) := A_R(n)/I^{\mathrm{o}}_R,$$

deren homogene Summanden mit $A^{\mathrm{s}}_R(n,r)$ bzw. $A^{\mathrm{o}}_R(n,r)$ bezeichnet werden. Offenbar gilt für jeden Integritätsbereich R

$$A^{\mathrm{s}}_R(n,r) \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{Z}}(n,r) \quad \text{bzw.} \quad A^{\mathrm{o}}_R(n,r) \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} A^{\mathrm{o}}_{\mathbb{Z}}(n,r).$$

Es ist bislang jedoch nicht klar ob $A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{Z}}(n,r)$ und $A^{\mathrm{o}}_{\mathbb{Z}}(n,r)$ freie $\mathbb{Z}$-Moduln sind. Im ersten Fall werden wir dies in Satz 3.14.4 zeigen. Man kann $A^{\mathrm{s}}_R(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_R(n)$ als Koordinatenringe von affinen Monoidschemata $\mathrm{SpM}_n(R) := \mathrm{Spec}(A^{\mathrm{s}}_R(n))$ und $\mathrm{OM}_n(R) := \mathrm{Spec}(A^{\mathrm{o}}_R(n))$ ansehen. Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null gilt tatsächlich

$$A^{\mathrm{s}}_K(n) = K\left[\mathrm{SpM}_n(K)\right] \quad \text{und} \quad A^{\mathrm{o}}_K(n) = K\left[\mathrm{SpM}_n(K)\right],$$

was wir in letzen Abschnitt dieses Kapitels zeigen werden. Wir gehen nun die Quantisierung von $A^{\mathrm{s}}_R(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_R(n)$ mit Hilfe der FRT-Konstruktion an. Dazu betrachten wir zunächst die Birman-Murakami-Wenzl-Algebra.

2.2 Die Birman-Murakami-Wenzl-Algebra

Die Rolle der Gruppenalgebra der symmetrischen Gruppe im Zusammenhang mit den generellen linearen Gruppen wird im Fall der orthogonalen und symplektischen Gruppen von der Brauer-Algebra eingenommen. Wendet man sich den entsprechenden Quantengruppen bzw. Quantenmonoiden zu, so hat man im ersten Fall die Gruppenalgebra der symmetrischen Gruppe durch die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A zu ersetzen, während an die Stelle der Brauer-Algebra die Birman-Murakami-Wenzl-Algebra tritt. Wir führen letztere Algebra zuerst ein und beschreiben die Brauer-Algebra als eine Spezialisierung davon.

2.2.1 Definition

Wir wollen die Birman-Murakami-Wenzl-Algebra über einem Integritätsbereich R in Abhängigkeit von drei Elementen x, y, z definieren, über die vorausgesetzt wird, daß y und z Einheiten sind und die Gleichung $z^2 + (y-1)(x-1)z - y = 0$ erfüllt ist. Wir nennen ein solches Tripel $P := (x,y,z) \in R^3$ ein *BMW-Parametertripel.* Einen Integritätsbereich R mit einem Tripel von BMW-Parametern $P = (x,y,z)$ kann man als Algebra über

$$\mathbb{Z}[BMW] := \mathbb{Z}[X, Y, Y^{-1}, Z, Z^{-1}]/(Z^2 + (Y-1)(X-1)Z - Y)$$

mit Unbestimmten X, Y, Z auffassen, mittels dem Ringhomomorphismus, der durch $X \mapsto x$, $Y \mapsto y$ und $Z \mapsto z$ definiert ist. Das affine $\mathbb{Z}$-Schema $BMW := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[BMW])$ kann man als den Parameterbereich der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra ansehen. Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K ist die K-Algebra

$$K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[BMW] = K[X, Y, Y^{-1}, Z, Z^{-1}]/(Z^2 + (Y-1)(X-1)Z - Y)$$

der Koordinatenring der durch die Gleichung $Z^2 + (Y-1)(X-1)Z - Y = 0$ gegebenen kubischen Fläche F_3 im dreidimensionalen affinen Raum über K, von der die Schnitte mit der XY-Ebene und der XZ-Ebene ausgenommen sind. Die Koordinatentripel der Punkte dieser Fläche sind gerade die Tripel der BMW- Parameter über dem Körper K.

$\mathbb{Z}[BMW]$ ist offenbar ein Integritätsbereich, da $Z^2+(Y-1)(X-1)Z-Y$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ ist. Dieses Polynom ist nämlich bereits in $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ irreduzibel, da der projektive Abschluß der Fläche F_3 über $\mathbb{C}$ lediglich zwei isolierte Singularitäten besitzt, was offenbar nur für eine irreduzible Fläche zutreffen kann.

Ein BMW-Parametertripel der Form $P = (x, 1, 1)$ oder $P = (x, 1, -1)$ nennen wir *B-Parameter* (B für Brauer). Das *volle Parameterschema* der Brauer-Algebra ist das Spektrum von $\mathbb{Z}[B] := \mathbb{Z}[X]$, also die affine Gerade über $\mathbb{Z}$ in zweifacher Weise eingebettet in das Schema BMW. Entsprechend hat man zwei Ringhomomorphismen von $\mathbb{Z}[BMW]$ nach $\mathbb{Z}[B]$ nämlich einen mit $Y \mapsto 1, Z \mapsto 1$ und einen mit $Y \mapsto 1, Z \mapsto -1$.

Ein BMW-Parametertripel $P := (x, y, z)$, für welches $y-1$ eine Einheit in R ist, heiß *echt*. Für einen Körper $K = R$ bilden die echten BMW-Paramtertripel genau das Komplement der B-Paramter in F_3.

Definition 2.2.1 *Sei $r > 1$ eine natürliche Zahl, P ein BMW-Parametertripel in dem Integritätsbereich R und $\mathcal{F}_{R,2r}$ die freie unitale R-Algebra auf den Erzeugern $g_1, \dots, g_{r-1}$ und $e_1, \dots, e_{r-1}$. Weiter sei $\mathcal{I}$ das durch die untenstehenden Relationen bestimmte Ideal in $\mathcal{F}_{R,2r}$. Dann heißt $\mathcal{C}_{R,P,r} := \mathcal{F}_{R,2r}/\mathcal{I}$ die r-te Birman-Murakami-Wenzl-Algebra über R zu P.*

$$\begin{array}{lll}
(G1) & g_i g_j = g_j g_i & \textit{für } |i-j| > 1, \\
(G2) & g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} & \textit{für } i = 1, \dots, r-2, \\
(E1) & e_i e_j = e_j e_i & \textit{für } |i-j| > 1, \\
(E2) & e_i e_{i+1} e_i = e_i,\ e_{i+1} e_i e_{i+1} = e_{i+1} & \textit{für } i = 1, \dots, r-2, \\
(E3) & e_i^2 = x e_i & \textit{für } i = 1, \dots, r-1, \\
(GE1) & g_i e_j = e_j g_i & \textit{für } |i-j| > 1, \\
(GE2) & e_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i e_{i+1} = y e_i e_{i+1} & \textit{für } i = 1, \dots, r-2, \\
(GE3) & e_i g_i = g_i e_i = z e_i & \textit{für } i = 1, \dots, r-1, \\
(GE4) & ((y-1)(e_i - 1) + g_i) g_i = y & \textit{für } i = 1, \dots, r-1,
\end{array}$$

Handelt es sich bei $P = (x, y, z)$ um B-Paramter, so sprechen wir von der Brauer-Algebra $\mathcal{B}_{R,x,r} := \mathcal{C}_{R,(x,1,1),r}$ *bzw.* $\mathcal{B}^-_{R,x,r} := \mathcal{C}_{R,(x,1,-1),r}$. *Die Birman-Murakami-Wenzl-Algebra über $\mathbb{Z}[BMW]$ nennen wir* globale *und die über dem Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[BMW]$* generische *Birman-Murakami-Wenzl-Algebra. Entsrechende Redeweisen vereinbaren wir für die Brauer-Algebra in Bezug auf $\mathbb{Z}[B]$ bzw. den Quotientenkörper davon. Um die Definition abzurunden, setzen wir $\mathcal{C}_{R,P,1} := R$. Ist klar um welche BMW-Parameter $P = (x, y, z)$ es sich handelt oder spielen diese keine Rolle, so lassen wir diese aus der Bezeichnung wieder weg.*

Bemerkung 2.2.2 *(a) Auf Grund von $(GE4)$ existieren die Inversen g_i^{-1} der Erzeuger g_i, nämlich als $g_i^{-1} = (1-y^{-1})(e_i - 1) + y^{-1}g_i$ für $i = 1, \ldots, r-1$.*

(b) Folgende Relationen (für $i = 1, \ldots, r-2$) gelten ebenfalls in $\mathcal{C}_{R,r}$:

$$
\begin{array}{rl}
(GE2') & g_i g_{i+1} e_i = e_{i+1} g_i g_{i+1} = y e_{i+1} e_i, \\
(GE5) & e_i g_{i+1}^{-1} g_i^{-1} = g_{i+1}^{-1} g_i^{-1} e_{i+1} = y^{-1} e_i e_{i+1} \\
 & g_i^{-1} g_{i+1}^{-1} e_i = e_{i+1} g_i^{-1} g_{i+1}^{-1} = y^{-1} e_{i+1} e_i, \\
(GE6) & e_i g_{i+1} e_i = \frac{y}{z} e_i,\ e_{i+1} g_i e_{i+1} = \frac{y}{z} e_{i+1} \\
(GE7) & e_i g_{i+1}^{-1} e_i = \frac{z}{y} e_i,\ e_{i+1} g_i^{-1} e_{i+1} = \frac{z}{y} e_{i+1}, \\
(GE8) & g_i e_{i+1} g_i = y^2 g_{i+1}^{-1} e_i g_{i+1}^{-1},\ g_{i+1} e_i g_{i+1} = y^2 g_i^{-1} e_{i+1} g_i^{-1}, \\
(GE9) & e_i e_{i+1} g_i = y e_i g_{i+1}^{-1},\ g_{i+1} e_i e_{i+1} = y g_i^{-1} e_{i+1}, \\
(GE10) & g_i e_{i+1} e_i = y g_{i+1}^{-1} e_i,\ e_{i+1} e_i g_{i+1} = y e_{i+1} g_i^{-1}, \\
(GE11) & e_i g_{i+1} = (y-1)(e_i - e_i e_{i+1}) + e_i e_{i+1} g_i, \\
 & g_i e_{i+1} = (y-1)(e_{i+1} - e_i e_{i+1}) + g_{i+1} e_i e_{i+1}, \\
 & e_{i+1} g_i = (y-1)(e_{i+1} - e_{i+1} e_i) + e_{i+1} e_i g_{i+1}, \\
 & g_{i+1} e_i = (y-1)(e_i - e_{i+1} e_i) + g_i e_{i+1} e_i.
\end{array}
$$

(c) $(GE4)$ zeigt, daß $\mathcal{C}_{R,P,r}$ für ein echtes BMW-Parametertripel $P = (x,y,z)$ bereits von den Elementen $g_1, \ldots, g_{r-1}$ erzeugt wird. Denn dann gilt: $e_i = \frac{y g_i^{-1} - g_i}{y-1} + 1$. Insbesondere folgen dann $(E1), (E3), (GE1)$ und $(GE2)$ aus den übrigen Relationen. Dies ist der am häufigsten in der Literatur betrachtete Spezialfall von $\mathcal{C}_{R,r}$ (z.B. [CP], [Ke], [HR] ...). Man beachte, daß die Brauer-Algebra hierunter nicht als Spezialfall auftritt. Die hier gegebene Definition kommt derjenigen in [FG] am nächsten.

(d) Wegen $(G1)$ und $(G2)$ hat man einen Algebren Homomorphismus der Gruppenalgebra $R\mathcal{Z}_r$ von der Artinschen Zopfgruppe $\mathcal{Z}_r$ über R in die Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $\mathcal{C}_{R,P,r}$, welcher durch $\sigma_i \mapsto g_i$ gegeben ist (vgl. (1.8), (1.9)). Dieser ist wegen Bemerkung (c) im Fall eines echten BMW-Parametertripels P surjektiv. Im Fall der Brauer-Algebren ist dieser Homomorphismus jedoch nicht surjektiv. In diesem Fall faktorisiert er über die Gruppenalgebra der Symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$, da $(GE4)$ zu $g_i^2 = 1$ wird, und liefert eine Einbettung dieser in $\mathcal{B}_{R,x,r}$

(e) Die Brauer-Algebra $\mathcal{B}^-_{R,x,r}$ ist isomorph zur Brauer-Algebra $\mathcal{B}_{R,x,r}$. Ein Isomorphismus ist durch $g_i \mapsto -g_i$ und $e_i \mapsto e_i$ gegeben. Wir werden diese beiden Algebren daher stets unter diesem Isomorphismus identifizieren.

(f) Faßt man R bezüglich des BMW-Parametertripels P als eine $\mathbb{Z}[BMW]$-Algebra auf, so folgt

$$\mathcal{C}_{R,r} \cong R \otimes \mathcal{C}_{\mathbb{Z}[BMW],r},$$

wobei über $\mathbb{Z}[BMW]$ tensoriert wird. Dies rechtfertigt die Bezeichnung global.

BEWEIS: Lediglich der Teil (b) bedarf einer Anleitung. Zunächst beweist man $(GE6)$ mit Hilfe von $(E2), (GE3)$ und $(GE2)$. Daraufhin läßt sich leicht $(GE7)$ aus $(E2), (GE4)$ und $(GE6)$ unter Beachtung von Bemerkung (a) beweisen. Als nächstes empfiehlt es sich $(GE9)$ aus $(GE4), (GE2)$ und $(GE6)$ herzuleiten. Mit Hilfe von $(GE9)$ ergibt sich dann wiederum mit $(GE2)$ die Aussage $(GE8)$. Letztere ermöglicht in Verbindung mit $(GE6)$ die Verifikation von $(GE2')$. Analog dem Beweis von $(GE9)$ zeigt man dann $(GE10)$ unter Zuhilfenahme von $(GE4), (GE2')$ und $(GE6)$. Schließlich folgt $(GE5)$ und $(GE11)$ direkt aus $(GE9)$ und $(GE10)$, wobei in letzterem Fall auch $(GE4)$ zu verwenden ist.

In Teil (c) leitet man $(GE2)$ aus $(G2)$ und $(GE4)$ ab. $\square$

Multiplikation von $(GE4)$ mit e_i läßt die Notwendigkeit der Relation $z^2 + (y-1)(x-1)z - y = 0$ für ein BMW-Parametertripel erkennen. Zur Berechnung des Minimalpolynoms von g_i schreibt man $(GE4)$ in der Form

$$(y-1)e_i = yg_i^{-1} - g_i + (y-1),$$

multipliziert einmal mit g_i und einmal mit z, subtrahiert die resultierenden Gleichungen voneinander und multipliziert nochmals mit g_i. Man erhält dann:

$$(g_i + 1)(g_i - y)(g_i - z) = 0. \tag{2.1}$$

Wir geben nun den Zusammenhang mit der Definition von $\mathcal{C}_{R,r}$ in [BW]. Dazu seien α und l Einheiten in R, so daß auch $\alpha^2 + 1$ eine Einheit ist. Man erhält dann ein BMW-Parametertripel

$$p := P(\alpha, l) := (1 - \frac{l + l^{-1}}{\alpha + \alpha^{-1}}, -\alpha^2, -\alpha l^{-1})$$

Die in [BW] (Abschnitt 2) gegebene Definition der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $C_r(l, m)$ ist über einem Integritätsbereich R in Abhängigkeit von zwei Einheiten m und l möglich. Man erhält die Beziehung

$$\mathcal{C}_{R,p,r} \cong C_r(l, \alpha + \alpha^{-1}). \tag{2.2}$$

Insbesondere ist die in [BW], Theorem 3.7 betrachtete Spezialisierung von $C_r(l, m)$ gerade $\mathcal{C}_{\mathbb{C}(\alpha,l),p,r}$, wobei $\mathbb{C}(\alpha, l)$ der Körper der rationalen Funktionen in α und l über $\mathbb{C}$ ist. Der Isomorphismus in (2.2) ist zwischen den Erzeugern g_i von $\mathcal{C}_{R,P,r}$ und G_i von $C_r(l, \alpha + \alpha^{-1})$ durch $g_i \mapsto -\alpha G_i$ gegben (dies impliziert $e_i \mapsto -E_i$). Die Existenz der Parameter α und l in R stellt sicher, daß das Minimalpolynom der G_i in R zerfällt. Aufgrund der Voraussetzung der Invertierbarkeit von $\alpha^2 + 1$ kann die Brauer-Algebra nicht als Spezialfall von $C_r(l, \alpha + \alpha^{-1})$ erhalten werden (vgl. Bemerkung 2.2.2 (c)). Diesem Umstand wird in [BW], Abschnitt 5 durch eine Umparametrisierung begegnet.

Folgend S.V. Kerov ([Ke], 7.Theorem) geben wir nun eine Basis von $\mathcal{C}_{\mathbb{C},p,r}$ mit $p = P(\alpha, l)$ wie oben an. Genauer gesagt verwendet Kerov Parameter $q, r \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit

$q^2 \neq 1$ und man hat $P(\sqrt{-1}q, r^{-1})$ zu betrachten. Zu $1 \leq i \leq j < r$ heißt ein Element

$$g_{i|j} := g_j g_{j-1} \dots g_{i+1} g_i$$

eine g-Kette, während

$$e_{i|j} := g_i g_{i+1} \dots g_{j-1} e_j$$

als e-Kette bezeichnet wird. Die Zahl j heiße Index der g- bzw. e-Kette und g_j bzw. e_j der führende Term der Kette. Sei B_r die Menge aller Produkte von g- und e-Ketten, für welche die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jede Zahl $j \in \{1, \dots, r-1\}$ tritt höchstens einmal als Index einer Kette auf.

2. Die Indizes der g-Ketten steigen, während die Indizes der e-Ketten fallen.

3. Jede e-Kette steht links von jeder g-Kette.

Weiter enthalte B_r die Eins von $\mathcal{C}_{\mathbb{C},p,r}$. Gemäß [Ke] ist B_r eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathcal{C}_{\mathbb{C},p,r}$. Aus der disjunkten Zerlegung

$$B_r = B_{r-1} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} e_{i|r-1} B_{r-1} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} B_{r-1} g_{i|r-1}$$

erhält man induktiv die Mächtigkeit von B_r zu

$$|B_r| = (2r-1)|B_{r-1}| = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2r-1) = (2r-1)!!.$$

in Übereinstimmung mit dem oben erwähnten Theorem in [BW]. Der Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}[BMW]$ nach $\mathbb{C}$ bezüglich des BMW-Parametertripels p läßt sich zu einem Homomorphismus des Quotientenkörper $\mathbb{K}$ von $\mathbb{Z}[BMW]$ nach $\mathbb{C}$ fortsetzen, falls man für α und l transzendente Zahlen wählt. Dies zeigt, daß B_r auch eine Basis von $\mathcal{C}_{\mathbb{K},r}$ ist. Damit ist B_r auch linear unabhängig in der globalen Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}[BMW],r}$. Die Frage, ob B_r auch ein Erzeugendensystem in der globalen Birman-Murakami-Wenzl-Algebra ist, muß vorerst offen bleiben. Bislang scheint nicht einmal klar zu sein, ob $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}[BMW],r}$ überhaupt frei als $\mathbb{Z}[BMW]$-Modul ist. Entsprechende Behauptungen in [FG] sind nicht stichhaltig begründet. Andererseits ist auch oben erwähntes Theorem 7 in [Ke] ohne Beweis angegeben. Wir werden allerdings auf dieses nicht mehr zurückgreifen.

2.2.2 Darstellungen auf den Tensorräumen

In Analogie zu den Darstellungen der symmetrischen Gruppe auf den r-fachen Tensorprodukten des natürlichen Moduls V durch Platzvertauschung sollen nun entsprechende Darstellungen der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra eingeführt werden. Diese sind allerdings nicht über der vollen Parametermenge $BMW = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[BMW])$ sondern über gewissen Mengen von BMW-Parametertripeln definiert, mit deren Beschreibung wir beginnen. Über einem Integritätsbereich R und zu einer Einheit $q \in R$ betrachten wir das sogenannte q-Analog

$$[n]_q := \sum_{l=1}^{n} q^{2l-n-1} = q^{-n+1} + q^{-n+3} + \ldots + q^{n-3} + q^{n-1} \in R$$

einer natürlichen Zahl n. Man beachte, daß $[n]_q$ die Form $[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ besitzt, falls $q^2 - 1$ eine Einheit in R ist. Zu einer natürlichen Zahl n betrachten wir nun zwei BMW-Parametertripel

$$P_n^{\mathrm{s}}(q) := (1 - [n+1]_q, q^2, -q^n) \quad \text{und} \quad P_n^{\mathrm{o}}(q) := (1 + [n-1]_q, q^2, q^{2-n}).$$

Das erste Tripel tritt im Zusammenhang mit den symplektischen Monoiden, das zweite im Zusammenhang mit den orthogonalen Monoiden auf. Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K liefert die Gesamtheit der Tripel $P_n^{\mathrm{s}}(q)$ bzw. $P_n^{\mathrm{o}}(q)$ für $q \in K\{0\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Kurve auf der in 2.2.1 beschriebenen Fläche F_3 in K^3. Man beachte, daß für $q = 1$ B-Parameter $P_n^{\mathrm{s}}(1) = (-n, 1, -1)$ bzw. $P_n^{\mathrm{o}}(1) = (n, 1, 1)$ vorliegen. Also hat man

$$\mathcal{C}_{R, P_n^{\mathrm{s}}(1), r} = \mathcal{B}^-_{R, -n, r} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_{R, P_n^{\mathrm{o}}(1), r} = \mathcal{B}_{R, n, r}.$$

In den Darstellungen von $\mathcal{C}_{R, P_n^{\mathrm{s}}(q), r}$ bzw. $\mathcal{C}_{R, P_n^{\mathrm{o}}(q), r}$ auf $V^{\otimes r}$ treten neben q noch eine Anzahl zusätzlicher Parameter p_{ij} für $1 \leq i, j \leq n$ und t_k für $0 \leq k \leq n$ auf. Wir nennen ein solches $(n^2 + n + 1)$-Tupel Z von Ringelementen aus R ein *Z-Parametertupel* (Z für Zusatzparameter) falls für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $k = 1, \ldots, n$ die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$p_{ij} p_{ji} = 1, \; p_{ii} = 1, \; p_{i'j} p_{ij} = 1, \; p_{ij'} p_{ij} = 1 \quad \text{und} \quad t_k t_{k'} = t_0.$$

Wie in 2.1 ist darin i' durch $i' := n - i + 1$ definiert. Für ungerades $n = 2m + 1$ kommen die Relationen $p_{i(m+1)} = 1 = p_{(m+1)i}$ für $1 \leq i \leq n$ hinzu. Man beachte, daß für ein Z-Parametertupel $Z = (p_{ij}, t_k | \, 1 \leq i, j \leq n, 0 \leq k \leq n)$ auch

$$Z^{-1} := (\bar{p}_{ij} := p_{ij}^{-1}, \bar{t}_k := t_k^{-1} | \, 1 \leq i, j \leq n, 0 \leq k \leq n)$$

ein Z-Parametertupel ist. Einen Integritätsbereich R mit Z-Parametertupel kann man als Algebra über

$$\mathbb{Z}[X_{ij}, X_{ij}^{-1}, X_k, X_k^{-1} | \, 1 \leq i < j \leq m, \;\; 1 \leq k \leq m+1],$$

mit Unbestimmten X_{ij} und X_k auffassen mittels dem Ringhomomorphismus nach R, der durch $X_{ij} \mapsto p_{ij}$ und $X_k \mapsto t_k$ gegeben ist. Beachte, daß die übrigen der $n^2 + n + 1$ Zusatzparameter aufgrund der Relationen für ein Z-Parametertupel durch diese $d_m := \frac{m(m+1)}{2} + 1$ Elemente festgelegt sind. Dies zeigt, daß die Z-Parametertupel über einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine offene Teilmenge im d_m-dimensionalen affinen Raum K^{d_m} bilden, und zwar diejenige, die durch herausschneiden sämtlicher Koordinatenhyperebenen entsteht.

Über einem Integritätsbereich R betrachten wir zu einer Einheit $q \in R$ und einem Z-Parametertupel Z folgende Lösungen der *Quanten Yang-Baxter-Gleichung* (1.7) in $\mathcal{E}_2 = \mathrm{End}_R(V^{\otimes 2})$, die man z.B. in leicht abgewandelter Form (Umparametrisierung $q \leftrightarrow q^{-1}$ und Multiplikation mit q^2) in [Ha2] findet (im Fall von ungeradem n benötigt man im Hinblick auf die orthogonalen Monoide auch eine Quadratwurzel $\bar{q}$ von q in R):

$$\beta_q^{\mathrm{s}} := \sum_{1\le i\le n}(q^2 e_i^i\otimes e_i^i + t_i t_{i'}^{-1} e_i^{i'}\otimes e_{i'}^i) + q\sum_{1\le i\ne j,j'\le n} p_{ij}t_i t_j^{-1} e_i^j\otimes e_j^i +$$

$$+(q^2-1)\sum_{1\le j<i\le n}(e_i^i\otimes e_j^j - q^{\rho_i-\rho_j}\epsilon_i\epsilon_j t_j t_{i'}^{-1} e_i^{j'}\otimes e_{i'}^j),$$

im Zusammenhang mit den symplektischen Monoiden, sowie

$$\beta_q^{\mathrm{o}} := \sum_{1\le i\le n}(q^2 e_i^i\otimes e_i^i + t_i t_{i'}^{-1} e_i^{i'}\otimes e_{i'}^i) + q\sum_{1\le i\ne j,j'\le n} p_{ij}t_i t_j^{-1} e_i^j\otimes e_j^i + (q^2-1)\sum_{1\le j<i\le n} e_i^i\otimes e_j^j$$

$$-\begin{cases} -qe_{m+1}^{m+1}\otimes e_{m+1}^{m+1} + (q^2-1)\sum_{1\le j<i\le n}\bar q^{\tau_i-\tau_j} t_j t_{i'}^{-1} e_i^{j'}\otimes e_{i'}^j & \text{für ungerades } n \\ (q^2-1)\sum_{1\le j<i\le n} q^{\rho_i-\rho_j+\epsilon_j-\epsilon_i} t_j t_{i'}^{-1} e_i^{j'}\otimes e_{i'}^j & \text{für gerades } n \end{cases}.$$

hinsichtlich der orthogonalen Monoide. Darin sind die Exponenten der Ringelemente q bzw. $\bar q$ durch $(\tau_1,\ldots,\tau_n) = (2m-1, 2m-3,\ldots,1,0,-1,\ldots,-(2m-3),-(2m-1))$ sowie durch $(\rho_1,\ldots,\rho_n) = (m, m-1,\ldots,1,-1,\ldots,-(m-1),-m)$ gegeben. Das Vorzeichen ϵ_i ist wie in 2.1 definiert, also $\epsilon_i := sign(\rho_i)$. Einen Integritätsbereich mit Einheit q und Z-Parametertupel Z fassen wir als Algebra über

$$\mathcal{Z} := \mathbb{Z}[Q, Q^{-1}, X_{ij}, X_{ij}^{-1}, X_k, X_k^{-1} \mid 1\le i<j\le m,\ \ 1\le k\le m+1], \qquad (2.3)$$

mittels dem durch $Q\mapsto q$, $X_{ij}\mapsto p_{ij}$ und $X_k\mapsto t_k$ gegebenen Ringhomomorphismus auf. Im orthogonalen Fall mit ungeradem n hat man allerding Q auf $\bar q$ abzubilden. Die Minimalpolynome obiger Quanten-Yang-Baxter-Operatoren sind durch

$$(\beta_q^{\mathrm{s}}+1)(\beta_q^{\mathrm{s}}-q^2)(\beta_q^{\mathrm{s}}+q^{-n}) = 0$$

im symplektischen Fall und

$$(\beta_q^{\mathrm{o}}+1)(\beta_q^{\mathrm{o}}-q^2)(\beta_q^{\mathrm{o}}-q^{2-n}) = 0$$

im orthogonalen Fall gegeben. Weiterhin hat man jeweils einen invarianten 2-fachen Tensor

$$J_q'^{\mathrm{s}} := \sum_{i=1}^n \epsilon_i q^{\rho_i} t_i v_i\otimes v_{i'},\quad J_q'^{\mathrm{o}} := \begin{cases}\sum_{i=1}^n \bar q^{\tau_i} t_i v_i\otimes v_{i'} & n \text{ ungerade}\\ \sum_{i=1}^n q^{\rho_i-\epsilon_i} t_i v_i\otimes v_{i'} & n \text{ gerade}\end{cases}$$

d.h es gilt $\beta_q^{\mathrm{s}}(J_q'^{\mathrm{s}}) = -q^{-n}J_q'^{\mathrm{s}}$ und $\beta_q^{\mathrm{o}}(J_q'^{\mathrm{o}}) = q^{2-n}J_q'^{\mathrm{o}}$. Unter der induzierten Operation auf $V^{*\otimes 2}\cong V^{\otimes 2*}$ erhält man invariante Bilinearformen

$$J_q^{\mathrm{s}} := \sum_{i=1}^n \epsilon_i q^{\rho_i} t_i^{-1} v_i{}^*\otimes v_{i'}{}^*,\quad J_q^{\mathrm{o}} := \begin{cases}\sum_{i=1}^n \bar q^{\tau_i} t_i^{-1} v_i{}^*\otimes v_{i'}{}^* & n \text{ ungerade}\\ \sum_{i=1}^n q^{\rho_i-\epsilon_i} t_i^{-1} v_i{}^*\otimes v_{i'}{}^* & n \text{ gerade}\end{cases},$$

denn man verifiziert leicht, daß die zu den Quanten-Yang-Baxter-Operatoren β_q^{s} und β_q^{o} dualen Abbildungen auf $V^{\otimes 2*}$ bezüglich der Matrixeinheiten von $\mathrm{End}_R(V^{\otimes 2*})$

durch dieselben Formeln gegeben sind, die für β_q^{s} und β_q^{o} bezüglich der Matrixeinheiten $\{e_i^j \otimes e_k^l | 1 \leq i,j,k,l \leq n\}$ von $\mathcal{E}_2$ gelten, jedoch in Bezug auf das inverse Z-Paramtertupel Z^{-1}. (siehe auch 3.5).

Wir definieren nun weitere Endomorphismen γ_q^{s} und $\gamma_q^{\mathrm{o}} \in \mathcal{E}_2$ explizit durch $\gamma_q^{\mathrm{s}}(v_i \otimes v_j) := -J_q^{\mathrm{s}}(v_i \otimes v_j) J_q'^{\mathrm{s}}$ bzw. $\gamma_q^{\mathrm{o}}(v_i \otimes v_j) := J_q^{\mathrm{o}}(v_i \otimes v_j) J_q'^{\mathrm{o}}$. Als Linearkombination von Matrixeinheiten schreiben sich diese als

$$\gamma_q^{\mathrm{s}} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} q^{\rho_i - \rho_j} \epsilon_i \epsilon_j t_j t_{i'}^{-1} e_i^{j'} \otimes e_{i'}^j,$$

$$\gamma_q^{\mathrm{o}} = \begin{cases} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \bar{q}^{\tau_i - \tau_j} t_j t_{i'}^{-1} e_i^{j'} \otimes e_{i'}^j & n \text{ ungerade} \\ \sum_{1 \leq i,j \leq n} q^{\rho_i - \rho_j + \epsilon_j - \epsilon_i} t_j t_{i'}^{-1} e_i^{j'} \otimes e_{i'}^j & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Aus der Definition folgt, daß diese Endomorphismen mit den entsprechende Quanten-Yang-Baxter-Operatoren kommutieren. Wir nehmen vorübergehend an, daß die Ringelemente $(q^{-n}-1)(q^{-n}+q^2)$ im symplektischen Fall bzw. $(q^{2-n}+1)(q^{2-n}-q^2)$ im orthogonalen Fall invertierbar sind. Dann existiert die Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert $-q^{-n}$ bzw. q^{2-n}. Diese sind gegeben durch

$$E^{\mathrm{s}} := \frac{(\beta_q^{\mathrm{s}}+1)(\beta_q^{\mathrm{s}}-q^2)}{(q^{-n}-1)(q^{-n}+q^2)}, \quad E^{\mathrm{o}} := \frac{(\beta_q^{\mathrm{o}}+1)(\beta_q^{\mathrm{o}}-q^2)}{(q^{2-n}+1)(q^{2-n}-q^2)}$$

Da Kern und Bild dieser Projektionen mit Kern und Bild von γ_q^{s} bzw. γ_q^{o} übereinstimmen, gibt es $a^{\mathrm{s}}, a^{\mathrm{o}} \in R$ mit $a^{\mathrm{s}} E^{\mathrm{s}} = \gamma_q^{\mathrm{s}}$ bzw. $a^{\mathrm{o}} E^{\mathrm{o}} = \gamma_q^{\mathrm{o}}$. Tatsächlich berechnet man diese Zahlen zu

$$a^{\mathrm{s}} = -J_q^{\mathrm{s}}(J_q'^{\mathrm{s}}) = -\sum_{i=1}^n q^{2\rho_i} = 1 - [n+1]_q = x$$

$$a^{\mathrm{o}} = J_q^{\mathrm{o}}(J_q'^{\mathrm{o}}) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^n q^{\tau_i} & n \text{ ungerade} \\ \sum_{i=1}^n q^{2(\rho_i - \epsilon_i)} & n \text{ gerade} \end{array} \right\} = 1 + [n-1]_q = x$$

wobei x die erste Komponente der BMW-Parametertripel $P_n^{\mathrm{s}}(q) = (x,y,z)$ bzw. $P_n^{\mathrm{o}}(q) = (x,y,z)$ respektive ist. Es folgt also $\gamma_q^{\mathrm{s}} = xE^{\mathrm{s}}$ bzw. $\gamma_q^{\mathrm{o}} = xE^{\mathrm{o}}$ und damit – zunächst unter der gegebenen Voraussetung –

$$(\gamma_q^{\mathrm{s}})^2 = x\gamma_q^{\mathrm{s}}, \quad \beta_q^{\mathrm{s}}\gamma_q^{\mathrm{s}} = z\gamma_q^{\mathrm{s}} = \gamma_q^{\mathrm{s}}\beta_q^{\mathrm{s}} \quad \text{und } ((y-1)(\gamma_q^{\mathrm{s}} - \mathrm{id}_{V^{\otimes 2}}) + \beta_q^{\mathrm{s}})\beta_q^{\mathrm{s}} = y\mathrm{id}_{V^{\otimes 2}}$$

bzw. entsprechende Formeln für γ_q^{o} und β_q^{o}. In Bezug auf die letzte Formel beachte man die Gleichung $(y-1)zx = (z+1)(y-z)$ für ein BMW-Parametertripel, so daß $(1-y)xz$ gerade der Nenner von E^{s} bzw. E^{o} ist. Die Voraussetzung über die Invertierbarkeit von $(z+1)(z-y))$ eliminiert man, indem man die Gültigkeit über dem Ring $\mathcal{Z}$ zeigt. Die folgt aus dem Torsionsfreisein von $\mathcal{E}_2$ über $\mathcal{Z}$ und der Gültigkeit der Formeln über dem Quotientenkörper von $\mathcal{Z}$. Man erhält den folgenden Satz, der (zumindest im Fall, daß alle Zusatzparameter 1 sind) wohlbekannt ist (z.B. [We2], Lemma 5.1 oder Verweise in [CP], Remark 10.2)

Satz 2.2.3 *Sei R ein Integritätsbereich mit Einheit q und Z-Parametertupel Z. Weiter seien r und n natürliche Zahlen. Dann erhält man zu geradem n durch*

$$g_i \mapsto \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \beta_q^{\mathrm{s}} \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}},$$

$$e_i \mapsto \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \gamma_q^{\mathrm{s}} \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}}$$

eine Darstellung ρ_r^{s} der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $\mathcal{C}_{R,P_n^{\mathrm{s}}(q),r}$ und zu jedem n durch

$$g_i \mapsto \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \beta_q^{\mathrm{o}} \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}},$$

$$e_i \mapsto \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \gamma_q^{\mathrm{o}} \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}}$$

eine Darstellung ρ_r^{o} der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $\mathcal{C}_{R,P_n^{\mathrm{o}}(q),r}$ auf dem r-fachen Tensorprodukt $V^{\otimes r}$ des freien Moduls V vom Rang n über R.

Beweis: Die Eigenschaften $(G1)$, $(E1)$ und $(GE1)$ folgen sofort aus der Definition. $(G2)$ ist wegen der Quanten-Yang-Baxter-Gleichung, der β_q^{s} und β_q^{o} genügen erfüllt (Verweise auf Orginalliteratur hierzu findet man etwa in [Ha2]). $(E3)$, $(GE3)$ und $(GE4)$ ergeben sich aus den obigen Ausführungen. Wegen Bemerkung 2.2.2 (c) erhält man $(GE4)$ zunächst über dem Quotientenkörper von $\mathcal{Z}$ und daher – mit ähnlicher Argumentation wie oben – auch über R. Lediglich $(E2)$ erfordert eine mühsame Verifikation. Man kann sich offenbar auf den Nachweis der Relationen $e_1e_2e_1 = e_1$ und $e_2e_1e_2 = e_2$ beschränken. Wir rechnen $\rho_r^{\mathrm{s}}(e_1e_2e_1) = \rho_r^{\mathrm{s}}(e_1)$ nach. Die übrigen Rechnungen gehen ähnlich. Wir kürzen die Koeffizienten aus der Darstellung von γ_q^{s} durch $a_{ij} := q^{\rho_i-\rho_j}\epsilon_i\epsilon_j t_j t_{i'}^{-1}$ ab. Es gelten die Rechenregeln $a_{ii'} = -1$ und $a_{ij}a_{j'k} = -a_{ik}$. Man berechnet

$$\rho_r^{\mathrm{s}}(e_1e_2e_1) = \sum a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}(e_{i_1}^{j_1'}e_{k_2}^{k_2}e_{i_3}^{j_3'}) \otimes (e_{i_1'}^{j_1}e_{i_2}^{j_2'}e_{i_3'}^{j_3}) \otimes (e_{k_1}^{k_1}e_{i_2'}^{j_2}e_{k_3}^{k_3}).$$

Darin läuft die Summe zunächst über alle $1 \leq i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, k_3 \leq n$. Von Null verschiedene Terme treten jedoch nur für

$$j_1' = k_2 = i_3, \quad j_1 = i_2, \quad j_2' = i_3', \quad k_1 = i_2', \quad j_2 = k_3$$

auf. Das führt auf eine Summe, die über $1 \leq i_1, j_2, j_3 \leq n$ läuft

$$\rho_r^{\mathrm{s}}(e_1e_2e_1) = \sum a_{i_1j_2'}a_{j_2'j_2}a_{j_2j_3}e_{i_1}^{j_3'} \otimes e_{i_1'}^{j_3} \otimes e_{j_2}^{j_2}.$$

Aufgrund obiger Rechenregeln für die Vorzahlen a_{ij} folgt schließlich

$$\rho_r^{\mathrm{s}}(e_1e_2e_1) = \sum a_{i_1j_3}e_{i_1}^{j_3'} \otimes e_{i_1'}^{j_3} \otimes e_{j_2}^{j_2} = \rho_r^{\mathrm{s}}(e_1).$$

□

Bemerkung 2.2.4 *Im Fall eines Körpers $R = K$ der Charakteristik Null sowie $q = 1 = p_{ij} = t_k$ für alle i, j, k spezialisieren die Darstellungen ρ_r^{s} und ρ_r^{o} zu den von Brauer ([Br]) angegebenen surjektiven Algebrenhomomorphismen der Brauer Algebren $\mathcal{B}_{K,-n,r}^{-}$ bzw. $\mathcal{B}_{K,n,r}$ auf die Zentralisatoren der Operation der symplektischen bzw. orthogonalen Gruppen $\mathrm{Sp}_n(K)$ bzw. $\mathrm{O}_n(K)$ auf dem r-fachen Tensorprodukt des natürlichen Moduls.*

2.3 Die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A

2.3.1 Definition

Sei $P = (x, y, z)$ eim BMW-Parametertripel in dem Integritätsbereich R. Faktorisiert man dann aus $\mathcal{C}_{R,P,r}$ das von dem Element e_{r-1} erzeugte Ideal I heraus, so erhält man die Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{R,y,r}$ vom Typ A. Man beachte, daß dieser Quotient tatsächlich nur von dem Parameter y abhängt. Zu einer beliebigen Einheit $y \in R$ findet man stets ein BMW-Parametertripel $(1, y, y^2)$, so daß $\mathcal{H}_{R,y,r}$ zu jeder Einheit y definiert ist. Einen Integritätsbereich R mit Einheit y fassen wir als Algebra über

$$\mathbb{Z}[H] := \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}]$$

in der Unbestimmten Y mittels des durch $Y \mapsto y$ gegebenen Ringhomomorphismus auf. $\mathcal{H}_{R,y,r}$ wird von den Elementen $g_1, \ldots, g_{r-1}$ erzeugt und es gelten die Relationen $(G1), (G2)$ sowie die aus $(GE4)$ abgeleitete Relation

$$(G3) \quad g_i^2 = (y-1)g_i + y,$$

denn wegen $(GE2)$ liegen alle e_i in I. Damit ist $\mathcal{H}_{R,y,r}$ ein epimorphes Bild der Gruppen-Algebra der Artinsche Zopfgruppe auf r Fäden über R und in dem Spezialfall $y = 1$ erhält man gerade die Gruppen-Algebra der Symetrischen Gruppe auf r Elementen über R. Den natürlichen Epimorphismus von $\mathcal{C}_{R,P,r}$ auf $\mathcal{H}_{R,y,r}$ bezeichnen wir durchweg mit ζ_r.

Zur Angabe einer Basis von $\mathcal{H}_{R,y,r}$ betrachten wir eine Abbildung $G : \mathcal{S}_r \to \mathcal{C}_{R,P,r}$, die zu einer Permutation $w \in \mathcal{S}_r$ mit reduziertem Ausdruck $w = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_t}$ durch

$$G(w) := g_{i_1} g_{i_2}, \ldots g_{i_t}$$

definiert ist, wobei wie gewohnt s_i die Nachbarvertauschung $(i, i+1)$ ist. Es ist zu überlegen, daß dies unäbhängig von der Wahl des reduzierten Ausdruckes für w ist. Dies liegt an der als *Lemma von Matsumoto* bekannten Tatsache, daß zwei reduzierte Ausdrücke für w allein durch Anwendung der beiden Zopfrelationen (G1) und (G2) (in Bezug auf die s_i) ineinander überführt werden können. Man überlegt dazu leicht, daß sich w durch Anwendung von Zopfrelationen in die Form $w' s_{r-1} s_{r-2} \ldots s_l$ mit $l \leq r-1$ und $w' \in \mathcal{S}_{r-1}$ transformieren läßt, sofern es nicht sowieso schon in $\mathcal{S}_{r-1}$ liegt (dabei wird $\mathcal{S}_{r-1}$ als diejenige parabolische Untergruppe von $\mathcal{S}_r$ aufgefaßt, die von den ersten $r-2$ Nachbarvertauschungen $s_1, \ldots, s_{r-2}$ erzeugt wird, deren Elemente also die r-te Stelle fest lassen). Daraus folgt induktiv, daß sich w durch Zopfrelationen in die Form

$$w = s_{i_1} s_{i_1-1} \ldots s_{j_1} s_{i_2} s_{i_2-1} \ldots s_{j_2} \ldots s_{i_t} s_{i_t-1} \ldots s_{j_t} = s_{i_1|j_1} s_{i_2|j_2} \ldots s_{i_t|j_t} \tag{2.4}$$

bringen läßt, worin $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t < r$ und $j_l \leq i_l$ gilt und mit $s_{i|j}$ in Analogie zu den g-Ketten s-Ketten $s_{i|j} = s_i s_{i-1} \ldots s_{j+1} s_j$ bezeichnet werden. Da es sich hierbei um einen reduzierten Ausdruck handelt, folgt nicht nur die Wohldefiniertheit der $G(w)$ sondern auch der Umstand, daß das Bild von G in der in 2.2 betrachteten Menge B_r von Monomen in $\mathcal{C}_{R,P,r}$ liegt. Genauer sind es gerade Produkten der dort betrachteten g-Ketten, also z.B. $G(w) = g_{i_1|j_1} g_{i_2|j_2} \ldots g_{i_t|j_t}$ in obigem Falle. Außerdem erhält man die Formel

$$G(ww') = G(w)G(w') \text{ falls } l(ww') = l(w) + l(w').$$

Man kann bekanntermaßen $\mathcal{H}_{R,y,r}$ ebenso als freien R Modul mit Basis $\{T_w := T(w) \mid w \in \mathcal{S}_r\}$ und den multiplikativen Vorschriften:

$$T_v T_w = \begin{cases} T_{vw} & \text{für } l(vw) = l(w) + 1 \\ yT_{vw} + (y-1)T_w & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_w T_v = \begin{cases} T_{wv} & \text{für } l(wv) = l(w) + 1 \\ yT_{wv} + (y-1)T_w & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Dabei ist $w \in \mathcal{S}_r$ beliebig und $v \in \{s_1, \ldots s_{r-1}\}$ eine Nachbartransposition, sowie $l(w)$ die Länge der Permutation w. Dies ist die Art und Weise auf die $\mathcal{H}_{R,y,r}$ im Zusammenhang mit der Theorie der endlichen Gruppen vom Lie-Typ bekannt ist. Der Beweis des Sachverhalts folgt über den Zusammenhang $T_w = \zeta_r(G(w))$.

Sei $\lambda \in \Lambda(n,r)$ eine Komposition von r in n Teile, d.h. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = r$. Mit $\mathcal{S}_\lambda$ bezeichnen wir die *Standard Yang Untergruppe* von $\mathcal{S}_r$ zu λ, das ist diejenige parabolische Untergruppe, welche die Teilmengen $\{1, \ldots, \lambda_1\}$, $\{\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_1 + \lambda_2\}, \ldots, \{r - \lambda_n, \ldots, r\}$ als ganzes invariant läßt. Wir definieren dann:

$$x_\lambda := \sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} T_w \in \mathcal{H}_{R,y,r}$$

und dazu den Permutationsmodul

$$M^\lambda := \mathcal{H}_{R,y,r} x_\lambda.$$

Im Spezialfall $R = \mathbb{C}$ und $y = 1$ (klassische Spezialisierung) ist M^λ in der Tat die komplexe Permutationsdarstellung von $\mathcal{S}_r$ auf den Nebenklassen von $\mathcal{S}_\lambda$. Es sei darauf hingewiesen, daß im Gegensatz zu der hiesigen Bezeichnung M^λ in [DJ1] für das von x_λ erzeugte Rechtsideal in $\mathcal{H}_{R,y,r}$ verwendet wird.

Aus der Theorie von Spiegelungsgruppen ([Hu], 1.10) ist bekannt, daß es in jeder Rechtsnebenklasse der parabolischen Untergruppe $\mathcal{S}_\lambda$ in $\mathcal{S}_r$ ein eindeutig bestimmtes Element kürzester Länge gibt. Das aus diesen Elementen bestehende Nebenklassenvertretersystem nennen wir $\mathcal{D}_\lambda$. Entsprechend ist $\mathcal{D}_\lambda^{-1} := \{d^{-1} \mid d \in \mathcal{D}_\lambda\}$ ein Vertretersystem von Linksnebenklassen und $\mathcal{D}_{\lambda,\mu} := \mathcal{D}_\mu \cap \mathcal{D}_\lambda^{-1}$ ein solches von $\mathcal{S}_\mu - \mathcal{S}_\lambda$ Doppelnebenklassen, deren Elemente die jeweils kürzeste Länge besitzen (Lemma 1.6 [DJ1]).

Lemma 2.3.1 *M^λ besitzt die freie R-Basis $\{T_d x_\lambda \mid d \in \mathcal{D}_\lambda^{-1}\}$ und es gilt:*

$$T_v T_d x_\lambda = \begin{cases} T_{vd} x_\lambda & \textit{für } l(vd) = l(d) + 1 \textit{ und } vd \in \mathcal{D}_\lambda^{-1} \\ yT_d x_\lambda & \textit{für } l(vd) = l(d) + 1 \textit{ und } vd \notin \mathcal{D}_\lambda^{-1} \\ yT_{vd} x_\lambda + (y-1)T_d x_\lambda & \textit{für } l(vd) = l(d) - 1 \end{cases}$$

mit $v \in \{s_1, \ldots, s_{r-1}\}$.

BEWEIS: Dies folgt aus [DJ1], Lemma 3.2 nach Anwendung des durch $T_w \mapsto T_{w^{-1}}$ gegebenen Antiautomorphismus von $\mathcal{H}_{R,y,r}$. $\square$

Zu $d \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ definieren wir eine Abbildungen $\varphi_d : M^\mu \to M^\lambda$ durch

$$\varphi_d(x_\mu) := \sum_{w \in \mathcal{S}_\mu d \mathcal{S}_\lambda} T_w.$$

Da M^μ zyklischer $\mathcal{H}_{R,y,r}$-Modul ist, ist dadurch in eindeutiger Weise ein Homomorphismus $\varphi_d \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(M^\mu, M^\lambda)$ bestimmt. Theorem 3.4 aus [DJ1] lautet dann:

Satz 2.3.2 *Sei R ein Hauptidealring mit Einheit y. Dann ist $\{\varphi_d | \ d \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}\}$ eine freie Basis für* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(M^\mu, M^\lambda)$.

Ist $R \to S$ ein Ringhomomorphismus mit $y \mapsto \bar{y}$, bezüglich dem wir S als eine R-Algebra betrachten, so gilt in Analogie zu Bemerkung 2.2.2 (f)

$$\mathcal{H}_{S,\bar{y},r} \cong S \otimes_R \mathcal{H}_{R,y,r}.$$

Man hat dann natürliche Homomorphismen

$$\eta_S : \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(M^\mu, M^\lambda)^S \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{S,\bar{y},r}}((M^\mu)^S, (M^\lambda)^S)$$

auf Erzeugern durch $\eta_S(s \otimes \varphi)(t \otimes v) := st \otimes \varphi(v)$ mit $s, t \in S, \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(M^\mu, M^\lambda)$ und $v \in M^\mu$ gegeben (vgl. 1.5.2). Man beachte, daß der $\mathcal{H}_{S,\bar{y},r}$-Modul $(M^\lambda)^S$ gerade das Linksideal $\mathcal{H}_{S,\bar{y},r}(1_S \otimes x_\lambda)$ ist, d.h. es gilt $(M_R^\lambda)^S \cong M_S^\lambda$, wenn man die Abhängigkeit der M^λ vom Grundring in der Notation berücksichtigt. Letzteres wollen wir jedoch nicht tun. Vielmehr schreiben wir der Übersichtlichkeit halber lieber M^λ anstelle von $(M^\lambda)^S$.

Weiterhin beachte man, daß die Bilder der Elemente $1_S \otimes \varphi_d$ unter η_S gerade die entsprechenden Homomorphismen bezüglich $\mathcal{H}_{S,\bar{y},r}$ sind. Satz 2.3.2 impliziert damit, daß η_S für jeden Hauptidealring S surjektiv ist, und daß die $1_S \otimes \varphi_d$ linear unabhängig in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(M^\mu, M^\lambda)^S$ sind – auch wenn R kein Hauptidealring ist.

Korollar 2.3.3 *$\{\varphi_d | \ d \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}\}$ ist für jeden Noetherschen Integritätsbereich R eine freie Basis von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(M^\mu, M^\lambda)$ und für jede Spezialisierung $R \to S$, d.h. für jede R-Algebra S, welche ein Körper ist, ist der natürliche Homomorphismus η_S ein Isomorphismus.*

BEWEIS: Die zweite Aussage des Korollars folgt aufgrund der Vorbemerkungen aus der ersten. Zu deren Beweis sei U der R-lineare Aufspann von $\{\varphi_d | \ d \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}\}$ und ι_U die Einbettung von U in $W := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(M^\mu, M^\lambda)$. Weiter sei Q der Quotientenkörper von R. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit reicht es zu zeigen, daß die $1_Q \otimes \varphi_d$ linear unabhängig in W^Q sind, da W als Untermodul des freien R-Moduls $\mathrm{Hom}_R(M^\mu, M^\lambda)$ torsionsfrei ist. Dies wurde bereits in der Vorbemerkung getan.

Zum Beweis, daß ein Erzeugendensystem vorliegt, verwenden wir Lemma A.3.3 aus dem Anhang. Dazu überpüfen wir die dortigen Voraussetzungen an W und U. Daß U frei ist, folgt aus der bereits gezeigten linearen Unabhängigkeit der φ_d. Das Torsionsfreisein von W wurde schon oben aufgezeigt. Nach den Vorbemerkungen ist sogar für jeden Hauptidealring S die von der Einbettung induzierte Abbildung ${\iota_U}^S$ injektiv, was unter den Voraussetzungen des Lemmas lediglich für Körper S verlangt ist. Für den Quotientenkörper Q von R ist ${\iota_U}^Q$ auch surjektiv, da aufgrund der Flachheit über R der Homomorphismus η^Q nach einem allgemein bekannten Satz ein Isomorphismus ist. Aus $(W/U)^Q = 0$ folgt dann, daß der Faktormodul W/U ein R-Torsionsmodul ist. Damit sind alle Voraussetzungen von Lemma A.3.3 erfüllt und es folgt $W = U$, also die Behauptung. □

2.3.2 Darstellungen auf den Tensorräumen

Obwohl die Definition der Darstellungen von $\mathcal{H}_{R,y,r}$ auf den Tensorräumen $V^{\otimes r}$ wie in Abschnitt 2.2.2 mit Hilfe eines Quanten-Yang-Baxter-Operators vorgenommen werden kann, geben wir sie in einer an [DJ1], [DD] angepaßten Notation. Im Hinblick auf eine multiparametrische Version betrachten wir wieder Z-Paramtertupel, die im hiesigen Fall aus n^2 Elementen $Z = (p_{ij}|\ 1 \leq i, j \leq n)$ bestehen. Die Realtionen sind hier für $1 \leq i, j \leq n$

$$p_{ij}p_{ji} = 1, \quad p_{ii} = 1.$$

Einen Integritätsbereich R mit Z-Parametertupel faßt man hier als Algebra über

$$\mathbb{Z}[X_{ij}, X_{ij}^{-1}|\ 1 \leq i < j \leq n],$$

mit Unbestimmten X_{ij} auf mittels dem Ringhomomorphismus nach R, der durch $X_{ij} \mapsto p_{ij}$ gegeben ist. Beachte, daß auch hier die übrigen der n^2 Zusatzparameter aufgrund der Relationen für ein Z-Parametertupel durch diese $d_n := \frac{n(n-1)}{2}$ Elemente festgelegt sind. Ebenso fassen wir einen Integritätsbereich mit Einheit y und Z-Parametertupel Z als Algebra über

$$\mathcal{Z}' := \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}, X_{ij}, X_{ij}^{-1}|\ 1 \leq i < j \leq m] \tag{2.5}$$

mittels dem durch $Y \mapsto y$ und $X_{ij} \mapsto p_{ij}$ gegebenen Ringhomomorphismus auf.

Wie in 1.1 schreiben wir die Basiselemente von $V^{\otimes r}$ in der Form $v_{\mathbf{i}} := v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}$. Eine Permutation $w \in \mathcal{S}_r$ operiert auf einem Multi-Index $\mathbf{i}$ von rechts wie üblich durch $\mathbf{i}w := (i_{w(1)}, \ldots, i_{w(r)})$. Man erhält den Satz:

Satz 2.3.4 *Sei R ein Integritätsbereich mit Einheit y und Z-Parametertupel Z. Weiter seien r und n natürliche Zahlen. Dann erhält man durch*

$$g_l(v_{\mathbf{i}}) = T_{s_l}(v_{\mathbf{i}}) := \begin{cases} p_{i_{l+1}i_l} v_{\mathbf{i}s_l} & \text{für } i_l < i_{l+1} \\ y v_{\mathbf{i}} & \text{für } i_l = i_{l+1} \\ y p_{i_{l+1}i_l} v_{\mathbf{i}s_l} + (y-1) v_{\mathbf{i}} & \text{für } i_l > i_{l+1} \end{cases}$$

eine Darstellung ρ_r der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{R,y,r}$ auf dem r-fachen Tensorprodukt des freien Moduls V vom Rang n über R

Beweis: Das Bild von T_{s_1} in $\mathrm{End}_R(V^{\otimes 2})$ ist der Quanten-Yang-Baxter-Operator

$$\beta_q := y \sum_{i\leq j} p_{ij} e_i^j \otimes e_j^i + \sum_{i>j} p_{ij} e_i^j \otimes e_j^i + (y-1) \sum_{i>j} e_i^i \otimes e_j^j,$$

den man durch Umparametrisierung $y \leftrightarrow q^{-2}, p_{ij} \leftrightarrow q^{-1} p_{ij}$ für $i < j$ und $p_{ij} \leftrightarrow qp_{ij}$ für $i > j$ und Multiplikation mit y aus dem entsprechenden Operator in [Ha2], S. 156 erhält. Damit folgt $(G2)$ aus der Quanten-Yang-Baxter-Gleichung (1.7), während $(G1)$ ohnehin klar ist. $(G3)$ ergibt sich aus dem Minimalpolynom von β_q oder direktes Nachrechnen auf Basiselementen $v_{\mathbf{i}}$. □

Einem Multi-Index $\mathbf{i} \in I(n,r)$ kann man die folgende Komposition $\lambda \in \Lambda(n,r)$, den sogenannten *Inhalt* von $\mathbf{i}$ zuordnen: $|\mathbf{i}| = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_k := |\{1 \leq j \leq r|\ i_j = k\}|$ die Anzahl der mit k übereinstimmenden Indizes ist. Umgekehrt kann man einer Komposition $\lambda \in \Lambda(n,r)$ den *Initialindex* $\mathbf{i}_\lambda = (i_1, \ldots, i_r)$ mit $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r$ und $\lambda = |\mathbf{i}_\lambda|$ zuordnen. Wir betrachten nun die folgende Gewichtsraumzerlegung von $V^{\otimes r}$:

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda(n,r)} (V^{\otimes r})^\lambda \text{ mit } (V^{\otimes r})^\lambda := \langle \{v_{\mathbf{i}}|\ \mathbf{i} \in I(n,r),\ |\mathbf{i}| = \lambda\}\rangle . \tag{2.6}$$

Darin deuten die spitzen Klammern das R-Modulerzeugnis an. Man sieht sofort, daß $(V^{\otimes r})^\lambda$ $\mathcal{H}_{R,y,r}$-Untermoduln von $V^{\otimes r}$ sind, so daß (2.6) eine direkte Summenzerlegung über $\mathcal{H}_{R,y,r}$ ist.

Zu einer beliebigen $n \times n$-Matrix $(h_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, einem Multi-Index $\mathbf{i} \in I(n,r)$ und einer Permutation $w \in \mathcal{S}_r$ setzen wir

$$h_{\mathbf{i}}(w) := \prod_{j<k,\, w(j)>w(k)} h_{i_{w(j)} i_{w(k)}}, \tag{2.7}$$

wobei das Produkt über alle Fehlstände von w läuft. Für $w = w's_l$ mit $l(w) = l(w') + 1$ gilt die folgende Rekursionsformel

$$h_{\mathbf{i}}(w) = h_{\mathbf{i}}(w') h_{\mathbf{i}w'}(s_l). \tag{2.8}$$

Denn w besitzt gegenüber w' genau einen Fehlstand mehr, nämlich für $l < l+1$, wozu der Faktor $h_{i_{w(l)} i_{w(l+1)}} = h_{\mathbf{i}w'}(s_l)$ gehört. Die übrigen Fehlstände $k < j$ für $\{k,j\} \neq \{l,l+1\}$ von w stehen mittels $s_l(k) < s_l(j)$ in Bijektion zu den Fehlständen von w'. Somit treten in beiden Produkten die gleichen Faktoren auf. Wir wenden dies im Fall $h_{ij} = p_{ij}$ und $\mathbf{i} = \mathbf{i}_\lambda$ an und schreiben abkürzend $p_\lambda(w) := p_{\mathbf{i}_\lambda}(w)$. Setzt man $\mathbf{j} := \mathbf{i}_\lambda w$, so erhält man aus (2.8) wegen $p_{ij}p_{ji} = 1$ die für alle $w \in \mathcal{S}_r$ und $l < r$ gültige Gleichung

$$p_\lambda(ws_l) = p_\lambda(w) p_{j_{l+1} j_l},$$

indem man für w' im Fall $l(ws_l) = l(w) - 1$ die Permutation ws_l und w andernfalls einsetzt. Man erhält:

Lemma 2.3.5 *Sei R ein Integritätsbereich mit Einheit y und einem Z-Parametertupel $Z = (p_{ij}|\ 1 \leq i,j \leq n)$. Dann ist durch $T_d x_\lambda \mapsto p_\lambda(d^{-1}) v_{\mathbf{i}_\lambda d^{-1}}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{H}_{R,y,r}$ Linksmoduln zwischen M^λ und $(V^{\otimes r})^\lambda$ gegeben.*

BEWEIS: Zunächst ergibt sich wegen Lemma 1.1 aus [DJ1], daß sich die drei Fälle in der Definition von $T_{s_l}(T_d x_\lambda)$ und $T_{s_l}(v_{\mathbf{i}_\lambda d^{-1}})$ entsprechen. In allen drei Fällen verifiziert man dann wegen $p_\lambda(d^{-1}s_l) = p_\lambda(d^{-1})p_{j_{l+1}j_l}$ sofort $T_{s_l}(T_d x_\lambda) \mapsto T_{s_l}(p_\lambda(d^{-1})v_{\mathbf{i}_\lambda d^{-1}})$. $\square$

Dies ergibt in Analogie zu Lemma 3.1.4 in [DD]

Korollar 2.3.6 *Es gibt einen Isomorphismus von $\mathcal{H}_{R,y,r}$ Linksmoduln*

$$V^{\otimes r} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(n,r)} M^\lambda.$$

2.4 Quantisierung des Monoids der $n \times n$-Matrizen

Satz 2.3.4 gibt Anlaß zu der folgenden Familie von Unteralgebren der Endomorphismenringe $\mathcal{E}_r = \mathrm{End}_R(V^{\otimes r})$ über R:

$$\mathcal{A}_r := \mathrm{im}(\rho_r) \subseteq \mathcal{E}_r$$

Man sieht sofort, daß diese Familie $\mathcal{A}$ gemäß der Definition 1.4.1 idealverträglich und endlich erzeugt vom Grad 2 ist. Dies führt mittels der FRT-Konstruktion aus Kapitel 1.4 zu der graduierten Matrix-Bialgebra

$$A_{R,y}(n) := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}_0} A_{R,y}(n,r) := \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

deren homogene Summanden die Zentralisator Koalgebren

$$A_{R,y}(n,r) := M(\mathcal{A}_r)$$

sind. Gemäß Bemerkung 1.4.3 über den Zusammenhang der hier eingeführten FRT-Konstruktion mit der üblicherweise betrachteten FRT-Konstruktion zu einem Quanten-Yang-Baxter-Operator β gilt $A_{R,y}(n) = \mathcal{M}(\beta_q)$ für den im Beweis von Satz 2.3.4 angegeebenen Quanten-Yang-Baxter-Operator β_q. Man beachte, daß der Algebrenhomomorphismus der Gruppenalgebra $R\mathcal{Z}_r$ der Artinschen Zopfgruppe auf $\mathcal{H}_{R,y,r}$, gegeben durch $\sigma_i \mapsto g_i$, stets surjektiv ist. Insbesondere stimmt $A_{R,y}(n)$ mit der von T. Hayashi in [Ha2] definierten Bialgebra $S_{q^{-1},P'}(A_{n-1})$ überein, wobei P' entsprechend der im Beweis von Satz 2.3.4 angegeebenen Umparametrisierung von β_q zu wählen ist. Die hier gesetzte Parameterwahl korreliert mit derjenigen in [AST] via $y \leftrightarrow \lambda$ und man erhält die Übereinstimmung mit der dort betrachteten Bialgebra H. Im Fall $p_{ij} = 1$ für alle i, j ergibt sich gerade die in der Einleitung erwähnte einparametrige Version nach R. Dipper und S. Donkin ([DD]), wobei unser y dem dortigen q entspricht. Schließlich erhält man die auf I. Manin zurückgehende einparametrige Version für $p_{ij} \leftrightarrow q$ für $i < j$ und $y \leftrightarrow q^2$ (siehe [AST], S. 14).

Zu einem Ringhomomorphismus $R \to S$ bezeichnen wir mit $\bar{y}$ das Bild von y und mit $\bar{Z}$ dasjenige des Z-Parametertupels Z. Nach Satz 1.5.10 erhält man

Satz 2.4.1 *Es gibt einen Isomorphismus graduierter Matrix-Bialgebren*

$$A_{S,\bar{y}}(n) \cong S \otimes_R A_{R,y}(n)$$

der die Erzeuger x_{ij} *– die Restklassen der* e_i^{*j} *– in* $A_{S,\bar{y}}(n)$ *auf die entsprechenden Erzeuger in* $S \otimes_R A_{R,y}(n)$ *abbildet.*

Insbesondere hat man für einen Integritätsbereich R mit Einheit y und Z-Parametertupel Z bezüglich des Grundgrings $\mathcal{Z}'$ (siehe (2.5)) einen Isomorphismus

$$A_{R,y}(n) \cong R \otimes_{\mathcal{Z}'} A_{\mathcal{Z}',Y}(n).$$

Wir zeigen nun mit Hilfe von Theorem 3.4 aus [DJ1] (hier 2.3.2) und den in Kapitel 1 entwickelten Methoden – genauer mit Satz 1.5.12 und Korollar 1.5.13

Satz 2.4.2 $A_{R,y}(n)$ *ist ein freier* R*-Modul.*

Beweis: Wir fassen R via y und dem Z-Parametertupel als $\mathcal{Z}'$-Algebra auf. Aufgrund von Satz 2.4.1 genügt es dann den Satz im Fall des Noetherschen Integritätsbereiches $R = \mathcal{Z}'$ und $y = Y$ zu zeigen. Wir halten r fest und zeigen, daß die Zentralisator Koalgebra $A_{R,y}(n,r) = M(\mathcal{A}_r)$ frei ist. Nach Satz 1.5.12 (d) und Korollar 1.5.13 genügt es dazu, zu zeigen, daß $C(\mathcal{A}_r) = \mathrm{End}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(V^{\otimes r})$ frei von endlichem Rang ist, und für jede Spezialisierung $R \to S$ der natürliche Homomorphismus

$$\eta_S : S \otimes_R \mathrm{End}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(V^{\otimes r}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{H}_{S,\bar{y},r}}(S \otimes V^{\otimes r})$$

ein Isomorphismus ist. Beide Aussagen folgen aus Korollar 2.3.3, da wegen Korollar 2.3.6 die direkte Summenzerlegung

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(V^{\otimes r}) \cong \bigoplus_{\lambda,\mu \in \Lambda(n,r)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{R,y,r}}(M^\lambda, M^\mu)$$

besteht und die natürlichen Homomorphismen η_S mit dieser direkten Summenzerlegungen kommutieren. □

Man rechnet leicht nach, daß das Kommutatorkoideal $K(\mathcal{A}_2) = K(\beta_q)$ von den Elementen

$$e_i^{*j} \otimes e_k^{*l} - \begin{cases} y p_{lj} e_k^{*l} \otimes e_i^{*j} & \text{für } i = k \text{ und } j > l \\ y^{-1} p_{ik} p_{lj} e_k^{*l} \otimes e_i^{*j} & \text{für } i > k \text{ und } j \leq l \\ p_{ik} p_{lj} e_k^{*l} \otimes e_i^{*j} + (1 - y^{-1}) p_{ik} e_k^{*j} \otimes e_i^{*l} & \text{für } i > k \text{ und } j > l \end{cases}$$

erzeugt wird (vgl. [AST], Theorem 1 (8)). Daran erkennt man sofort, daß die in der lexikographischen Ordnung von links nach rechts aufsteigenden Monome in den $x_{ij} := e_i^{*j} + I$ ein Erzeugendensystem von $A_{R,y}(n) = \mathcal{T}(\mathcal{E}^*)/I$ bilden. In der klassischen Spezialisierung über $\mathbb{C}$, also für $y = 1$, $p_{ij} = 1$ bilden diese Monome aber bekannterweise eine Basis von

$$A_{\mathbb{C},1}(n) \cong A_{\mathbb{C}}(n) = \mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n] = \mathbb{C}[\mathrm{M}_n(\mathbb{C})]\,. \tag{2.9}$$

Zusammen mit Korollar A.2.3 zeigt Satz 2.4.2 und Satz 2.4.1, daß diese Monome bereits eine freie Basis von $A_{\mathcal{Z}',Y}(n)$ über $\mathcal{Z}'$ bilden. Mittels des Isomorphismus aus Satz 2.4.1 liefern sie somit auch eine Basis von $A_{R,y}(n)$ für jeden Integritätsbereich R mit Einheit y und Z-Parametertupel. Dies wurde im Fall, daß die Zusatzparameter alle Eins sind bereits in [DD] und in der hiesigen Allgemeinheit ebenso in [AST] und [Su] gezeigt.

Die Tatsache, daß die globale Version $A_{\mathcal{Z}',Y}(n)$ von $A_{R,y}(n)$ frei ist, berechtigt dazu, diese Bialgebren als eine Deformation des Koordinatenrings $R\,[\mathrm{M}_n(R)]$ des affinen Monoidschemas $\mathrm{M}_n(R)$ aufzufassen. Denn für $y = 1$ und $p_{ij} = 1$ für alle i, j erhält man in Analogie zu (2.9)

$$R \otimes_{\mathcal{Z}'} A_{\mathcal{Z}',Y}(n) \cong A_{R,1}(n) \cong A_R(n) = R[x_{ij} \,|\, 1 \leq i, j \leq n] = R\,[\mathrm{M}_n(R)]\,.$$

2.5 Quantisierung der symplektischen und orthogonalen Monoide

Satz 2.2.3 gibt Anlaß zu den zwei folgenden Familien von Unteralgebren der Endomorphismenringe $\mathcal{E}_r$ über einem Integritätsbereich R mit einer Einheit q und Z-Parametertupel Z (gemäß der Definition in 2.2.2)

$$\mathcal{A}_r^{\mathrm{s}} := \mathrm{im}(\rho_r^{\mathrm{s}}), \quad \mathcal{A}_r^{\mathrm{o}} := \mathrm{im}(\rho_r^{\mathrm{o}}).$$

Man sieht auch hier, daß diese Familien $\mathcal{A}^{\mathrm{s}}$ und $\mathcal{A}^{\mathrm{o}}$ gemäß der Definition 1.4.1 idealverträglich und endlich erzeugt vom Grad 2 sind. Dies führt mittels der FRT-Konstruktion aus Kapitel 1.4 zu folgenden graduierten Matrix-Bialgebren

$$A_{R,q}^{\mathrm{s}}(n) := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}_0} A_{R,q}^{\mathrm{s}}(n,r) := \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathrm{s}}), \quad A_{R,q}^{\mathrm{o}}(n) := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}_0} A_{R,q}^{\mathrm{o}}(n,r) := \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathrm{o}})$$

mit den folgenden Zentralisator Koalgebren als den homogenen Summanden

$$A_{R,q}^{\mathrm{s}}(n,r) := M(\mathcal{A}_r^{\mathrm{s}}) \quad \text{und} \quad A_{R,q}^{\mathrm{o}}(n,r) := M(\mathcal{A}_r^{\mathrm{o}})$$

Bemerkung 2.5.1 *Gemäß Bemerkung 1.4.3 hat man* $A_{R,q}^{\mathrm{s}}(n) = \mathcal{M}(< \beta_q^{\mathrm{s}}, \gamma_q^{\mathrm{s}} >)$ *und* $A_{R,q}^{\mathrm{o}}(n) = \mathcal{M}(< \beta_q^{\mathrm{o}}, \gamma_q^{\mathrm{o}} >)$*, wobei die Spitzen Klammern das Algebrenerzeugnis in* $\mathcal{E}_2$ *bezeichnen. Nach Bemerkung 2.2.2 (d) handelt es sich hier allerdings nur dann um FRT-Konstruktionen* $\mathcal{M}(\beta_q^{\mathrm{s}})$ *und* $\mathcal{M}(\beta_q^{\mathrm{o}})$ *im gewöhnlichen Sinne, wenn* $q^2 - 1$ *eine Einheit in* R *ist. In diesem Fall stimmen* $A_{K,q}^{\mathrm{s}}(n)$ *und* $A_{K,q}^{\mathrm{o}}(n)$ *für einen Körper* K *mit den in [Ha2] definierten Bialgebren* $SE_{q,P}(C_m)$ *bzw.* $SE_{q,P}(B_m)$ *und* $SE_{q,P}(D_m)$ *überein. Im klassischen Fall* $q = 1$ *liegt hingegen keine gewöhnliche FRT-Konstruktion vor.*

Zu einem Ringhomomorphismus $R \to S$ bezeichnen wir mit $\widetilde{q}$ das Bild von q und mit $\bar{Z}$ dasjeniege des Z-Parametertupels Z und erhalten nach Satz 1.5.10 in Analogie zu Satz 2.4.1

Satz 2.5.2 *Es gibt Isomorphismen graduierter Matrix-Bialgebren*

$$A^{\mathsf{s}}_{S,\widetilde{q}}(n) \cong S \otimes_R A^{\mathsf{s}}_{R,q}(n), \quad A^{\mathsf{o}}_{S,\widetilde{q}}(n) \cong S \otimes_R A^{\mathsf{o}}_{R,q}(n).$$

welche die Erzeuger x_{ij} – die Restklassen der e_i^{*j} – in $A^{\mathsf{s}}_{S,\widetilde{q}}(n)$ bzw. $A^{\mathsf{o}}_{S,\widetilde{q}}(n)$ auf die entsprechenden Erzeuger in $S \otimes_R A^{\mathsf{s}}_{R,q}(n)$ bzw. $S \otimes_R A^{\mathsf{o}}_{R,q}(n)$ abbilden.

Insbesondere hat man für einen Integritätsbereich R mit Einheit q und Z-Parametertupel Z bezüglich des Grundringes $\mathcal{Z}$ aus (2.3) Isomorphismen

$$A^{\mathsf{s}}_{R,q}(n) \cong R \otimes_{\mathcal{Z}} A^{\mathsf{s}}_{\mathcal{Z},Q}(n), \quad A^{\mathsf{o}}_{R,q}(n) \cong R \otimes_{\mathcal{Z}} A^{\mathsf{o}}_{\mathcal{Z},Q}(n),$$

Wir ziehen nun den in 2.1 angekündigten Vergleich mit den dort definierten Algebren $A^{\mathsf{s}}_R(n)$ und $A^{\mathsf{o}}_R(n)$.

Satz 2.5.3 *Sei $q = 1, p_{ij} = 1$ und $t_k = 1$ für alle i, j, k. Dann hat man folgende Isomorphismen von graduierten Matrix-Bialgebren:*

$$A^{\mathsf{s}}_{R,1}(n) \cong A^{\mathsf{s}}_R(n) \quad \textit{und} \quad A^{\mathsf{o}}_{R,1}(n) \cong A^{\mathsf{o}}_R(n)$$

Beweis: Wir beschränken uns auf den symplektischen Fall. Der orthogonale geht analog. Unter der vorausgesetzten Wahl von q und dem Z-Parametertupel spezialisiert der Quanten-Yang-Baxter-Operatoren β^{s}_q zum gewöhnlichen Flippoperator β. Dies zeigt, daß $\rho_r(R\mathcal{S}_r)$ eine Unteralgebra der Algebra $\mathcal{A}^{\mathsf{s}}_r$ ist. Somit ist die Zentralisator Koalgebra $A^{\mathsf{s}}_{R,1}(n,r) = M(\mathcal{A}^{\mathsf{s}}_r)$ ein epimorphes Bild von $A_R(n,r) \cong M(\rho_r(R\mathcal{S}_r))$. Also gibt es einen graderhaltenden Bialgebren-Epimorphismus von $A_R(n)$ auf $A^{\mathsf{s}}_{R,1}(n)$. Der Kern dieses Epimorphismus ist aufgrund von Satz 1.4.2 (b) und (1.3) unter Verwendung der Notation (1.2) als Idealerzeugnis von

$$\gamma^{\mathsf{s}}_q x_{\mathbf{ij}} - x_{\mathbf{ij}}\gamma^{\mathsf{s}}_q, \quad \text{mit } \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,2)$$

gegeben. γ^{s}_q erhält in dieser speziellen Situation die Gestalt

$$\gamma^{\mathsf{s}}_q = \sum_{1 \le i,j \le n} \epsilon_i \epsilon_j e_i^{j'} \otimes e_{i'}^{j}.$$

Dies ergibt mit $\mathbf{i} = (i,j)$ und $\mathbf{j} = (k,l)$

$$\gamma^{\mathsf{s}}_q x_{\mathbf{ij}} = \begin{cases} \epsilon_j \bar{f}_{kl} & i = j' \\ 0 & i \neq j' \end{cases} \qquad \text{und} \qquad x_{\mathbf{ij}}\gamma^{\mathsf{s}}_q = \begin{cases} \epsilon_l f_{ij} & k = l' \\ 0 & k \neq l' \end{cases}$$

Dies zeigt, daß der Kern genau mit dem von F (gemäß Satz 2.1.1) erzeugten Ideal I^{s}_R übereinstimmt. □

Bemerkung 2.5.4 *Faßt man R mittels $Q \mapsto 1, X_{ij} \mapsto 1$ und $X_k \mapsto 1$ für alle i, j, k als eine $\mathcal{Z}$-Algebra auf, so gilt nach dem Satz und Satz 2.5.2*

$$A^{\mathsf{s}}_R(n) \cong R \otimes_{\mathcal{Z}} A^{\mathsf{s}}_{\mathcal{Z},Q}(n), \quad A^{\mathsf{o}}_R(n) \cong R \otimes_{\mathcal{Z}} A^{\mathsf{o}}_{\mathcal{Z},Q}(n).$$

Betrachtet man jedoch anstelle von $A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z},Q}(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_{\mathcal{Z},Q}(n)$ die gewöhnliche FRT-Konstruktion über $\mathcal{Z}$, so erhält man hingegen

$$A_R(n) \cong R \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{M}(\beta^{\mathrm{s}}_q), \quad A_R(n) \cong R \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{M}(\beta^{\mathrm{o}}_q)..$$

obwohl im Fall eines Ringes, in dem $q^2 - 1$ invertierbar ist, $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n) = \mathcal{M}(\beta^{\mathrm{s}}_q)$ bzw. $A^{\mathrm{o}}_{R,q}(n) = \mathcal{M}(\beta^{\mathrm{o}}_q)$ gilt. Dies zeigt, daß Satz 2.5.3 allein noch nicht dazu berechtigt $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_{R,q}(n)$ als Deformationen von $A^{\mathrm{s}}_R(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_R(n)$ aufzufassen.

Zu einer solchen Rechtfertigung ist weiterhin zu zeigen, daß diese Matrix-Bialgebren in einer Zariski-Umgebung der klassischen Spezialisierung in Spec($\mathcal{Z}$) frei sind, d.h. daß sie über der Lokalisation $\mathcal{Z}_p$ von $\mathcal{Z}$ an dem von $\{Q-1, X_{ij}-1, X_k-1| \ 1 \leq ii < j \leq m, \ 1 \leq k \leq m+1\}$ erzeugten Primideal p frei sind. Wir werden dies zunächst im Fall der einparametrigen Versionen zeigen, d.h. für den Fall, daß alle Zusatzparameter 1 sind und den allgemeinen Fall daraus ableiten (Korollar 2.5.10). Um Verwechslungen zu vermeiden nehmen wir das Z-Parametertupel Z mit in die Bezeichnung von $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_{R,q}(n)$ auf, d.h. wir schreiben $A^{\mathrm{s}}_{R,q,Z}(n)$ und $A^{\mathrm{o}}_{R,q,Z}(n)$. Das triviale Z-Parametertupel mit $p_{ij} = 1 = t_k$ für alle i, j, k bezeichnen wir mit $\mathbf{1}$. Gemaß Lemma A.2.1 aus dem Anhang ergibt sich das Freisein über der Lokalisation von $\mathbb{Z}[Q, Q^{-1}]$ am Primideal $p = (Q-1)$ aus dem folgenden Dimensionsvergleich:

Satz 2.5.5 *Sei $K := \mathbb{Q}(Q)$ der Körper der rationale Funktionen in der Unbestimmten Q über $\mathbb{Q}$, also der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[Q, Q^{-1}]$. Dann gilt für alle $r \in \mathbb{N}_0$*

$$\dim_K(A^{\mathrm{s}}_{K,Q,\mathbf{1}}(n,r)) = \dim_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{C}}(n,r)) \quad \textit{und} \quad \dim_K(A^{\mathrm{o}}_{K,Q,\mathbf{1}}(n,r)) = \dim_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{o}}_{\mathbb{C}}(n,r)).$$

Beweis: Um Schreibarbeit zu ersparen behandeln wir nur den symplektischen Fall. Zu einer transzendenten Komplexe Zahl ϵ hat man eine Einbettung $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ durch $Q \mapsto \epsilon$, bezüglich der wir $\mathbb{C}$ als eine K-Algebra auffassen. Aufgrund der Vergleichsätze aus 1.5.1 und Satz 2.5.3 reicht es

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{\mathbb{C},P^{\mathrm{s}}_n(\epsilon),r}}(V^{\otimes r})) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}_{\mathcal{B}_{\mathbb{C},-n,r}}(V^{\otimes r}))$$

zu zeigen. Dazu werden einige wohlbekannte Resultate verwendet, auf deren Angabe in [CP] Bezug genommen wird. Dort findet man auch Verweise auf entsprechende Orginalliteratur. Man beachte, daß die in [CP], Kapitel 7 (Seite 237) angegebenen Quanten-Yang-Baxter-Operatoren sich von unseren Operatoren β^{s}_q und β^{o}_q im Fall $Z = \mathbf{1}$ lediglich um das Vielfache von q^{-1} unterscheiden. Daher unterscheidet sich der Zentralisator von $\mathcal{C}_{\mathbb{C},P^{\mathrm{s}}_n(\epsilon),r}$ bezüglich der in Theorem 10.2.5 aus [CP] angegebenen Darstellung nicht von dem bezüglich der hiesigen Darstellung ρ^{s}_r aus Satz 2.2.3. Nach diesem Theorem ist $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{\mathbb{C},P^{\mathrm{s}}_n(\epsilon),r}}(V^{\otimes r})$ gerade das Bildes in $\mathcal{E}_r$ der quantisierten universellen Einhüllenden U_ϵ der einfachen Liealgebra zum Dynkindiagramm C_m unter der Darstellung von U_ϵ auf $V^{\otimes r}$.

Auf ähnliche Weise sieht man, daß $\mathrm{End}_{\mathcal{B}_{\mathbb{C},-n,r}}(V^{\otimes r})$ das Bild der klassischen universellen Einhüllenden U der einfachen Liealgebra von Typ C_m ist. Denn das Bild von U in $\mathcal{E}_r$ fällt mit dem Bild der Gruppenalgebra von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ unter deren Darstellung auf $V^{\otimes r}$ zusammen, und letzteres stimmt wegen Bemerkung 2.2.4 und der hier erfüllten

Doppelzentralisatoreneigenschaft mit $\mathrm{End}_{\mathcal{B}_{\mathbb{C},-n,r}}(V^{\otimes r})$ überein ($V^{\otimes r}$ ist vollständig reduzibler $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$-Modul). Wegen Proposition 10.1.13 und Theorem 10.1.14 in [CP] zerfällt $V^{\otimes r}$ sowohl als U_ϵ- als auch als $\overline{U}$-Modul in eine direkte Summe von irreduziblen Moduln $V_\epsilon(\lambda)$ bzw. $\overline{V_\epsilon(\lambda)}$, die mittels $\overline{()}$ in Bijektion zueinander stehen und jeweils die gleiche Dimension haben. Da in beiden Fällen dieselben höchsten Gewichte λ auftreten, folgt schließlich die Übereinstimmung der Dimensionen von $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{\mathbb{C},P_n^s(\epsilon),r}}(V^{\otimes r})$ und $\mathrm{End}_{\mathcal{B}_{\mathbb{C},-n,r}}(V^{\otimes r})$ als Summe über die Quadrate der Dimensionen von $V_\epsilon(\lambda)$ bzw. $\overline{V_\epsilon(\lambda)}$. $\square$

Im Hinblick auf die Verallgemeinerung des Satzes auf den multiparametrischen Fall definieren wir zu einem Multi-Index $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I(n,r)$ folgende invertierbaren Ringelemente

$$p(\mathbf{i}) := \prod_{j<h,\, i_h \prec i_j} p_{i_h i_j}, \quad t(\mathbf{i}) := \prod_{h=1}^{r} t_{i_h}^{-h}.$$

Darin wird mit $\prec$ die durch $m' \prec m \prec (m-1)' \prec m-1 \prec \ldots \prec 1' \prec 1$ gegebene Ordnung auf $\underline{n}$ bezeichnet. Im Fall von ungeradem n hat man $m+1 \prec m'$ hinzuzufügen. Es sei an die in 1.2 definierte Addition von Multi-Indizes erinnert. Weiterhin schreiben wir wieder $s_l = (l, l+1) \in \mathcal{S}_r$ für Nachbartranspositionen.

Lemma 2.5.6 *(a) Für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$ und $1 \le l < r$ gilt $p(\mathbf{i}s_l) = p(\mathbf{i})p_{i_{l+1}i_l}$ und $t(\mathbf{i}s_l) = t(\mathbf{i})t_{i_{l+1}}t_{i_l}^{-1}$.*

(b) Für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$, $\mathbf{j} \in I(n,s)$ und $k, l \in \underline{n}$ gilt $p(\mathbf{i}+(k,k')+\mathbf{j}) = p(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ und $t(\mathbf{i}+(k,k')+\mathbf{j}) = t(\mathbf{i}+(l,l')+\mathbf{j})t_{l'}t_{k'}^{-1}$.

Beweis: Sei $\lambda := |\mathbf{i}| \in \Lambda(n,r)$ der Inhalt von $\mathbf{i}$ und $\mathbf{i}_\lambda$ der zugehörige Initialindex bezüglich der Ordnung $\prec$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Linksnebenklassenvertreter $d \in \mathcal{D}_\lambda^{-1}$ bezüglich der Standard Young Untergruppe $\mathcal{S}_\lambda$ mit $\mathbf{i}_\lambda = (i_{d(1)}, i_{d(2)}, \ldots, i_{d(r)})$. Wegen $i_{d(1)} \preceq i_{d(2)} \preceq \ldots \preceq i_{d(r)}$ liegt ein Fehlstand $j<h,\ i_h \prec i_j$ genau dann vor, wenn ein Fehlstand $j<h,\ d^{-1}(h) < d^{-1}(j)$ von d^{-1} vorliegt. Also gilt in der Notation (2.7)

$$p(\mathbf{i}) = p_{\mathbf{i}_\lambda}(d^{-1}).$$

Die erste Aussage in (a) folgt daher aus (2.8) in der gleichen Weise, wie die enstprechende Aussage für $p_\lambda(d^{-1})$ in 2.3.2 daraus abgeleitet wurde. Die zweite Aussage in (a) erhält man wegen $t(\mathbf{i}s_l) = t_{i_{l+1}}^{-l} t_{i_l}^{-l-1} \prod_{h \neq l,l+1} t_{i_h}^{-h}$.

Zum Beweis der ersten Formel in (b) sei $\mathbf{f} := \mathbf{k} + (k,k') + \mathbf{j}$ sowie $A := \underline{r+s+2} = \{1, \ldots, r+s+2\}$ und $B := \{r+1, r+2\}$. Wir zerlegen die Menge

$$\{(j,h) \in A \times A |\ j<h,\ f_h \prec f_j\} =$$

$$\{(j,h) \in (A\backslash B) \times (A\backslash B) |\ j<h,\ f_h \prec f_j\} \cup M_{r+1} \cup M_{r+2} \cup N_{r+1} \cup N_{r+2},$$

worin $M_j := \{j\} \times \{h |\ j<h,\ f_h \prec f_j\}$ und $N_h = \{j |\ j<h,\ f_h \prec f_j\} \times \{h\}$ zu setzen ist. Die Zerlegung ist im Fall $f_{r+1} = k \prec k' = f_{r+1}$ disjunkt. Für $k' \prec k$, also

$k \leq m$, gilt allerdings $M_{r+1} \cap N_{r+2} = \{(r+1, r+2)\}$. Wegen $p_{k'k} = 1$ ist dies jedoch ohne Belang. Also genügt es zu zeigen, daß $\prod_{M_{r+1} \cup M_{r+2}} p_{f_h f_j}$ und $\prod_{N_{r+1} \cup N_{r+2}} p_{f_h f_j}$ jeweils 1 sind. Wir beschränken uns nun auf den Fall $k \leq m$. Für $k > m$ und gerades n argumentiert man analog. Den Fall $k = m+1$ für ungerades n erledigt man sofort mit Hilfe der Relation $p_{i(m+1)} = p_{(m+1)i} = 1$ für alle $i \in \underline{n}$. Man berechnet

$$\prod_{M_{r+1} \cup M_{r+2}} p_{f_h f_j} = \prod_{r+2<h,\ f_h \prec k'} p_{f_h k} p_{f_h k'} \prod_{r+1<h,\ f_h = k'} p_{k'k}.$$

Aufgrund der Relationen für ein Z-Parametertupel ist dies aber 1. Entsprechend sieht man dies in Bezug auf das Produkt über $N_{r+1} \cup N_{r+2}$ ein.

Die zweite Formel in (b) erhält man aus

$$t(\mathbf{i} + (k, k') + \mathbf{j}) = t(\mathbf{i} + (l, l') + \mathbf{j}) t_k^{-r-1} t_{k'}^{-r-2} t_l^{r+1} t_{l'}^{r+2}$$

mit Hilfe der Relation $t_k t_{k'} = t_0 = t_l t_{l'}$. □

Lemma 2.5.7 *Sei $d_r \in \mathcal{E}_r$ durch $d_r(v_\mathbf{i}) = p(\mathbf{i}) t(\mathbf{i}) v_\mathbf{i}$ gegeben. Weiter seien $\hat{\rho}_r^{\mathrm{s}}$ und $\hat{\rho}_r^{\mathrm{o}}$ die ρ_r^{s} und ρ_r^{o} entsprechenden Darstellungen gemäß Satz 2.2.2, jedoch bezüglich des trivialen Z-Parametertupels* **1**. *Dann gilt für alle $1 \leq l < r$*

$$\rho_r^{\mathrm{s}}(g_l) \circ d_r = d_r \circ \hat{\rho}_r^{\mathrm{s}}(g_l), \quad \rho_r^{\mathrm{o}}(g_l) \circ d_r = d_r \circ \hat{\rho}_r^{\mathrm{o}}(g_l),$$

$$\rho_r^{\mathrm{s}}(e_l) \circ d_r = d_r \circ \hat{\rho}_r^{\mathrm{s}}(e_l), \quad \rho_r^{\mathrm{o}}(e_l) \circ d_r = d_r \circ \hat{\rho}_r^{\mathrm{o}}(e_l).$$

Beweis: Wir führen die Rechnung beispielhaft im ersten Fall vor: Sei zunächst $i_{l+1} \neq i_l'$ und $i_{l+1} < i_l$. Unter Verwendung des (a)-Teils des Lemmas berechnet man

$$\rho_r^{\mathrm{s}}(g_l)(d_r(v_\mathbf{i})) = q^{-1} p(\mathbf{i}) t(\mathbf{i}) p_{i_{l+1} i_l} t_{i_{l+1}} t_{i_l}^{-1} v_{\mathbf{i} s_l} - (y-1) p(\mathbf{i}) t(\mathbf{i}) v_\mathbf{i} =$$

$$q^{-1} p(\mathbf{i} s_l) t(\mathbf{i} s_l) v_{\mathbf{i} s_l} - (y-1) p(\mathbf{i}) t(\mathbf{i}) v_\mathbf{i} = d_r(\hat{\rho}_r^{\mathrm{s}}(g_l)(v_\mathbf{i})).$$

Die gleiche Rechnung führt im Fall $i_{l+1} > i_l$ zum Ziel, wobei hier der Term mit $(y-1)$ wegfällt. Für den Fall $i_l = i_{l+1}'$ verwendet man (b). Wir schreiben dies für $i_l < i_{l+1}$ auf. Dazu zerlegen wir $\mathbf{i} = \mathbf{h} + (i_l, i_l') + \mathbf{j}$ und berechnen

$$p(\mathbf{i}) t(\mathbf{i}) p_{i_{l+1} i_l} t_{i_{l+1}} t_{i_l}^{-1} v_{\mathbf{i} s_l} \ - (y-1) \sum_{k > i_{l+1}} q^{\rho_k - \rho_{i_{l+1}}} \epsilon_k \epsilon_{i_{l+1}} p(\mathbf{i}) t(\mathbf{i}) t_{i_{l+1}} t_{k'}^{-1} v_{\mathbf{h} + (k,k') + \mathbf{j}} =$$

$$p(\mathbf{i} s_l) t(\mathbf{i} s_l) v_{\mathbf{i} s_l} \ - (y-1) \sum_{k > i_{l+1}} q^{\rho_k - \rho_{i_{l+1}}} \epsilon_k \epsilon_{i_{l+1}} p(\mathbf{h} + (k, k') + \mathbf{j}) t(\mathbf{h} + (k, k') + \mathbf{j}) v_{\mathbf{h} + (k,k') + \mathbf{j}}.$$

Die linke Seite darin ist aber gerade $\rho_r^{\mathrm{s}}(g_l)(d_r(v_\mathbf{i}))$ und die rechte $d_r(\hat{\rho}_r^{\mathrm{s}}(g_l)(v_\mathbf{i})$. Dabei beachte man $p_{i_{l+1} i_l} = 1$. □

Satz 2.5.8 *Sei Z ein beliebiges Z-Parametertupel. Dann gibt es zu jeden $r \in \mathbb{N}_0$ Isomorphismen von R-Koalgebren*

$$A^{\mathrm{s}}_{R,q,Z}(n,r) \cong A^{\mathrm{s}}_{R,q,\mathbf{1}}(n,r) \quad \textit{und} \quad A^{\mathrm{o}}_{R,q,Z}(n,r) \cong A^{\mathrm{o}}_{R,q,\mathbf{1}}(n,r)$$

auf den Erzeugern $\{x_{\mathbf{ij}} |\, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,r)\}$ bezüglich Z jeweils durch

$$x_{\mathbf{ij}} \mapsto d(\mathbf{i})^{-1} \hat{x_{\mathbf{ij}}} d(\mathbf{j})$$

gegeben. Darin sind die $\hat{x_{\mathbf{ij}}}$ die Erzeuger bezüglich dem trivialen Z-Parametertupel und $d(\mathbf{i})$ ist durch $p(\mathbf{i})t(\mathbf{i}) \in R$ definiert.

Beweis: Zur Ersparnis von Schreibarbeit betrachten wir wiederum nur den ersten Fall. Der oben definierte Endomorphismus $d_r \in \mathcal{E}_r$ ist offenbar invertierbar, da die Zahlen $p(\mathbf{i})$ und $t(\mathbf{i})$ invertierbar sind. Gemäß dem obenstehenden Lemma gilt

$$\hat{\rho^{\mathrm{s}}_r}(\mathcal{C}_{R,r}) = d_r \rho^{\mathrm{s}}_r(\mathcal{C}_{R,r}) d_r^{-1}.$$

Nach Definition ist $A^{\mathrm{s}}_{R,q,Z}(n,r)$ die Zentralisator Koalgebra zur Unteralgebra $\mathcal{A}^{\mathrm{s}}_r = \rho^{\mathrm{s}}_r(\mathcal{C}_{R,r})$ von $\mathcal{E}_r$ und $A^{\mathrm{s}}_{R,q,\mathbf{1}}(n,r)$ diejenige zu $\hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{s}}_r = \hat{\rho^{\mathrm{s}}_r}(\mathcal{C}_{R,r})$. Die Konjugation mit d_r induziert einen R-Modul Automorphismus von $\mathcal{E}_r$, der mit $\tilde{d_r}$ bezeichnet sei. Es ist dann leicht zu sehen, daß $\bar{d_r} := \vartheta_{tr} \circ \tilde{d_r} \circ \vartheta_{tr}^{-1} : {\mathcal{E}_r}^* \to {\mathcal{E}_r}^*$ das Kommutator Koideal $K(\mathcal{A}^{\mathrm{s}}_r)$ in das Koideal $K(\hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{s}}_r)$ überführt. Also induziert $\bar{d_r}$ einen R-Modulisomorphismus von $A^{\mathrm{s}}_{R,q,Z}(n,r)$ nach $A^{\mathrm{s}}_{R,q,\mathbf{1}}(n,r)$. Daß es sich um einen Morphismus von Koalgebren handelt, ist eine Standardverifikation, die man für einen beliebigen inneren Algebrenautomorphismus $\tilde{d_r}$ von $\mathcal{E}_r$ durchführt. Die explizite Abbildungsformel rechnet man direkt nach. □

Bemerkung 2.5.9 *Bezüglich der Notation (1.2) erhält man die nützliche Abbildungsformeln*

$$\alpha x_{\mathbf{ij}} \mapsto d(\mathbf{i})^{-1} \hat{\alpha} \hat{x_{\mathbf{ij}}} d(\mathbf{j}), \quad \textit{und} \quad x_{\mathbf{ij}} \alpha \mapsto d(\mathbf{i})^{-1} \hat{x_{\mathbf{ij}}} \hat{\alpha} d(\mathbf{j}),$$

worin $\hat{\alpha} \in \mathcal{E}_r$ zu $\alpha \in \mathcal{E}_r$ durch $d_r \alpha d_r^{-1}$ definiert ist.

Korollar 2.5.10 *Sei $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(Q, X_{ij}, X_k)$ der Körper der rationale Funktionen in den Unbestimmten Q, X_{ij} und X_k für $1 \leq i < j \leq m, 1 \leq k \leq m+1$ über $\mathbb{Q}$, also der Quotientenkörper von $\mathcal{Z}$. Das Z-Parametertupel Z sei wie üblich durch die Unbestimmten X_{ij} und X_k gegeben. Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{K}}(A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{K},Q,Z}(n,r)) = \dim_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{C}}(n,r)) \quad \textit{und} \quad \dim_{\mathbb{K}}(A^{\mathrm{o}}_{\mathbb{K},Q,Z}(n,r)) = \dim_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{o}}_{\mathbb{C}}(n,r)).$$

Beweis: Faßt man den Körper $K = \mathbb{Q}(Q)$ aus Satz 2.5.5 als Unterkörper von $\mathbb{K}$ auf, so liefert Satz 2.5.2 die Gleichung $\dim_{\mathbb{K}}(A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{K},Q,\mathbf{1}}(n,r)) = \dim_K(A^{\mathrm{s}}_{K,Q,\mathbf{1}}(n,r))$ bzw. eine entsprechende Gleichung im orthogonalen Fall. Also folgt die Behauptung aus den beiden Sätze 2.5.5 und 2.5.8. □

Bemerkung 2.5.11 *Aufgrund von Satz 2.5.3 kann man die Bialgebren* $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ *und* $A^{\mathrm{o}}_{R,q}(n)$ *als Koordinatenringe eines quantensymplektischen bzw. quantenorthogonalen Monoideschemas* $\mathrm{SpM}_{n,q}(R)$ *bzw.* $\mathrm{OM}_{n,q}(R)$ *ansehen, da sie bei klassischer Parameterwahl zu den Koordinatenringen der in 2.1 definierten Monoidschemata* $\mathrm{SpM}_n(R)$ *und* $\mathrm{OM}_n(R)$ *spezialisieren. Eine Rechtfertigung dafür gemäß Bemerkung 2.5.4 besteht durch obenstehendes Korollar.*

2.6 Die klassischen Monoide in Charkteristik Null

Wie angekündigt zeigen wir nun

Satz 2.6.1 *Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik Null hat man folgende Isomorphismen von graduierten Matrix-Bialgebren:*

$$K\left[\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}\right] \cong A^{\mathrm{s}}_{K,1}(n) \cong A^{\mathrm{s}}_K(n)$$

sowie

$$K\left[\overline{\mathrm{GO}_n(K)}\right] \cong A^{\mathrm{o}}_{K,1}(n) \cong A^{\mathrm{o}}_K(n)$$

Beweis: Wir behandel der Einfachheit halber nur den symplektischen Fall. Der orthogonale geht analog. Der rechte Isomorphismus besteht nach Satz 2.5.3. Zum Beweis des linken bemerken wir zunächst, daß ein Epimorphismus θ von graduierten Bialgebren von rechts nach links existiert. Denn zum einen gibt es einen solchen von $A^{\mathrm{s}}_K(n) = A_K(n)/I^{\mathrm{s}}_K$ nach $K[\mathrm{SpM}_n(K)]$, da $\mathrm{SpM}_n(K)$ nach Satz 2.1.1 die Nullstellenmenge von I^{s}_K ist, also eine Inklusion von homogenen Biidealen $I^{\mathrm{s}}_K \subseteq I(\mathrm{SpM}_n(K))$ (Bezeichnungen aus 2.1) vorliegt. Zum anderen hat man einen Epimorphismus von $K[\mathrm{SpM}_n(K)]$ nach $K\left[\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}\right]$, der von der Inklusion des abgeschlossenen Untermonoides $\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}$ in $\mathrm{SpM}_n(K)$ induziert wird. Wir haben $\ker(\theta) = 0$ zu zeigen.

Sei $f \in \ker(\theta)$. Da $\ker(\theta)$ ein homogenes Biideal sein muß, können wir f als homogen etwa vom Grad r annehmen. Sei dann $\bar{f}$ ein Urbild von f in $\mathcal{E}_r{}^*$ unter der natürlichen Projektion auf $M(\mathcal{A}^{\mathrm{s}}_r)$. Nun kommt die Charakteristik Null ins Spiel. Wie im Beweis von 2.5.5 benötigt man nämlich den Satz von Brauer aus Bemerkung 2.2.4, daß $\mathcal{A}^{\mathrm{s}}_r = \mathrm{im}(\rho^{\mathrm{s}}_r)$ im Fall des B-Parameters $P^{\mathrm{s}}_n(1)$ genau der Zentralisator der Operation von $\mathrm{Sp}_n(K)$ auf $V^{\otimes r}$ ist, sowie die vollständige Reduzibilität von $V^{\otimes r}$ als $\mathrm{Sp}_n(K)$-Modul. Es folgt dann wie dort, daß $C(\mathcal{A}^{\mathrm{s}}_r) = \mathrm{End}_{\mathcal{B}_{K,-n,r}}(V^{\otimes r})$ das Bild der Gruppenalgebra von $\mathrm{Sp}_n(K)$ über K unter der Operation von $\mathrm{Sp}_n(K)$ auf $V^{\otimes r}$ ist. Wegen $\mathrm{Sp}_n(K) \subset \overline{\mathrm{GSp}_n(K)}$ gilt $\theta(f)(g) = 0$ für alle $g \in \mathrm{Sp}_n(K)$ und somit $\bar{f} \in C(\mathcal{A}^{\mathrm{s}}_r)^{\perp}$. Da $M(\mathcal{A}^{\mathrm{s}}_r)$ über dem Körper K trivialerweise torsionsfrei liefert Satz 1.5.6 $\bar{f} \in K(\mathcal{A}^{\mathrm{s}}_r)$ also $f = 0$. □

Bemerkung 2.6.2 *Der Satz besagt, daß die Verschwindungsideale der beiden algebraischen Monoide* $\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}$ *und* $\overline{\mathrm{GO}_n(K)}$ *mit* I^{s}_K *bzw.* I^{o}_K *für Körper der Charakteristik Null übereinstimmen. Dies wurde auch in [Dt], Theorem 9.5 (a) auf ganz* *ähnliche Weise gezeigt. Da nach Satz 2.1.1 die Nullstellenmengen dieser Ideale aber gerade* $\mathrm{SpM}_n(K)$ *bzw.* $\mathrm{OM}_n(K)$ *sind, erhält man den folgenden Spezialfall eines weiteren Resultates von Doty ([Dt], Corollary 5.5 (f)):*

Korollar 2.6.3 *Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null gilt* $\overline{\mathrm{GSp}_n(K)} = \mathrm{SpM}_n(K)$ *und* $\overline{\mathrm{GO}_n(K)} = \mathrm{OM}_n(K)$.

Im symplektischen Fall werden wir die beiden Resultate unabhängig von der Charakteristik des Körpers in 3.14 (Korollare 3.14.5 und 3.14.7) zeigen.

Kapitel 3

Der Koordinatenring des quantensymplektischen Monoids

Wir konzentrieren nun die Aufmerksamkeit auf die durch die Operatoren

$$\beta := \beta_q^{\mathrm{s}} = \sum_{1\le i\le n} (q^2 e_i^i \otimes e_i^i + t_i t_{i'}^{-1} e_i^{i'} \otimes e_{i'}^i) + q \sum_{1\le i\ne j,j'\le n} p_{ij} t_i t_j^{-1} e_i^j \otimes e_j^i +$$

$$+(q^2-1) \sum_{1\le j<i\le n} (e_i^i \otimes e_j^j - q^{\rho_i-\rho_j} \epsilon_i \epsilon_j t_j t_{i'}^{-1} e_i^{j'} \otimes e_{i'}^j),$$

und

$$\gamma := \gamma_q^{\mathrm{s}} = \sum_{1\le i,j\le n} q^{\rho_i-\rho_j} \epsilon_i \epsilon_j t_j t_{i'}^{-1} e_i^{j'} \otimes e_{i'}^j,$$

gemäß Satz 2.2.3 gegebene Darstellung ρ_r^{s} der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra auf den r-fachen Tensorräumen und die hierdurch in Abschnitt 2.5 konstruierte graduierte Matrix Bialgebra

$$A_{R,q}^{\mathrm{s}}(n) = \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathrm{s}}).$$

über dem Integritätsbereich R zu einer Einheit $q \in R$ und einem Z-Parametertupel $Z = (p_{ij}, t_k |\ 1 \le i,j \le n, 0 \le k \le n)$. Wir lassen der Übersichtlichkeit wegen den Grundring R und q aus der Bezeichneung weg, wenn klar ist, daß es sich um die allgemeine Situation handelt. Das Ziel ist, eine freie Basis dieser Bialgebra als Modul über R zu finden. Im Sinn von Bemerkung 2.5.11 wollen wir diese Bialgebra als Koordinatenring eines quantensymplektischen Monoidschemas $\mathrm{SpM}_{n,q}(R)$ ansehen.

Wir geben zunächst die kombinatorischen Grundlagen für die Indizierung der Basiselemente in den beiden ersten Paragraphen. Darauf erfolgt die Definition der quantensymplektischen Bideterminanten aus denen die Basis $\mathbf{B}_r$ neben der q-analogen Version g der Quantendilatationskoeffizientenfunktion d^{s} gebildet wird. Leider werden wir mit einer etwas abstrakten Definition vorlieb nehmen müssen, da explizite Formeln für quantensymplektische Determinanten und Bideterminanten anders als im klassischen Fall bzw. im Quanten $\mathrm{GL}_n(K)$-Fall schon für Grade ab $r = 3$ nichtmehr handhabbar sind.

Analoga zu bekannten Rechenregeln für Determinanten und Bideterminanten werdenin 3.6 hergeleitet.

Im Paragraph 3.4 wird die Aufgabe, ein R-Modul Erzeugendensystem von $A^{\mathrm{s}}(n)$ zu finden darauf reduziert, daß ein solches für die Halbbialgebra $A^{\mathrm{sh}}(n) = A^{\mathrm{s}}(n)/ < g >$ gefunden wird. Diese läßt sich als Koordinatenring der quantisierten Halbgruppe $\mathrm{SpM}_n(K)\backslash\mathrm{GSp}_n(K)$ auffassen. Im darauffolgenden Paragraphen untersuchen wir das quantensymplektische Analogon zur Matrixtransposition. Dies führt auf einen semilinearen Algebrenauto- und Koalgebrenantiautomorphismus ϑ der graduierten Bialgebra $A^{\mathrm{s}}(n)$. Dieser spielt eine wichtige Rolle via Korollar 3.13.4 bei dem Sachverhalt, daß es sich bei $\mathbf{B}_r$ um ein Erzeugendensystem von $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ handelt. Die weitere Vorgehensweise in diesem Kapitel wurde bereits in der Einleitung besprochen.

3.1 Gewichte

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $T_1 := T(\mathrm{GL}_n(K))$ die Menge der Diagonalmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ bzw. $T_2 := T(\mathrm{GSp}_n(K)) = T_1 \cap \mathrm{GSp}_n(K)$ die Menge der Diagonalmatrizen in $\mathrm{GSp}_n(K)$. Es handelt sich jeweils um maximale Tori in den beiden reduktiven algebraischen Gruppen. Die Gewichte von $\mathrm{GL}_n(K)$ bzw. $\mathrm{GSp}_n(K)$ sind die rationalen Charaktere von T_1 bzw. T_2. Dies sind gerade die gruppenähnlichen Elemente der Koordinatenringe

$$K\,[T_1] = K[x_{11}, x_{11}^{-1}, x_{22}, x_{22}^{-1}, \ldots, x_{nn}, x_{nn}^{-1}],$$

bzw.

$$K\,[T_2] = K\,[T_1]\,/\,\langle x_{ii}x_{i'i'} - x_{jj}x_{j'j'} | 1 \leq i < j \leq m\rangle$$

von T_1 und T_2. Wie üblich bezeichnen wir ihre Gesamtheit mit $X(T_1)$ bzw. $X(T_2)$. Als abelsche Gruppe ist $X(T_1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ mittels der durch

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mapsto x_{11}^{\lambda_1} x_{22}^{\lambda_2} \ldots x_{nn}^{\lambda_n}$$

gegebenen Abbildung. Wir werden im Folgenden der Einfachheit halber $X(T_1)$ mit $\mathbb{Z}^n$ identifizieren. Die Inklusion von T_2 in T_1 induziert einen Epimorphismus von abelschen Gruppen $\chi : X(T_1) \to X(T_2)$, der durch die Einschränkung der Charaktere von T_1 auf T_2 gegeben ist. Sind $z_1 := (1, 0, \ldots, 0), \ldots, z_n := (0, \ldots, 0, 1)$ die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{Z}^n$, so ist der Kern von χ offenbar, der von den Elementen $z_i + z_{i'} - z_j - z_{j'}$ für $1 \leq i < j \leq m$ erzeugte freie $\mathbb{Z}$-Untermodul P von $\mathbb{Z}^n$, also $X(T_2) = \mathbb{Z}^n/P$ bezüglich oben beschriebener Identifikation. Sei $z_g := z_i + z_{i'} + P$ das unabhängig von i definierte Element in $X(T_2) = \mathbb{Z}^n/P$. Dies ist gerade die Einschränkung der Dilatationskoeffizientenfunktion $g := d^{\mathrm{s}} : \mathrm{SpM}_n(K) \to K$ aus der Definition von $\mathrm{SpM}_n(K)$ in 2.1 auf T_2. Man sieht dann leicht, daß $\mathbb{Z}^n/P$ die freie Basis $z_1 + P, \ldots, z_m + P, z_g$ besitzt.

Die Menge der *dominanten Gewichte* in $X(T_1)$ erhält man bekanntlch durch Linearkombinationen $\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n$ mit ganzen Zahlen λ_i, die $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n \geq 0$ erfüllen. Im Fall $X(T_2)$ ergeben sich die dominanten Gewichte als Linearkombinationen $\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_m z_m + l z_g + P$, wobei $l \in \mathbb{Z}$ beliebig und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_m \geq 0$ erfüllt ist ([Do2], S.75). Wie üblich nennen wir die Elemente $\omega_r := \sum_{i=1}^r z_i$ für $r \in \underline{n}$ bzw. $\omega_r + P$ für $r \in \underline{m}$ jeweils *Fundamentalgewichte*. Jedes dominante Gewicht in $X(T_1)$ läßt sich dann schreiben als Linearkombination $b_1\omega_1 + \ldots + b_n\omega_n$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen b_i. Eine entsprechende Darstellung für dominante Gewichte in $X(T_2)$ erhält man durch $b_1\omega_1 + \ldots b_m\omega_m + l z_g + P$.

In Bezug auf die Monoide $\mathrm{M}_n(K)$ und $\mathrm{SpM}_n(K)$ spielen lediglich die Gewichte mit nichtnegativen Vorzahlen von z_i eine Rolle, d.h. $\mathbb{N}_0^n$ im Fall von $\mathrm{M}_n(K)$ und $\chi(\mathbb{N}_0^n)$ im Fall $\mathrm{SpM}_n(K)$. Ein solches Gewicht ist durch $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \geq 0$ bzw. $\lambda + P$ gegeben. Wir nennen diese Gewichte *polynomial* und die Zahl $r := \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \in \mathbb{N}_0$ den Grad von λ. Es ist klar, daß λ und μ im Fall $\chi(\lambda) = \chi(\mu)$ den gleichen Grad haben, so daß dieser auch für $X(T_2)$ wohldefiniert ist. Die polynomialen Gewichte in $X(T_1)$ vom Grad r sind gerade die Kompositionen von r in n-Teile

$$\Lambda(n,r) := \{\lambda \in \mathbb{N}_0^n \,|\, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = r\}$$

während die dominanten Gewichte unter diesen die Partitionen von r in höchstens n Teile sind:

$$\Lambda^+(n,r) := \{(\lambda \in \mathbb{N}_0^n \,|\, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = r,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n\},$$

Bezüglich $X(T_2)$ setzten wir

$$\Lambda^{\mathrm{s}}(n,r) := \chi(\Lambda(n,r)) \quad \text{und} \quad \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r) := \chi(\Lambda^+(n,r))$$

und sprechen von polynomialen bzw. dominanten polynomialen Gewichten in $X(T_2)$. Man beachte

$$\Lambda^+(n,r) = \{b_1\omega_1 + \ldots + b_n\omega_n |\ \ b_i \in \mathbb{N}_0,\ b_1 + 2b_2 + \ldots + nb_n = r\},$$

$$\Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r) = \{b_1\omega_1 + \ldots + b_m\omega_m + l z_g + P |\ \ b_i \in \mathbb{N}_0,\ l \in \mathbb{N}_0,\ b_1 + 2b_2 + \ldots + m b_m + 2l = r\}.$$

sowie den dadurch gegebenen Zusammenhang

$$\Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r) = \{\lambda + l z_g + P |\ 0 \leq l \leq \frac{r}{2},\ \lambda \in \Lambda^+(m, r-2l)\}. \tag{3.1}$$

Diese Menge spielt bei der Indizierung der Basis von $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ eine wesentliche Rolle. Weiterhin benötigt man dazu sogenannte Tableaus die wir in 3.2 betrachten werden. Zuvor sei jedoch an die Gewichtsraumzerlegung (2.6) bezüglich des Matrixmonoids $\mathrm{M}_n(K)$,

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(n,r)} (V^{\otimes r})^\lambda \text{ mit } (V^{\otimes r})^\lambda := \langle \{v_{\mathbf{i}} |\ \mathbf{i} \in I(n,r),\ |\mathbf{i}| = \lambda\} \rangle\,.$$

erinnert. Wir wollen die entsprechende Zerlegung bezüglich $\mathrm{SpM}_n(K)$ angeben. Dazu definieren wir zu $\lambda + P \in skompnr$

$$(V^{\otimes r})^{\lambda+P} := \bigoplus_{\mu \in \Lambda(n,r)\cap(\lambda+P)} (V^{\otimes r})^{\mu},$$

so daß man durch

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{\lambda+P \in \Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)} (V^{\otimes r})^{\lambda+P}$$

zunächst die gewünschte Zerlegung als R-Moduln erhält. Wir behaupten, daß dies auch eine Zerlegung bezüglich der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $\mathcal{C}_{R,r}$ ist.

Satz 3.1.1 *Zu jedem $\lambda + P \in \Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)$ ist $(V^{\otimes r})^{\lambda+P}$ ein $\mathcal{C}_{R,r}$ Untermodul von $V^{\otimes r}$.*

Beweis: Sei $\mathbf{i} \in I(n,r)$ mit $|\mathbf{i}| \in \lambda + P$. Ist $l < r$, so haben wir die Wirkung von $\beta_l = \mathrm{id}_{V^{\otimes l-1}} \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-l-1}}$ und $\gamma_l = \mathrm{id}_{V^{\otimes l-1}} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-l-1}}$ auf $v_{\mathbf{i}}$ zu betrachten. Ein Blick auf die Formeln für β und γ zeigt, daß im Fall $i_l \neq i'_{l+1}$ alle Summanden von $\beta_l(v_{\mathbf{i}})$ sogar in $(V^{\otimes r})^{\lambda}$ liegen und daß $\gamma(v_{\mathbf{i}}) = 0$ gilt. Im Fall $i_l = i'_{l+1}$ hingegen treten auch Summanden auf, deren Multi-Indizes $\mathbf{j}$ einen anderen Inhalt $|\mathbf{j}| = \mu$ besitzen, dessen Differenz zu λ jedoch stets von der Form $\lambda - \mu = (z_{i_l} + z_{i'_l} - z_j - z_{j'})$, und zwar für $j > i'_l$ bezüglich β_l und $j = 1, \ldots, n$ bezüglich γ_l ist. □

Wir definieren den Rang von $\lambda + P \in \Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)$ als

$$\mathrm{rg}(\lambda + P) := \sum_{i=1}^{m} \min(\lambda_i, \lambda_{i'}).$$

Man sieht leicht, daß dies unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $\lambda \in \Lambda(n,r)$ von $\lambda + P$ ist. Für einen Multi-Index $\mathbf{i} \in I(n,r)$ ist der Rang seines Inhaltes $|\mathbf{i}|$ gerade die Zahl der in $(i_1, \ldots, i_r)$ auftretenden Paare (i, i'). Der Rang ist gerade die Vorzahl von z_g in der (eindeutigen) Darstellung

$$\lambda + P = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + \mathrm{rg}(\lambda + P) z_g + P \tag{3.2}$$

mit $a_i a_{i'} = 0$ für $i \in \underline{m}$ und $a_i \geq 0$ für $i \in \underline{n}$. Genauer gilt $a_i = \lambda_i - \min(\lambda_i, \lambda_{i'})$. Man beachte, daß in einer Darstellung von $\lambda + P \in \Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)$ bezüglich der Basis $z_1 + P, \ldots, z_m + P, z_g$ von $X(T_2)$ auch negative Koeffizienten auftreten können , obwohl $\lambda + P$ polynomial ist. Der Rang eines dominanten polynomialen Gewichtes $\lambda = \mu + l z_g + P$ in eindeutiger Darstellung gemäß (3.1) mit $\mu \in \Lambda^{+}(m, r - 2l)$ ist offenbar gerade l.

Die Restklassen $\lambda + P$ schneiden $\Lambda(n,r)$ in unterschiedlicher Größe, die vom Rang abhängt. genauer gilt zu $\lambda \in \Lambda(n,r)$

$$|(\lambda + P) \cap \Lambda(n,r)| = |\Lambda(m, \mathrm{rg}(\lambda + P))| \tag{3.3}$$

Eine Bijektion zwischen den beiden Mengen ist zu $\mu \in (\lambda + P) \cap \Lambda(n, r)$ durch

$$\mu \mapsto (\min(\mu_1, \mu_{1'}), \min(\mu_2, \mu_{2'}), \ldots, \min(\mu_m, \mu_{m'}))$$

gegeben. Die Injekivität folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung (3.2) mittels $\mu_i = a_i + \min(\mu_i, \mu_{i'})$ und die Surjektivität aus der Wahl eines Urbildes zu $\alpha = (\alpha_i, \ldots \alpha_m) \in \Lambda(m, \mathrm{rg}(\lambda + P))$ durch

$$\mu := \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + a_i) z_i + (\alpha_i + a_i') z_{i'} \quad \in \Lambda(n, r).$$

3.2 Tableaus

Sei $\lambda \in \Lambda^+(p, r)$ eine Partition von r in p Teile. Wie in 3.1 schreiben wir $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ als p-Tuppel von nichtnegativen ganzen Zahlen λ_i mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = r$. Um schreibtechnische Umstände zu vermeiden, betrachten wir auch den Fall $r = 0$ mit der einzigen Partition $(0, \ldots, 0) \in \Lambda^+(p, 0) = \Lambda(p, 0)$. Als Menge aller Partitionen von r betrachten wir $\Lambda^+(r) := \Lambda^+(r, r)$ und identifizieren Elemente von $\Lambda^+(p, r)$ für $p \neq r$ durch Auffüllen (im Fall $p < r$) bzw. weglassen (im Fall $p > r$) von entsprechend vielen Komponenten $\lambda_i = 0$. Als *Diagramm* einer Partition λ bezeichnet man üblicherweise (etwa in [Gr1] bzw. [Ma]) die folgende Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$[\lambda] := \{(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\, 1 \leq s \leq n,\ 1 \leq t \leq \lambda_s\}.$$

Das Diagramm der Partition der Null ist somit die leere Menge. Ein λ-Tableau ist eine Abbildung T von $[\lambda]$ in eine beliebige Menge die man graphisch durch

$$T = \begin{array}{ccccc} T(1,1) & T(1,2) & \ldots & \ldots & T(1,\lambda_1) \\ T(2,1) & T(2,2) & \ldots & T(2,\lambda_2) & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ T(n,1) & \ldots & T(n,\lambda_n) & & \end{array}$$

veranschaulichen kann. Als λ-Grundtableau bezeichnen wir die bijektive Abbildung

$$T^\lambda = \begin{array}{ccccc} 1 & \lambda_1' + 1 & \ldots & \ldots & \lambda_1' + \ldots + \lambda_{p-1}' + 1 \\ 2 & \lambda_1' + 2 & \ldots & \lambda_1' + \ldots + \lambda_{\lambda_2 - 1}' + 2 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ \lambda_1' & \ldots & \lambda_1' + \ldots + \lambda_{\lambda_n - 1}' + n & & \end{array}$$

auf die Menge $\underline{r} = \{1, \ldots, r\}$. Darin ist $\lambda' = (\lambda_1', \ldots, \lambda_p') \in \Lambda^+(p, r)$ mit $p = \lambda_1$ die zu λ duale Partition, die bekanntlich durch

$$\lambda_i' := |\{j |\, \lambda_j \geq i\}|$$

definiert ist, und gerade die Längen der Spalten des Diagramms von λ als Einträge besitzt. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_r$ operiert auf der Menge der bijektiven

λ-Tableaus durch Dahinterschaltung. Die Stabilisatoren der Zeilen und Spalten von T^λ werden respektive mit $Z(T^\lambda)$ und $S(T^\lambda)$ bezeichnet. Bezüglich des obigen λ-Grundtableaus ergibt sich der Spaltenstabilisator $S(T^\lambda)$ gerade als die bereits in 2.3 betrachtete Standard Young Untergruppe $\mathcal{S}_{\lambda'}$ zur dualen Partition λ'.

Mit Hilfe von T^λ kann man jedem Multi-Index $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I(n,r)$ in eindeutiger Weise ein λ-Tableau $T_{\mathbf{i}}^\lambda$ in die Menge $\underline{n}$ durch

$$T_{\mathbf{i}}^\lambda := \mathbf{i} \circ T^\lambda = \begin{array}{ccccc} i_1 & i_{\lambda'_1+1} & \ldots & \ldots & i_{\lambda'_1+\ldots+\lambda'_{p-1}+1} \\ i_2 & i_{\lambda'_1+2} & \ldots & i_{\lambda'_1+\ldots+\lambda'_{\lambda_2-1}+2} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ i_{\lambda'_1} & \ldots & i_{\lambda'_1+\ldots+\lambda'_{\lambda_n-1}+n} & & \end{array}$$

zuordnen. Ist umgekehrt ein λ-Tableau T in $\underline{n}$ gegeben, so erhält man durch

$$\mathbf{i}(T) := T \circ (T^\lambda)^{-1} \in I(n,r)$$

einen Multi-Index. Somit steht die Menge der λ-Tableaus in $\underline{n}$ in Bijektion zu $I(n,r)$. Bezüglich einer Komposition $\lambda \in \Lambda(p,r)$ zerlegen wir Multi-Indizes $\mathbf{i} \in I(n,r)$ gelegentlich in eine Summe

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_\lambda^1 + \mathbf{i}_\lambda^2 + \ldots + \mathbf{i}_\lambda^p,$$

wobei die Summation von Multi-Indizes wie in 1.2 durch Aneinanderfügung erklärt ist und der s-te Summand durch

$$\mathbf{i}_\lambda^s := (i_{k_s+1}, i_{k_s+2}, \ldots, i_{k_s+\lambda_s}) \quad \text{mit} \quad k_s := \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j$$

definiert ist. Ist dann $\lambda \in \Lambda^+(r)$ eine Partition, so erhält man bezüglich der dualen Partition λ' durch

$$\mathbf{i}_{\lambda'}^s = (T(1,s), T(2,s), \ldots, T(\lambda'_s, s))$$

gerade die s-te Spalte des λ-Tableaus $T = T_{\mathbf{i}}^\lambda$. Ein λ-Tableau T in $\underline{n}$ heißt *zeilen-semistandard* bezüglich einer fest gewählten Ordnung $\trianglelefteq$ auf $\underline{n}$, wenn die Zeilen von links nach rechst aufsteigend sind und *spaltenstandard*, wenn die Spalten von oben nach unten streng aufsteigend sind. Es heiß *standard*, wenn beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind. Mit Hilfe von λ-Tableaus können wir nun die folgenden, von der Ordnung $\trianglelefteq$ abhängigen Teilmengen der Menge $I(n,r)$ von Multi-Indizes beschreiben, die im Zusammenhang mit der Basis von $A^{\mathrm{s}}(n)$ eine Rolle spielen:

$$I_\lambda^{\trianglelefteq'} := \{\mathbf{i} \in I(n,r) | T_{\mathbf{i}}^\lambda \text{ ist spaltenstandard }\},$$

$$I_\lambda^{\trianglelefteq} := \{\mathbf{i} \in I(n,r) | T_{\mathbf{i}}^\lambda \text{ ist standard }\},$$

Wir werden hauptsächlich mit $I_\lambda^{<'}$, $I_\lambda^{<}$, $I_\lambda^{\prec}$ und $I_\lambda^{\ll}$ zu tun haben. Darin ist $<$ die gewöhnliche Ordnung auf $\underline{n}$, $\prec$ die durch

$$m' \prec m \prec (m-1)' \prec (m-1) \prec \ldots \prec 1' \prec 1$$

gegebene und $\ll$, die durch

$$1' \ll 1 \ll 2' \ll 2 \ll \ldots \ll m' \ll m$$

gegebene Ordnung. Man beachte, daß es in dem Randfall $r = 0$ genau ein $\lambda = (0, \ldots, 0)$ Tableau gibt (die leere Menge in $\emptyset \times \underline{n}$), welches sämtliche zusätzlichen Eigenschaften erfüllt.

Im Hinblick auf unsere Basis spielt eine Teilmenge von $I_\lambda^{\prec}$ die wesentliche Rolle. Zu $i \in \underline{m}$ sei $i^\times := m - i + 1 \in \underline{m}$ der *spiegelsymmetrische* Index in $\underline{m}$. Ist $i \in \underline{n}$ und $i > m$, so setzen wir $i^\times := (i'^\times)' > m$. Damit erhält man eine Permutation auf $\underline{n}$, für die offenbar

$$i \ll j \Longleftrightarrow i^\times \prec j^\times \quad \text{und damit } \mathbf{i} \in I_\lambda^{\ll} \Longleftrightarrow \mathbf{i}^\times \in I_\lambda^{\prec}$$

gilt. Dabei ist $\mathbf{i}^\times := (i_1{}^\times, i_2{}^\times, \ldots, i_r{}^\times)$ für einen Multi-Index $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I(n,r)$ zu setzen. Ein Standardtableau $T_\mathbf{i}^\lambda$ mit $\mathbf{i} \in I_\lambda^{\ll}$ heißt *symplektisch*, falls für jedes $i \in \underline{m}$ das Auftreten sowohl von i selbst als auch von i' auf die ersten i Zeilen von $T := T_\mathbf{i}^\lambda$ beschränkt ist. Formal schreibt sich dies

$$T(k,j) = i \le m \Longrightarrow k \le i \quad \text{und} \quad T(k,j) = i' > m \Longrightarrow k \le i.$$

Die dadurch definierte Teilmenge von $I_\lambda^{\ll}$ bezeichnen wir mit I_λ^{sym}. Ein Standardtableau $T_\mathbf{i}^\lambda$ mit $\mathbf{i} \in I_\lambda^{\prec}$ nennen wir *spiegelsymplektisch*, wenn $T_{\mathbf{i}^\times}^\lambda$ symplektisch ist. Die Teilmenge der Multi-Indizes $\mathbf{i} \in I_\lambda^{\prec}$ mit spiegelsymplektischen Standardtableaus $T_\mathbf{i}^\lambda$ bezeichnen wir mit I_λ^{mys}. Nach Definition ist dies gerade das Bild von I_λ^{sym} unter der durch $\cdot^\times$ gegebenen Bijektion zwischen $I_\lambda^{\ll}$ und $I_\lambda^{\prec}$. Die spiegelsymplektischen Standardtableaus sind durch die Bedingung, daß für jedes $i \le m$ das Auftreten sowohl von i, als auch das von i' auf die ersten $i^\times = m - i + 1$ Zeilen beschränkt ist, charakterisiert.

Symplektische Standardtableaus sind erstmalig von R.C. King ([Ki]) betrachtet worden. Diese Tableaus wurden auch von A. Berele ([Be]), C. de Concini ([Co]), S. Donkin ([Do3]) und M. Iano-Fletcher ([Ia]) verwendet. Der Grund, daß wir hier spiegelsymplektische Standardtableaus verwenden, ist durch Komplikationen im Quantenfall bedingt. Während King selbst symplektische Standardtableaus zur Bestimmung von Gewichtsraumdimensionen einsetzt, werden bei Berele Basen der irreduziblen $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$-Moduln mit diesen Tableaus indiziert. De Concini zeigt, daß die (klassischen) Bideterminanten zu Paaren von symplektischen Standardtableaus eine Basis für die homogenen Summanden des Koordinatenrings der Halbgruppe

$\mathrm{SpM}_n(K)\backslash\mathrm{GSp}_n(K)$ bilden, die in 3.4 betrachtet wird, und legt damit den Grundstein für eine charakteristikfreie Darstellungstheorie von $\mathrm{Sp}_n(K)$. Donkin und Iano-Fletcher haben diese Resultate in Zusammenhang mit der Theorie algebraischer Gruppen bzw. einer polynomialen Darstellungstheorie im Sinne von [Gr1] gebracht und Basen von symplektischen Schur- und Weyl-Moduln erhalten.

3.3 Quantensymplektische Bideterminanten

Wir werden eine quantensymplektische Variante des Begriffs der Bideterminanten zur Konstruktion einer Basis von $A^{\mathrm{s}}(n)$ verwenden. Klassischer Weise werden Bideterminanten zu einer Partition $\lambda \in \Lambda^+(r)$ und einem Paar von Multi-Indizes $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,r)$ definiert (siehe z.B. [Gr1]), 4.3). Später benötigen wir als Hilfsmittel eine etwas allgemeinere Form, die zu einer Komposition $\lambda \in \Lambda(p,r)$ und zwei Multi-Indizes $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,r)$ durch

$$t^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) := \sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} (-1)^{l(w)} x_{\mathbf{i}(\mathbf{j}w)} \tag{3.4}$$

definiert ist und die wir *Präbideterminanten* nennen wollen. Darin sind x_{ij} die Koeffizientenfunktionen in $K[\mathrm{M}_n(K)]$ bezüglich der Standardbasis des Komoduls V und $x_{\mathbf{ij}} := x_{i_1 j_1} \dots x_{i_r j_r}$ diejenigen bezüglich $V^{\otimes r}$. Wie in 2.3.2 operiert $\mathcal{S}_r$ auf den Multi-Indizes $\mathbf{i} \in I(n,r)$ durch $\mathbf{i}w := (i_{w(1)}, \dots, i_{w(r)})$. Mit $\mathcal{S}_\lambda$ wird wiederum die Standard-Young-Untergruppe in $\mathcal{S}_r$ zur Komposition λ bezeichnet. Zu einer Partition $\lambda \in \Lambda^+(r)$ erhält man die *Bideterminanten* selbst mit Hilfe der dualen Partition λ' durch

$$T^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) := t^{\lambda'}(\mathbf{i}:\mathbf{j}).$$

Beim Vergleich mit der Definition in [Gr1] beachte man, daß für den Spaltenstabilisator von T^λ – wie in 3.2 bemerkt – $S(T^\lambda) = \mathcal{S}_{\lambda'}$ gilt. Für einspaltige Diagramme, also für $\lambda = \omega_r$ mit $r \in \mathbb{N}$, schreiben wir auch $\det(\mathbf{i},\mathbf{j}) := T^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})$. Bekannterweise kann man Bideterminanten zu mehrspaltigen Tableaus als Produkt der Determinanten $\det(\mathbf{i}^s_{\lambda'}, \mathbf{j}^s_{\lambda'})$ über alle Spalten s berechnen. Genauer gilt bereits für Präbideterminanten

$$t^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = \det(\mathbf{i}^1_\lambda, \mathbf{j}^1_\lambda)\det(\mathbf{i}^2_\lambda, \mathbf{j}^2_\lambda) \dots \det(\mathbf{i}^p_\lambda, \mathbf{j}^p_\lambda)$$

Dazu verwendet man den kanonischen Isomorphismus von $\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \mathcal{S}_{\lambda_2} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_p}$ in die Standard Young Untergruppe $\mathcal{S}_\lambda$, welcher $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ diejenige Permutation $w \in \mathcal{S}_\lambda$ zuordnet, deren Einschränkung auf $\{k_s+1, \dots, k_s+\lambda_s\}$ gerade w_s ergibt. Unter dieser Zuordnung gilt dann

$$x_{\mathbf{i}(\mathbf{j}w)} = x_{\mathbf{i}^1_\lambda(\mathbf{j}^1_\lambda w_1)} x_{\mathbf{i}^2_\lambda(\mathbf{j}^2_\lambda w_2)} \dots x_{\mathbf{i}^p_\lambda(\mathbf{j}^p_\lambda w_p)} \tag{3.5}$$

woraus die Produktformel folgt, da offensichtlich $l(w) = l(w_1) + l(w_2) + \dots + l(w_p)$ gilt. Das Ziel des gesamten Kapitels ist nun eine Analogie zu dem wohlbekannten

Satz 3.3.1 (Mead; Doubilet, Rota, Stein) *Für jeden kommutativen Ring R mit Eins besitzt $A_R(n,r)$ die freie R-Basis*

$$\{T^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})|\ \lambda \in \Lambda^+(n,r),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^<\}.$$

in Bezug auf $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ zu finden. Einen Beweis obigen Satzes sowie Hinweise auf Orginalliteratur findet man etwa in [Ma] Abschnitt 2.5. Zunächst benötigen wir eine quantensymplektische Analogie zu den Bideterminanten. Zu einer Permutation $w \in \mathcal{S}_r$ mit reduziertem Ausdruck $w = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_t}$ definieren wir dazu den Endomorphismus

$$\beta(w) := \rho_r^{\mathrm{s}}(G(w)) = \beta_{i_1}\beta_{i_2}\dots\beta_{i_t} \in \mathcal{E}_r,\ \text{bzw. } \beta(w) = \mathrm{id}_V \in \mathcal{E} \text{ im Fall } r=1$$

wobei wie gewohnt s_i die Nachbarvertauschung $(i,i+1)$ und $\beta_i = \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}}$ das Bild des Erzeugers g_i der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra unter der durch β und γ gegebenen Darstellung ρ_r^{s} auf $V^{\otimes r}$ nach Satz 2.2.3 ist. Eine Begründung, daß dies unabhängig von der Wahl des reduzierten Ausdruckes für w ist, wurde bei der Definition von $G(w)$ in 2.3 gegeben. Es gilt

$$\beta(ww') = \beta(w)\beta(w') \text{ falls } l(ww') = l(w) + l(w')$$

aufgrund der entsprechenden Formel für $G(ww')$. Da $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ gerade die Zentralisatorkoalgebra des Bildes $\rho_r^{\mathrm{s}}(\mathcal{C}_{R,r})$ ist, ist klar, daß die $\beta(w)$ Endomorphismen von $A^{\mathrm{s}}(n,r)$- Komoduln sind. Ist $(b_{\mathbf{ij}}(w))$ die Koeffizientenmatrix von $\beta(w)$ bezüglich der Standardbasis von $V^{\otimes r}$ mit $\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_r), \mathbf{j} = (j_1,\dots,j_r) \in I(n,r)$ und sind $x_{\mathbf{ij}} = x_{i_1j_1}x_{i_2j_2}\dots x_{i_rj_r}$ die Restklassen der Basisvektoren $e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}}$ von ${\mathcal{E}_r}^*$ in $A^{\mathrm{s}}(n,r)$, also gerade die Koeffizientenfunktionen des $A^{\mathrm{s}}(n)$-Komoduls $V^{\otimes r}$, so definieren wir zunächst wieder *quantensymplektische Präbideterminanten* zu $\lambda \in \Lambda(p,r)$ durch

$$t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) := \sum_{w\in\mathcal{S}_\lambda}(-y)^{-l(w)}\beta(w)x_{\mathbf{ij}} = \sum_{w\in\mathcal{S}_\lambda}(-y)^{-l(w)}x_{\mathbf{ij}}\beta(w). \tag{3.6}$$

Darin ist gemäß (1.2) $x_{\mathbf{ij}}\beta(w)$ bzw. $\beta(w)x_{\mathbf{ij}}$ durch

$$\beta(w)x_{\mathbf{ij}} = \sum_{k\in I(n,r)} b_{\mathbf{ik}}(w)x_{\mathbf{kj}},\ \text{bzw. } x_{\mathbf{ij}}\beta(w) = \sum_{k\in I(n,r)} x_{\mathbf{ik}}b_{\mathbf{kj}}(w)$$

erklärt. Die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt aus der Beschreibung der Relationen von $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ nach (1.3). Man beachte daß sich im klassischen Fall, d.h. für $q=1,\ p_{ij}=1$ und $t_k = 1$ für alle i,j,k gerade

$$x_{\mathbf{ij}}\beta(w) = x_{\mathbf{i}(\mathbf{j}w^{-1})} \text{ und } \beta(w)x_{\mathbf{ij}} = x_{(\mathbf{i}w)\mathbf{j}}$$

ergibt, da man hier offenbar $\beta(w)(v_{\mathbf{j}}) = v_{\mathbf{j}w^{-1}}$, also $b_{\mathbf{kj}}(w) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{j}w^{-1}} = \delta_{\mathbf{k}w,\mathbf{j}}$ hat. Folglich gehen die quantensymplektischen Präbideterminanten in der klassischen Spezialisierung in die oben definierten Präideterminanten über. Das gleiche gilt dann natürlich auch für die *quantensymplektischen Bideterminanten*, die zu einer Partition $\lambda \in \Lambda^+(r)$ durch

$$T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) := t_q^{\lambda'}(\mathbf{i}:\mathbf{j})$$

definiert sind. Im Randfall $r = 0$ sei die Bideterminante $T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{i})$ zum einzigen Multi-Index $\mathbf{i} := \emptyset \in I(n, 0)$ gerade das Einselement von $A^s(n)$. Zu einspaltigen Tableaus verwenden wir auch hier die Bezeichnung $\det_q(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ und sprechen von der *Quantendeterminante.* Wegen $l(w) = l(w_1)+\ldots+l(w_n)$ unter der oben angegebenen kanonischen Identifizierung von $\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \ldots \times \mathcal{S}_{\lambda_n}$ mit $\mathcal{S}_\lambda$ gilt $\beta(w) = \beta(w_1)\ldots\beta(w_n)$. Folglich erhält man in Analogie zu (3.5)

$$x_{\mathbf{ij}}\beta(w) = x_{\mathbf{i}_\lambda^1\mathbf{j}_\lambda^1}\beta(w_1)x_{\mathbf{i}_\lambda^2\mathbf{j}_\lambda^2}\beta(w_2)\ldots x_{\mathbf{i}_\lambda^p\mathbf{j}_\lambda^p}\beta(w_p) \tag{3.7}$$

und man kann auch hier wie im klassischen Fall Bideterminaten mehrspaltiger Tableaus als Produkte der Quantendeterminanten $\det_q(\mathbf{i}_{\lambda'}^s, \mathbf{j}_{\lambda'}^s)$ sämtlicher Spalten berechnen (natürlich unter Beachtung der Reihenfolge). Tatsächlich erhält man bereits für Präbideterminanten

$$t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = \det_q(\mathbf{i}_\lambda^1, \mathbf{j}_\lambda^1)\det_q(\mathbf{i}_\lambda^2, \mathbf{j}_\lambda^2)\ldots\det_q(\mathbf{i}_\lambda^p, \mathbf{j}_\lambda^p). \tag{3.8}$$

Insbesondere sind die Bideterminanten zu $\mu_r = (r, 0, \ldots, 0) \in \Lambda^+(r)$ gerade die Monome: $T_q^{\mu_r}(\mathbf{i} : \mathbf{j}) = x_{\mathbf{ij}}$.

Bemerkung 3.3.2 *Quantendeterminanten sind wohlbekannt im Fall der Bialgebra $A_{R,q}(n)$ gemäß 2.4 (siehe etwa [DD] (4.1.2, 4.1.7), [CP] (S. 236), [Tk] (S. 152),[Ha3] (S. 157)). Ihre Definition erfolgt i.d.R. über die Koeffizientenfunktionen der äußeren Algebra bzw. durch explizite Formeln. Die Definitionen stimmen mit der hier gegebenen überein falls man anstelle von β den in 2.4 betrachteten Quanten-Yang-Baxter Operator β_q (in jeweiliger Parameterwahl) verwendet (vgl. auch 3.11 über den Zusammenhang mit Koeffizientenfunktionen). Eine explizite Formel für das* $\det_q(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ *entsprechende Element in $A_{R,q}(n)$ erhält man (unter verwendung der Bezeichnung (2.7)) durch*

$$\sum_{w\in\mathcal{S}_r}(-y)^{-l(w)}p_{\mathbf{i}}(w)x_{\mathbf{i}w\mathbf{j}} = \sum_{w\in\mathcal{S}_r}(-y)^{-l(w)}p_{\mathbf{i}}(w)x_{\mathbf{ij}w}$$

Die explizite Berechnung der *quantensymplektischen* Determinanten ist lediglich im Fall $r = 2$ mit vertretbarem Aufwand möglich. Hier erhält man für $1 \leq k < l \leq n$

$$\det_q((k,l),(i,j)) =$$

$$\begin{cases} x_{ki}x_{lj} - q^{-1}p_{ji}t_jt_i^{-1}x_{kj}x_{li} & \text{für } i < j, i \neq j' \\ x_{ki}x_{li'} - t_{i'}t_i^{-1}x_{ki'}x_{li} - (y^{-1}-1)t_{i'}q^{-i}\sum_{h=1}^i q^ht_h^{-1}x_{kh'}x_{lh} & \text{für } i = j' \leq m \end{cases}.$$

Das erste Beispiel sieht der Quantendeterminante für $A_{R,q}(n)$ aus obiger Bemerkung ähnlich. Im zweiten Beispiel erhält man jedoch eine deutlich kompliziertere Formel im Fall assoziierter Indizes $i, i' = n - i + 1$. Die Berechnung einer 3×3 Determinate, beispielsweise von $\det_q((j,k,l),(i,i',i))$ für $j < k < l, i \leq m$, ist schon eine erhebliche Fleißaufgabe. Bemerkenswert ist, daß eine solche quantensymplektische Determinante von Null verschieden ist, obwohl zwei gleiche Spalten vorhanden sind.

Zur Definition unserer Basis von $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ ist noch eine Betrachtung des gruppenähnlichen Elementes g von $A^{\mathrm{s}}(n,2)$ erforderlich, welches zum eindimensionalen Unterkomodul $U_J =< J >$ gehört, d.h für welches $\tau_{V^{\otimes 2}}(J) = J \otimes g$ gilt. Dabei haben wir Abkürzung

$$J := J_q^{\prime \mathrm{s}} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i q^{\rho_i} t_i v_i v_{i'}$$

für den zweifachen invarianten Tensor aus 2.2.2 verwendet, von der wir auch weiterin Gebrauch machen. Wir nennen g den *Quantendilatationskoeffizienten.* Man berechnet dazu wiederum unter Verwendung der Notation (1.2)

$$(-q^{-\rho_k-\rho_l}\epsilon_k\epsilon_l t_k^{-1}t_l)\gamma x_{(k,k')(l,l')} = q^{-\rho_l}\epsilon_l t_l \sum_{i=1}^{n} q^{\rho_i}\epsilon_i t_i^{-1} x_{il}x_{i'l'}.$$

Dies ist offenbar unabhängig von k, während

$$(-q^{-\rho_k-\rho_l}\epsilon_k\epsilon_l t_k^{-1}t_l) x_{(k,k')(l,l')}\gamma = -q^{-\rho_k}\epsilon_k t_k^{-1} \sum_{i=1}^{n} q^{\rho_i}\epsilon_i t_i x_{ki}x_{k'i'}.$$

unabhängig von l ist. Aufgrund der Relation $\gamma x_{(k,k')(l,l')} = x_{(k,k')(l,l')}\gamma$ (nach (1.3)) stimmen die beiden Ausdrücke aber überein und sind somit auch vom jeweils zweiten Parameter l bzw. k unabhängig. Das dadurch unabhängig von k und l wohldefinierte Element

$$g := (-q^{-\rho_k-\rho_l}\epsilon_k\epsilon_l t_k^{-1}t_l)\gamma x_{(k,k')(l,l')} = (-q^{-\rho_k-\rho_l}\epsilon_k\epsilon_l t_k^{-1}t_l) x_{(k,k')(l,l')}\gamma \tag{3.9}$$

ist gerade das gesuchte gruppenähnliche Element in $A^{\mathrm{s}}(n,2)$. Denn man berechnet zu jedem $l \in \underline{n}$

$$J = \gamma(-q^{\rho_l}\epsilon_l t_l v_l v_{l'}) \tag{3.10}$$

und unter Verwendung der Komodulmorphismeneigenschaft von γ erhält man

$$\tau_{V^{\otimes 2}}(J) = \gamma \otimes \mathrm{id}(\sum_{i,k=1}^{n} v_i v_k \otimes (-q^{-\rho_l}\epsilon_l t_l) x_{(i,k)(l,l')}) =$$

$$J \otimes q^{-\rho_l}\epsilon_l t_l \sum_{k=1}^{n} q^{\rho_k}\epsilon_k t_k^{-1} x_{(k,k')(l,l')}) = J \otimes g.$$

Analog zeigt man für die "quantenschiefsymmetrische" Bilinearform $J^* := J_q^{\mathrm{s}} \in V^{\otimes 2*}$ die Invarianz $\tau_{V^{\otimes 2*}}(J^*) = g \otimes J^*$. Um eine Darstellung von g mit Hilfe von quantensymplektischen Determinaten zu erhalten, beweisen wir die folgende für alle $1 \le k, l \le n$ und $1 \le h \le m$ gültige Formel

$$\sum_{i=1}^{m} q^{-i} t_i \mathrm{det}_q((k,l),(i,i')) = y^{-m-1} q^h t_h x_{(k,l)(h,h')} \gamma = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & k \neq l' \\ q^{-k} t_k g & k = l' \leq m \end{array} \right. . \tag{3.11}$$

Man berechnet die linke Seite darin mit obiger Formel für 2×2 Determinaten zu

$$\sum_{i=1}^{m} q^{-i}(t_i x_{ki} x_{li'} - t_{i'} x_{ki'} x_{li}) - \sum_{h \leq i} (y^{-1} - 1) t_0 y^{-i} q^h t_h^{-1} x_{kh'} x_{lh}.$$

Die zweite Summe darin kann zu

$$\sum_{h=1}^{m} (y^{-1} - 1)(\sum_{i=h}^{m} y^{-i}) q^h t_{h'} x_{kh'} x_{lh} = \sum_{i=1}^{m} (q^{-i} - q^{i-n-2}) t_{i'} x_{ki'} x_{li})$$

umgeformt werden, wobei man im letzten Schritt den Summationsindex h wieder durch i ersetzt. Also erhält man links insgesamt $q^{-m-1} \sum_{i=1}^{n} q^{\rho_i} t_i \epsilon_i x_{ki} x_{li'}$. Man vergewissert sich dann leicht, daß dies mit dem Term in der Mitte von (3.11) übereinstimmt. Zur Bestätigung des rechten Gleichheitszeichens beachte man die Relation $\gamma x_{(k,l)(h,h')} = x_{(k,l)(h,h')} \gamma$ sowie (3.9). Man erhält für g

$$g = \sum_{i=1}^{m} q^{k-i} t_i t_k^{-1} \mathrm{det}_q((k,k'),(i,i')).$$

Das Hauptziel des gesamten Kapitels ist der Beweis, daß

$$\mathbf{B}_r := \{ g^l T_q^{\lambda}(\mathbf{i} : \mathbf{j}) |\ 0 \leq l \leq \frac{r}{2},\ \lambda \in \Lambda^+(m, r-2l),\ \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I_{\lambda}^{\mathrm{mys}} \} \tag{3.12}$$

eine freie Basis des R-Moduls $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ ist. Die Teilmengen $I_{\lambda}^{\mathrm{mys}}$ von $I(n,r)$ darin wurden durch spiegelsymplektische Standardtableaus in 3.2 erklärt. Leider werden wir diees Ziel nicht in vollem Umfang nicht erreichen. Die beweistechnisch notwendigen Einschränkungen sind dem Haupsatz 3.14.12 zu entnehmen. Wir zerlegen die Menge $\mathbf{B}_r$ unter Verwendung der Bezeichnung

$$\mathbf{C}_r := \{ T_q^{\lambda}(\mathbf{i} : \mathbf{j}) |\ \lambda \in \Lambda^+(m, r),\ \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I_{\lambda}^{\mathrm{mys}} \}$$

in

$$\mathbf{B}_r = \bigcup_{l=0}^{[\frac{r}{2}]} \{ g^l b |\ b \in \mathbf{C}_{r-2l} \}.$$

Beachte, daß auf Grund obiger Bemerkungen $\mathbf{C}_0$ Sinn macht und genau aus dem Einselement von $A^{\mathrm{s}}(n)$ besteht. Es liegt nahe, den Beweis, daß es sich um eine Basis handelt darauf zu reduzieren, die Mengen $\mathbf{C}_r$ als Basen der homogenen Summanden der graduierten Algebra $A^{\mathrm{s}}(n) / < g >$ zu erkennen. Darin bezeichnet $< g >$ das vom Quantendilatationskoeffizienten g erzeugte Ideal in $A^{\mathrm{s}}(n)$. Wir werden dies im nächsten Abschnitt vornehmen. Es zeigt sich dann, daß $A^{\mathrm{s}}(n)/ < g >$ fast eine graduierte Matrix Bialgebra ist (ohne Koeins), die von einer Quantisierung der abgeschlossenen Unterhalbgruppe der nichtinverierbaren Elemente von $\mathrm{SpM}_n(K)$ herrührt.

Zunächst wollen wir uns jedoch davon vergewissern, daß $\mathbf{B}_r$ die richtige Anzahl an Elementen besitzt. Dazu zeigen wir

Satz 3.3.3 *Es gilt:* $|\mathbf{B}_r| = \dim_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{C}}(n,r))$.

Beweis: Wir verwenden die Arbeit [Do2] S. 74 ff. S. Donkin definiert dort eine Bialgebra $A_0(n)$ durch das Bild von $K\,[\mathrm{M}_n(K)] = K[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn-1}, x_{nn}]$ im Koordinatenring $K\,[\mathrm{GSp}_n(K)]$ der Gruppe symplektischer Ähnlichkeiten unter dem durch Einschränkung der Koordinatenfunktionen x_{ij} gegebenen Bialgebrenhomomorphismus. Dieser ist induziert durch die Inklusion von $\mathrm{GSp}_n(K)$ in $\mathrm{M}_n(K)$. Aus Standardsätzen der algebraischen Geometrie sowie aus Satz 2.6.1 folgt (unter Verwendung der Notation aus [Do2]) im Fall $K = \mathbb{C}$:

$$A_0(n) = \mathbb{C}\left[\overline{\mathrm{GSp}_n(\mathbb{C})}\right] \cong A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{C}}(n) \quad \text{und} \quad A_0(n,r) \cong A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{C}}(n,r).$$

Ein weiterer Vergleich der hiesigen Notationen mit denen in [Do2] führt auf $\pi_0(n,r) = \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$ für die Menge der dominanten polynomialen Gewichte vom Grad r in $X(T_2)$. Gemäß den Ausführungen in [Do2] und 2.2c in [Do1] sowie der Darstellung der dominanten polynomialen Gewichte $\Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$ gemäß (3.1) gilt

$$\dim_K(A_0(n,r)) = \sum_{0 \le l \le \frac{r}{2}} \sum_{\mu \in \Lambda^+(m,r-2l)} \dim_K(Y(\mu + l z_g + P))^2 \tag{3.13}$$

Darin ist $Y(\lambda) := \mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GSp}_n(K)}(K_\lambda)$ der von dem zu $\lambda = \mu + l z_g + P \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$ gehörenden linearen Charakter K_λ der Boreluntergruppe B_2 von $\mathrm{GSp}_n(K)$ nach $\mathrm{GSp}_n(K)$ hochinduzierte Modul. Explizit schreibt sich dieser als

$$Y(\lambda) = \{f \in K\,[\mathrm{GSp}_n(K)] \mid f(bx) = \lambda(b) f(x),\ \forall b \in B_2,\ x \in \mathrm{GSp}_n(K)\}.$$

Es bleibt somit $\dim_{\mathbb{C}}(Y(\mu + l z_g + P)) = |I^{\mathrm{mys}}_\mu|$ für alle $\mu \in \Lambda^+(m, r-2l)$ zu zeigen. Wir betrachten dazu den Torus $T_3 := T(\mathrm{Sp}_n(K)) = T_1 \cap \mathrm{Sp}_n(K) = T_2 \cap \mathrm{Sp}_n(K)$ der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_n(K)$ selbst. Hier führt die Einbettung von T_3 in T_2 zu einem Epimorphismus von $X(T_2)$ nach $X(T_3)$, dessen Kern in $\mathbb{Z}^n/P$ gerade der $\mathbb{Z}$ Aufspann von z_g ist. Ist $\lambda = \mu + l z_g + P \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$, so ist die Einschränkung $\bar{\lambda} := \lambda_{|T_3}$ auf T_3 gerade die Restklasse $\mu + P'$ der Parition $\mu \in \Lambda^+(m, r-2l)$. Dabei ist $P' := P + \mathbb{Z} z_g$ der von P und z_g erzeugte $\mathbb{Z}$ Untermodul in $\mathbb{Z}^n$. Ist $B_3 = B_2 \cap \mathrm{Sp}_n(K)$ die Boreluntergruppe der Symplektische Gruppe, so erhält man aus [Do3] (Theorem 2.3b) für den induzierten Modul $\bar{Y}(\bar{\lambda}) := \mathrm{Ind}_{B_3}^{\mathrm{Sp}_n(K)}(K_{\bar{\lambda}})$ zu $\bar{\lambda} = \mu + P'$, das ist

$$\bar{Y}(\bar{\lambda}) = \{f \in K\,[\mathrm{Sp}_n(K)] \mid f(bx) = \bar{\lambda}(b) f(x),\ \forall b \in B_3,\ x \in \mathrm{Sp}_n(K)\},$$

die Dimension $\dim_K(\bar{Y}(\bar{\lambda})) = |I^{\mathrm{sym}}_\mu|$, was nach Definition der spiegelsymplektischen Standardtableaus ($I^{\mathrm{mys}}_\mu = (I^{\mathrm{sym}}_\mu)^\times$) mit $|I^{\mathrm{mys}}_\mu|$ übereinstimmt. Damit bleibt die

Isomorphie $Y(\lambda) \cong \bar{Y}(\bar{\lambda})$ von K-Vektorräumen im Fall $K = \mathbb{C}$ zu zeigen. Denn aus dieser folgt dann nach (3.13)

$$\dim_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{C}}(n,r)) = \dim_{\mathbb{C}}(A_0(n,r)) = \sum_{0 \le l \le \frac{r}{2}} \sum_{\mu \in \Lambda^+(m, r-2l)} |I^{\mathrm{mys}}_{\mu}|^2 = |\mathbf{B}_r|.$$

Durch Einschränkung $\bar{f} := f_{|\mathrm{Sp}_n(K)}$ von regulären Funktionen f von $\mathrm{GSp}_n(K)$ auf $\mathrm{Sp}_n(K)$ erhält man zunächst einen Vektorraumhomomorphismus von $Y(\lambda)$ nach $\bar{Y}(\bar{\lambda})$, da wegen $B_3 \subset B_2$ und $\mathrm{Sp}_n(K) \subseteq \mathrm{GSp}_n(K)$ aus $f(bx) = \lambda(b)f(x)$ für alle $b \in B_2$ und $x \in \mathrm{GSp}_n(K)$ offenbar auch $\bar{f}(bx) = \bar{\lambda}(b)\bar{f}(x)$ für alle $b \in B_3$ und $x \in \mathrm{Sp}_n(K)$ folgt. Es ist zu zeigen, daß es sich um einen Isomorphismus handelt.

Zum Beweis der Injektivität beachte man, daß $f \in Y(\lambda)$ mit $\lambda \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$ notwendigerweise homogen von Grad r ist, d.h. es gilt $f(ax) = a^r f(x)$ für alle $a \in K\backslash\{0\}$ und $x \in \mathrm{GSp}_n(K)$. Dies folgt, da B_2 alle (invertierbaren) skalaren Vielfachen $a\mathrm{id}_V$ der Einheitsmatrix enthält und für solche offenbar $\lambda(a\mathrm{id}_V) = a^r$ gilt. Da über einem algebraisch abgeschlossenen Körper jede Matrix aus $\mathrm{GSp}_n(K)$ proportional zu einer Matrix in $\mathrm{Sp}_n(K)$ ist, ist also f genau dann die Nullfunktion, wenn dies für die Einschränkung $\bar{f} = f_{|\mathrm{Sp}_n(K)}$ zutrifft. Die zeigt die Injektivität von π. Zum Beweis der Surjektivität schränken wir uns nun auf den Fall $K = \mathbb{C}$ ein und fassen $Y(\lambda)$ durch Einschränkung als $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ Modul auf. Aus der Gleichung $(\overline{uf})(v) = (uf)(v) = f(vu) = \bar{f}(vu) = (u\bar{f})(v)$ für alle $u, v \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ folgt $\overline{uf} = u\bar{f}$ für alle u und folglich ist die Einschränkung von Funktionen ebenso ein Homomorphismus von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$-Moduln. Aufgrund der Irreduzibilität von $\bar{Y}(\bar{\lambda})$ im Fall $K = \mathbb{C}$ ergibt sich daraus auch die Surjektivität, womit der Beweis erbracht ist. □

3.4 Die Unterhalbgruppe der nicht invertierbaren Elemente

In der klassischen Spezialisierung $q \mapsto 1, p_{ij} \mapsto 1, t_i \mapsto 1$ wird das gruppenähnliche Element g aus 3.3 zu

$$g = \epsilon_k \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_{(k,k')(i,i')} = \epsilon_k \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_{(i,i')(k,k')} \in A^{\mathrm{s}}_{R,1}(n)$$

Satz 2.1.1 zeigt, daß es sich um die Dilatationskoeffizientenfunktion d^{s} handelt. Dies rechtfertigt die Benennung von g als Quantendilatationskoeffizient. Als Nullstellenmenge von g in $\mathrm{SpM}_n(K)$ erhält man somit im klassischen Fall über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K die abgeschlossene Unterhalbgruppe

$$\mathrm{SpH}_n(K) := \{A \in \mathrm{M}_n(K) |\ J^{\mathrm{s}}(vA, wA) = J^{\mathrm{s}}(Av, Aw) = 0\ \forall v, w \in V\} =$$

$$\mathrm{SpM}_n(K)\backslash\mathrm{GSp}_n(K)$$

von $\mathrm{SpM}_n(K)$. Der Koordinatenring $K[\mathrm{SpH}_n(K)]$ dieser Unterhalbgruppe ist offenbar graduiert. Wir betrachten nun die ebenfalls graduierte Algebra

$$A^{\mathrm{sh}}(n) := A^{\mathrm{s}}(n)/ < g > .$$

In der klassischen Spezialisierung hat man offenbar einen graderhaltenden Epimorphismus von dieser Algebra auf $K[\mathrm{SpH}_n(K)]$. Wir werden später sehen (Korollar 3.14.6), daß es sich tatsächlich um einen Isomorphismus handelt, und wollen $A^{\mathrm{sh}}(n)$ daher als eine Quantisierung dieses Koordinatenringes ansehen. Entsprechend den Bemerkungen im Anschluß an 2.5.4 ist eine Rechtfertigung dieser Bezeichnung natürlich erst dann gegeben, wenn außerdem (in Analogie zu Satz 2.5.10) gezeigt ist, daß $A^{\mathrm{sh}}_{\mathcal{Z},Q}(n)n$ als $\mathcal{Z}$-Modul in einer (Zariski-) Umgebung der klassischen Spezialisierung in $\mathrm{Spec}(\mathcal{Z})$ frei ist (dabei ist $\mathcal{Z}$ der Grundring aus (2.3)). Dies erfolgt durch Satz 3.14.3.

Da $\mathrm{SpH}_n(K)$ kein Einselement besitzt, ist nicht zu erwarten, daß $A^{\mathrm{sh}}(n)$ wiederum eine Bialgebra ist. Man sieht aber leicht, daß das von g erzeugte Ideal $< g >$ wegen der Gruppenähnlichkeit von g abgeschlossen unter der Komultiplikation von $A^{\mathrm{s}}(n)$ ist.

Wir nennen einen R-Modul K mit einer Komultiplikation Δ eine *Halbkoalgebra* und einen Untermodul U ein *Halbkoideal*, falls $\Delta(U) \subseteq U \otimes K + K \otimes U$ gilt. Ist K zusätzlich eine R-Algebra und Δ ein Algebrenhomomorphismus so nennen wir K eine *Halbbialgebra*.

Somit ist $< g >$ ein Halbkoideal in $A^{\mathrm{s}}(n)$ und $A^{\mathrm{sh}}(n)$ erbt wenigstens noch die Struktur einer Halbbialgebra von $A^{\mathrm{s}}(n)$. Genauer hat man wiederum eine direkte Summenzerlegung

$$A^{\mathrm{sh}}(n) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A^{\mathrm{sh}}(n,r)$$

von Halbkoalgebren $A^{\mathrm{sh}}(n,r) := A^{\mathrm{s}}(n,r)/G_r$ wobei G_r der r-te homogene Summand des homogenen Ideales $< g >$ ist. Wir werden im folgenden häufig den Standpunkt zwischen $A^{\mathrm{s}}(n)$ und $A^{\mathrm{sh}}(n)$ wechseln. Dabei verwenden wir für die Restklassen der Elemente $e^{*\mathbf{j}}_{\mathbf{i}} \in \mathcal{E}_r{}^*$ beide male dieselbe Bezeichnung $x_{\mathbf{ij}}$. Deren Bedeutung ist also jeweils sinngemäß zu verstehen.

Im Hinblick auf eine Reduktion des Beweises des Basissatzes für $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ betrachten wir zu $r \geq 2$ die R-Modul Homomorphismen

$$\varpi_r : A^{\mathrm{s}}(n,r-2) \to A^{\mathrm{s}}(n,r) , \quad \varpi_r(x) := gx.$$

Die Idee ist, mit Hilfe einer kurze exakte Folge

$$0 \to A^{\mathrm{s}}(n,r-2) \to A^{\mathrm{s}}(n,r) \to A^{\mathrm{sh}}(n,r) \to 0, \tag{3.14}$$

aus der Kenntnis der Basis $\mathbf{C}_r$ für $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ induktiv auf die Basis $\mathbf{B}_r$ für $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ zu schließen. Die Exaktheit rechts ist klar. Die in der Mitte folgt aus

Satz 3.4.1 *Es gilt die Kommutatorregel*

$$gx_{lk}t_k^2 = t_l^2 x_{lk} g.$$

Insbesondere gilt $\mathrm{im}(\varpi_r) = G_r$, *d.h. (3.14) ist in der Mitte exakt.*

Beweis: Die zweite Behauptung folgt offensichtlich aus der ersten. Für deren Verifikation konstruieren wir einen $A^{\mathrm{s}}(n,3)$-Komodulautomorphismus von $V^{\otimes 3}$, welcher den Unterkomodul $U_J \otimes V$ auf $V \otimes U_J$ abbildet. Darin sei mit $U_J := \langle J \rangle$ der eindimensionale R-linear Auspann des 2-fachen invarianten Tensors $J = \sum_i \epsilon_i q^{\rho_i} t_i v_i \otimes v_{i'}$. Wir betrachten dazu $\beta_1 = \beta \otimes \mathrm{id}_V$, $\gamma_1 = \gamma \otimes \mathrm{id}_V$ $\beta_2 = \mathrm{id}_V \otimes \beta$, $\gamma_2 = \mathrm{id}_V \otimes \gamma \in \mathcal{E}_3$ und behaupten, daß $\beta_1\beta_2$ der gesuchte Automorphismus ist. Da dieser offensichtlich im Bild der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra liegt und invertierbar ist, folgt nach Konstruktion der Zentralisator Koalgebra, daß es sich um einen Komodulautomorphismus handelt. Zum Beweis von $\beta_1\beta_2(U_J \otimes V) = V \otimes U_J$ benutzen wir die Beziehung $\beta_1\beta_2\gamma_1 = \gamma_2\beta_1\beta_2$, die aufgrund der Relation $(GE2')$ der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra erfüllt ist. Zu Indizes i,k mit $k \neq i, i'$ berechnet man etwa mit Hilfe von (3.10):

$$\gamma_2\beta_1\beta_2(v_{i'}v_iv_k) = yt_k^2t_0^{-2}t_{i'}^{-1}q^{\rho_i}\epsilon_i v_k J \quad \text{und} \quad \gamma_1(v_{i'}v_iv_k) = t_{i'}^{-1}q^{\rho_i}\epsilon_i J v_k,$$

woraus man auf $\beta_1\beta_2(Jv_k) = yt_{k'}^{-2}v_kJ$ schließt. Bei der Berechnung der linken Formel treten im Fall $k < i$ oder $k < i'$ zunächst zwar zusätzliche Summanden auf, diese verschwinden jedoch wieder wegen $\gamma_2(v_{i'}v_iv_k) = 0$ bzw. $\gamma_2(v_{i'}v_kv_i) = 0$. Somit erhält man

$$(\beta_1\beta_2 \otimes \mathrm{id}) \circ \tau_{V^{\otimes 3}}(Jv_k) = \sum_{l=1}^{n} yt_{l'}^{-2}v_lJ \otimes gx_{lk} =$$

$$\sum_{l=1}^{n} yt_{k'}^{-2}v_lJ \otimes x_{lk}g = \tau_{V^{\otimes 3}}(\beta_1\beta_2(Jv_k)),$$

was wegen der linearen Unabhängigkeit der v_lJ auf die Behauptung führt. □

Will man aus der Kenntnis, daß $\mathbf{C}_r$ ein Erzeugendensystem für $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ ist, induktiv schließen, daß dies auch für $\mathbf{B}_r$ in Bezug auf $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ der Fall ist, so benötigt man lediglich die Exaktheit der Folge (3.14) in der Mitte und Rechts. Die Exaktheit auf der linken Seite ergibt sich später aus Satz 3.14.1 (siehe Bemerkung 3.14.2).

3.5 Die Matrixtransposition

Der in (2.3) eingeführte Grundring

$$\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[Q, Q^{-1}, X_{ij}, X_{ij}^{-1}, X_k, X_k^{-1} \,|\, 1 \leq i < j \leq m, \;\; 1 \leq k \leq m+1],$$

besitzt einen involutorischen Ringautomorphismus Θ, der durch

$$\Theta(Q) = Q,\ \Theta(X_{ij}) = X_{ij}^{-1},\ \Theta(X_k) = X_k^{-1}$$

gegebenen ist. Wir betrachten in diesem Abschnitt nur solche $\mathcal{Z}$-Algebren R, die eine Fortsetzung θ von Θ besitzen, das ist ein Ringautomorphismus θ mit

$$\theta(q) = q,\ \theta(p_{ij}) = p_{ij}^{-1},\ \theta(t_k) = t_k^{-1}.$$

In diesem Fall besitzt die Bialgebra $A^{\mathrm{s}}(n)$ einen semilinearen Algebrenautomorphismus, der gleichzeitig ein Koalgebrenantiautomorphismus ist und dem *Transponieren von Matrizen* entspricht. Semilinear bedeutet hier, daß dieser bis auf θ linear ist. Ist W irgendein freier R-Modul mit einer festgewählten Basis $w_1, \dots, w_s$, so sei θ_W der eindeutig bestimmte bezüglich θ semilineare Automorphismus von W mit $\theta_W(w_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, s$, also $\theta_W(\sum_{i=1}^s a_s w_s) := \sum_{i=1}^s \theta(a_s) w_s$ für $a_i \in R$. Bezeichnet man mit $\left(e_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}\right)^t = e_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}$ die Matrixtransposition auf $\mathcal{E}_r$, so berechnet man leicht

$$\beta^t = \theta_{\mathcal{E}_2}(\beta) \text{ und } \gamma^t = \theta_{\mathcal{E}_2}(\gamma), \tag{3.15}$$

und erhält:

Satz 3.5.1 *Falls R einen Ringautomorphismus θ besizt, der Θ fortsetzt, so besitzt $A^{\mathrm{s}}(n)$ einen graderhaltenden, semilinearen Koalgebrenanti- und Algebrenautomorphismus ϑ, dessen Einschränkung $\vartheta_r : A^{\mathrm{s}}(n,r) \to A^{\mathrm{s}}(n,r)$ auf den r-ten homogenen Summanden durch*

$$\vartheta_r\Big(\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,r)} a_{\mathbf{ij}} x_{\mathbf{ij}}\Big) := \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,r)} \theta(a_{\mathbf{ij}}) x_{\mathbf{ji}}$$

gegeben ist. Insbesondere ist ϑ_r ein semilinearer Antiautomorphismus der Matrix-Koalgebra $A^{\mathrm{s}}(n,r)$.

Beweis: Die Tensoralgebra $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ ist frei auf den Erzeugern e_i^{*j}, $1 \leq i,j \leq n$. Daher gibt es einen eindeutig bestimmten, bezüglich θ semilinearen Algebrenautomorphismus $\widetilde{\vartheta} : \mathcal{T}(\mathcal{E}^*) \to \mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ mit $\widetilde{\vartheta}(e_i^{*j}) = e_j^{*i}$. Nach Definition von $A^{\mathrm{s}}(n)$ gemäß der FRT-Konstruktion ist $A^{\mathrm{s}}(n)$ aufgrund von Satz 1.4.2 der Quotient von $\mathcal{T}(\mathcal{E}^*)$ nach dem von $\beta e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}} - e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}}\beta$ und $\gamma e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}} - e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}}\gamma$ für alle $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,2)$ erzeugten homogenen Biideal. Unter Verwendung der Notation (1.2) berechnet man mittels (3.15) bezüglich der Restklassen $x_{\mathbf{ij}}$ der $e_{\mathbf{i}}^{*\mathbf{j}}$ in $A^{\mathrm{s}}(n,2)$

$$\widetilde{\vartheta}(\beta x_{\mathbf{ij}}) = x_{\mathbf{ji}} \theta_{\mathcal{E}_2}(\beta)^t = x_{\mathbf{ji}}\beta \quad \text{und} \quad \widetilde{\vartheta}(\gamma x_{\mathbf{ij}}) = x_{\mathbf{ji}} \theta_{\mathcal{E}_2}(\gamma)^t = x_{\mathbf{ji}}\gamma$$

Also läßt $\widetilde{\vartheta}$ die Relationen von $A^{\mathrm{s}}(n)$ gemäß (1.3) invariant und faktorisiert somit zu einem semilinearen Algebrenautomorphismus ϑ von $A^{\mathrm{s}}(n)$. Da die Komultiplikation selbst ein Algebrenhomomorphismus ist, reicht es, die Eigenschaft der Antikoalgebrenautomorphie von ϑ auf dem Algebrenerzeugendensystem x_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$, den Restklassen der e_i^{*j}, zu überprüfen. Für diese bestätigt man dies leicht. Offensichtlich ist ϑ graderhaltend, und die Einschränkungen ϑ_r auf die homogenen Summanden $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ besitzen die Darstellung aus der Formulierung des Satzes. $\square$

Bemerkung 3.5.2 *In den Anwendungen des Satzes benötigen wir die Existenz einer Fortsetzung θ von Θ nicht unbedingt. Die Ringelemente $a \in R$, auf die θ anzuwenden ist, liegen i.d.R. im Bild des Ringhomomorphismus $\mu : \mathcal{Z} \to R$ bezüglich dem wir R als $\mathcal{Z}$-Algebra ansehen und man hat ein bestimmtes Urbild $\bar{a}$ von a unter μ gegeben. Wir verwenden dann auch die (unsaubere) Bezeichnung $\theta(a)$ für $\mu \circ \Theta(\bar{a})$, obwohl dieses Element lediglich von $\bar{a}$ unter Umständen aber nicht von a in eindeutiger Weise abhängt.*

Aus (3.15) erhält man ebenso die Formel

$$\beta(w)^t = \theta_{\mathcal{E}_r}(\beta(w^{-1})) \tag{3.16}$$

und daraus den

Satz 3.5.3 *Es gilt $\vartheta_r(t_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j})) = t_q^\lambda(\mathbf{j} : \mathbf{i})$ für jede Präbideterminante und $\vartheta_2(g) = g$ für den Quantendilatationskoeffizienten.*

Beweis: Man berechnet

$$\vartheta_r(t_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j})) = \sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} (-y)^{-l(w)} \theta_{\mathcal{E}_r}(\beta(w)^t) x_{\mathbf{ji}} =$$

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} (-y)^{-l(w)} \beta(w^{-1}) x_{\mathbf{ji}} = t_q^\lambda(\mathbf{j} : \mathbf{i}),$$

wobei man beim letzen Schritt $l(w) = l(w^{-1})$ beachte, als auch den Umstand, daß in der Summation der $\beta(w^{-1})$ genau die $\beta(w)$, allerdings in einer anderen Reihenfolge, auftreten. Für die zweite Behauptung ziehen wir Definition (3.9) heran:

$$\vartheta_2(g) = (-q^{-\rho_k - \rho_l} \epsilon_k \epsilon_l t_k t_l^{-1}) \vartheta_2(\gamma x_{(k,k')(l,l')}) = (-q^{-\rho_l - \rho_k} \epsilon_l \epsilon_k t_l^{-1} t_k) x_{(l,l')(k,k')} \gamma = g$$

Beim mittleren Gleichheitszeichen hat man wieder (3.15) zu verwenden. □

Die zweite Aussage des Satzes zeigt, daß ϑ zu einem semilinearen Algebrenautomorphismus von $A^{\mathrm{sh}}(n)$ faktorisiert, welcher gleichzeitig ein Antiautomorphismus von Halbkoalgebren ist. Wir verwenden für diesen die gleichen Bezeichnungen ϑ bzw. ϑ_r.

3.6 Rechenregeln für Bideterminanten

Wir leiten nun ein Reihe von Rechenregeln für quantensymplektische Bideterminanten her, die sich mehr oder weniger unmittelbar aus der Definition ergeben. Dabei verwenden wir zu einer Komposition $\lambda \in \Lambda(p, r)$ die Abkürzung

$$\kappa_\lambda := \sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} (-y)^{-l(w)} \beta(w) \in \mathcal{E}_r,$$

mit deren Hilfe man die kompakte Formel

$$t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = \kappa_\lambda x_{\mathbf{ij}} = x_{\mathbf{ij}}\kappa_\lambda \tag{3.17}$$

erhält. Bezüglich $\mu_r = (r, 0, \ldots, 0)$ gilt $\mathcal{S}_{\mu_r} = \mathcal{S}_r$, so daß die Abkürzung $\kappa_r := \kappa_{\mu_r}$ sinnvoll ist. Ist $\lambda \in \Lambda(p, r)$ beliebig und $k_s := \lambda_1 + \ldots + \lambda_{s-1}$ zu einem $1 \leq s \leq p$, so setzen wir

$$\kappa_\lambda^s := \mathrm{id}_{V^{\otimes k_s}} \otimes \kappa_{\lambda_s} \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-\lambda_s-k_s}}.$$

In Analogie zur Produktformel (3.8) erhält man

$$\kappa_\lambda = \kappa_\lambda^1 \kappa_\lambda^2 \ldots \kappa_\lambda^p \tag{3.18}$$

mit Hilfe derer man erstere Produktformel leicht beweist (beachte $\det_q(\mathbf{i}_\lambda^s, \mathbf{j}_\lambda^s) = \kappa_\lambda^s x_{\mathbf{ij}})$). Im Gegensatz zu (3.8) kommutieren die Faktoren κ_λ^s in (3.18) jedoch. κ_r erfüllt aufgrund der reduzierten Darstellung (2.4) einer Permutation $w \in \mathcal{S}_r$ die beiden folgenden Rekursionsregeln für $r > 1$:

$$\kappa_r = \kappa_{r-1}(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} + \sum_{l=1}^{r-1} (-y)^{l-r} \beta_{r-1}\beta_{r-2}\ldots\beta_l) =$$

$$(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} + \sum_{l=1}^{r-1} (-y)^{l-r} \beta_l \beta_{l+1} \ldots \beta_{r-1})\kappa_{r-1}.$$

Von grundlegender Bedeutung, vor allem hinsichtlich der Beschreibung der Bideterminaten als Koeffizientenfunktionen in 3.11, ist das folgende

Lemma 3.6.1 *Sei $\lambda \in \Lambda(p, r)$. Dann gibt es zu jedem $i < r$, für das die Nachbarvertauschung $s_i = (i, i+1)$ in $\mathcal{S}_\lambda$ enthalten ist, Endomorphismen $\alpha_{\lambda,i}, \alpha'_{\lambda,i} \in \mathcal{E}_r$ mit*

$$\kappa_\lambda = (\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta_i)\alpha_{\lambda,i} = \alpha'_{\lambda,i}(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta_i).$$

Beweis: Aufgrund der Produktformel (3.18) und der Kommutativität der Faktoren darin genügt es den Beweis im Fall $\lambda = \mu_r$ zu führen, d.h. es sind zu κ_r und $i < r$ Elemente $\alpha_{r,i} := \alpha_{\mu_r,i}$ und $\alpha'_{r,i} := \alpha'_{\mu_r,i}$ mit der besagten Eigenschaft zu finden. Wir führen vollständige Induktion nach r. Der Induktionsanfang $r = 2$ ist klar. Beim Induktionsschritt folgt die Behauptung für $i < r - 1$ sofort aus obigen Rekursionsformeln. Für den Fall $i = r - 1$ berechnet man mit deren Hilfe

$$\kappa_r = \kappa_{r-1}(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta_{r-1}) + \alpha'_{r-1,r-2}(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta_{r-2}) \sum_{l=1}^{r-2} (-y)^{l-r}\beta_{r-1}\beta_{r-2}\ldots\beta_l).$$

Wegen der Zopfrelationen (G1) und (G2) gilt aber

$$(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta_{r-2})(-y)^{l-r}\beta_{r-1}\beta_{r-2}\ldots\beta_l = (-y)^{l-r}\beta_{r-1}\beta_{r-2}\ldots\beta_l(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta_{r-1}),$$

woraus die Faktorisierung auf der rechten Seite folgt. Bezüglich der linken Seite schließt man genauso. □

Wir ziehen zunächst nur eine bescheidene Konsequenz aus diesem Lemma, die wir im Beweis des ersten Teils des Straightening Algorithmus in 3.7 benötigen. Wie ob erwähnt folgen weitergehende Konsequenzen in 3.11.

Korollar 3.6.2 *Sei* $\mathbf{j} \in I(n,r)$ *ein Multi-Index mit zwei übereinstimmenden benachbarten Indizes* $j_l = j_{l+1}$ *und* $\lambda \in \Lambda(p,r)$ *derart, daß die Nachbarvertauschung* s_l *in* $\mathcal{S}_\lambda$ *enthalten ist. Dann gilt* $t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = t_q^\lambda(\mathbf{j}:\mathbf{i}) = 0$ *für alle* $\mathbf{i} \in I(n,r)$

Beweis: Nach Vorraussetzung liegt $v_\mathbf{j}$ im Kern von $(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta_l)$ liegt. Also folgt die Behauptung bezüglich $t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})$ direkt aus Lemma 3.6.1 zusammen mit (3.17). Hinsichtlich der umgekehrten Reihenfolge der Multi-Indizes verwendet man Satz 3.5.3 im Sinne von Bemerkung 3.5.2. □

3.6.1 Rechnen in $A^{\mathrm{sh}}(n)$

Für das Rechnen in $A^{\mathrm{sh}}(n)$ gilt ein sehr nützliches Vereinfachungsprinzip, das wir zunächst beschreiben. Dazu betrachten wir den Algebrenepimorphismus $\zeta_r : \mathcal{C}_{R,r} \to \mathcal{H}_{R,r}$ aus 2.3 zwischen der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra und der Hecke-Algebra, dessen Kern das von e_1 erzeugte Ideal in $\mathcal{C}_{R,r}$ ist. Außerdem sei an die Bezeichnung ρ_r^{s} aus 2.2.2 für den durch die Darstellung von $\mathcal{C}_{R,r}$ auf $V^{\otimes r}$ gegebenen Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{C}_{R,r}$ nach $\mathcal{E}_r$ erinnert.

Lemma 3.6.3 *Seien* a *und* b *Elemente der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra* $\mathcal{C}_{R,r}$*, für die* $\zeta_r(a) = \zeta_r(b)$ *gilt, und* $A := \rho_r^{\mathrm{s}}(a)$ *und* $B := \rho_r^{\mathrm{s}}(b)$ *deren Bilder unter* ρ_r^{s} *in* $\mathcal{E}_r$*. Dann gilt in* $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ *(in der Notation (1.2)):* $x_{\mathbf{ij}}A = x_{\mathbf{ij}}B$*.*

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, daß $x_{\mathbf{ij}}A = 0$ für $a \in \ker(\zeta_r)$ gilt. Man findet dann $f, h \in \mathcal{C}_{R,r}$ mit $a = fe_1h$. Seien F, G und H die zugehörigen Elemente in $\mathcal{E}_r$ unter der Darstellung ρ_r^{s}. Wegen $G = \gamma_1 = \gamma \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-2}}$ berechnet man mit Hilfe der Formel (3.9) für den Quantendilatationskoeffizienten g

$$x_{\mathbf{ij}}G = \begin{cases} 0 & j_1' \neq j_2 \text{ oder } i_1' \neq i_2 \\ -q^{\rho_{i_1}+\rho_{j_1}}\epsilon_{i_1}\epsilon_{j_1}t_{i_1}^{-1}t_{j_1}g x_{i_3j_3}\dots x_{i_rj_r} & j_1' = j_2 \text{ und } i_1' = i_2 \end{cases}.$$

Dies bedeuted aber, daß $x_{\mathbf{ij}}G$ in $A^{\mathrm{sh}}(n)$ für alle $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,r)$ Null sein muß. Schließlich folgt wegen $x_{\mathbf{ij}}F = Fx_{\mathbf{ij}}$ gemäß (1.3)

$$x_{\mathbf{ij}}FGH = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{s}\in I(n,r)} x_{\mathbf{ik}}f_{\mathbf{kl}}g_{\mathbf{ls}}h_{\mathbf{sj}} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{s}\in I(n,r)} f_{\mathbf{ik}}x_{\mathbf{kl}}g_{\mathbf{ls}}h_{\mathbf{sj}} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{s}\in I(n,r)} f_{\mathbf{ik}}x_{\mathbf{ks}}Gh_{\mathbf{sj}} = 0.$$

Darin sind $(f_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in I(n,r)}$, $(g_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in I(n,r)}$ und $(h_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in I(n,r)}$ die Koeffizientenmatrizen von F, G und H bezüglich der Basis $\{v_\mathbf{i} | \mathbf{i} \in I(n,r)\}$ von $V^{\otimes r}$. Daraus folgt die Behauptung wegen $A = FGH$. □

In Analogie zur Bezeichnungsweise $x_{\mathbf{ij}}\alpha$ und $\alpha x_{\mathbf{ij}}$ gemäß (1.2) zu einem Endomorphismus $\alpha \in \mathcal{E}_r$ führen wir die Notation

$$t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})\alpha = \sum_{\mathbf{k}\in I(n,r)} t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k})a_{\mathbf{kj}} \text{ und } \alpha T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{k}\in I(n,r)} a_{\mathbf{ik}}T_q^\lambda(\mathbf{k}:\mathbf{j}), \tag{3.19}$$

sowie entsprechende Bezeichnungen bezüglich $\det_q(\mathbf{i},\mathbf{j})$ und $T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})$ ein. Darin sind die $a_{\mathbf{ij}}$ wiederum die Koeffizienten von α bezüglich der Basis $\{v_\mathbf{i} | \ \mathbf{i} \in I(n,r)\}$ von

$V^{\otimes r}$.

Mit Hilfe der in 2.3 erklärten Abbildung $G : \mathcal{S}_r \to \mathcal{C}_{R,r}$ besteht folgender Zusammenhang zwischen den $\beta(w)$ und den Basiselementen T_w der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{R,r}$:

$$\beta(w) = \rho_r^{\mathrm{s}}(G(w)) \text{ sowie } \zeta_r(G(w)) = T_w, \tag{3.20}$$

Als Anwendung erhalten wir somit

Lemma 3.6.4 *Zu einer Komposition $\lambda \in \Lambda(p,r)$ sei $s(\lambda) := \sum_{i=1}^{p} \binom{\lambda_i}{2}$. Dann gelten in $A^{\mathrm{sh}}(n)$ für alle $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,r)$ die folgenden Formeln für Präbideterminanten*

(a) $t_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) = y^{-s(\lambda)} \sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} (-y)^{l(w)} x_{\mathbf{ij}} \beta(w)^{-1} = y^{-s(\lambda)} \sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} (-y)^{l(w)} \beta(w)^{-1} x_{\mathbf{ij}}$

(b) $\beta(w) t_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) = \beta(w)^{-1} t_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) = (-1)^{l(w)} t_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) = t_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) \beta(w)^{-1} = t_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) \beta(w)$
für jedes $w \in \mathcal{S}_\lambda$.

Beweis: In Bezug auf (a) verwendet man die in der Hecke-Algebra gültige Beziehung

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_r} (-y)^{-l(w)} T_w = y^{-\binom{n}{2}} \sum_{w \in \mathcal{S}_r} (-y)^{l(w)} T_w^{-1},$$

die man etwa [Mu] (Lemma 2.5) entnehmen kann und bezüglich einer Komposition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \Lambda(p,r)$ und der zugehörigen Standard Young Untergruppe $\mathcal{S}_\lambda$ leicht zu

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} (-y)^{-l(w)} T_w = y^{-s(\lambda)} \sum_{w \in \mathcal{S}_\lambda} (-y)^{l(w)} T_w^{-1}$$

verallgemeinert. Somit folgt (a) sofort mit Hilfe von Lemma 3.6.3. Auf ähnliche Weise erhält man (b) durch Ausnutzung der für jedes $w \in \mathcal{S}_\lambda$ gültigen Beziehung für $y_\lambda := \sum_{u \in \mathcal{S}_\lambda} (-y)^{-l(u)} T_u$:

$$T_w y_\lambda = T_w^{-1} y_\lambda = (-1)^{l(w)} y_\lambda = y_\lambda T_w^{-1} = y_\lambda T_w$$

in $\mathcal{H}_{R,r}$, die für $\lambda = (r, 0, \ldots, 0)$ ebenfalls in [Mu] zu finden ist und leicht in diese Form zu verallgemeinern ist (vgl. [DJ1], Lemma 3.2). □

Der (b)-Teil des Lemmas sowie die folgende Anwendung von Lemma 3.6.3 werden in Paragraph 3.6.3 wichtige Dienste bei der Vorbereitung des Straightening Algorithmus leisten.:

Lemma 3.6.5 *Sei I_J^r der r-te homogene Summand des vom 2-fachen invarianten Tensor $J \in V^{\otimes 2}$ ereugten Ideals I_J in $\mathcal{T}(V)$ und $a_{\mathbf{j}} \in R$ Zahlen mit $\sum_{\mathbf{j} \in I(n,r)} a_{\mathbf{j}} v_{\mathbf{j}} \in I_J^r$. Dann gilt in $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$*

$$\sum_{\mathbf{j} \in I(n,r)} a_{\mathbf{j}} x_{\mathbf{ij}} = 0.$$

Insbesondere gilt dann auch für jede Komposition λ von r

$$\sum_{\mathbf{j}\in I(n,r)} a_{\mathbf{j}} t_q^{\lambda}(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = 0.$$

Beweis: Wegen $J = \gamma(-q^{\rho_k}\epsilon_k t_k v_k v_{k'})$ für jedes $k \in \underline{n}$ nach (3.10) wird I_J^r als R-Modul von den Elementen $\gamma_l(v_{\mathbf{k}})$ für $\mathbf{k} \in I(n,r)$ und $1 \leq l < r$ erzeugt. Es reicht also, die Behauptung im Fall $\sum_{\mathbf{j}\in I(n,r)} a_{\mathbf{j}} v_{\mathbf{j}} = \gamma_l(v_{\mathbf{k}})$ zu zeigen. Hier gilt wegen $\gamma_l = \rho_r^{\mathrm{s}}(e_l)$ und $\zeta_r(e_l) = 0$ nach Lemma 3.6.3

$$\sum_{\mathbf{j}\in I(n,r)} a_{\mathbf{j}} x_{\mathbf{ij}} = x_{\mathbf{ik}}\gamma_l = 0.$$

Die zweite Behauptung folgt daraus wegen

$$\sum_{\mathbf{j}\in I(n,r)} a_{\mathbf{j}}\beta(w)x_{\mathbf{ij}} = \sum_{\mathbf{k}\in I(n,r)} b_{\mathbf{ik}}(w) \sum_{\mathbf{j}\in I(n,r)} a_{\mathbf{j}} x_{\mathbf{kj}} = 0$$

□

3.6.2 Die Laplace-Dualität

Wir zeigen zunächst eine quantensymplektische Version der *Laplace-Dualität* (die klassische Version findet man z.B. in [Ma], 2.5) in der Form wie sie bereits in $A^{\mathrm{s}}(n)$ gilt. Darauf geben wir eine zweite Version, die nur in $A^{\mathrm{sh}}(n)$ gültig ist. Es sei an die Bezeichnungsweise gemäß (3.19) erinnert.

Satz 3.6.6 (Laplace-Dualität, Version 1) *Seien $\lambda,\mu \in \Lambda(p,r)$ zwei Kompositionen, Y ein transversales Linksnebenklassenvertretersystem von $\mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{S}_\mu$ in $\mathcal{S}_\lambda$ und X ein transversales Rechtsnebenklassenvertretersystem von $\mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{S}_\mu$ in $\mathcal{S}_\mu$, derart daß $l(vw) = l(v) + l(w)$ und $l(wu) = l(u) + l(w)$ für alle $v \in Y, u \in X$ und $w \in \mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{S}_\mu$ erfüllt ist. Dann gilt in $A^{\mathrm{s}}(n)$ für alle $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,r)$*

$$\sum_{u\in X} (-y)^{-l(u)} t_q^{\lambda}(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta(u) = \sum_{v\in Y} (-y)^{-l(v)}\beta(v) t_q^{\mu}(\mathbf{i}:\mathbf{j}).$$

Beweis: Aus der Transversalität der Nebenklassenvertretersysteme folgt

$$Z := \mathcal{S}_\lambda\mathcal{S}_\mu = \bigcup_{u\in X} \mathcal{S}_\lambda u = \bigcup_{v\in Y} v\mathcal{S}_\mu,$$

wobei die Vereinigungen jeweils disjunkt sind. Man berechnet dann

$$\sum_{u\in X} (-y)^{-l(u)} t_q^{\lambda}(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta(u) = \sum_{u\in X}\sum_{w\in\mathcal{S}_\lambda} (-y)^{-l(u)-l(w)} x_{\mathbf{ij}}\beta(w)\beta(u) =$$

$$\sum_{z\in Z} (-y)^{-l(z)} x_{\mathbf{ij}}\beta(z) = \sum_{z\in Z} (-y)^{-l(z)}\beta(z) x_{\mathbf{ij}} =$$

$$\sum_{v\in Y}\sum_{w\in\mathcal{S}_\mu}(-y)^{-l(v)-l(w)}\beta(v)\beta(w)x_{\mathbf{ij}} = \sum_{v\in Y}(-y)^{-l(v)}\beta(v)t_q^\mu(\mathbf{i}:\mathbf{j}).$$

□

Es folgt nun die angekündigte zweite Version der Laplace-Dualität. Es wird von ihr jedoch kein weiterer Gebrauch gemacht.

Satz 3.6.7 (Laplace-Dualität, Version 2) *Seien λ und μ aus $\Lambda(p,r)$, X ein transversales Linksnebenklassenvertretersystem von $\mathcal{S}_\lambda\cap\mathcal{S}_\mu$ in $\mathcal{S}_\mu$ und Y ein transversales Rechtsnebenklassenvertretersystem von $\mathcal{S}_\lambda\cap\mathcal{S}_\mu$ in $\mathcal{S}_\lambda$, derart daß $l(uw) = l(u)+l(w)$ und $l(wv) = l(v)+l(w)$ für alle $u\in X, v\in Y$ und $w\in\mathcal{S}_\lambda\cap\mathcal{S}_\mu$ erfüllt ist. Dann gilt in $A^{\mathrm{sh}}(n)$ für alle $\mathbf{i},\mathbf{j}\in I(n,r)$*

$$(-y)^{s(\lambda)}\sum_{u\in X}(-y)^{l(u)}t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta(u)^{-1} = (-y)^{s(\mu)}\sum_{v\in Y}(-y)^{l(v)}\beta(v)^{-1}t_q^\mu(\mathbf{i}:\mathbf{j}).$$

Beweis: Man berechnet entsprechend Satz 3.6.6 mit Hilfe von Lemma 3.6.4 (a)

$$(-y)^{s(\lambda)}\sum_{u\in X}(-y)^{l(u)}t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta(u)^{-1} = \sum_{u\in X}\sum_{w\in\mathcal{S}_\lambda}(-y)^{l(u)+l(w)}x_{\mathbf{ij}}(\beta(u)\beta(w))^{-1}$$

$$= \sum_{z\in Z}(-y)^{l(z)}\beta(z)^{-1}x_{\mathbf{ij}} = \sum_{v\in Y}\sum_{w\in\mathcal{S}_\mu}(-y)^{l(v)+l(w)}\beta(v)^{-1}\beta(w)^{-1}x_{\mathbf{ij}} =$$

$$(-y)^{s(\mu)}\sum_{v\in Y}(-y)^{l(v)}\beta(v)^{-1}t_q^\mu(\mathbf{i}:\mathbf{j}).$$

□

In Bezug auf die Anwendungen der Laplace-Dualität ist es wichtig zu wissen, daß jede Präbideterminante eine Linearkombination von Bideterminanten ist. Ist $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\Lambda(p,r)$ eine Komposition von r in p Teile, so gibt es eine Permutation $\pi\in\mathcal{S}_p$, so daß $\bar\lambda = (\lambda_{\pi(1)},\ldots,\lambda_{\pi(p)})\in\Lambda^+(p,r)$ eine Partition ist. Dabei ist $\bar\lambda$ durch λ eindeutig bestimmt. π ist lediglich unter der Zusatzbedingung, von minimaler Länge zu sein, eindeutig bestimmt. Es gilt nun

Lemma 3.6.8 *Zu jedem $\lambda\in\Lambda(p,r)$ und $\mathbf{i},\mathbf{j}\in I(n,r)$ ist die Präbideterminante $t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})$ eine Linearkombination von Bideterminanten $T_q^{\bar\lambda'}(\mathbf{k}:\mathbf{l})$ in $A^{\mathrm{s}}(n,r)$.*

Beweis: Bekanntermaßen sind die parabolischen Untergruppen $\mathcal{S}_\lambda$ und $\mathcal{S}_{\bar\lambda}$ in $\mathcal{S}_r$ zueinander konjugiert. Also gibt es $v\in\mathcal{S}_r$ mit $v\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\bar\lambda}v$. Ebenso ist aus der Theorie solcher Untergruppen bekannt, daß es in der Linksnebenklasse $v\mathcal{S}_\lambda$ einen eindeutigen Vertreter w und ebenso in der Rechtsnebenklasse $\mathcal{S}_{\bar\lambda}v$ einen eindeutig bestimmten Vertreter $\bar w$ jeweils minimaler Länge gibt (vgl. 2.3 bzw. [Hu]; 1.10). Tatsächlich gilt $w=\bar w$, was für die Beweisführung jedoch ohne Belang ist. Da bezüglich dieser Nebenklassenvertreter $l(wu) = l(w)+l(u)$ für alle $u\in\mathcal{S}_\lambda$ bzw. $l(u\bar w) = l(u)+l(\bar w)$ für alle $u\in\mathcal{S}_{\bar\lambda}$ gilt, erhält man $\beta(w)\kappa_\lambda = \kappa_{\bar\lambda}\beta(\bar w)$ also nach (3.17) und den Relationen (1.3) in $A^{\mathrm{s}}(n)$

$$\beta(w)t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = t_q^{\bar\lambda}(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta(\bar w) = T_q^{\bar\lambda'}(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta(\bar w)$$

und daraus

$$t_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = \beta(w)^{-1}T_q^{\bar\lambda'}(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta(\bar w) = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in I(n,r)} \bar b_{\mathbf{ik}}(w)T^{\bar\lambda'}(\mathbf{k}:\mathbf{l})b_{\mathbf{lj}}(\bar w)$$

wobei $\bar b_{\mathbf{ik}}(w)$ die Einträge der Koeffizientenmatrix von $\beta(w)^{-1}$ und $b_{\mathbf{ik}}(\bar w)$ diejenigen von $\beta(\bar w)$ sind. Man beachte, daß dies in $A^{\mathrm{s}}(n)$ gilt. $\square$

3.6.3 Rechnen modulo größerer m-Inhalte

Als Vorbereitung des ersten Teils des sogenannten *Straightening Algorithmus*, den wir in 3.7 beweisen werden und der dazu führt, daß Bideterminanten zu Partitionen von r in nicht mehr als n Teile und zu Paaren von Standardtableaus ein Erzeugendensystem für $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ bilden, zeigen wir nun eine Reihe von Rechenregeln für Bideterminaten, die vorallem beim quantensymplektischen Analogon der *Garnir-Relationen* eine Rolle spielen.

Einer Komposition $\mu \in \Lambda(n,r)$ ordnen wir die Komposition $|\mu| := (\mu_1,\dots,\mu_m) \in \Lambda(m,r)$ mit $\mu_i := \mu_i + \mu_{i'}$ zu. Ist dann $\mathbf{i} \in I(n,r)$ ein Multi-Index mit Inhalt $|\mathbf{i}| \in \Lambda(n,r)$ (siehe 2.3), so nennen wir $||\mathbf{i}|| \in \Lambda(m,r)$ seinen *m-Inhalt* . Also gilt für die j-te Komponente des m-Inhaltes von $\mathbf{i}$

$$||i||_j = |\{k \in \underline{r}|\ i_k = j \text{ oder } i_k = j'\}|. \tag{3.21}$$

Zu einem Multi-Index $\mathbf{i} \in I(n,r)$ definieren wir folgende R-Modul-Erzeugnisse in $V^{\otimes r}$

$$W_{\mathbf{i}} := \langle\{v_{\mathbf{j}}|\ \mathbf{j}\in I(n,r),\ ||\mathbf{j}|| > ||\mathbf{i}||\rangle \quad \text{und} \quad \overline{W}_{\mathbf{i}} := \langle\{v_{\mathbf{j}}|\ \mathbf{j}\in I(n,r),\ ||\mathbf{j}|| \geq ||\mathbf{i}||\rangle\,.$$

Die Kompositionen $\Lambda(m,r)$ seien lexikographisch bezüglich der gewöhnlichen Ordnung $<$ von $\underline{n}$ geordnet. Es sei auf die im folgenden häufig benutzte Verträglichkeit zwischen der Addition von Multi-Indizes und der Addition in $\mathbb{N}^m$ bzw. der lexikographischen Ordnung hingewiesen:

$$||\mathbf{i}+\mathbf{j}|| = ||\mathbf{i}|| + ||\mathbf{j}|| \quad \text{und}$$

$$||\mathbf{i}+\mathbf{j}|| < ||\mathbf{i}+\mathbf{k}|| \quad \text{bzw.} \quad ||\mathbf{j}+\mathbf{i}|| < ||\mathbf{k}+\mathbf{i}||, \quad \text{falls} \quad ||\mathbf{j}|| < ||\mathbf{k}|| \tag{3.22}$$

Weiterhin verwenden wir Abkürzungen für folgende invertierbare Ringelemente in R:

$$h_{ij} := \begin{cases} q^{-1}p_{ij}t_it_j^{-1} & j \neq i, i' \\ 1 & j = i \\ t_it_j^{-1} & j = i' > m \\ y^{-1}t_it_j^{-1} & j = i' \leq m \end{cases}.$$

und bezeichnen zu $l \in \underline{r}$ die Nachbarvertauschung $(l, l+1) \in \mathcal{S}_r$ wiederum mit s_l.

Lemma 3.6.9 *Für alle* $\mathbf{i} \in I(n,r)$ *und* $l \in \underline{r}$ *gilt in* $V^{\otimes r}$ *modulo dem* R*-Modul* $W_{\mathbf{i}}$

$$\beta_l(v_{\mathbf{i}}) \equiv \begin{cases} y h_{i_{l+1} i_l} v_{\mathbf{i}s_l} + (y-1)(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - \gamma_l)(v_{\mathbf{i}}) & i_l > i_{l+1} \\ y h_{i_{l+1} i_l} v_{\mathbf{i}s_l} & i_l \leq i_{l+1} \end{cases}$$

$$\beta_l^{-1}(v_{\mathbf{i}}) \equiv \begin{cases} h_{i_{l+1} i_l} v_{\mathbf{i}s_l} + (y^{-1}-1)(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - \gamma_l)(v_{\mathbf{i}}) & i_l \leq i_{l+1} \\ h_{i_{l+1} i_l} v_{\mathbf{i}s_l} & i_l > i_{l+1} \end{cases} .$$

Beweis: Die Gleichung für β_l^{-1} folgt aus der für β_l aufgrund der Formel $y\beta_l^{-1} = \beta_l + (y-1)(\gamma_l - \mathrm{id}_{V^{\otimes r}})$, die man aus der Relation (GE4) der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $\mathcal{C}_{R,r}$ ableiten kann. Es reicht daher, die erste Gleichung zu beweisen.

Wir betrachten zunächst den Fall $i_l > i_{l+1}$. Ein Blick auf die Definition des Operators β (in 2.2.2 oder zu Beginn von Kapitel 3) zeigt, daß im Fall $i_l \neq i'_{l+1}$ die behauptete Gleichung sogar exakt stimmt. Für den Fall assozierter Indizes $i_l = i'_{l+1} =: j \leq m$ betrachten wir die Komposition $\lambda = (l-1, 2, r-l-1) \in \Lambda(3,r)$ und zerlegen $\mathbf{i}$ bezüglich λ in

$$\mathbf{i}^1_\lambda = (i_1, \ldots, i_{l-1}), \;\; \mathbf{i}^2_\lambda = (j', j), \;\; \mathbf{i}^3_\lambda = (i_{l+1}, \ldots, i_r).$$

Zu $k \in \underline{n}$ sei $\mathbf{i}(k) := \mathbf{i}^1_\lambda + (k, k') + \mathbf{i}^3_\lambda$. In dieser Notation gilt $\mathbf{i}(j') = \mathbf{i}$. Man berechnet dann

$$\beta_l(v_{\mathbf{i}}) = t_j t_{j'}^{-1} v_{\mathbf{i}s_l} + (y-1) v_{\mathbf{i}} - (y-1) \sum_{k>j} q^{\rho_k - \rho_j} \epsilon_k \epsilon_j t_j t_{k'}^{-1} v_{\mathbf{i}(k)}.$$

Nun erhält man aus

$$(y-1) \sum_{k=1}^{n} q^{\rho_k - \rho_j} \epsilon_k \epsilon_j t_j t_{k'}^{-1} v_{\mathbf{i}(k)} = (y-1)\gamma_l(v_{\mathbf{i}})$$

die Gleichung

$$\beta_l(v_{\mathbf{i}}) = t_{i_{l+1}} t_{i_l}^{-1} v_{\mathbf{i}s_l} + (y-1)(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - \gamma_l)(v_{\mathbf{i}}) + (y-1) \sum_{k \leq j} q^{\rho_k - \rho_j} \epsilon_k \epsilon_j t_j t_{k'}^{-1} v_{\mathbf{i}(k)}.$$

Wegen $\mathbf{i}(j) = \mathbf{i}s_l$ und

$$||\mathbf{i}(k)|| = ||\mathbf{i}^1_\lambda|| + ||(k,k')|| + ||\mathbf{i}^3_\lambda|| > ||\mathbf{i}^1_\lambda|| + ||(j',j)|| + ||\mathbf{i}^3_\lambda|| = ||\mathbf{i}(j')|| = ||\mathbf{i}||$$

für alle $k < j$ folgt modulo $W_{\mathbf{i}}$ schließlich

$$\beta_l(v_{\mathbf{i}}) \equiv t_{i_{l+1}} t_{i_l}^{-1} v_{\mathbf{i}s_l} + (y-1)(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - \gamma_l)(v_{\mathbf{i}}) + (y-1) t_j t_{j'}^{-1} v_{\mathbf{i}(j)} =$$
$$y h_{i_{l+1} i_l} v_{\mathbf{i}s_l} + (y-1)(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - \gamma_l)(v_{\mathbf{i}}).$$

Im Fall $i_l < i_{l+1}$ gilt die Gleichung wiederum exakt, falls $i_l \neq i'_{l+1}$ erfüllt ist. Für $i'_{l+1} = i_l =: j \leq m$ berechnet man

$$\beta_l(v_{\mathbf{i}}) = t_{j'} t_j^{-1} v_{\mathbf{i}s_l} + (y-1) \sum_{k>j'} q^{\rho_k + \rho_j} \epsilon_k t_{j'} t_{k'}^{-1} v_{\mathbf{i}(k)},$$

woraus wegen $||\mathbf{i}(k)|| > ||\mathbf{i}||$ für $k > j'$ die Behauptung unmittelbar folgt. □

Bemerkung 3.6.10 *Sei wieder I_J^r der r-te homogene Summand des vom 2-fachen invarianten Tensor J erzeugten Ideals I_J in $\mathcal{T}(V)$. Lemma 3.6.9 zeigt zusammen mit der Tatsache $\gamma_l(V^{\otimes r}) \subseteq I_J^r$ für $1 \leq l < r$, daß $\overline{W}_{\mathbf{i}} + I_J^r$ invariant unter der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $\mathcal{C}_{R,r}$ ist. Wegen $\overline{W}_{\mathbf{j}} \subseteq W_{\mathbf{i}}$ für alle $\mathbf{j}$ mit $||\mathbf{j}|| < ||\mathbf{i}||$ muß damit auch $W_{\mathbf{i}} + I_J^r$ invariant unter $\mathcal{C}_{R,r}$ sein.*

Korollar 3.6.11 *Sei $\mathbf{j} \in I(n,r)$ und $l \in \underline{r}$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ eine Zahl $a_{\mathbf{jk}}(s_l)$ in R (möglicherweise Null), so daß für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$ in $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ gilt:*

$$T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta_l^{-1} = h_{j_{l+1}j_l} T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}s_l) \ + \ \sum a_{\mathbf{jk}}(s_l) T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k}) \quad \textit{falls } j_l > j_{l+1},$$

$$T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta_l = y h_{j_{l+1}j_l} T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}s_l) \ + \ \sum a_{\mathbf{jk}}(s_l) T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k}) \quad \textit{falls } j_l \leq j_{l+1},$$

wobei die Summen jeweils über alle $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ laufen.

Beweis: Lemma 3.6.9 liefert zu $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ Zahlen $a_{\mathbf{jk}}(s_l)$, so daß

$$\beta_l^{-1}(v_{\mathbf{j}}) = h_{j_{l+1}j_l} v_{\mathbf{j}s_l} \ + \ \sum a_{\mathbf{jk}}(s_l) v_{\mathbf{k}} \quad \text{falls } j_l > j_{l+1},$$

$$\beta_l(v_{\mathbf{j}}) = y h_{j_{l+1}j_l} v_{\mathbf{j}s_l} \ + \ \sum a_{\mathbf{jk}}(s_l) v_{\mathbf{k}} \quad \text{falls } j_l \leq j_{l+1},$$

gilt. Daraus folgt die Behauptung des Korollars nach Definition von $T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta_l^{-1}$ und $T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta_l$. □

Korollar 3.6.12 *Sei $\mathbf{j} \in I(n,r)$ und $w \in \mathcal{S}_{\lambda'}$ eine Permutation im Spaltenstabilisator von T^λ. Dann gibt es eine invertierbare Zahl $a_{\mathbf{j}}(w) \in R$ und zu jedem $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ eine Zahl $a_{\mathbf{jk}}(w)$ in R (möglicherweise Null), so daß für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$ in $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ gilt:*

$$T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = a_{\mathbf{j}}(w) T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}w) \ + \ \sum a_{\mathbf{jk}}(w) T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k}),$$

wobei die Summen über alle $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ läuft.

Beweis: Wir führen vollständige Induktion nach der Länge von w. Im Fall der Länge Null ist die Behauptung klar. Für den Induktionsschritt zerlegt man $w = w's_l$ mit $w', s_l \in \mathcal{S}_{\lambda'}$ und $l(w') = l(w) - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = a_{\mathbf{j}}(w') T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}w') \ + \ \sum a_{\mathbf{jk}}(w') T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k}),$$

wobei die Summe über $\mathbf{k}$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ läuft. Die Behauptung folgt daraus mit Korollar 3.6.11, da nach (3.6.4) sowohl $T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}w') = -T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}w')\beta_l^{-1}$ als auch $T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}w') = -T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}w')\beta_l$ erfüllt ist. Man beachte, daß aufgrund von $|\mathbf{j}| = |\mathbf{j}w'|$ auch $||\mathbf{j}|| = ||\mathbf{j}w'||$ gilt. □

Es sei bemerkt, daß man die invertierbaren Zahlen $a_{\mathbf{j}}(w)$ aus dem Korollar rekursiv aus

$$a_{\mathbf{j}}(w) = a_{\mathbf{j}}(w')a_{\mathbf{j}w'}(s_l) \quad \text{mit} \quad a_{\mathbf{k}}(s_l) = \begin{cases} -h_{k_{l+1}k_l} & k_l > k_{l+1} \\ -yh_{k_{l+1}k_l} & k_l \leq k_{l+1} \end{cases}$$

für $w = w's_l$ mit $l(w) = l(w') + 1$ berechnen kann. Wie in (2.7) setzen wir $h_{\mathbf{i}}(w) := \prod h_{i_{w(k)}i_{w(j)}}$, wobei das Produkt über alle Fehlstände $1 \leq j < k \leq r$ mit $w(j) > w(k)$ läuft. Man erhält dann aus (2.8)

$$a_{\mathbf{j}}(w) = (-1)^{l(w)}y^t h_{\mathbf{j}}(w).$$

Darin ist t die Zahl der Faktoren h_{ij} in $h_{\mathbf{j}}(w)$ mit $i \geq j$. Wir benötigen die genaue Kenntnis der Zahlen $a_{\mathbf{j}}(w)$ jedoch nicht, sondern lediglich ihre Invertierbarkeit.

Wir ziehen nun weitere Konsequenzen aus Lemma 3.6.9 in einer etwas spezielleren Situation bezüglich des Multi-Index $\mathbf{i}$.

Lemma 3.6.13 *Sei $\mathbf{i} \in I(n,r)$ mit $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r$ und $w \in \mathcal{S}_r$ beliebig. Dann gilt modulo $W'_{\mathbf{i}} = W_{\mathbf{i}} + I^r_J$*

$$\beta(w^{-1})(v_{\mathbf{i}}) \equiv y^{l(w)}h_{\mathbf{i}}(w)v_{\mathbf{i}w}.$$

Beweis: Wir führen vollständige Induktion nach r. Im Fall $r = 1$ folgt $w = \mathrm{id}$ und es ist nichts zu zeigen. Im Fall $r > 1$ fassen wir $\mathcal{S}_{r-1}$ wiederum als diejenige parabolische Untergruppe von $\mathcal{S}_r$ auf, die von den ersten $r-2$ Nachbarvertauschungen $s_1, \ldots, s_{r-2}$ erzeugt wird, die also r fest läßt. Liegt nun w in dieser Untergruppe, so folgt die Behauptung direkt aus der Induktionsvoraussetzung. Andernfalls schreiben wir gemäß (2.4) $w = w's_{r-1|j}$ mit $w' \in \mathcal{S}_{r-1}$ und der s-Kette $s_{r-1|j} = s_{r-1}s_{r-2}\ldots s_{j+1}s_j$ für geeignetes $j < r$ wobei $l(w) = l(w') + r - j$ gelte. Nach Induktionsvoraussetzung berechnet man aufgrund der Invarianz von $W'_{\mathbf{i}}$ gemäß Bemerkung 3.6.10

$$\beta(w^{-1})(v_{\mathbf{i}}) \equiv \beta(s_{r-1|j}^{-1})(y^{l(w')}h_{\mathbf{i}}(w')v_{\mathbf{i}w'}) = y^{l(w')}h_{\mathbf{i}}(w')\beta_j\beta_{j+1}\ldots\beta_{r-1}(v_{\mathbf{i}w'}) \equiv$$

$$y^{l(w')}y^{r-j}h_{\mathbf{i}}(w')h_{i_{w'(r)}i_{w'(r-1)}}h_{i_{w'(r)}i_{w'(r-2)}}\ldots h_{i_{w'(r)}i_{w'(j)}}v_{\mathbf{i}w's_{r-1|j}} = y^{l(w)}h_{\mathbf{i}}(w)v_{\mathbf{i}w}.$$

Die letzte Kongruenz darin erhält man durch $r-j$-malige Anwendung von Lemma 3.6.9, da wegen der Voraussetzung über $\mathbf{i}$ offenbar $i_{w'(j)}, i_{w'(j+1)}, \ldots, i_{w'(r-1)} \leq i_r = i_{w'(r)}$ gilt. Dabei beachte man auch (2.8) für das Rechnen mit den $h_{\mathbf{i}}(w)$. □

Auch hier benötigen wir von den Vorzahlen $y^{l(w)}h_{\mathbf{i}}(w)$ lediglich die Invertierbarkeit in R. Weiterhin sei bemerkt, daß man für $\mathbf{i}$ mit $i_1 > i_2 > \ldots > i_r$ in analoger Weise $\beta(w)^{-1}(v_{\mathbf{i}}) \equiv h_{\mathbf{i}}(w)v_{\mathbf{i}w}$ modulo $W'_{\mathbf{i}}$ erhält.

Korollar 3.6.14 *Sei $\mathbf{j} \in I(n,r)$ und $1 \leq l < k \leq r$ mit $j_l \leq j_{l+1} \leq \ldots \leq j_{k-1} \leq j_k$ gegeben. Weiterhin sei $w \in \mathcal{S}_r$ mit $w(i) = i$ für $1 \leq i \leq l$ und $k < i \leq r$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ eine Zahl $a'_{\mathbf{jk}}(w)$ in R (möglicherweise Null), so daß für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$ in $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ gilt:*

$$T^\lambda_q(\mathbf{i}:\mathbf{j})\beta(w) = y^{l(w)}h_{\mathbf{j}}(w^{-1})T^\lambda_q(\mathbf{i}:\mathbf{j}w^{-1}) \; + \; \sum a'_{\mathbf{jk}}(w)T^\lambda_q(\mathbf{i}:\mathbf{k}),$$

wobei die Summen über alle $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ läuft.

Beweis: Sei $\mathbf{h} := (j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}) \in I(n, l-1)$, $\mathbf{f} := (j_l, j_{l+1}, \ldots, j_k) \in I(n, k-l+1)$ und $\mathbf{l} := (j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_r) \in I(n, r-k)$. Es gilt dann $\mathbf{j} = \mathbf{h} + \mathbf{f} + \mathbf{l}$ und $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_{k-l+1}$. Wir betten $\mathcal{S}_{k-l+1}$ durch $s_i \mapsto s_{i+l-1}$ in $\mathcal{S}_r$ ein. Sei dann $\bar{w}$ das Urbild von w unter dieser Einbettung. Dieses existiert aufgrund der Annahme über w. Lemma 3.6.13 liefert dann Zahlen $a'_{\mathbf{ff}'}(\bar{w})$ zu $\mathbf{f}' \in I(n, k-l+1)$ mit $||\mathbf{f}'|| \geq ||\mathbf{f}||$, so daß modulo I_J^r gilt:

$$\beta(\bar{w})(v_{\mathbf{f}}) \equiv y^{l(\bar{w})} h_{\mathbf{f}}(\bar{w}^{-1}) v_{\mathbf{f}\bar{w}^{-1}} + \sum_{||\mathbf{f}'|| > ||\mathbf{f}||} a'_{\mathbf{ff}'}(\bar{w}) v_{\mathbf{f}'}.$$

Dies impliziert

$$\beta(w)(v_{\mathbf{j}}) = v_{\mathbf{h}} \beta(\bar{w})(v_{\mathbf{f}}) v_{\mathbf{l}} \equiv y^{l(\bar{w})} h_{\mathbf{f}}(\bar{w}^{-1}) v_{\mathbf{h}+\mathbf{f}\bar{w}^{-1}+\mathbf{l}} + \sum_{||\mathbf{f}'|| > ||\mathbf{f}||} a'_{\mathbf{ff}'}(\bar{w}) v_{\mathbf{h}+\mathbf{f}'+\mathbf{l}}.$$

Nun gilt nach Definition von $\bar{w}$ und $\mathbf{f}$ offenbar $\mathbf{j}w^{-1} = \mathbf{h} + \mathbf{f}\bar{w}^{-1} + \mathbf{l}$, sowie $l(w) = l(\bar{w})$ und $h_{\mathbf{j}}(w^{-1}) = h_{\mathbf{f}}(\bar{w}^{-1})$. Ausserdem gilt für $\mathbf{k} := \mathbf{h} + \mathbf{f}' + \mathbf{l}$ nach (3.22) $||\mathbf{k}|| = ||\mathbf{h} + \mathbf{f}' + \mathbf{l}|| > ||\mathbf{h} + \mathbf{f} + \mathbf{l}|| = ||\mathbf{j}||$ für alle $\mathbf{f}'$ mit $||\mathbf{f}'|| > ||\mathbf{f}||$. Setzt man dann $a'_{\mathbf{jk}}(w) := a'_{\mathbf{ff}'}(\bar{w})$, so folgt die Behauptung aus Lemma 3.6.5. □

3.7 Der "Straightening-Algorithmus" für Standardtableaus

Wir sind bereits in der Lage, zu zeigen, daß bezüglich einer beliebigen Ordnung $\trianglelefteq$ die Halbkoalgebra $A^{\mathrm{sh}}(n, r)$ von den Bideterminanten

$$\{T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) |\ \lambda \in \Lambda^+(n, r),\ \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I_\lambda^{\trianglelefteq}\}$$

als R-Modul erzeugt wird. Dies ergibt sich aus dem sogenannten *Straightening Algorithmus*, dessen ersten Teil wir hier beweisen. Dies ist derjenige Teil des Algorithmus, der im klassischen Fall auf das Erzeugendensystem von $A_R(n, r)$ gemäß Satz 3.3.1 führt.

Wir fixieren die Bezeichnung $\mathcal{K} := A^{\mathrm{sh}}(n, r)$ und führen eine Ordnung auf der Menge $\Lambda^+(r)$ aller Partitionen von r ein. Dazu verwenden wir zwar auch hier die lexikographische Ordnung, aber nicht bezüglich der gegebenen Partitionen selbst, sondern vielmehr ihrer dualen:

$$\lambda < \mu :\Longleftrightarrow \lambda' \sqsubset \mu'$$

Um Verwechslungen zu vermeiden haben wir dabei (ausnahmsweise) $\sqsubset$ für die lexikographische Ordnung auf $\Lambda^+(r) = \Lambda^+(r, r)$ geschrieben. In der Ordnung $>$ ist ω_r das größte und $\mu_r := (r, 0, \ldots, 0)$ das kleinste Element. Sei dann $\mathcal{K}(> \lambda)$ bzw. $\mathcal{K}(\geq \lambda)$ der R-lineare Aufspann aller Bideterminanten $T_q^\mu(\mathbf{i} : \mathbf{j})$ mit $\mu > \lambda$ bzw. $\mu \geq \lambda$ und $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n, r)$. Für ω_r setzen wir $\mathcal{K}(> \omega_r) := (0)$. Es ist klar, daß $\mathcal{K}(\geq \mu_r) = \mathcal{K}$ gilt, da die μ_r-Bideterminanten gerade die Monome in den x_{ij} sind.

Die Aufgabe, ein Erzeugendensystem von $\mathcal{K}$ zu finden, ist damit darauf reduziert ein Erzeugendensystem von $\mathcal{K}(\geq \lambda)/\mathcal{K}(> \lambda)$ für jedes $\lambda \in \Lambda^+(r)$ zu finden.

Zur Formulierung des Straightening Algorithmus benötigt man eine Abbildung $[] \cdot []$ von $I(n,r)$ in eine geordnete Menge. Für letztere wählen wir die Menge $\mathcal{N} := \Lambda(m,r) \times I(n,r)$ der Paare einer Kompositionen von r in m-Teile mit einem Multi-Index von $\underline{r}$ nach $\underline{n}$. Die Abbildung sei durch $[]\mathbf{i}[] := (||\mathbf{i}||, \mathbf{i})$ gegeben. Die Idee ist, Multi-Indizes erst nach ihrem m-Inhalt und dann bezüglich ihrer Lexikographischen Ordnung zu vergleichen. Daher definieren wir die Ordnung auf $\mathcal{N}$, indem wir zunächst $\Lambda(m,r)$ und $I(n,r)$ jeweils lexikographisch ordnen und zwar in Bezug auf $\Lambda(m,r)$ wie in 3.6.3 durch die gewöhnliche lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Z}^m$ und bezüglich $I(n,r) = \underline{n}^{\underline{r}}$ durch die von $\trianglelefteq$ induzierte lexikographische Ordnung, die wir ebenfalls mit $\trianglelefteq$ bezeichnen. Die Ordnung auf $\mathcal{N}$ sei dann gegeben durch

$$(\lambda, \mathbf{i}) > (\mu, \mathbf{j}) :\Longleftrightarrow \lambda > \mu \text{ oder } (\lambda = \mu \text{ und } \mathbf{i} \trianglelefteq \mathbf{j}).$$

Satz 3.7.1 (Straightening Algorithmus, Teil 1) *Sei $\lambda \in \Lambda^+(r)$ eine Partition und $\mathbf{j} \in I(n,r) \backslash I_\lambda^{\trianglelefteq}$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $[]\mathbf{k}[] > []\mathbf{j}[]$ eine Zahl $a_{\mathbf{jk}} \in R$ (möglicherweise Null), so daß in $\mathcal{K}$ für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$ gilt:*

$$T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) \equiv \sum_{[]\mathbf{k}[] > []\mathbf{j}[]} a_{\mathbf{jk}} T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{k}) \quad mod \quad \mathcal{K}(> \lambda)$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $T_\mathbf{j}^\lambda$ kein Standardtableau. Dementsprechend unterteilen wir den Beweis in die zwei folgenden Fälle:

1. $T_\mathbf{j}^\lambda$ ist nicht spaltenstandard.
2. $T_\mathbf{j}^\lambda$ ist zwar spaltenstandard aber nicht zeilenstandard.

Fall 1:

Sei $T_\mathbf{j}^\lambda$ nicht spaltenstandard. Dann gibt es in einer Spalte $\mathbf{j}_\lambda^s$ des Tableaus zwei aufeinanderfolgende Einträge, von denen der erste größer oder gleich dem zweiten ist. Seien j_l und j_{l+1} diese benachbarten Indizes. Im Fall $j_l = j_{l+1}$ folgt nach Korollar 3.6.2 sogar $T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) = 0$. Im Fall $j_{l+1} \trianglelefteq j_l$ wenden wir Korollar 3.6.12 an. Da j_l und j_{l+1} in der selben Spalte von $T_\mathbf{j}^\lambda$ liegen, muß s_l im Spaltenstabilisator $S(T^\lambda) = \mathcal{S}_{\lambda'}$ enthalten sein. Daher liefert das Korollar

$$T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) = a_\mathbf{j}(s_l) T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}s_l) \ + \sum a_{\mathbf{jk}}(s_l) T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{k})$$

Für die $\mathbf{k}$ in der Summe gilt $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ und damit $[]\mathbf{k}[] > []\mathbf{j}[]$. Hingegen hat man $||\mathbf{j}|| = ||\mathbf{j}s_l||$. Allerdings kommt $\mathbf{j}s_l$ wegen $j_{l+1} \trianglelefteq j_l$ vor $\mathbf{j}$ in der lexikographischen Ordnung. Also gilt auch $[]\mathbf{j}s_l[] > []\mathbf{j}[]$ und die Behauptung folgt.

Fall 2:

Hier ist die Beweisführung an den entsprechenden Beweis in Bezug auf $A_R(n,r)$ in [Ma] (2.5.7) angelehnt. Das wesentliche Hilfsmittel ist die Laplace-Dualität 3.6.6.

Sei also $T_{\mathbf{j}}^{\lambda}$ zwar spaltenstandard, aber nicht zeilenstandard, und $l \in \underline{r}$ der kleinste Index, für den j_l größer als sein rechter Nachbar $j_{l'}$ in $T_{\mathbf{j}}^{\lambda}$ ist. Der Eintrag j_l befinde sich in der s-ten Spalte $\mathbf{j}_{\lambda}^{s}$ und demnach $j_{l'}$ in der $s+1$-ten $\mathbf{j}_{\lambda}^{s+1}$ mit $1 \leq s < \lambda_1$. Es gilt offenbar $l' = l + \lambda'_s$. Die Zeile, in der beide Einträge liegen, habe den Index t mit $1 \leq t \leq \lambda'_s$. Wir veranschaulichen dies durch

$$T_{\mathbf{j}}^{\lambda} = \ldots \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{\mathbf{j}^{s}_{\lambda'}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{j}^{s+1}_{\lambda'}} & \\ \vdots & \vdots & \\ j_{l-1} & j_{l'-1} & t-1 \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c}{j_l} & j_{l'} & t \\ \cline{2-2} j_{l+1} & j_{l'+1} & t+1 \\ \vdots & \vdots & \end{array} \quad \ldots$$

worin nach Voraussetung $\ldots \trianglelefteq j_{l'-1} \trianglelefteq j_{l'} \trianglelefteq j_l \trianglelefteq j_{l+1} \trianglelefteq \ldots$ gilt. Wir verfeinern die duale Partition λ' durch eine Komposition $\eta \in \Lambda(p+2, r)$, wobei $p := \lambda_1$ die Zahl der Spalten des Diagramms von λ ist, indem wir die s-te und $(s+1)$-te Spalte des Diagramms vor bzw. nach der t-ten Zeile aufspalten:

$$\eta_i := \begin{cases} \lambda'_i & i < s \\ t-1 & i = s \\ \lambda'_s - t + 1 & i = s+1 \\ t & i = s+2 \\ \lambda'_{s+1} - t & i = s+3 \\ \lambda'_{i-2} & i > s+3 \end{cases}, \qquad \mu_i := \begin{cases} \eta_i & i \leq s \\ \eta_{s+1} + \eta_{s+2} & i = s+1 \\ \eta_{i+1} & i > s+2 \end{cases}.$$

Dieses η ist offenbar die gröbste gemeinsame Verfeinerung der Partition λ' und der rechts definierten Komposition $\mu \in \Lambda(p+1, r)$ von r. Zur besseren Illustration der Situation sei $h := l - t + 1 = \lambda'_1 + \ldots + \lambda'_{s-1} + 1$ der Index des ersten Eintrages der s-ten Spalte und $k := \lambda'_s$ bzw. $k' := \lambda'_{s+1}$ die Längen der beiden fraglichen Spalten. Dann gilt

$$\mathbf{j}_{\eta}^{s} = (j_h, \ldots, j_{l-1}), \quad \mathbf{j}_{\eta}^{s+1} = (j_l, \ldots, j_{h+k-1}),$$

$$\mathbf{j}_{\eta}^{s+2} = (j_{h+k}, \ldots, j_{l'}), \quad \mathbf{j}_{\eta}^{s+3} = (j_{l'+1}, \ldots, j_{h+k+k'-1})$$

also

$$\mathbf{j}_{\lambda'}^{s} = \mathbf{j}_{\eta}^{s} + \mathbf{j}_{\eta}^{s+1}, \quad \mathbf{j}_{\lambda'}^{s+1} = \mathbf{j}_{\eta}^{s+2} + \mathbf{j}_{\eta}^{s+3} \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_{\mu}^{s+1} = \mathbf{j}_{\eta}^{s+1} + \mathbf{j}_{\eta}^{s+2}.$$

Die übrigen nicht aufgeführten λ'- bzw. μ-Summanden von $\mathbf{j}$ stimmen jeweils mit entsprechenden η-Summanden überein. Zur Anwendung der Laplace-Dualität benötigen wir nun transversale Nebenklassenvertretersysteme von $\mathcal{S}_{\eta} = \mathcal{S}_{\lambda'} \cap \mathcal{S}_{\mu}$ in $\mathcal{S}_{\lambda'}$ bzw. $\mathcal{S}_{\mu}$. Es ist klar, daß man ein transversales Rechtsnebenklassenvertetersystem von $\mathcal{S}_{\eta}$ in $\mathcal{S}_{\mu} \cong \mathcal{S}_{\mu_1} \times \ldots \times \mathcal{S}_{\mu_{p+1}}$ bereits im $(s+1)$-ten Faktor $\mathcal{S}_{\mu_{s+1}}$ findet, und zwar als Nebenklassenvertretersystem der parabolischen Untergruppe $\mathcal{S}_{\eta_{s+1}} \times \mathcal{S}_{\eta_{s+2}}$ von $\mathcal{S}_{\mu_{s+1}}$. Wir wählen die Menge der ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertreter $\mathcal{D}_{(\eta_{s+1}, \eta_{s+2})}$ (vgl. 2.3) als Menge X. Wie bereits mehrfach bemerkt, gilt für diese bekannterweise

$l(wu) = l(w) + l(u)$ für $u \in X$ und $w \in \mathcal{S}_{\eta_{s+1}} \times \mathcal{S}_{\eta_{s+2}}$. Auf ähnliche Weise findet man ein transversales Linksnebenklassenvertretersystem von $\mathcal{S}_\eta$ in $\mathcal{S}_{\lambda'}$, welches der Bedingung $l(vw) = l(v) + l(w)$ für $w \in \mathcal{S}_\eta$ und $v \in Y$ genügt. Genauer gesagt, hat man ausgezeichnete Nebenklassenvertreter von $\mathcal{S}_{\eta_s} \times \mathcal{S}_{\eta_{s+1}}$ in $\mathcal{S}_{\lambda'_s}$ mit solchen von $\mathcal{S}_{\eta_{s+2}} \times \mathcal{S}_{\eta_{s+3}}$ in $\mathcal{S}_{\lambda'_{s+1}}$ zu kombinieren.

Wir wenden die Laplace-Dualität jedoch nicht auf das Multi-Indexpaar $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ selbst an, sondern wir sortieren zuvor $\mathbf{j}$ zu einem $\mathbf{j}' := \mathbf{j}w$ mit $w \in \mathcal{S}_{\mu_{s+1}} \subseteq \mathcal{S}_r$ um, und zwar so, daß $j'_l < j'_{l+1} < \ldots < j'_{l'-1} < j'_{l'}$ und $j'_i = j_i$ für $1 \le i < l$ und $l' < i \le r$ gilt. Da $\mathbf{j}^{s+1}_\mu = (j_l, \ldots, j_{l'})$ aufgrund von $j_{h+k} \trianglelefteq j_{h-k+1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq j_{l'} \trianglelefteq j_l \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq j_{h+k-1}$ genau $\mu_{s+1} = \lambda'_s + 1$ Elemente besitzt, existiert w in eindeutiger Weise. Dies gestattet uns Gebrauch von Korollar 3.6.14 zu machen. Die Laplace-Dualität 3.6.7 liefert zunächst

$$\sum_{u \in X} (-y)^{-l(u)} T^\lambda_q(\mathbf{i} : \mathbf{j}')\beta(u) = \sum_{v \in Y} (-y)^{-l(v)} \beta(v) t^\mu_q(\mathbf{i} : \mathbf{j}'). \tag{3.23}$$

Ist nun $\bar{\mu} \in \Lambda^+(p+1, r)$ die durch Permutation der Komponenten μ_i entstehende, eindeutig bestimmte Partition, so ist die rechte Seite der Gleichung gemäß Lemma 3.6.8 eine Linearkombination von Bideterminanten $T^{\bar{\mu}'}_q(\mathbf{k} : \mathbf{l})$. Folglich liegt die rechte Seite von (3.23) in $\mathcal{K}(> \lambda)$ sobald $\bar{\mu}' > \lambda$ gezeigt ist. Dies ist nach Definition der Ordnung auf $\Lambda^+(r)$ zu $\bar{\mu} > \lambda'$ äquivalent. Das Bestehen der letzten Ungleichung folgt, da die längste Spalte, die im Diagramm $[\bar{\mu}']$ gegenüber $[\lambda]$ weggelassen ist, die Länge λ'_s besitzt, wohingegen eine Spalte der Länge $\lambda'_s + 1 = \mu_{s+1}$ hinzukommt. Auf der linken Seite von (3.23) berechnet man nun mit Korollar 3.6.14

$$(-y)^{-l(u)} T^\lambda_q(\mathbf{i} : \mathbf{j}')\beta(u) = \operatorname{sign}(u) h_{\mathbf{j}'}(u^{-1}) T^\lambda_q(\mathbf{i} : \mathbf{j}'u^{-1}) + \sum (-y)^{-l(u)} a'_{\mathbf{j}'\mathbf{k}}(u) T^\lambda_q(\mathbf{i} : \mathbf{k}).$$

Für $u \in X$ gilt $\tilde{u} := uw^{-1} \in \mathcal{S}_{\mu_{s+1}}$, da w in $\mathcal{S}_{\mu_{s+1}}$ enthalten ist. Es gibt einen eindeutig bestimmten Nebenklassenvertreter $u_0 \in X$ mit $\mathcal{S}_\eta u_0 = \mathcal{S}_\eta w$ und genau für diesen gilt $\tilde{u}_0 \in \mathcal{S}_\eta$. Im Fall $u \neq u_0$ gibt es daher ein t mit $l \le t < h+k$ und $h+k \le \tilde{u}^{-1}(t) \le l'$. Denn andernfalls würde $\tilde{u}^{-1}(\{l, l+1, \ldots, h+k-1\}) = \{l, l+1, \ldots, h+k-1\}$ und damit $\tilde{u}^{-1} \in \mathcal{S}_\eta$ folgen. Die Transposition $\hat{u} := (l, t)$ liegt dann offenkundig in $\mathcal{S}_\eta$. Im Fall von u_0 setzen wir $\hat{u}_0 := \tilde{u}_0 \in \mathcal{S}_\eta$. Man berechnet dann mit Korollar 3.6.12

$$T^\lambda_q(\mathbf{i} : \mathbf{j}'u^{-1}) = T^\lambda_q(\mathbf{i} : \mathbf{j}\tilde{u}^{-1}) = a_{\mathbf{j}\tilde{u}^{-1}}(\hat{u}) T^\lambda_q(\mathbf{i} : \mathbf{j}\tilde{u}^{-1}\hat{u}) + \sum a_{(\mathbf{j}\tilde{u}^{-1})\mathbf{k}}(\hat{u}) T^\lambda_q(\mathbf{i} : \mathbf{k}).$$

Die Summe läuft über $\mathbf{k}$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}\tilde{u}^{-1}|| = ||\mathbf{j}||$. Setzt man nun für $\mathbf{k}$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$

$$\bar{a}_{\mathbf{jk}} := \sum_{u \in X} (-y)^{-l(u)} a'_{\mathbf{j}'\mathbf{k}}(u) + \operatorname{sign}(u) h_{\mathbf{j}'}(u^{-1}) a_{(\mathbf{j}\tilde{u}^{-1})\mathbf{k}}(\hat{u})$$

und für $\mathbf{k}$ mit $||\mathbf{k}|| = ||\mathbf{j}||$

$$\bar{a}_{\mathbf{jk}} := \begin{cases} \operatorname{sign}(u) h_{\mathbf{j}'}(u^{-1}) a_{\mathbf{j}\tilde{u}^{-1}}(\hat{u}) & \text{falls } \mathbf{k} = \mathbf{j}\tilde{u}^{-1}\hat{u} \neq \mathbf{j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so erhält man die gewünschte Formel zunächst für $-\mathrm{sign}(u_0)h_{\mathbf{j}'}(u_0^{-1})a_{\mathbf{j}\tilde{u_0}^{-1}}(\hat{u}_0)T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})$. Denn für $u \neq u_0$ gilt $\mathbf{k} := \mathbf{j}\tilde{u}^{-1}\hat{u} \trianglelefteq \mathbf{j}$ in der lexikographischen Ordnung bezüglich $\trianglelefteq$, da in diesem Falle nach Konstruktion von $\tilde{u}$ und $\hat{u}$

$$k_l = j_{\tilde{u}^{-1}\hat{u}(l)} = j_{\tilde{u}^{-1}(t)} \in \{j_{h+k}, j_{h+k+1}, \ldots, j_{l'}\}$$

also $k_l \trianglelefteq j_l$ gilt. Wegen $k_i = j_i$ für $i < l$ folgt daraus tatsächlich $\mathbf{k} \trianglelefteq \mathbf{j}$. Aufgrund der Invertierbarkeit der Vorzahl $a_{\mathbf{j}} := -\mathrm{sign}(u_0)h_{\mathbf{j}'}(u_0^{-1})a_{\mathbf{j}\tilde{u_0}^{-1}}(\hat{u}_0)$ von $T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})$ erhält man schliesslich die Behauptung mit $a_{\mathbf{jk}} := a_{\mathbf{j}}^{-1}\bar{a}_{\mathbf{jk}}$. □

Man beachte, daß im Beweis lediglich im 2. Fall Elemente von $\mathcal{K}(>\lambda)$ benötigt wurden.

Bemerkung 3.7.2 *Im klassischen Fall sind die Zahlen $a_{\mathbf{jk}}(w)$ aus Korollar 3.6.12 und $a'_{\mathbf{jk}}(w)$ aus Korollar 3.6.14 für alle $\mathbf{k}$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ Null. Dies zeigt, daß man den Straightening Algorithmus im klassischen Fall unabhängig von m-Inhalten und Kompositionen aus $\Lambda(m,r)$ erhält. Er gilt hier bekanntlich auch in $A^s(n,r)$, ja sogar in $A_R(n,r)$ (vgl. Satz 3.3.1). Der Umstand, daß im Quantenfall auch Summanden anderer Inhalte auftreten, ist der Grund dafür, daß wir spiegelsymplektische Tableaus anstelle von symplektischen verwenden. Genauer wird dies im Beweis von Satz 3.7.5 deutlich (vgl. Bemerkung 3.7.6).*

Korollar 3.7.3 *Sei $\lambda \in \Lambda^+(r)$ und $\mathbf{j} \in I(n,r)$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{k} \in I_\lambda^{\trianglelefteq}$ eine Zahl $a_{\mathbf{jk}} \in R$ (möglicherweise Null), so daß in $\mathcal{K}$ für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$ gilt:*

$$T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) \equiv \sum_{\mathbf{k}\in I_\lambda^{\trianglelefteq}} a_{\mathbf{jk}} T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k}) \quad \mathit{mod}\ \mathcal{K}(>\lambda).$$

Beweis: Im Fall $\mathbf{j} \in I_\lambda^{\trianglelefteq}$ ist die Behauptung trivialerweise mit $a_{\mathbf{jk}} = \delta_{\mathbf{jk}}$ erfüllt. Sei daher $\mathbf{j} \notin I_\lambda^{\trianglelefteq}$. Da $\mathcal{N}$ endlich ist, muß die sukkzessive Elimination der $T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k})$ in der Formel des Straigthening Algorithmus mit $a_{\mathbf{jk}} \neq 0$ und $\mathbf{k} \notin I_\lambda^{\trianglelefteq}$ nach endlich vielen Schritten terminieren. Daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 3.7.4 *Die Menge $\{T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\ \lambda \in \Lambda^+(n,r),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{\trianglelefteq}\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathcal{K}$*

Beweis: Wegen Satz 2.5.2 reicht es offenbar dies im Fall $R = \mathcal{Z}$ zu zeigen. Man beachte dabei, daß der Isomorphismus μ_S gemäß Satz 1.5.10 mit der Definition von Bideterminaten und g verträglich ist. Es steht uns dann der semilinearen Antiautomorphismus ϑ_r der Halbkoalgebra $\mathcal{K}$ aus 3.5 zur Verfügung. Diesen wenden auf die Formel aus Korollar 3.7.3 an und erhalten wegen Satz 3.5.3

$$T_q^\lambda(\mathbf{j}:\mathbf{i}) \equiv \sum_{\mathbf{k}\in I_\lambda^{\trianglelefteq}} \theta(a_{\mathbf{jk}}) T_q^\lambda(\mathbf{k}:\mathbf{i}) \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{K}(>\lambda),$$

mit den ebenso von $\mathbf{i}$ unabhängigen Zahlen $\theta(a_{\mathbf{jk}})$. Aus beiden Formel zusammen folgt, daß die Menge

$$\{T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})|\ \mathbf{i},\mathbf{j}\in I_\lambda^{\trianglelefteq}\}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathcal{K}(\geq\lambda)/\mathcal{K}(>\lambda)$ ist. Denn man berechnet aus diesen schließlich

$$T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})\equiv\sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in I_\lambda^{\trianglelefteq}}\theta(a_{\mathbf{ik}})a_{\mathbf{jl}}T_q^\lambda(\mathbf{k}:\mathbf{l})\mod\mathcal{K}(>\lambda).$$

Wie bereits zu Beginn des Paragraphen erwähnt, folgt daraus die Behauptung. Man beachte dabei, daß Standardtableaus lediglich zu $\lambda\in\Lambda^+(n,r)$ existieren. □

Die Mächtigkeit des Erzeugendensystem aus dem Korollar ist gleich der Dimension von $A_K(n,r)$. Um zu einer Basis von $A^{\mathrm{sh}}(n,r)$ zu kommen, müssen also noch Elemente weggelassen werden. Im zweiten Teil des Straightening Algorithmus werden wir uns auf den Fall $\trianglelefteq=\prec$ beschränken und nur die spiegelsymplektische Tableaus zulassen. Wir führen dies zunächst im einfachsten Fall $r=2$ vor, da wir ohnehin bei der Verifikation der $A^{\mathrm{s}}(n,r)$-Komodulstruktur der quantensymplektischen äußeren Algebra das Freisein von $A^{\mathrm{s}}(n,2)$ bereits benötigen.

Satz 3.7.5 *Die Menge* $\mathbf{C}_2=\{T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})|\ \lambda\in\Lambda^+(m,2),\ \mathbf{i},\mathbf{j}\in I_\lambda^{\mathrm{mys}}\}$ *ist ein Erzeugendensystem von* $\mathcal{K}=A^{\mathrm{sh}}(n,2)$ *und* $\mathbf{B}_2=\mathbf{C}_2\cup\{g\}$ *ein solches von* $A^{\mathrm{s}}(n,2)$.

Beweis: Die Menge $\Lambda^+(m,2)$ besitzt im Fall $m\geq2$ genau zwei Partitionen $2\omega_1$ und ω_2. Im ersten Fall gilt $I_{2\omega_1}^{\prec}=I_{2\omega_1}^{\mathrm{mys}}$. Lediglich im zweiten Fall gibt es genau ein nicht spiegelsymplektisches Standard Tableau $T_{\mathbf{j}}^{\omega_2}$, nämlich für $\mathbf{j}=(m',m)\in I_{\omega_2}^{\prec}\backslash I_{\omega_2}^{\mathrm{mys}}$. Nach (3.11) gilt in $\mathcal{K}$

$$T_q^{\omega_2}(\mathbf{i}:\mathbf{j}s_1)=\det{}_q(\mathbf{i},(m,m'))=-\sum_{i=1}^{m-1}q^{-i}t_i\det{}_q(\mathbf{i},(i,i')).$$

Nun gilt aber $[](i,i')[]>[](m',m)[]$ für alle $i<m$. Zusammen mit Korollar 3.6.12 folgt daraus, daß man Satz 3.7.1 ebenso mit $I_{2\omega_1}^{\mathrm{mys}}$ und $I_{\omega_2}^{\mathrm{mys}}$ anstelle von $I_{2\omega_1}^{\prec}$ bzw. $I_{\omega_2}^{\prec}$ beweisen kann. Die Behauptung bezüglich $\mathcal{K}$ ergibt sich daraus in gleicher Weise wie Korollar 3.7.4. Die zweite Behauptung folgt sofort aus der ersten, da der homogene Summand G_2 des von g erzeugten Ideals in $A^{\mathrm{s}}(n)$ gerade der eindimensionale Aufspann von g ist. □

Bemerkung 3.7.6 *Würde man symplektische Tableaus anstelle von spiegelsymplektischen verwenden, so hätte man im Beweis des Satzes anstatt von* (m',m) *als einziges Element von* $I_{\omega_2}^{\ll}\backslash I_{\omega_2}^{\mathrm{sym}}$ *den zweifachen Index* $(1',1)$ *zu betrachten. Dessen m-Inhalt ist aber kleiner als derjenige der übrigen* (i,i') *für* $i>1$. *Daher ist obige Beweisführung hier nicht möglich. Gemäß Bemerkung 3.7.2 hat man im klassischen Fall hingegen keine Schwierigkeiten (siehe Bemerkung 3.13.5).*

Satz 3.7.7 *$A^{\mathrm{s}}(n,2)$ ist für jeden Integritätsbereich und zu jeder Einheit q und jedes Z-Parametertupel Z ein freier R-Modul mit Basis $\mathbf{B}_2$.*

Beweis: Nach Satz 3.7.5 bleibt die lineare Unabhängigkeit von $\mathbf{B}_2$ zu zeigen. Die Elementanzahl von $\mathbf{B}_2$ ist nach Satz 3.3.3 gleich der Dimension von $A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{C}}(n,2)$, was nach Korollar 2.5.10 mit der Dimension von $A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{K},Q,Z}(n,2)$ über dem Quotientenkörper $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}$ übereinstimmt. Also ist $\mathbf{B}_2$ im Fall $R = \mathbb{K}$ linear unabhängig. Wegen Satz 2.5.2 kann dann $\mathbf{B}_2$ allerdings auch nicht im Fall $R = \mathcal{Z}$ linear abhängig sein (vgl. Korollar A.2.3). Aus dem selben Satz folgt daraus die Behauptung im allgemeinen Fall, da man einen beliebigen Integritätsbereich R mit Einheit q und Z-Parametertupel Z bezüglich diesen als $\mathcal{Z}$-Algebra auffassen kann. □

Bemerkung 3.7.8 *Mit dem einzigen Unterschied, daß die Herleitung der Hilfsmittel des Straightening Algorithmus (vor allem in 3.6) erheblich kürzer ausgefallen wäre, läßt sich all dies auch für die Quantendeterminanten in $A_{R,q}(n)$ gemäß Bemerkung 3.3.2 zeigen. Da das Freisein von $A_{R,q}(n,r)$ über R aber bekannt ist, erhält man als q-analoge Version von Satz 3.3.1, daß die* quantenlinearen Bideterminanten *zu $\lambda \in \Lambda(n,r)$ und Paaren von Standardtableaus eine frei Basis von $A_{R,q}(n,r)$ bilden.*

3.8 Die Quantensymplektische äußere Algebra

Wir betrachten nun die quantensymplektischen Analogien zur symmetrischen und äußeren Algebra. Tatsächlich verwenden werden wir nur die äußere Algebra. Mit Hilfe von Satz 1.6.1 aus Kapitel 1 verleihen wir diesen die Struktur einer Komodul-Algebra bezüglich $A^{\mathrm{s}}(n)$. Zunächst beginnen wir mit ihrer Definition. Dazu betrachten wir in $V^{\otimes 2}$ die Elemente

$$w_{ij} := \begin{cases} v_i v_i & \text{für } i = j \\ p_{ij} t_i v_i v_j & \text{für } i < j \text{ und } i \neq j' \\ q t_i v_i v_j & \text{für } i > j \text{ und } i \neq j' \\ t_i v_i v_{i'} - q^{-1} t_{i-1} v_{i-1} v_{i'+1} & \text{für } 1 < i < j \text{ und } i = j' \\ t_i v_i v_{i'} - q t_{i+1} v_{i+1} v_{i'-1} & \text{für } n > i > j \text{ und } i = j' \\ t_1 v_1 v_n & \text{für } i = 1 \text{ und } j = n \\ t_n v_n v_1 & \text{für } i = n \text{ und } j = 1 \end{cases}$$

und berechnen

$$\beta(w_{ij}) = \begin{cases} w_{ji} & \text{für } 1 \leq i < j \leq n \\ y w_{ii} & \text{für } 1 \leq i = j \leq n \\ y w_{ji} + (y-1) w_{ij} & \text{für } n \geq i > j \geq 1 \text{ und } 1 < j \text{ falls } i = j' \\ y w_{1n} + (y-1)(w_{n1} - y^{-m} J) & \text{für } i = n \text{ und } j = 1 \end{cases} \tag{3.24}$$

sowie

$$\gamma(w_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{für } (i,j) \neq (1,n),(n,1) \\ -q^m J & \text{für } i = 1 \text{ und } j = n \\ q^{-m} & J \text{ für } i = n \text{ und } j = 1 \end{cases}, \tag{3.25}$$

wobei der Einfachheit halber wieder $y = q^2$ gesetzt wurde. Ebenso verwenden wir wieder die Bezeichnung

$$J = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i q^{\rho_i} t_i v_i v_{i'} = q^{-1} \sum_{i=1}^{m} [m-i+1]_q (y w_{ii'} - w_{i'i})$$

für den in 2.2.2 eingeführten invarianten zweifachen Tensor. Tensorzeichen bezüglich der Elemente von $\mathcal{T}(V)$ werden weggelassen.

Die Menge aller w_{ij} bildet offensichtlich eine freie Basis W von $V^{\otimes 2}$. Daraus erkennt man leicht, daß

$$U_S := < \{w_{kk},\ w_{ij} + w_{ji},\ w'_{mm'} + w'_{m'm} |\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n,\ (i,j) \neq (1,n)\} >$$

$$U_A := < \{y w_{ij} - w_{ji} |\ 1 \leq i < j \leq n, (i,j) \neq (1,n)\} >$$

$$U_J := < \sum_{i=1}^{m} [m-i+1]_q (y w_{ii'} - w_{i'i}) > = < qJ > .$$

reine Untermoduln von $V^{\otimes 2}$ sind, d.h. $V^{\otimes 2}/U_X$ ist projektiver (hier sogar freier) R-Modul für $X = S, A, J$. Die Elemente $w'_{mm'}$ und $w'_{m'm}$ sind darin durch $w'_{mm'} := t_m v_m v_{m+1} = q^{-m} \sum_{i=1}^{m} q^i w_{ii'}$ und $w'_{m'm} := y t_{m+1} v_{m+1} v_m = q^{m+2} \sum_{i=1}^{m} q^{-i} w_{i'i}$ definiert. Alle drei sind $\mathcal{C}_{R,r}$-invariante Untermoduln von $V^{\otimes 2}$. Denn es gilt gemäß (3.24) und (3.25) $\beta(u) = yu$, $\gamma(u) = 0$ für $u \in U_S$, $\beta(u) = -u$, $\gamma(u) = 0$ für $u \in U_A$ und $\beta(u) = -y^{-m} u$, $\gamma(u) = (1 - [n+1]_q) u = xu$ für $u \in U_J$. Über dem Quotientenkörper $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}$ sind U_S, U_A und U_J gerade die drei Eigenräume des diagonalisierbaren Operators β, d.h.

$$U_S = \ker(\beta - y\mathrm{id}_{V^{\otimes 2}}),\ U_A = \ker(\beta + \mathrm{id}_{V^{\otimes 2}}),\ U_J = \ker(\beta + y^{-m}\mathrm{id}_{V^{\otimes 2}}). \qquad (3.26)$$

Diese Gleichungen müssen auch über $\mathcal{Z}$ gelten, da andernfalls Torsionselemente in $V^{\otimes 2}/U_X$ auftreten würden, was oben ausgeschlossen wurde.

Satz 3.8.1 *Für $X = S, A, J$ ist U_X ein $A^{\mathrm{s}}(n)$ Unterkomodul von $V^{\otimes 2}$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß U_X ein Unterkomodul von $V^{\otimes 2}$ bezüglich der Koalgebra $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,2)$ ist, da nur diese Unterkoalgebra von $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ bei der Komudulstruktur von $V^{\otimes 2}$ involviert ist. Wir zeigen dies zunächst im Fall $R = \mathcal{Z}$ mit der üblichen Wahl der Parameter. Nach Satz 3.7.7 dürfen wir Lemma 1.5.4 anwenden. Als Kerne von Endomorphismen aus $\mathcal{A}_2 := \rho^{\mathrm{s}}_2(\mathcal{C}_{\mathcal{Z},2})$ sind die U_X offenbar $C(\mathcal{A}_2) = \mathrm{End}_{\mathcal{A}_2}(V^{\otimes 2})$-invariante Untermoduln. Also sind es nach dem besagten Lemma auch $M(\mathcal{A}_2) = A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z},Q}(n,2)$-Unterkomoduln. Im Fall eines beliebigen Integritätsbereiches verwendet man Satz 2.5.2. Ist nämlich $\mu_R : R \otimes_{\mathcal{Z}} A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z},Q}(n,2) \to A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,2)$ der Isomorphismus gemäß besagtem Satz, so erhält man die Komodulstrukturabbildung τ_{V^R} von V^R bezüglich $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,2)$ durch die induzierte Abbildung $(\tau_V)^R$ verknüpft mit $\mathrm{id}_{V^R} \otimes \mu_R$. Dabei identifizieren wir $V^R = R \otimes_{\mathcal{Z}} V$ mit dem natürlichen Komodul von $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,2)$. Also folgt aus $\tau_V(U_X) \subseteq U_X \otimes A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z},Q}(n,2)$ auch

$\tau_{V^R}(U_X{}^{R^\succ}) \subseteq U_X{}^{R^\succ} \otimes A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,2)$ und damit die Behauptung. $\square$

Wir können nun symmetrische und äußere Algebra im quantensymplektischen Fall definieren. Dazu betrachten wir die von U_S bzw. von $U_A + U_J$ erzeugten homogenen Ideale I_S bzw. I_{A+J} in $\mathcal{T}(V)$. Aus Satz 1.6.1 erhält man sofort

Satz 3.8.2 *Die beiden Algebren*

$$\bigwedge\nolimits_{R,q} := \mathcal{T}(V)/I_S \text{ und } \mathsf{S}_{R,q} := \mathcal{T}(V)/I_{A+J}$$

sind graduierte Komodulalgebren für die graduierte Matrix Bialgebra $A^{\mathrm{s}}(n)$.

Die homogenen Summanden von $\bigwedge_{R,q}$ und $\mathsf{S}_{R,q}$ bezeichnen wir mit $\bigwedge_{R,q}(r)$ bzw. $\mathsf{S}_{R,q}(r)$. Im klassischen Fall ($q = 1$, $p_{ij} = 1 = t_k$) ist $\bigwedge_{\mathbb{C},1}$ offensichtlich die äußere Algebra über $\mathbb{C}$ im üblichen Sinne. Dasselbe gilt im Fall der symmetrischen Algebra. Faßt man einen Integritätsbereich S mittels eines Ringhomomorphismus $R \to S$ als R-Algebra auf, so erhält man in Analogie zu Satz 2.5.2 einen Isomorphismus graduierter Algebren

$$S \otimes_R \bigwedge\nolimits_{R,q} \cong \bigwedge\nolimits_{S,\tilde{q}} \tag{3.27}$$

worin $\tilde{q}$ das Bild von q unter dem Ringhomommorphismus bezeichnet. Wir lassen R und q aus der Bezeichnung weg, wenn klar ist, daß es sich um die allgemeine Situation handelt. Entsprechendes gilt bezüglich der symmetrischen Algebra. Das Hauptinteresse wird hier jedoch bei der äußeren Algebra $\bigwedge$ liegen, mit deren eingehender Untersuchung wir nun beginnen.

Dazu führen wir eine angepaßte Bezeichnungsweise ein. Das Produkt in $\bigwedge$ wird wie üblich mit $\wedge$ geschrieben. Die Restklasse eines Monoms $v_{i_1} \dots v_{i_r}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ ist dann gerade $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_r}$. Für die Menge der r-elementigen Teilmengen von $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$ schreiben wir $\underline{n}_r$ und ordnen eine solche Teilmenge $I = \{i_1, \dots, i_r\} \in \underline{n}_r$ stets aufsteigend (bezüglich der gewöhnlichen Ordnung), also $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ und setzen

$$v_I := v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_r} \text{ für } r > 0 \text{ und } v_\emptyset := 1.$$

Wir wollen zeigen, daß $B_r := \{v_I |\ I \in \underline{n}_r\}$ eine Basis von $\bigwedge(r)$ ist. Wir benennen dazu weitere Elemente von $\bigwedge(2)$ zu $i \in \underline{m}$:

$$c_i := q^i t_{i'} v_{i'} \wedge v_i, \quad d_i := -q^{-i} t_i v_i \wedge v_{i'}$$

und schreiben zu $k, l \in \underline{n}$ mit $k \neq l'$ und $i \in \underline{m}$ einen vollständigen Satz von Relationen für $\bigwedge$ auf:

$$v_k \wedge v_l = t_{lk} v_l \wedge v_k, \tag{3.28}$$

$$v_i \wedge v_{i'} = t_{i'i} v_{i'} \wedge v_i - (y-1) q^{-i} t_i^{-1} \sum_{j=i+1}^{m} c_j \tag{3.29}$$

$$
\begin{aligned}
v_{i'} \wedge v_i &= t_{ii'} v_i \wedge v_{i'} + (y-1) q^i t_{i'}^{-1} \sum_{j=i+1}^{m} d_j && (3.30) \\
v_k \wedge v_k &= 0 && (3.31)
\end{aligned}
$$

Darin sind die Ringelemente t_{ij} durch

$$
t_{ij} := \begin{cases} -q^{-1} p_{ij} t_i t_j^{-1} & \text{für } i < j \text{ und } i \neq j' \\ -q p_{ij} t_i t_j^{-1} & \text{für } i > j \text{ und } i \neq j' \\ -q^2 t_{j'} t_j^{-1} & \text{für } i = j' \text{ und } 1 \leq j \leq m \\ -q^{-2} t_i t_{i'}^{-1} & \text{für } i = j' \text{ und } 1 \leq i \leq m \end{cases}
$$

definiert. Die beiden mittleren Relation erhält man induktiv aus den in U_S enthaltenen Elementen $w_{ii'} + w_{i'i}$ und $w'_{mm'} + w'_{m'm}$. Es ergibt sich daraus der Zusammenhang

$$
y^i d_i = y c_i + (y-1) \sum_{j=i+1}^{m} c_j \quad \text{und} \quad y^{-i} c_i = y^{-1} d_i + (y^{-1} - 1) \sum_{j=i+1}^{m} d_j \qquad (3.32)
$$

woraus man wegen $c_i \wedge d_i = d_i \wedge c_i = 0$ nach (3.31) die Gleichungen

$$
c_i^2 := c_i \wedge c_i = (y^{-1} - 1) \sum_{j=i+1}^{m} c_i \wedge c_j \quad \text{und} \quad d_i^2 = (y-1) \sum_{j=i+1}^{m} d_i \wedge d_j. \qquad (3.33)
$$

erhält. Hierin zeigt sich ein zum klassischen Fall, wo die Quadrate sämtlicher Monome Null sind, völlig verschiedenes Verhalten in $\bigwedge$. Dies unterscheidet sich auch von den Rechenregeln in der quantenlinearen äußeren Algebra, in der lediglich Relationen vom Typ (3.28) und (3.31) auftreten. In Entsprechung zum klassischen Fall kommutieren die c_i und d_i jedoch miteinander:

$$
c_i \wedge c_j = t_{j'i} t_{j'i'} t_{ji} t_{ji'} c_j \wedge c_i = c_j \wedge c_i.
$$

Dabei beachte man die Relationen zwischen den Zusatzparametern p_{ij} und t_k. Die entsprechende Gleichung für die d_i folgt daraus mittels (3.32).

Bekanntermaßen kann man mit Hilfe des Diamantenlemmas der Ringtheorie ([Bg]) zeigen, daß $\bigwedge$ ein freier R-Modul ist (siehe etwa [Ha2], 6., [Ta2] Proposition 5.2 (b))). Dies führt auf mühsame und langweilige Routineverifikationen, die man verständlicherweise in der Literatur nicht findet und die wir der Vollständigkeit halber im Anhang B.1 aufgeschrieben haben

Satz 3.8.3 *B_r ist eine Basis von $\bigwedge(r)$.*

Beweis: Mit Hilfe der Relationen (3.28), (3.30) und (3.31) verifiziert man leicht, daß die Elementen aus B_r ein Erzeugendensystem bilden. Gemäß Satz B.1.1 ist $\bigwedge(r)$ frei vom Rang $\binom{n}{r}$. Da B_r gleichviele Elemente besitzt muß es sich um eine Basis handeln. □

Bemerkung 3.8.4 *Der Isomorphismus aus (3.27) ist mit der Basis verträglich in dem Sinne, daß* $1 \otimes v_I$ *aus* $S \otimes_R \bigwedge$ *auf das entsprechende Basiselement in* $\bigwedge_{S,\tilde{q}}$ *abgebildet wird. Im klassischen Fall* ($q = 1 = p_{ij} = t_k$) *erhält man durch* B_r *die übliche Basis von* $\bigwedge_{\mathbb{C},1}$.

3.9 Der Quotient $\bigwedge^{\mathrm{s}}$ der äußeren Algebra

In der klassischen Spezialisierung über $\mathbb{C}$ sind die $\bigwedge(r)$ gerade die irreduziblen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-Moduln zum höchsten Gewicht ω_r. Allerdings sind diese nicht mehr irreduzibel für die Untergruppen $\mathrm{GSp}_n(\mathbb{C})$ bzw. $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$.

Das Ziel ist es nun (als R-Modul freie) Quotienten $\bigwedge^{\mathrm{s}}(r)$ von $\bigwedge(r)$ zu finden, die Komoduln für $A^{\mathrm{s}}(n)$ sind, und in der klassischen Spezialisierung zu irreduziblen $\mathrm{GSp}_n(\mathbb{C})$- bzw. $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$-Moduln werden. Dazu werden wir nun ein geeignetes Ideal N in der äußeren Algebra $\bigwedge$ betrachten. Zu dessen Definition sei an die in 3.8 eingeführten Elemente $c_i, d_i \in \bigwedge(2)$ erinnert. Wir führen mit deren Hilfe weitere Elemente in $\bigwedge(2r)$ ein, die zu $I := \{i_1, \ldots, i_r\} \in \underline{m}_r$ und $\mathcal{I} \subseteq \underline{m}_r$ wie folgt definiert sind:

$$c_I := c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_r}, \quad d_I := d_{i_1} \wedge d_{i_2} \wedge \ldots \wedge d_{i_r},$$

$$C(\mathcal{I}) := \sum_{I \in \mathcal{I}} c_I, \quad D(\mathcal{I}) := \sum_{I \in \mathcal{I}} d_I.$$

Für den Fall $r = 0$ setzen wir $c_\emptyset := 1 =: d_\emptyset$. Da – wie in 3.8 gezeigt – die c_i und d_i untereinander kommutieren, sind die c_I und d_I tatsächlich unabhängig von der Reihenfolge der Elemente in I. Für die am häufigsten auftretenden Fälle von $\mathcal{I}$ nämlich $\mathcal{I} = \underline{m}_r$ und $\mathcal{I} = \underline{lm}_r$ verwenden wir die Abkürzungen $C_{l,r} := C(\underline{lm}_r)$ und $C_r := C(\underline{m}_r) = C_{1,r}$ sowie entsprechendes bezüglich der D. Darin ist $\underline{lm} := \{i \in \underline{m} | \ l \leq i\}$ und $\underline{lm}_r := \{I \subseteq \underline{lm} | \ |I| = r\}$. Die Formeln (3.33) schreiben sich dann $c_i^2 = (y^{-1} - 1)c_i \wedge C_{i+1,1}$ und $d_i^2 = (y - 1)d_i \wedge D_{i+1,1}$. Zur Vermeidung von schreibtechnischen Umständen lassen wir auch $C_{m+1,r} := D_{m+1,r} := 0$ zu.

Wir definieren nun N als das von den Elementen $D_1, D_2, \ldots, D_m$ erzeugte Ideal in $\bigwedge$. Es ist offensichtlich homogen und wir bezeichnen den r-ten homogenen Summanden mit N_r. Wir werden später sehen, daß der Quotient

$$\bigwedge^{\mathrm{s}} := \bigwedge / N$$

(zumindest unter gewissen Einschränkungen) wiederum eine Komodulalgebra für $A^{\mathrm{s}}(n)$ ist, deren homogene Summanden $\bigwedge^{\mathrm{s}}(r) = \bigwedge(r)/N_r$ gerade die gesuchten Standardkomoduln zu den Fundamentalgewichten ω_r sind.

Unser nächstes Ziel ist die Konstruktion einer freien Basis für $\bigwedge^{\mathrm{s}}$. Im klassischen Fall über $\mathbb{Z}$ ist eine solche aus [Do3] bekannt. Die hiesige Konstruktion baut auf dem dortigen Resultat auf. Es sind dazu jedoch eine Reihe technischer Lemmata erforderlich, deren Beweise zwar nicht besonders tiefsinnig, jedoch im Gesamten so umfangreich sind, daß sie aus Gründen der Übersichtlichkeit in den Anhang verlagert werden.

Zunächst benötigen wir das y-Analog $\{k\}_y := 1 + y + y^2 + \ldots + y^{k-1} \in R$ einer natürlichen Zahl k. Im Vergleich zum q-Analog aus 2.2.2 hat man den Zusammenhang $[k]_q = q^{1-k}\{k\}_y$. Ebenso treten y-analoge Fakultäten $\{r\}_y! := \{1\}_y\{2\}_y \ldots \{r\}_y$ sowie das Analogon $\{k\}_{y^{-1}}$ zu y^{-1} auf. Wir lassen nun der Einfachheit halber das Multiplikationszeichen $\wedge$ in $\bigwedge$ fort.

Lemma 3.9.1 *Für $l \in \underline{m}$, $j \in \underline{n}$ und $0 \leq r \leq m - l$ gilt:*

(a) $D_{l,1} = y^{1-l} C_{l,1}$

(b) $C_{l,1}C_{l,r} = \{r+1\}_{y^{-1}} C_{l,r+1}$ *und* $D_{l,1}D_{l,r} = \{r+1\}_y D_{l,r+1}$.

(c) Ist eine Partition $\underline{lm} = L \cup M$ von $\underline{lm}$ in disjunkte Mengen L und M gegeben, so gibt es zu jedem $I \in \underline{lm}_r$ eine ganze Zahl $s(I, M, l)$, sodaß gilt:

$$D_{l,r} = \sum_{I \in \underline{lm}_r} y^{s(I,M,l)} c_{I \cap L} d_{I \cap M}.$$

(d) $(C_1)^r = \{r\}_{y^{-1}}! C_r$ *und* $(D_1)^r = \{r\}_y! D_r$.

(e) $C_r = y^s D_r$ *mit* $s = \binom{r-1}{2}$.

(f) $v_j C_1 = -t_{j'j} C_1 v_j$, $v_j D_1 = -t_{j'j} D_1 v_j$

Beweis: Anhang B.2 □

Bemerkung 3.9.2 *(a) Das Lemma zeigt, daß N ebenso von $C_1, \ldots, C_m$ und – falls $\{m\}_y!$ invertierbar ist – bereits von $C_1 = D_1$ erzeugt wird. Allerdings reicht C_1 bzw. D_1 über dem Grundring $\mathcal{Z}$ nicht zur Erzeugung von N aus sobald $m > 2$ gilt. Eine Begründung dafür erfolgt im Anschluß an Lemma 3.9.4.*

(b) Für die Zahlen $s(I, M, l)$ aus dem (c)-Teil des Lemmas bestätigt man leicht für $l < m$ die folgende rekursive Vorschrift;

$$s(I, M, l) = \begin{cases} s(I \backslash \{l\}, M \backslash \{l\}, l+1) & l \in I \cap M \\ s(I, M \backslash \{l\}, l+1) & l \notin I, l \in M \\ s(I \backslash \{l\}, M, l+1) - l + 1 & l \in I, l \notin M \\ s(I, M, l+1) + r & l \notin I \cup M \end{cases}$$

In der Situation von Lemma 3.9.4 benötigt man die Zahlen $s(I, M, l)$ in dem Spezialfall $I \subseteq M$. Wir berechnen daher zunächst diese Zahlen. Dazu nennen wir zu zwei Teilmengen $I, M \subseteq \underline{m}$

$$t(I, M) := |\{(i,j) \in I \times M | \; i \geq j\}|$$

den *Verzahnungsindex* von I und M. Man sieht sofort aus der Definition, daß für Teilmengen $J \subseteq I$ bzw. $L \subseteq M$ die Gleichungen

$$t(I\backslash J, M) = t(I, M) - t(J, M),\ t(I, M\backslash L) = t(I, M) - t(I, L)$$

erfüllt sind.

Lemma 3.9.3 *Im Fall* $I \subseteq M \in \underline{lm}_r$ *gilt*

$$s(I, M, l) = (1 - l)|I| + t(I, \underline{m}\backslash M).$$

Beweis: Anhang B.2 □

Zu einer Menge $K \in \underline{n}$ kann man die zwei folgenden Teilmengen $K^+ := \{i \in \underline{m}|\ i' \in K\}$ und $K^- := \{i \in \underline{m}|\ i \in K\} = \underline{m} \cap K$ von $\underline{m}$ betrachten.

Lemma 3.9.4 *Sei* $K \in \underline{n}_s$ *beliebig,* $T := \underline{m}\backslash(K^- \cup K^+)$. *Dann gilt*

$$v_K D_{l,r} = v_K \sum_{I \in \underline{lm}_r, I \subseteq T} y^{t(I, K^+ \cap \underline{lm})} d_I.$$

Beweis: Wir wenden Lemma 3.9.1 (c) an für $L := K^+ \cap \underline{lm}$ und $M := \underline{lm}\backslash L$. Man beachte daß $v_K c_{I\cap L} d_{I\cap M}$ für jedes $I \in \underline{lm}_r$, welches nicht in T enthalten ist, also Elemente von K^- oder K^+ enthält, Null ist. Denn enthält I ein Element von K^+, so wird v_K durch Rechtsmultiplikation mit $c_{I\cap L}$ annulliert, während im Fall, wo I ein Element von $K^-\backslash K^+$ enthält Rechtsmultiplikation mit $d_{I\cap M}$ auf Null führt. Man beachte dabei auch die Kommutativität, zwischen $c_{I\cap L}$ und $d_{I\cap M}$. Für $I \subseteq T$ ist aber $I \cap L$ leer und $I \cap M = I$. Also folgt aus

$$s(I, M, l) = (1-l)r + t(I, L \cup \{1, \ldots, l-1\}) = (1-l)r + t(I, L) + (l-1)r = t(I, K^+ \cap \underline{lm})$$

nach obigem Lemma die angegenen Formel. □

Wir kommen nun auf Bemerkung 3.9.2 (a) zurück. Würde im Fall $m > 2$ etwa D_2 im Idealerzeugnis von D_1 liegen, so gäbe es auf Grund des Lemmas $a_1, \ldots, a_m \in R$ mit $\sum_{j=1}^n a_j d_j D_1 = \sum_{i \neq j} a_j y^{t(\{i\},\{j\})} d_j d_i = D_2$. Nun ist $t(\{i\}, \{j\})$ Null im Fall $i < j$ und 1 im Fall $i > j$. Also erhält man $D_2 = \sum_{i<j}(ya_i + a_j) d_i d_j$ und daraus $ya_i + a_j = 1$ für $i < j$. Insbesondere gilt dann $a_2 = a_3$ und damit $\{2\}_y a_2 = 1$. Dies ist aber in $\mathcal{Z}$ nicht lösbar, da hier $\{2\}_y$ nicht invertierbar ist. Dies zeigt also den oben behaupteten Sachverhalt, daß N über $\mathcal{Z}$ nicht von D_1 alleine erzeugt wird. Auch im klassischen Fall über $\mathbb{Z}$ ist dies nicht so.

Lemma 3.9.5 *Sei* $\eta : \bigwedge \to \bigwedge$ *der R-Endomorphismus mit* $\eta(x) := xD_1$. *Dann gilt im Fall, daß* $\{m\}_y!$ *invertierbar in R ist,* $N = \mathrm{im}(\eta)$.

BEWEIS: Wegen Bemerkung 3.9.2 (a) wird N bereits von D_1 als (zweiseitiges) Ideal erzeugt. Nach Lemma 3.9.1 (f) ist dies aber gleich dem von D_1 erzeugten Linksideal. Also ist N gerade das Bild von η. $\square$

Wie setzen $t_K := |\underline{m}\backslash(K^+ \cup K^-)|$ und bezeichnen zu festem $0 \leq t \leq m$ den R-Aufspann in $\bigwedge$ aller Basislemente v_K mit $t_K = t$ mit $\bigwedge[t]$. Dies liefert eine weitere direkte Summenzerlegung

$$\bigwedge = \bigoplus_{t=0}^{m} \bigwedge[t]. \tag{3.34}$$

Lemma 3.9.6 *Für jedes $K \in \underline{n}_s$ gilt $v_K D_r = 0$ für $r > t_K$ und $0 \neq v_K D_r \in \bigwedge[t_K - r]$ für $r \leq t_K$.*

BEWEIS: Sei $T := \underline{m}\backslash(K^+ \cup K^-)$. Damit in der Formel aus Lemma 3.9.4 überhaupt von Null verschiedene Summanden auftreten, ist $r = |I| \leq |T| = t_K$ notwendig. Zum Beweis der zweiten Behauptungen beachte man, daß sich die Summanden $v_K d_I$ lediglich um ein (in R) invertierbares Vielfaches vom Basiselement v_{KI} unterscheiden, wobei $KI := K \cup \{i' |\, i \in I\} \cup I$ ist. Es sind zur Darstellung von $v_K d_I$ in der Basis nämlich lediglich Relationen vom Typ (3.28) erforderlich und die t_{ij} sind invertierbare Elemente. Ofensichtlich gilt $v_{KH} \neq v_{KI}$ für $H, I \subseteq T$ mit $H \neq I$. Somit erhält man durch

$$v_K D_r = \sum_{I \in \underline{m}_r, I \subseteq T} a_I v_{KI}$$

eine Darstellung von $v_K D_r$ bezüglich der Basis B_{r+s} von $\bigwedge(r+s)$ mit invertierbaren Elementen $a_I \in R$. Aus $t_{KI} = |T\backslash I| = t_K - r$ folgt die zweite Behauptung, da alle Vorzahlen a_I invertierbar sind, und für $r \leq t_K$ sicherlich Summanden auftreten. $\square$

Wir nennen eine Komposition $\mu \in \Lambda(m, r)$ *symplektisch* falls für alle $i \in \underline{m}$

$$\sum_{j=1}^{i} \mu_j \leq i$$

gilt und *spiegelsymplektisch*, falls die gespiegelte Komposition, das ist die durch $\mu^\times := (\mu_{1^\times}, \mu_{2^\times}, \ldots, \mu_{m^\times})$ definierte, symplektisch ist. Darin ist wie in 3.2 $i^\times := m - i + 1$. Ein Multi-Index $\mathbf{i} \in I(n, r)$ heißt symplektisch oder spiegelsymplektisch je nachdem ob dies für seinen m-Inhalt $||\mathbf{i}||$ gemäß (3.21) gilt. Beachte daß ein λ-Tableau $T_{\mathbf{i}}^\lambda$ mit $\mathbf{i} \in I_\lambda^\ll$ genau dann symplektisch im Sinne der Definition aus 3.2 ist, wenn seine sämtlichen Spalten $\mathbf{i}_{\lambda'}^s$ für $s = 1, \ldots, p = \lambda_1$ symplektisch sind. Entsprechendes gilt in bezug auf spiegelsymplektische Standardtableaus.

Einer Teilmenge $K \in \underline{n}_s$ ordnen wir nun ebenfalls einen m-Inhalt durch $||K|| := ||\mathbf{i}(K)|| \in \Lambda(m, r)$ zu. Darin ist $\mathbf{i}(K) \in I(n, r)$ der aus den Elementen von K als Komponenten in aufsteigender Reihenfolge gebildete Multi-Index. Ist $||K|| = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, so gilt also $\lambda_i = 2$ falls $i \in K^\circ := K^+ \cap K^-$, $\lambda_i = 1$ falls $i \in (K^+ \cup$

$K^-)\backslash K^\circ$ und $\lambda_i = 0$ falls $i \notin K^+ \cup K^-$ erfüllt ist. Wir nennen eine Teilmenge $K \in \underline{n}_r$ *symplektisch* bzw. *spiegelsymplektisch*, wenn das aus den Elementen von K gebildete ω_r-Tableau T standardsymplektisch bzw standardspiegelsymplektisch im Sinne der Definitionen aus 3.2 ist, also wenn $||K||$ bzw. $||K||^\times$ symplektisch ist. Wir können nun die folgende q-analoge Version eines Resultates von Donkin ([Do3], 2.2) beweisen.

Satz 3.9.7 *Für $r > m$ gilt $\bigwedge^{\mathrm{s}}(r) = 0$ und für $0 \leq r \leq m$ erhält man eine freie Basis von $\bigwedge^{\mathrm{s}}(r)$ durch die Restklassen der Elemente v_K wobei $K \in \underline{n}_r$ die Menge der symplektischen r-elementigen Teilmengen von $\underline{n}$ durchläuft.*

Beweis: Wir bauen den Beweis auf der Gültigkeit des entsprechenden Resultats in der klassischen Spezialisierung auf ([Do3], 2.2). Dieses besagt, daß die Restklassen der $v_{\mathbf{i}}$ zu symplektischen Standardtableaus $T_{\mathbf{i}}^{\omega_r}$ eine Basis in der klassischen Situation bilden, d.h. zu $\mathbf{i} \in I_{\omega_r}^{\mathrm{sym}}$ gemäß der Definitionen in 3.2. Man beachte, daß symplektische ω_r-Standardtableaus nur für $r \leq m$ existieren. Einem solchen Tableau ordnen wir die Menge $K := I(\mathbf{i}) \in \underline{n}_r$ der Einträge von $T_{\mathbf{i}}^{\omega_r}$ zu. Dies liefert nach obigen Vorbemerkungen genau die symplektischen r-elementigen Teilmengen von $\underline{n}$. Man beachte, daß sich v_K lediglich um ein Vorzeichen, welches durch die Umsortierung von $i_1 \ll i_2 \ll \ldots \ll i_r$ zu $i_{w(1)} < i_{w(2)} < \ldots < i_{w(r)}$ mit geeignetem $w \in \mathcal{S}_r$ hervorgerufen wird, von der Restklasse von $v_{\mathbf{i}}$ unterscheiden kann. Also bilden die v_K zu symplektischen $K \in \underline{n}_r$ in der klassischen Situation eine Basis.

Wir wenden uns nun dem Quantenfall zu. Es reicht den Beweis für den Grundring $R = \mathcal{Z}$ aus (2.3) zu führen. Denn man vergewissert sich leich, daß der Isomorphismus aus (3.27) mit den hier betrachteten Bildunden $D_l, N, \ldots$ verträglich ist (siehe Bemerkung 3.8.4). Sei η der Endomorphismus aus Lemma 3.9.5. Die obigen Lemmata zeigen, daß η nilpotent vom Grad $m+1$ ist. Allerdings gilt die Aussage von 3.9.5 nicht, da $\{m\}_y!$ nicht invertierbar ist. Wir betrachten $\mathbb{C}$ als $\mathcal{Z}$-Algebra durch den Ringhomomorphismus der alle Parameter Q, X_{ij} und X_k auf Eins abbildet. Nach (3.27) und Lemma 3.9.5 ist $N^{\mathbb{C}} = \mathrm{im}(\iota_N{}^{\mathbb{C}})$ das Bild von $\eta^{\mathbb{C}}$, da $m!$ in $\mathbb{C}$ invertierbar ist. Dabei verwenden wir die Notationen aus Anhang A.1 bzw. 1.5.2. Zur Erinnerung: $\iota_N : N \hookrightarrow \bigwedge$ ist die natürliche Inklusion und

$$\iota_N{}^{\mathbb{C}} : N^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{Z}} N \to \bigwedge^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{Z}} \bigwedge$$

die davon induzierte Abbildung. Die Gültigkeit des Satzes in der klassischen Spezialisierung kann dann auch so interpretiert werden, daß die Elemente $1_{\mathbb{C}} \otimes v_K(D_1)^l$ für symplektisches $K \in \underline{n}_r$ (für $0 \leq r \leq m$ und $0 \leq l \leq t_K$) eine Jordanbasis für $\eta^{\mathbb{C}}$ bilden. Wir betrachten daher die Elemente

$$b_{K,l} := v_K D_l \quad \in \bigwedge\nolimits_{\mathcal{Z},Q},$$

worin K und l wie oben laufen, und wollen zeigen, daß diese eine Basis von $\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$ bilden. Nach den obigen Ausführungen und nach Lemma 3.9.1 (d) wissen wir, daß die $\{l\}_y! b_{K,l}$ in der klassischen Spezialisierung eine Basis bilden. Da $\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$ freier $\mathcal{Z}$-Modul ist, bleibt dies ebenso über dem Quotientenkörper $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}$ richtig (vgl. Beweis von A.2.1). Insbesondere bilden die $b_{K,l}$ selbst eine Basis von $\bigwedge_{\mathbb{K},Q}$. Folglich sind diese Elemente auch linear unabhängig über $\mathcal{Z}$ und die Summe der $W_K :=< b_{K,l} | \; 0 \leq l \leq t_K >$ in $\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$ ist direkt.

Sei $W := \oplus_K W_K \subseteq \bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$. Da W eine Basis von $\mathbb{K} \otimes_{\mathcal{Z}} \bigwedge_{\mathcal{Z},Q} \cong \bigwedge_{\mathbb{K},Q}$ enthält, wissen wir bereits, daß $(\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}/W)^{\mathbb{K}} = 0$ gilt. Zum Beweis von $W = \bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$ reicht es daher zu zeigen, daß $\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}/W$ lokal frei ist, da es dann gmäß Lemma A.2.4 gleich dem Nullmodul sein muß. Hierzu wiederum genügt es $\dim_S(W^{S^{\succ}}) = \dim_{\mathbb{K}}(W^{\mathbb{K}^{\succ}})$ für jede Spezialisierung $\mathcal{Z} \to S$ zu zeigen. Dazu berechnet man die vom Körper S unabhängige Formel

$$\dim_S(W^{S^{\succ}}) = \sum_K \dim_S({W_K}^{S^{\succ}}) = \sum_K (t_K + 1).$$

Man beachte dazu die Direktheit der Summe der W_K und, daß die Elemente $1_S \otimes_{\mathcal{Z}} b_{K,l} \in {W_K}^{S^{\succ}}$ nach Lemma 3.9.6 (unter dem Isomorphismus aus (3.27)) von Null verschieden sind und in den $(t_K + 1)$ verschiedenen direkten Summanden $\bigwedge_{S,q}[t_K - l]$ von $\bigwedge_{S,q}$ liegen.

Damit bildet die Gesamtheit aller $b_{K,l}$ eine Basis von $\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$. Sei $\bar{N}$ der Aufspann der $b_{K,l}$ für $l \geq 1$. Der Beweis des Satzes ist erbracht, wenn $N = \bar{N}$ gezeigt ist. Nach Definition von N folgt sofort $\bar{N} \subseteq N$. Nun gilt aber $N^{\mathbb{K}^{\succ}} = \mathrm{im}(\eta^{\mathbb{K}}) = \bar{N}^{\mathbb{K}^{\succ}}$ auf Grund von Lemma 3.9.5. Da die $b_{K,l}$ eine Basis bilden, ist $\bar{N}$ ein direkter Summand in $\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$ und somit folgt auch $N \subseteq \bar{N}$. □

Bemerkung 3.9.8 *In der Beweisführung bei Donkin wird die im klassischen Fall $q = 1 = p_{ij} = t_k$ für jedes $J \in \underline{m}_r$ gültige Formel*

$$d_J = (-1)^r \sum_{I \subseteq \underline{m} \setminus J, \; |I| = r} d_I$$

verwendet. Würde im Quantenfall in Analogie dazu etwa

$$d_J = \sum_{I \subseteq \underline{m} \setminus J, \; |I| = r} a_I d_I$$

mit Elementen $a_I \in R$ gelten, so wäre die dortige Beweisführung übertragbar. Dem ist jedoch nicht so: Im Fall $m = 5$ und $r = 2$ etwa findet man derartige Formeln zwar für die Teilmengen $J = \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{1,5\}$ nicht aber für die Teilmengen $J = \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,5\}$.

Der hier gegeben Beweis von Satz 3.9.7 kommt völlig ohne die speziellen Eigenschaften symplektischer Tableaus bzw. Mengen aus. Er könnte genauso mit einer anderen Menge von v_K, deren Restklassen der zugehörigen Basiselementen von $\bigwedge$ im klassischen Fall eine Basis von $\bigwedge^{\mathrm{s}}_{\mathbb{C},1}$ bilden, geführt werden.

3.10 Die symplektische und die spiegelsymplektische Bedingung

Wir bereiten nun die Behandlung nicht spiegelsymplektischer Tableaus in Bezug auf den den zweiten Teil des *Straightening Algorithmus* in 3.13 vor. Dazu ordnen wir die Komositionen $\lambda, \mu \in \Lambda(m, r)$ wie in 3.7 lexikographisch, d.h. wir schreiben $\lambda < \mu$ wenn $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ vor $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ in der lexikographischen Ordnung kommt. Wir zeigen nun:

Satz 3.10.1 *Sei $K \in \underline{n}_r$ nicht symplektisch. Dann gibt es zu $L \in \underline{n}_r$ mit $||L||^\times > ||K||^\times$ Zahlen $a_{KL} \in R$ (möglicherweise Null), so daß in $\bigwedge^s$ gilt*

$$v_K + N_r = \sum_{L \in \underline{n}_r,\, ||L||^\times > ||K||^\times} a_{KL} v_L + N_r.$$

Beweis: Wir führen vollständige Induktion nach m. Für $m = 1$ ist die Behauptung erfüllt, da die beiden in $\underline{2}_1$ gelegenen Mengen $\{1\}$ und $\{1'\}$ symplektisch sind, und für $K = \{1, 1'\} \in \underline{2}_2$ offenbar $v_K = -qt_1^{-1} d_1 = -qt_1^{-1} D_1 \in N_2$ gilt.

Für den Induktionsschritt konstruieren wir zunächst einen Algebrenepimorphismus ς von der äußeren Algebra $\bigwedge$ bezüglich des Lieranges m in diejenige bezüglich des Lieranges $m - 1$. Dazu ist es erforderlich in der Notation zwischen den Bildungen bezüglich m und denen bezüglich $m - 1$ zu unterscheiden. Wir tun dies, indem wir bezüglich $m - 1$ ein $\downarrow$ als Hochindex anfügen, also $V^\downarrow$ für den natürlichen Komodul vom Rang $n - 2 = 2(m - 1)$, $v_i{}^\downarrow$ für dessen Basiselemente, $\bigwedge^\downarrow$ für die entsprechende äußere Algebra usw..

Die Konstruktion von ς baut auf der folgenden Injektion $\sigma : \underline{n-2} \to \underline{n}$ gegeben durch

$$\sigma(i) = \begin{cases} i & 1 \le i \le m - 1 \\ i + 2 & m - 1 < i \le n - 2 \end{cases}$$

auf. Es sei darauf hingewiesen, daß auf Grund der Abhängigkeit der Anzahl der Zusatzparameter von m auch zwischen den Z-Parametertupeln unterschieden werden muß. Genauer hat man $Q^\downarrow := Q$, $t_k{}^\downarrow := t_{\sigma(k)}$ und $p_{ij}{}^\downarrow := p_{\sigma(i)\sigma(j)}$ zu setzen. Zunächst erhält man einen Algebrenepimorphismus $\widetilde{\varsigma}$ von der Tensoralgebra $\mathcal{T}(V)$ auf die Tensoralgebra $\mathcal{T}(V^\downarrow)$ durch

$$\widetilde{\varsigma}(v_i) = \begin{cases} v^\downarrow_{\sigma^{-1}(i)} & i \neq m, m' \\ 0 & i = m, m' \end{cases}.$$

Man berechnet dann $\widetilde{\varsigma}$ auf den in 3.8 eingeführten Erzeugern des Ideals I_S zu

$$\widetilde{\varsigma}(w_{ij} + w_{ji}) = \begin{cases} w^\downarrow_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)} + w^\downarrow_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)} & i, j \neq m, m' \\ 0 & i = m, j \neq m' \\ -q^{-1}(w'^\downarrow_{(m-1)(m-1)'} + w'^\downarrow_{(m-1)'(m-1)}) & i = m, j = m' \end{cases}$$

sowie $\widetilde{\varsigma}(w'_{mm'} + w'_{m'm}) = 0$. Man beachte den Unterschied der $'$-Operation auf $\underline{n}$ und $\underline{n-2}$. Die Berechnung zeigt $\widetilde{\varsigma}(I_S) = I_S{}^{\downarrow}$, so daß $\widetilde{\varsigma}$ zur gesuchten Abbildung ς faktorisiert.

Zu einer Teilmenge $K \in \underline{n-2}_r$ sei $\sigma(K) := \{\sigma(i) |\ i \in K\} \in \underline{n}_r$. Es gilt offenbar stets $\sigma(K)^+ \cup \sigma(K)^- \subseteq \underline{m-1}$ und umgekehrt gibt es zu jedem $K \in \underline{n}_r$ mit $K^+ \cup K^- \subseteq \underline{m-1}$ ein $K' \in \underline{n-2}_r$ mit $\sigma(K') = K$. Wir schreiben in diesem Fall $K' = \sigma^{-1}(K)$. Mit dieser Notation erhält man

$$\varsigma(v_K) = \begin{cases} 0 & K^+ \cup K^- \not\subseteq \underline{m-1} \\ v^{\downarrow}_{\sigma^{-1}(K)} & K^+ \cup K^- \subseteq \underline{m-1} \end{cases} .$$

Der Kern von ς ist somit genau der Aufspann von denjenigen Basiselementen v_K von $\bigwedge$, für die $m \in K$ oder $m' \in K$ erfüllt ist. Aus $\varsigma(d_i) = d_i{}^{\downarrow}$ für $i \in \underline{m-1}$ und $\varsigma(d_m) = 0$ erkennt man sofort $\varsigma(N) = N^{\downarrow}$.

Einer Komosition $\lambda^{\downarrow} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \Lambda(m-1, r)$ ordnen wir die Komposition $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, 0) \in \Lambda(m, r)$ zu. Unter dieser Zuordnung entspricht jedem $K \in \underline{n-2}_r$ mit $m-1$-Inhalt $||K||^{\downarrow} \in \Lambda(m-1, r)$ der m-Inhalt $||\sigma(K)||$ und $\lambda^{\downarrow\times} > \mu^{\downarrow\times}$ impliziert die Ungleichung $\lambda^{\times} > \mu^{\times}$ (man beachte, daß auch das Symbol $\cdot^{\times}$ in der ersten Ungleichung anders zu interpretieren ist als in der zweiten, also streng genommen $\cdot^{\times\downarrow}$ anstelle $\cdot^{\times}$ zu schreiben wäre).

Wir können nun die Behauptung des Lemmas für den Fall $K^+ \cup K^- \subseteq \underline{m-1}$ beweisen. Auf Grund der Induktionsannahme gilt

$$v^{\downarrow}_{\sigma^{-1}(K)} - \sum_{L \in \underline{n-2}_r,\ ||\sigma(L)||^{\times} > ||K||^{\times}} a_{\sigma^{-1}(K)L} v_L{}^{\downarrow} \in N_r{}^{\downarrow}.$$

Folglich gibt es ein $u \in \ker(\varsigma)$ mit

$$v_K - \sum_{L \in \underline{n-2}_r,\ ||\sigma(L)||^{\times} > ||K||^{\times}} a_{\sigma^{-1}(K)L} v_{\sigma(L)} + u \in N_r.$$

Da der Kern von ς jedoch von Basiselementen v_L mit $m \in L$ oder $m' \in L$ aufgespannt wird folgt die Behauptung, denn für jedes solche L gilt ebenfalls $||L||^{\times} > ||K||^{\times}$.

Wir kommen zum Fall wo $K \cap \{m, m'\} \neq \emptyset$ gilt. Sei $\hat{K} := K \backslash \{m, m'\}$. Wir behandeln zunächst den Fall, wo $\hat{K}$ symplektisch ist. Hier gilt $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \leq j$ für $||K|| = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ und jedes $j < m$. Da aber K selbst nicht symplektisch ist, impliziert dies $r = |K| = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i > m$. Nach Satz 3.9.7 folgt somit $v_K \in N_r$ und die Behauptung ist mit $a_{KL} = 0$ für alle $L \in \underline{n}_r$ mit $||L||^{\times} > ||K||^{\times}$ erfüllt.

Die Behandlung des Falles, in dem $\hat{K}$ nicht symplektisch ist, unterteilt sich in die drei Fälle $K \backslash \hat{K} = \{m\}, K \backslash \hat{K} = \{m'\}$ und $K \backslash \hat{K} = \{m, m'\}$. Da die Argumentation in allen drei Fällen völlig analog verläuft, beschränken wir uns auf den ersten Fall. Wegen $\hat{K}^+ \cup \hat{K}^- \subseteq \underline{m-1}$ können wir das in diesem Fall bereits gezeigte auf $\hat{K}$ anwenden und erhalten

$$v_{\hat K}v_m - \sum_{L\in \underline{n}_r,\ ||L||^\times > ||\hat K||^\times} a_{\hat K L} v_L v_m \in N_r.$$

Nun gilt

$$v_L v_m = \begin{cases} 0 & m \in L \\ b_L v_{L\cup\{m\}} & m \notin L \end{cases},$$

wobei b_L eine geeignete (invertierbare) Vorzahl aus R ist (insbesondere auch $b_K v_K = v_{\hat K} v_m$). Aus der Äquivalenz $||L\cup\{m\}||^\times > ||\hat K \cup \{m\}||^\times = ||K||^\times \iff ||L||^\times > ||\hat K||^\times$ folgt schließlich die Behauptung. $\square$

Bemerkung 3.10.2 *Da $\Lambda(m,r)$ endlich ist, impliziert das Lemma, daß die Restklassen der v_K zu symplektischen K ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^s$ bilden. Von Satz 3.9.7 wurde dazu lediglich der Sachverhalt $\bigwedge^s(m+1) = 0$ verwendet. Es wäre wünschenswert hierfür einen direkten Beweis durch Anwendung der Relationen zu finden. Dies würde dann auch zu einer Beweisvereinfachung von Satz 3.9.7 führen.*

Das nächste Ziel ist eine spiegelbildliche Version des obigen Lemmas. Dazu definieren wir zu $I \subseteq \underline{m}$ die gespiegelte Menge $I^\times := \{i^\times |\ i \in I\}$. Ausserdem ordnen wir $I \subseteq \underline{m}$ die Menge $I' := \{i'|\ i \in I\}$ zu. Mit dieser Notation läßt sich jedes $K \in \underline{n}$ schreiben als $K = K^- \cup (K^+)'$. Wir verwenden dann auch die Bezeichnung $K^\times := K^{-\times} \cup (K^{+\times})'$ für eine Menge $K \subseteq \underline{n}$ sowie $K^\circ = K^- \cap K^+$. Es gelten folgende Vertauschungsregeln: $K^{+\times} = K^{\times +}$, $K^{-\times} = K^{\times -}$ und $K^{\circ\times} = K^{\times\circ}$.

Wir betrachten nun eine neue Basis $\{u_K|\ K \subseteq \underline{n}\}$ von $\bigwedge$, wobei sich die Elemente

$$u_K := v_{K\setminus(K^\circ \cup K^{\circ\prime})} d_{K^\circ}$$

lediglich um eine Einheit $\xi(K) \in R$ von den ursprünglichen Basiselementen v_K unterscheiden, d.h. es gilt $u_K = \xi(K)v_K$. Dazu beachte man, daß nur Relation (3.28) erforderlich ist, um u_K in v_K zu überführen. Wir beschränken uns vorübergehend auf den Grundring $\mathcal{Z}$ und betrachten einen $\mathcal{Z}$-semilinearen Modulautomorphismus $\kappa : \bigwedge_{\mathcal{Z},Q} \to \bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$, der durch

$$\kappa\Big(\sum_{K\subseteq \underline{n}} a_K u_K\Big) := \sum_{K\subseteq\underline{n}} \alpha(a_K) u_{K^\times}$$

definiert ist. Darin ist $\alpha : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$, derjenige Ringautomorphismus, der Q auf Q^{-1} abbildet, alle anderen Unbestimmen, X_{ij} und X_k, jedoch unverändert läßt. Beachte, daß es sich um keinen semilinearen Algebrenautomorphismus von $\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$ handelt. Dennoch gilt

Lemma 3.10.3 *Sei $K \subseteq \underline{n}$ und $s = |K^+|$ die Anzahl der Elemente von K^+. Dann gilt $\kappa(u_K D_r) = y^{-rs} u_{K^\times} D_r$.*

Beweis: Nach Lemma 3.9.4 gilt

$$u_K D_r = \xi(K) v_K D_r = \xi(K) v_K \sum y^{t(I,K^+)} d_I =$$

$$u_K \sum y^{t(I,K^+)} d_I = \sum y^{t(I,K^+)} u_{K \cup I \cup I'}$$

wobei die Summe jeweils über alle $I \in \underline{m}_r$ mit $I \subseteq \underline{m} \backslash (K^+ \cup K^-)$ läuft. Dies liefert

$$\kappa(u_K D_r) = \sum y^{-t(I,K^+)} u_{(K \cup I \cup I')^\times} = \sum y^{-t(K^{+\times}, I^\times)} u_{K^\times \cup I^\times \cup I^{\times\prime}}$$

da offenbar für beliebige Mengen $L, M \subseteq \underline{m}$ stets $t(L, M) = t(M^\times, L^\times)$ erfüllt ist. Durchläuft I das Komplement von $K^+ \cup K^-$ in $\underline{m}$ so durchläuft $I^\times$ das Komplement von $K^{+\times} \cup K^{-\times} = K^{\times +} \cup K^{\times -}$. Somit erhält man

$$\kappa(u_K D_r) = \sum y^{-t(K^{\times +}, I)} u_{K^\times \cup I \cup I'}$$

wobei diesmal die Summe über alle $I \in \underline{m}_r$ mit $I \subseteq \underline{m} \backslash (K^{\times +} \cup K^{\times -})$ läuft. Wegen $t(K^{\times +}, I) + t(I, K^{\times +}) = |I||K^{\times +}| = rs$ für alle $I \subseteq \underline{m} \backslash K^{\times +}$ ist dies aber nach obiger Rechnung wiederum gleich $y^{-rs} u_{K^\times} D_r$. □

Da der r-te homogene Summand N_r des Ideals N als $\mathcal{Z}$-Modul von den Elementen $u_K D_l$ mit $|K| + l = r$ erzeugt wird erhält man sofort $\kappa(N_r) = N_r$. Dies liefert durch Anwendung von κ auf die Formel aus Lemma 3.10.1

Satz 3.10.4 *Sei $K \in \underline{n}_r$ nicht spiegelsymplektisch. Dann gibt es zu $L \in \underline{n}_r$ mit $||L|| > ||K||$ Zahlen $a_{KL} \in R$ (möglicherweise Null), so daß in $\bigwedge^s$ gilt*

$$v_K + N_r = \sum_{L \in \underline{n}_r,\ ||L|| > ||K||} a_{KL} v_L + N_r.$$

Beweis: Nach (3.27) und Bemerkung 3.8.4 können wir uns auf den Fall $\bigwedge_{\mathcal{Z},Q}$ beschränken. Es gilt offenbar $||K^\times|| = ||K||^\times$. Ist K nicht spiegelsymplektisch, so ist $K^\times$ nicht symplektisch. Satz 3.10.1 liefert dann Elemente $a'_{KL} \in R$ mit

$$v_{K^\times} - \sum_{L \in \underline{n}_r,\ ||L||^\times > ||K||} a'_{KL} v_L \ \in N_r.$$

Anwendung von κ darauf führt wegen $\kappa(v_L) = \alpha(\xi(L)^{-1}) \xi(L^\times) v_{L^\times}$ für $L \subseteq \underline{n}$ mit den Zahlen

$$a_{KL} := \alpha(\xi(L^\times)^{-1}) \xi(L) \alpha(\xi(K^\times)) \xi(K^\times)^{-1} a'_{KL^\times} \in R$$

für $||L|| > ||K||$ auf die gesuchte Formel. □

3.11 Bideterminanten als Koeffizientenfunktionen

Wir wollen nun die quantensymplektischen Bideterminanten aus 3.3 als Koeffizientenfunktionen geeigneter $A^{\mathrm{s}}(n)$-Komoduln interpretieren. Nach Satz 3.8.2 erhält man zu einer Komposition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \Lambda(p, r)$ von r in p Teile die $A^{\mathrm{s}}(n)$-Komoduln

$$N(\lambda) := \bigwedge(\lambda_1) \otimes \bigwedge(\lambda_2) \otimes \ldots \otimes \bigwedge(\lambda_p). \tag{3.35}$$

Genau genommen sind es Komoduln für den r-ten homogenen Summanden $A^{\mathrm{s}}(n, r)$ von $A^{\mathrm{s}}(n)$. Sie besitzen die freie R-Basis

$$B_\lambda := \{v_{I_1} \otimes v_{I_2} \otimes \ldots \otimes v_{I_p} | \, (I_1, I_2, \ldots, I_p) \in \underline{n}_{\lambda_1} \times \underline{n}_{\lambda_2} \times \ldots \times \underline{n}_{\lambda_p}\}.$$

Im Fall $\lambda = (0, \ldots, 0)$ identifizieren wir $N(\lambda)$ mit dem trivialen Komodul R. Ist $\lambda \in \Lambda^+(r)$ eine Partition, so indizieren wir die Basis von $M(\lambda) := N(\lambda')$ durch (bezüglich der gewöhnlichen Ordnung auf $\underline{n}$) streng spaltenaufsteigenden λ-Tableaus $T_{\mathbf{i}}^{\lambda}$ in $\underline{n}$ auf folgende Weise: Einem Multi-Index $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I(n, r)$ ordnen wir die Teilmenge $I(\mathbf{i}) := \{i_1, \ldots, i_r\} \in \underline{n}$ zu. Umgekehrt betrachten wir – wie schon in 3.9 – zu einer Teilmenge $I := \{i_1, \ldots, i_r\} \in \underline{n}_r$ den (Initial-) Index $\mathbf{i}(I) := (i_1, \ldots, i_r)$, wobei $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ vorausgesetzt sei. Wir setzen dann

$$v_{\mathbf{i}}^{\lambda} := v_{I(\mathbf{i}^1_{\lambda'})} \otimes v_{I(\mathbf{i}^2_{\lambda'})} \otimes \ldots \otimes v_{I(\mathbf{i}^p_{\lambda'})}.$$

Beachte, daß bezüglich der Bildung der v_I ebenfalls die gewöhnliche Ordnung, das ist $1 < 2 < \ldots < n$, von $\underline{n}$ verwendet wird. Im klassischen Fall kann man auch mit einer anderen Ordnung arbeiten (z.B. wird in [Do3] die Ordnung $1' \ll 1 \ll 2' \ll \ldots \ll m' \ll m$ verwendet), im Quantenfall erhält man jedoch Schwierigkeiten bei der Wahl anderer Ordnungen, insbesondere treten Probleme beim Beweis des unten stehenden Lemmas 3.11.2 auf. Es ist klar, daß $v_{\mathbf{i}}^{\lambda}$ genau die Basis $B_{\lambda'}$ von $M(\lambda)$ durchläuft, wenn $\mathbf{i}$ die Menge der Spaltenstandardtableaus $I_{\lambda}^{<'}$ durchläuft.

Das Ziel ist nun, zu zeigen, daß die quantensymplektischen Bideterminanten zu Spaltenstandardtableaus gerade die Koeffizientenfunktionen der Komoduln $M(\lambda)$ bezüglich der Basis $B_{\lambda'}$ sind, daß also

$$\tau_{M(\lambda)}(v_{\mathbf{j}}^{\lambda}) = \sum_{\mathbf{i} \in I_{\lambda}^{<'}} v_{\mathbf{i}}^{\lambda} \otimes T_q^{\lambda}(\mathbf{i} : \mathbf{j}) \tag{3.36}$$

gilt. Auf Grund der Produktformel (3.8) für die quantensymplektischen Bideterminanten, reicht es, dies in Bezug auf die Fundamentalgewichte ω_r für $r = 1, \ldots, n$ zu zeigen, da offenbar $M(\omega_r) = \bigwedge(r)$ gilt. Denn ist erst einmal

$$\tau_{\bigwedge(r)}(v_J) = \sum_{I \in \underline{n}_r} v_I \otimes \det_q(I, J), \tag{3.37}$$

mit $\det_q(I, J) := \det_q(\mathbf{i}(I), \mathbf{i}(J))$ verifiziert, so folgt daraus

$$\tau_{M(\lambda)}(v_{I(\mathbf{j}^1)} \otimes \ldots \otimes v_{I(\mathbf{j}^p)}) = \sum_{\mathbf{i} \in I_{\lambda}^{<'}} (v_{I(\mathbf{i}^1)} \otimes \ldots \otimes v_{I(\mathbf{i}^p)}) \otimes \det_q(\mathbf{i}^1_{\lambda'}, \mathbf{j}^1_{\lambda'}) \ldots \det_q(\mathbf{i}^p_{\lambda'}, \mathbf{j}^p_{\lambda'}),$$

da die Multiplikation in $\bigwedge$ gemäß Satz 3.8.2 ein $A^s(n)$-Komodulmorphismus ist. Mittels (3.8) erhält man dann (3.36). Zum Beweis von (3.37) ziehen wir die in 3.6 angekündigte Folgerung aus Lemma 3.6.1. Dabei verwenden wir wieder die Bezeichnung $\kappa_r := \sum_{w\in\mathcal{S}_r}(-y)^{-l(w)}\beta(w)$.

Korollar 3.11.1 *Sei $\pi_r : V^{\otimes r} \to \bigwedge(r)$ die natürliche Projektion. Dann faktorisiert κ_r über π_r, d.h. es gibt einen eindeutig bestimmten R-Homomorphismus $\nu_r : \bigwedge(r) \to V^{\otimes r}$ mit $\kappa_r = \nu_r \circ \pi_r$.*

Beweis: Sei I_r der r-te homogene Summand des Ideals I_S. Da I_S von $U_S \subset V^{\otimes 2}$ erzeugt wird, wird I_r als R-Modul, von Elementen der Form $a \otimes u \otimes b$ erzeugt, wobei a, b homogene Elemente in $\mathcal{T}(V)$ sind, deren Grad zu $r-2$ aufsummiert, und wo $u \in U_S$ gilt (dabei verwenden wir die Bezeichnung U_S aus 3.8). Ein solches Element liegt aber im Kern von $(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta_{i+1})$ falls i der Grad von a ist, weil nämlich U_S im Kern von $(\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} - y^{-1}\beta)$ enthalten ist. Also gilt nach Lemma 3.6.1 $\kappa_r(a \otimes u \otimes b) = 0$ und es folgt $\kappa_{r|I_r} = 0$. Dies war aber gerade zu zeigen. □

Wir betrachten $I^<_{\omega_r} = \{\mathbf{i} \in I(n,r) | i_1 < i_2 < \ldots < i_r\}$.

Lemma 3.11.2 *Sei F_r der R-lineare Aufspann von $\{v_\mathbf{j} | \mathbf{j} \in I(n,r)\backslash I^<_{\omega_r}\}$ in $V^{\otimes r}$. Dann gilt für alle $w \in \mathcal{S}_r\backslash\{\mathrm{id}\}$ und $\mathbf{i} \in I^<_{\omega_r}$*

$$\beta(w)(v_\mathbf{i}) \in F_r.$$

Beweis: In ähnlicher Weise wie bei Lemma 3.6.13 führen wir vollständige Induktion nach r. Im Fall von $r = 2$ gibt es nur die eine Möglichkeit $w = (1,2)$ und es folgt $\beta(w) = \beta$. Man berechnet dann für $k < l$ mit $k \neq l'$ und $i \leq m$

$$\beta(v_{(k,l)}) = qp_{lk}t_lt_k^{-1}v_{(l,k)} \tag{3.38}$$

$$\beta(v_{(i,i')}) = t_{i'}t_i^{-1}v_{(i',i)} + (y-1)\sum_{j=1}^{i-1} q^{j-i}t_{i'}t_j^{-1}v_{(j',j)} \tag{3.39}$$

woraus die Behauptung folgt. Zum Beweis des Induktionsschrittes betten wir $\mathcal{S}_{r-1}$ (wie auch schon im Zusammenhang mit (2.4)) als diejenige parabolische Untergruppe in $\mathcal{S}_r$ ein, deren Elemente die r-te Stelle festlassen. Ist $\iota : \mathcal{S}_{r-1} \hookrightarrow \mathcal{S}_r$ diese Einbettung, so gilt $\beta(\iota(w)) = \beta(w) \otimes \mathrm{id}_V$ für alle $w \in \mathcal{S}_{r-1}$. Um Umständlichkeiten zu vermeiden, lassen wir ι aus der Notation wieder weg und fassen $\mathcal{S}_{r-1}$ auf diese Weise (wie auch schon zuvor) als Untergruppe von $\mathcal{S}_r$ auf. Da offenbar $F_{r-1} \otimes V \subseteq F_r$ gilt, ist im Fall $w \in \mathcal{S}_{r-1}$ nichts zu zeigen. Wir können daher gemäß (2.4) $\beta(w) = \beta(w')\beta_{r-1}\beta_{r-2}\ldots\beta_l$ mit $w' \in \mathcal{S}_{r-1}$ und $l \leq r-1$ annehmen.

Wir betrachten zunächst den Fall daß i'_l nicht unter den $\{i_{l+1}, \ldots, i_r\}$ vorkommt. Somit kommt bei der Anwendung von $\beta_{r-1}\beta_{r-2}\ldots\beta_l$ auf $v_\mathbf{i}$ lediglich (3.38) nicht aber (3.39) zum Tragen. Folglich gibt es ein invertierbares Element $a \in R$ mit $\beta_{r-1}\beta_{r-2}\ldots\beta_l(v_\mathbf{i}) = av_{i_1}\ldots\hat{v_{i_l}}\ldots v_{i_r}v_{i_l}$. Darin steht $\hat{v_{i_l}}$ für die Auslassung von v_{i_l}. Dieses Element liegt aber in F_r, so daß die Behauptung im Fall $w' = \mathrm{id}$ gezeigt ist.

Für $w' \neq \mathrm{id}$ gilt nach Induktionsvorraussetzung aber $\beta(w')(av_{i_1}\dots\hat{v_{i_l}}\dots v_{i_r}v_{i_l}) \in F_{r-1}\otimes v_{i_l}$, da $(i_1,\dots,\hat{i_l},\dots,i_r) \in I^<_{\omega_{r-1}}$ gilt. Also ergibt sich auch hier die Behauptung.

Der Fall $i'_l \in \{i_{l+1},\dots,i_r\}$ kann wegen $\mathbf{i} \in I^<_{\omega_r}$ nur für $i_l \leq m$ auftreten. Sei dann $i'_l = i_k$. Wie im ersten Fall findet man zunächst ein invertierbares $a \in R$ mit $\beta_{k-2}\beta_{k-3}\dots\beta_l(v_\mathbf{i}) = av_{i_1}\dots\hat{v_{i_l}}\dots v_{i_{k-1}}v_{i_l}v_{i_k}v_{i_{k+1}}\dots v_{i_r}$. Bei der Anwendung von β_{k-1} hierauf kommt zum ersten mal (3.39) zum Tragen. Ein Blick auf diese Gleichung zeigt aber, daß alle dabei auftretenden Summanden an der k-ten Stelle ein v_i mit $i \leq i_l \leq m$ besitzen. Dies setzt sich auch bei der Anwendung der übrigen $\beta_k,\dots,\beta_{r-1}$ fort, so daß alle Summanden in $\beta_{r-1}\beta_{r-2}\dots\beta_l(v_\mathbf{i})$ an der r-ten Stelle ein v_i mit $i \leq i_l \leq m$ enthalten.

Wir verwenden nun Satz 3.1.1 über die Invarianz der Gewichtsräume unter der Operation der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra. Die Bedingung $i'_l \in \{i_{l+1},\dots,i_r\}$ impliziert nämlich, daß $v_\mathbf{i}$ in einem Gewichtsraum $(V^{\otimes r})^{\lambda+P}$ zu einem Gewicht $\lambda+P$ von einem Rang $\mathrm{rg}(\lambda+P) \geq 1$ liegt. Aus der Invarianz folgt dann, daß auch in jedem monomialen Summanden von $\beta(w)(v_\mathbf{i})$ wenigstens ein Paar assozierter Indizes (j,j') vorkommt. Somit enthält jeder solche Summand $a_\mathbf{j}v_\mathbf{j}$ wenigstens ein v_j mit $j > m$. Da nach obigem $a_\mathbf{j}v_\mathbf{j}$ aber mit v_i für $i \leq m$ endet, muß es in F_r enthalten sein. □

Lemma 3.11.3 *Durch $\pi_r(v_\mathbf{j}) = \sum_{I\in\underline{n}_r} d_{I\mathbf{j}}v_I$ und $\kappa_r(v_\mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i}\in I(n,r)} k_{\mathbf{ij}}v_\mathbf{i}$ seien die Koeffizientenmatrizen von π_r und κ_r gegeben. Dann gilt für alle $I \in \underline{n}_r$ und alle $\mathbf{j} \in I(n,r)$*

$$d_{I\mathbf{j}} = k_{\mathbf{i}(I)\mathbf{j}}.$$

Beweis: Nach Korollar 3.11.1 gibt es $\nu_r : \bigwedge(r) \to V^{\otimes r}$ mit $\kappa_r = \nu_r \circ \pi_r$. Die Koeffizientenmatrix von ν_r sei durch $\nu_r(v_I) = \sum_{\mathbf{i}\in I(n,r)} l_{\mathbf{i}I}v_\mathbf{i}$ gegeben. Es gilt dann

$$\nu_r(v_I) = \kappa_r(v_{\mathbf{i}(I)}) = \sum_{\mathbf{i}\in I(n,r)} k_{\mathbf{ii}(I)}v_\mathbf{i},$$

also $l_{\mathbf{i}I} = k_{\mathbf{ii}(I)}$. Aus Lemma 3.11.2 folgt $\kappa_r(v_{\mathbf{i}(I)}) \equiv v_{\mathbf{i}(I)}$ modulo F_r, da offenbar $\mathbf{i}(I) \in I^<_{\omega_r}$ gilt. Dies führt auf $l_{\mathbf{i}(J)I} = k_{\mathbf{i}(J)\mathbf{i}(I)} = \delta_{IJ}$ (Kronecker-Symbol). Wegen $\kappa_r = \nu_r \circ \pi_r$ berechnet man

$$k_{\mathbf{i}(I)\mathbf{j}} = \sum_{J\in\underline{n}_r} l_{\mathbf{i}(I)J}d_{J\mathbf{j}} = d_{I\mathbf{j}}.$$

□

Bemerkung 3.11.4 *Der Beweis zeigt die Gültigkeit der Formel*

$$k_{\mathbf{ij}} = \sum_{K\in\underline{n}_r} k_{\mathbf{ii}(K)}k_{\mathbf{i}(K)\mathbf{j}}$$

wegen $\kappa_r = \nu_r \circ \pi_r$. Daraus erhält man

$$\det_q(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \sum_{L\in \underline{n}_r} \det_q(\mathbf{i},L) k_{\mathbf{i}(L)\mathbf{j}} = \sum_{K\in \underline{n}_r} k_{\mathbf{ii}(K)} \det_q(K,\mathbf{j}) =$$

$$\sum_{K,L\in \underline{n}_r} k_{\mathbf{ii}(K)} k_{\mathbf{i}(L)\mathbf{j}} \det_q(K,L).$$

Satz 3.11.5 *Die Koeffizientenfunktionen der Komoduln $M(\lambda)$ sind gerade die quantensymplektischen Bideterminanten $T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})$ zu Paaren von Multi-Indizes $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{<\prime}$, d. h. es gilt (3.36).*

Beweis: Wie oben aufgezeigt, genügt es Gleichung (3.37) zu zeigen. Da $\bigwedge$ eine $A^s(n)$-Komodulalgebra ist, berechnet man

$$\tau_{\bigwedge(r)}(v_J) = \sum_{\mathbf{j}\in I(n,r)} v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_r} \otimes x_{\mathbf{ji}(J)} =$$

$$\sum_{\mathbf{j}\in I(n,r)} \sum_{I\in \underline{n}_r} d_{I\mathbf{j}} v_I \otimes x_{\mathbf{ji}(J)} = \sum_{I\in \underline{n}_r} v_I \otimes \sum_{\mathbf{j}\in I(n,r)} k_{\mathbf{i}(I)\mathbf{j}} x_{\mathbf{ji}(J)}.$$

Wegen $\kappa_r x_{\mathbf{i}(I)\mathbf{i}(J)} = \det_q(\mathbf{i}(I),\mathbf{i}(J)) = \det_q(I,J)$ nach (3.17) folgt daraus die Behauptung. $\Box$

Satz 3.11.6 *Sei $\lambda \in \Lambda^+(r)$ und $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,r)$ beliebig. Dann gilt*

$$\Delta(T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})) = \sum_{\mathbf{k}\in I_\lambda^{<\prime}} T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k}) \otimes T_q^\lambda(\mathbf{k}:\mathbf{j})$$

Beweis: Da Δ ein Algebrenhomomorphismus ist, reicht es wiederum aufgrund der Produktformel, den Beweis für Determinanten zu erbringen. Dabei beachte man, daß $\mathbf{k} \in I_\lambda^{<\prime}$ genau dann gilt, wenn für alle Spalten s des Diagramms von λ $\mathbf{k}_{\lambda'}^s \in I_{\omega_{\lambda'_s}}^{<\ \prime}$ gilt. Im Fall $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I_{\omega_r}^{<\prime}$, also $\mathbf{i} = \mathbf{i}(I)$ und $\mathbf{j} = \mathbf{i}(J)$ mit $I,J \in \underline{n}_r$, erhält man die Behauptung für $\Delta(\det_q(I,J))$ aus dem Komodulaxiom

$$\mathrm{id}_{\bigwedge(r)} \otimes \Delta = (\tau_{\bigwedge(r)} \otimes \mathrm{id}_{A^s(n,r)}) \circ \tau_{\bigwedge(r)}$$

und dem obigen Satz über die Koeffizientenfunktionen von $\bigwedge(r)$ durch Koeffizientenvergleich bezüglich der freien Basis $\{v_I |\ I \in \underline{n}_r\}$. Die allgemeinere Version mit beliebigen $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,r)$ ergibt sich daraus nach Bemerkung 3.11.4 durch die Rechnung

$$\Delta(\det_q(\mathbf{i},\mathbf{j})) = \sum_{K,L,M\in \underline{n}_r} k_{\mathbf{ii}(K)} k_{\mathbf{i}(L)\mathbf{j}} \det_q(K,M) \otimes \det_q(M,L) =$$

$$\sum_{M\in \underline{n}_r} \det_q(\mathbf{i},M) \otimes \det_q(M,\mathbf{j}).$$

$\Box$

Die Bemerkung 3.11.4 zeigt ebenso

Korollar 3.11.7 *Sei* $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in I(n,r)$ *und sei* $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \dots \wedge v_{i_r} = \sum_{I \in \underline{n}_r} a_{\mathbf{i}I} v_I$ *mit* $a_{\mathbf{i}I} \in R$ *so gilt für alle* $\mathbf{j} \in I(n,r)$

$$\det_q(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \sum_{I \in \underline{n}_r} a_{\mathbf{i}I} \det_q(I,\mathbf{j}) \text{ und } \det_q(\mathbf{j},\mathbf{i}) = \sum_{I \in \underline{n}_r} \theta(a_{\mathbf{i}I}) \det_q(\mathbf{j},I)$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt sofort wegen $a_{\mathbf{i}I} = k_{\mathbf{i}(I)\mathbf{i}}$ die zweite daraus durch Anwendung von Satz 3.5.3 im Sinne von Bemerkung 3.5.2. □

3.12 Komodulstruktur von $\bigwedge^{\mathrm{s}}$

Als nächstes soll der Nachweis erbracht werden, daß der Quotient $\bigwedge^{\mathrm{s}} = \bigwedge/N$ aus 3.9 eine $A^{\mathrm{s}}(n)$-Komodulalgebra ist, wozu die Invarianz des Ideals N zu zeigen ist. Man erkennt zunächst, daß das Bild $q^{-m}C_1 + q^m D_1 = (q^m + q^{-m})D_1$ von J in $\bigwedge$ unter $A^{\mathrm{s}}(n,2)$ invariant ist. Genau genommen gilt $\tau((q^m + q^{-m})D_1) = (q^m + q^{-m})D_1 \otimes g$, wobei τ die Komodulstrukturabbildung von $\bigwedge(2)$ sei. Gemäß der Sätze 3.7.7 und 3.8.3 ist $\bigwedge(2) \otimes A^{\mathrm{s}}(n,2)$ ein freier R-Modul. Also ist auch D_1 invariant. Ebenso muß dann $\{r\}_y! D_r = (D_1)^r$ (nach Lemma 3.9.1) invariant sein, da $\bigwedge$ nach Satz 3.8.2 eine Komodulalgebra ist. Allerdings können wir daraus nicht schließen, daß auch die $D_2, \dots, D_m$ invariant sind, da bislang nicht klar ist, ob (über $\mathcal{Z}$) Torsionselemente bezüglich den y-analogen Fakultäten $\{r\}_y!$ in $A^{\mathrm{s}}(n,2r)$ für $r = 2, \dots, m$ auftreten oder nicht. Der Nachweis der Invarianz der $D_2, \dots, D_m$ bezüglich $A^{\mathrm{s}}(n)$ wird uns leider nur unter gewissen Einschränkungen gelingen. Da wir also zunächst von Torsionselementen in den homogenen Summanden $A^{\mathrm{s}}(n,2r)$ für $r = 2, \dots, m$ ausgehen müssen, versuchen wir zunächst diese mit den Methoden aus 1.7 näher zu beschreiben.

Wie zuvor verwenden wir Abkürzungen der Art $\det_q(I,J)$ für $\det_q(\mathbf{i}(I), \mathbf{i}(J))$. Darin sei wieder $\mathbf{i}(I)$ der aus den Elementen der Teilmenge $I \in \underline{n}_r$ in bezüglich $<$ aufsteigender Reihenfolge gebildete Multi-Index. Einer Menge $J \in \underline{m}_r$ ordnen wir die Menge $JJ' := \{j, j' \mid j \in J\} \in \underline{n}_{2r}$ zu und bezeichnen die Menge aller solchen Mengen in $\underline{n}_{2r}$ mit $\check{\underline{n}}_{2r}$. Zu jedem $J \in \underline{m}_r$ gibt es ein (eindeutiges) in R invertierbares Element $\rho(J) \in R$ so, daß $d_J = \rho(J) v_{JJ'}$ in $\bigwedge$ gilt (vgl. Beweis von Lemma 3.9.6). Zu $I \in \underline{n}_{2r}$ definieren wir Ringelemente

$$a_I := \begin{cases} 0 & I \notin \check{\underline{n}}_{2r} \\ \rho(J) & I = JJ' \in \check{\underline{n}}_{2r} \end{cases},$$

die entweder invertierbar oder Null sind, und erhalten die Darstellung

$$D_r = \sum_{I \in \underline{n}_{2r}} a_I v_I$$

bezüglich der Basis B_{2r} von $\bigwedge(2r)$. Beim Vergleich mit der Notation aus 1.7 hat man anstelle der $i \in \underline{n}$ hier die Teilmengen $I \in \underline{n}_{2r}$ als Indizes zu verwenden. Dem dortigen Element v entspricht hier D_r und anstatt des dortigen x_i hat man nach dem Satz 3.11.5 über die Koeffizientenfunktionen von $\bigwedge$

$$G_I := \sum_{K \in \underline{n}_{2r}} a_K \mathrm{det}_q(I, K)$$

zu betrachten. Wir definieren das Idealerzeugnis

$$\mathcal{I} := \langle \{G_I - a_I g^r \mid I \in \underline{n}_{2r},\ r = 2, \ldots, m\} \rangle$$

in $A^{\mathrm{s}}(n)$. Darin ist g^r die r-fache Potenz des Quantendilatationskoeffizienten. Korollar 1.7.4 zeigt (nach $(m-1)$-maliger Anwendung), daß es sich um ein Biideal handelt. Offensichtlich ist es homogen. Dies führt auf die graduierte Matrix-Bialgebra

$$A^{\mathrm{s}}(n)' := A^{\mathrm{s}}(n)/\mathcal{I},$$

Gemäß den Ausführungen in 1.7 und 1.6 erhält man sofort

Satz 3.12.1 *Bezüglich der Bialgebra $A^{\mathrm{s}}(n)'$ gilt $\tau(D_r) = D_r \otimes g^r$. Insbesondere sind die homogenen Summanden N_r des Ideals N in der äußeren Algebra $A^{\mathrm{s}}(n)'$ Unterkomodul von $\bigwedge(r)$ und $\bigwedge^{\mathrm{s}} = \bigwedge/N$ ist eine graduierte $A^{\mathrm{s}}(n)'$-Komodulalgebra mit homogenen Summanden $\bigwedge^{\mathrm{s}}(r) = \bigwedge(r)/N_r$.*

Aufgrund der in $A^{\mathrm{s}}(n)$ gültigen Invarianz $\tau(\{r\}_y! D_r) = \{r\}_y! D_r \otimes g^r$ und des Freiseins von $\bigwedge(2r)$ folgert man

$$\{r\}_y!(G_I - a_I g^r) = 0 \quad \text{für alle} \quad I \in \underline{n}_{2r} \quad \text{und} \quad r = 2, \ldots, m \tag{3.40}$$

Sind die Ringelemente $\{r\}_y!$ alle invertierbar, so ist $\mathcal{I} = 0$ und damit kein Unterschied zwischen $A^{\mathrm{s}}(n)$ und $A^{\mathrm{s}}(n)'$ vorhanden. Im Fall, daß sie alle wenigstens von Null verschieden sind (wie etwa im Fall $R = \mathcal{Z}$), muß $\mathcal{I}$ im Torsionsuntermodul von $A^{\mathrm{s}}(n)$ enthalten sein.

Gelegentlich ist es sinnvoll den Integritätsbereich R in der Notation von $\mathcal{I}$ festzuhalten. Wir schreiben dann $\mathcal{I}_R$. Die Definition von $\mathcal{I}$ beruht auf den Definitionen von Bideterminanten und dem Element g aus 3.3. Da deren Bildung mit dem Isomorphismus aus Satz 2.5.2 verträglich ist, erhält man.

Bemerkung 3.12.2 *Der Isomorphismus $\mu_S : A^{\mathrm{s}}_{S,\widetilde{q}}(n) \cong S \otimes_R A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ aus Satz 2.5.2 bildet das Biideal $\mathcal{I}_S$ auf ${\mathcal{I}_R}^{S^{\succ}} = \iota^S(S \otimes_R \mathcal{I}_R)$ ab. Darin ist ι^S die von der Einbettung ι von $\mathcal{I}_R$ in $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ durch den Funktor des Tensorierens mit S induzierte Abbildung (siehe Anhang A.2). Insbesondere faktorisiert dieser Isomorphismus zu einem ebensolchen von $A^{\mathrm{s}}_{S,\widetilde{q}}(n)'$ nach $S \otimes_R A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)'$.*

Nicht einmal im klassischen Fall kann man für einen Körper, dessen Charakteristik ein Teiler von $m!$ ist, aus (3.40) folgern, daß $\mathcal{I} = 0$ gilt. Anders ausgedrückt besteht die Frage, ob im klassischen Fall über $\mathbb{Z}$ Torsionselemente in $A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{Z}}(n) \cong A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{Z},1}(n)$ vorhanden sind. Wir werden nun zeigen, daß hier $\mathcal{I} = 0$ gilt, behalten zunächst jedoch die allgemeine Notation eine Weile bei. Nach Definition der Zahlen a_I ist zum Beweis von $\mathcal{I} = 0$ die Gleichung

$$G_I = a_I g^r = \begin{cases} 0 & I \notin \check{\underline{n}}_{2r} \\ \rho(J)g^r & I = JJ' \in \check{\underline{n}}_{2r} \end{cases} \tag{3.41}$$

zu zeigen. Da die Invarianz von D_1 bereits bekannt ist, wissen wir, daß die Gleichung im Fall $r = 1$ gültig ist. Tatsächlich stimmt sie in diesem Fall (bis aufs Vorzeichen) mit der Gleichung (3.11) überein, die wir in 3.3 explizit nachgerechnet haben. Es sei bemerkt, daß unsere Kenntnis der Invarianz von D_1 auf dieser expliziten Rechnung beruht, da (3.11) via der Sätze 3.7.5, 3.7.7, 3.8.1 und 3.8.2 in den Nachweis der Komodulstruktur von $\bigwedge$ eingegangen ist.

Zu einem Multi-Index $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_r) \in I(m,r)$ verwenden wir die Bezeichnungen $\eta(\mathbf{j}) := (-1)^r \prod_{l=1}^r q^{-j_l} t_{j_l}$ und $\mathbf{jj}' := (j_1, j_1', j_2, j_2', \ldots, j_r, j_r') \in I(n, 2r)$, und vereinbaren zu einer Teilmenge $J \in \underline{m}_r$ die Abkürzungen $\eta(J) := \eta(\mathbf{i}(J))$ und $\mathbf{i}'(J) := \mathbf{i}(J)\mathbf{i}(J)'$. Es gilt die Beziehung $I(\mathbf{i}'(J)) = JJ'$. Die Zahl $\eta(J)$ ist derjenige Faktor, um den sich d_J von $v_{j_1} \wedge v_{j_1'} \wedge \ldots \wedge v_{j_r} \wedge v_{j_r'}$ unterscheidet. Zu $\mathbf{i} \in I(n, 2r)$ setzen wir dann

$$G_{\mathbf{i}} := \sum_{J \in \underline{m}_r} \eta(J) \det\nolimits_q(\mathbf{i}, \mathbf{i}'(J)) \quad \in A^{\mathrm{s}}(n, 2r)$$

Wegen Korollar 3.11.7 gilt $\eta(J)\det_q(\mathbf{i}, \mathbf{i}'(J)) = \rho(J)\det_q(\mathbf{i}, JJ')$ für jedes $\mathbf{i} \in I(n, 2r)$, woraus sich in Übereinstimmung mit obiger Bezeichnung $G_I = G_{\mathbf{i}(I)}$ ergibt. Sei $\mu := (r, r) \in \Lambda^+(2, 2r)$ die Partition von $2r$, deren Diagramm zwei Zeilen der Länge r besitzt. Die dazu duale Partition ist $\mu' = (2, 2, \ldots, 2)$ (r-mal). Es gilt dann $\mathbf{i}^l_{\mu'} = (i_{2l-1}, i_{2l}) \in I(n, 2)$ und

$$G^l_{\mathbf{i}} := G_{\mathbf{i}^l_{\mu'}} = \begin{cases} 0 & i'_{2l-1} \neq i_{2l} \\ -q^{-i} t_i g & i = i_{2l-1} = i'_{2l} \leq m \\ y^{1-m} q^i t_{i'} g & i = i_{2l} = i'_{2l-1} \leq m \end{cases} .$$

Beachte, daß im Fall $i_{2l-1} = i_{2l}$ auf Grund von Korollar 3.6.2 $G^l_{\mathbf{i}} = 0$ erfüllt ist. Zur Bestätigung der letzten Zeile verwendet man Korollar 3.11.7 zusammen mit der in $\bigwedge$ geltenden Relation $y^{1-i} c_i = d_i - (y-1) D_{i+1,1}$ (nach (3.32)). Wir setzen nun

$$G'_{\mathbf{i}} := \prod_{l=1}^r G^l_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{j} \in I(m,r)} \eta(\mathbf{j}) T^{\mu}_q(\mathbf{i} : \mathbf{jj}') \quad \in A^{\mathrm{s}}(n, 2r).$$

Das rechte Gleichheitszeichen gilt aufgrund der Produktformel (3.8). Nach der Formel für die $G^l_{\mathbf{i}}$ gibt es zu jedem $\mathbf{i} \in I(n, 2r)$ ein $\xi(\mathbf{i}) \in R$ mit $G'_{\mathbf{i}} = \xi(\mathbf{i}) g^r$. Dieses ist genau dann invertierbar in R, wenn $i_{2l-1} = i'_{2l}$ für jedes $l \in \underline{r}$ gilt. Andernfalls ist es Null. Zum Beweis von (3.41) reicht es daher, zu $I \in \underline{n}_{2r}$ Zahlen $z_{I\mathbf{k}} \in R$ mit

$$G_I = \sum_{\mathbf{k} \in I(n,2r)} z_{I\mathbf{k}} G'_{\mathbf{k}} \quad \text{und} \quad \sum_{\mathbf{k} \in I(n,2r)} z_{I\mathbf{k}} \xi(\mathbf{k}) = a_I \tag{3.42}$$

zu finden. Dies wird uns leider nur im klassischen Fall gelingen. Um dies vorzubereiten betrachten wir die Weylgruppe W_r zum Dynkindiagramm C_r und fassen diese als Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_{2r}$ auf, genauer als den Zentralisator des

Elementes σ_r in $\mathcal{S}_{2r}$, wobei σ_r durch $\sigma_r(2l) := 2l-1,\ \sigma_r(2l-1) := 2l$ für $l = 1,\dots,r$ gegeben ist. Bekannterweise ist W_r das Semidirekte Produkt der Untergruppe W_r^1 aller Elemente $\pi \in W_r$ mit $\pi(\underline{2r} \cap 2\mathbb{Z}) \subseteq \underline{2r} \cap 2\mathbb{Z}$, welche zu $\mathcal{S}_r$ isomorph ist, mit dem Normalteiler W_r^0, der von den Transpositionen $(2l-1, 2l)$ erzeugt wird und zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ isomorph ist.

In jeder Linksnebenklasse πW_r findet man einen eindeutig bestimmten Nebenklassenvertreter h mit $h(2l-1) < h(2l)$ für $l \in \underline{r}$ und $h(1) < h(3) < \ldots < h(2r-1)$. Die erste Bedingung erreicht man durch Davorschalten von Transpositionen $(2l-1, 2l) \in W_r^0$ zu jedem l mit $\pi(2l-1) > \pi(2l)$, die zweite durch Davorschalten eines geeigneten Elementes aus W_r^1. Die Eindeutigkeit folgt, da h bereits durch die r-elementige Teilmenge $\{min(\pi(2l-1), \pi(2l)) |\ l \in \underline{r}\}$ von $\underline{n}$, welche lediglich von πW_r abhängt, festgelegt ist. Wir bezeichnen die Menge aller solchen Linksnebenklassenvertreter h mit H.

Satz 3.12.3 *Im klassischen Fall, d.h. unter der Voraussetzung $q = 1 = p_{ij} = t_k$ für alle i, j, k gilt $\mathcal{I} = 0$, also $A^{\mathrm{s}}_{R,1}(n) = A^{\mathrm{s}}_{R,1}(n)'$.*

Beweis: Nach den Vorarbeiten genügt es, Zahlen $z_{I\mathbf{k}}$ gemäß (3.42) zu finden. Hierzu werden wir

$$G_{\mathbf{i}} = \sum_{h\in H} \mathrm{sign}(h) G'_{\mathbf{i}h} = (-1)^r \sum_{h\in H} \mathrm{sign}(h) \sum_{\mathbf{j}\in I(m,r)} T^\mu(\mathbf{i}h : \mathbf{j}\mathbf{j}') \tag{3.43}$$

beweisen, wobei das linke Gleichheitszeichen das fragliche ist (beachte $\eta(\mathbf{j}) = (-1)^r$ im klassischen Fall). Wir leiten daraus zunächst (3.42) ab. Dies ergibt sich im Spezialfall $\mathbf{i} = \mathbf{i}(I)$ für $I \in \underline{n}_{2r}$. Die Zahlen $\xi(\mathbf{i}(I)h)$ sind nach Konstruktion von H nur für $I = JJ' \in \underline{n}\check{}_{2r}$ und demjenigen $h_0 \in H$ von Null verschieden, welches durch $h_0((1, 2, \dots, 2r-1, 2r)) = (1, 2r, 2, 2r-1, \dots, r, r+1)$ definiert ist, also $\mathbf{i}(JJ')h_0 = \mathbf{i}'(J)$ erfüllt. In diesem Fall berechnet man $\xi(\mathbf{i}(I)h_0) = \xi(\mathbf{i}'(J)) = \eta(J) = (-1)^r$ sowie $\rho(J) = (-1)^r \mathrm{sign}(h)$. Mit den Zahlen

$$z_{I\mathbf{k}} := \begin{cases} \mathrm{sign}(h) & \exists h \in H,\ \mathbf{k} = \mathbf{i}(I)h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt (3.42) somit aus (3.43). Der Beweis dieser Gleichung verwendet mehrfach die Laplace-Dualität, für die wir zwar durch Satz 3.6.6 ein Quantenanalogon gefunden haben, das sich jedoch hier nicht anwenden läßt, da im Allgemeinen $l(h)+l(\pi)+l(\sigma)$ für $h \in H$ $\pi \in W_r^1$ und $\sigma \in W_r^0$ von $l(h\pi\sigma)$ verschieden ist. Wir verwenden nämlich, daß W_r^0 gerade der Spaltenstabilisator $S(T^\mu) = \mathcal{S}_{\mu'}$ von T^μ und HW_r^1 ein transversales Linksnebenklassenvertretersystem von W_r^0 in $\mathcal{S}_{2r} = \mathcal{S}_{\omega'_{2r}}$ ist. Die klassische Version der Laplace-Dualität 3.6.6, die bis auf das Fehlen der Voraussetzung über die Additivität der Längen genauso lautet wie dieser Satz, liefert dann unter Beachtung von $\mathrm{sign}(\pi) = 1$ für alle $\pi \in W_r^1$

$$\det(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \sum_{h\in H,\ \pi\in W_r^1} \mathrm{sign}(h) T^\mu(\mathbf{i}h\pi : \mathbf{j}) = \sum_{h\in H} \mathrm{sign}(h) \sum_{\pi\in W_r^1} T^\mu(\mathbf{i}h : \mathbf{j}\pi). \tag{3.44}$$

Beim rechten Gleichheitszeichen verwendet man die Kommutativität in der Produktformel (3.5) für klassische Bideterminanten zum Umsortieren der Reihenfolge der 2×2 Determinanten – den Faktoren von $T^\mu(\mathbf{i}h\pi : \mathbf{j})$ – darin. Zum Beweis von (3.43) ist also die Gleichung

$$\sum_{J \in \underline{m}_r} \sum_{\pi \in W_r^1} \sum_{h \in H} \operatorname{sign}(h) T^\mu(\mathbf{i}h : \mathbf{i}'(J)\pi) = \sum_{\mathbf{j} \in I(m,r)} \sum_{h \in H} \operatorname{sign}(h) T^\mu(\mathbf{i}h : \mathbf{j}\mathbf{j}') \tag{3.45}$$

zu zeigen (beachte $\eta(J) = (-1)^r$). Die Summe auf der rechten Seite schreiben wir als eine solche $\sum_{\lambda \in \Lambda(m,r)} \Sigma_\lambda$ von Teilsummen

$$\Sigma_\lambda := \sum_{|\mathbf{j}| = \lambda} \sum_{h \in H} \operatorname{sign}(h) T^\mu(\mathbf{i}h : \mathbf{j}\mathbf{j}')$$

Darin bezeichnet $|\mathbf{j}| = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda(m,r)$ den Inhalt des Multi-Index $\mathbf{j} \in I(m,r)$, der wie in 2.3 durch $\lambda_k := |\{1 \leq l \leq r | \, j_l = k\}|$ definiert ist. Sie ist somit in Teilsummen über die $\mathcal{S}_r$-Bahnen in $I(m,r)$, die bekanntlich durch die Kompositionen $|\mathbf{j}|$ indiziert sind, zerlegt. Die Teilsumme Σ_{ω_r} liefert aber gerade die Summe auf der linken Seite von (3.45). Dazu beachte man den oben angegebenen Isomorphismus zwischen W_r^1 und der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$. Es bleibt also zu zeigen, daß alle anderen Teilsummen für $\lambda \neq \omega_r$ Null sind. Dazu betrachten wir die Standard Young Untergruppe $\mathcal{S}_\lambda$ von $\mathcal{S}_r$ zu λ, deren Ordnung wir mit $k_\lambda := |\mathcal{S}_\lambda|$ bezeichen. Wir wählen einen festen Multi-Index $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ mit Inhalt λ, z.B. den Initialindex mit $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_r$ aus. $\mathcal{S}_\lambda$ ist dann der Stabilisator von $\mathbf{k}$ in $I(m,r)$. Aus (3.44) erhält man

$$\det(\mathbf{i}, \mathbf{k}\mathbf{k}') = \sum_{h \in H} \operatorname{sign}(h) \sum_{\pi \in W_r^1} T^\mu(\mathbf{i}h : \mathbf{k}\mathbf{k}'\pi) =$$

$$k_\lambda \sum_{h \in H} \operatorname{sign}(h) \sum_{|\mathbf{j}| = \lambda} T^\mu(\mathbf{i}h : \mathbf{j}\mathbf{j}') = k_\lambda \Sigma_\lambda$$

Dabei ist wiederum die Kommutativität der Faktoren von $T^\mu(\mathbf{i}h : \mathbf{k}\mathbf{k}'\pi)$ gemäß der Produktformel für Bideterminanten zu beachten. Die Determinante $\det(\mathbf{i}, \mathbf{k}\mathbf{k}')$ muß aber Null sein, da wegen $|\mathbf{k}| \neq \omega_r$ wenigstens zwei Indizes $k_i = k_j$ für $i \neq j$ übereinstimmen. Also hat man $k_\lambda \Sigma_\lambda = 0$, und da diese Gleichung bereits in dem freien $\mathbb{Z}$-Modul $A_\mathbb{Z}(n, 2r)$ erfüllt ist, folgt $\Sigma_\lambda = 0$ für alle $\lambda \neq \omega_r$. □

Bemerkung 3.12.4 *Die Frage ob im Quantenfall in Analogie zu Gleichung (3.43) etwa* $G_\mathbf{i} = \sum_{h \in H} (-y)^{-l(h)} \beta(h) G'_\mathbf{i}$ *gilt, wobei entsprechend der Notation (1.2)* $\beta(h) G'_\mathbf{i}$ *durch* $\sum_{\mathbf{k} \in I(n,2r)} b_{\mathbf{i}\mathbf{k}}(h) G'_\mathbf{k}$ *mit der Koeffizientenmatrix* $b_{\mathbf{i}\mathbf{k}}(h)$ *von* $\beta(h)$ *erklärt sei, muß unbeantwortet bleiben.*

Faßt man die beiden Sätze 3.12.1 und 3.12.3 zusammen, so folgt

Korollar 3.12.5 *Im klassischen Fall ist* $\bigwedge^\mathrm{s} = \bigwedge / N$ *eine graduierte Komodulalgebra bezüglich* $A^\mathrm{s}_{R,1}(n)$ *mit homogenen Summanden* $\bigwedge^\mathrm{s}(r) = \bigwedge(r)/N_r$. *Genauer gilt* $\tau(D_r) = D_r \otimes g^r$ *bezüglich des Dilatationskoeffizienten* g.

3.13 Der "Straightening-Algorithmus"

Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, daß die in 3.3 eingeführte Menge

$$\mathbf{C}_r := \{T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j})|\ \lambda \in \Lambda^+(m,r),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{\mathrm{mys}}\}$$

ein Erzeugendensystem für den r-ten homogenen Summanden der Halbbialgebra $A^{\mathrm{sh}}(n)$ ist. Dazu benötigen wir allerdings die Komodulstruktur von $A^{\mathrm{s}}(n)$ auf $\bigwedge^{\mathrm{s}}$, die im Allgemeinen nach Satz 3.12.1 lediglich im Fall $A^{\mathrm{s}}(n)' = A^{\mathrm{s}}(n)/\mathcal{I}$ gegeben ist. Wir müssen uns also auf diese Fall beschränken und betrachten daher die graduierte Halbbialgebra

$$A^{\mathrm{sh}}(n)' := A^{\mathrm{s}}(n)/(\langle g\rangle + \mathcal{I}) = A^{\mathrm{s}}(n)/\left\langle \{G_I|\ I \in \underline{n}_{2r}, r \geq 1\}\right\rangle,$$

die nach Definition sowohl epimorphes Bild von $A^{\mathrm{s}}(n)'$ als auch von $A^{\mathrm{sh}}(n)$ ist. Wir können hier also alles in Bezug auf diese beiden Bi- bzw. Halbbialgebren gezeigte verwenden. Gemäß Satz 3.12.3 besteht im klassischen Fall kein Unterschied zwischen $A^{\mathrm{sh}}(n)$ und $A^{\mathrm{sh}}(n)'$ und nach (3.40) unterscheidet sich $A^{\mathrm{sh}}(n)$ im Fall $R = \mathcal{Z}$ höchstens um Torsionselemente von $A^{\mathrm{sh}}(n)'$. Zur Abkürzung schreiben wir

$$\mathcal{K} := A^{\mathrm{sh}}(n,r)'$$

für den r-ten homogenen Summanden diese Halbbialgebra. Nach Satz 3.12.1 können wir dann $\bigwedge^{\mathrm{s}}(r)$ als $\mathcal{K}$-Komodul ansehen. Genauer gesagt können wir wegen $\tau(D_l) = D_l \otimes g^l$ bezüglich der Bialgebra $A^{\mathrm{s}}(n)'$ für jedes $l \in \underline{m}$ davon ausgehen, daß die Einschränkung der Komodulstrukturabbildung

$$\tau' : \bigwedge(r) \xrightarrow{\tau} \bigwedge(r) \otimes A^{\mathrm{s}}(n,r) \to \bigwedge(r) \otimes \mathcal{K}$$

bezüglich $\mathcal{K}$ auf den r-ten homogenen Summanden N_r des Ideals N die Nullabbildung ist. Dies führt zu der folgenden Konsequenz aus Korollar 3.10.4:

Satz 3.13.1 *Sei $K \in \underline{n}_r$ nicht spiegelsymplektisch. Dann gibt es zu $L \in \underline{n}_r$ mit $||L|| > ||K||$ Zahlen $a_{KL} \in R$ (möglicherweise Null), so daß in $\mathcal{K}$ für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$ gilt:*

$$\det_q(\mathbf{i},K) = \sum_{L \in \underline{n}_r,\ ||L||>||K||} a_{KL}\det_q(\mathbf{i},L).$$

Beweis: Aus Anwendung von τ' auf die Gleichung aus Satz 3.10.4 folgt unter Beachtung von $\tau'(N_r) = 0$ und Satz 3.11.5

$$\sum_{I\in\underline{n}_r} v_I \otimes \left(\det_q(I,K) - \sum_{L \in \underline{n}_r,\ ||L||>||K||} a_{KL}\det_q(I,L)\right) = 0.$$

Da $\{v_I|\ I \in \underline{n}_r\}$ eine freie Basis von $\bigwedge(r)$ bildet, sind die einzelnen Summanden in der Summation über $\underline{n}_r$ Null und es folgt die behauptete Gleichung zunächst für alle

Multi-Indizes von der Form $\mathbf{i} = \mathbf{i}(I)$ für $I \in \underline{n}_r$. Mit Hilfe von Bemerkung 3.11.4 erhält man daraus die oben angegebene allgemeinere Form. □

Wir zeigen nun die Fortsetzung des Straigthening Algorithmus aus 3.7 für spiegelsymplektische Standardtableaus und übernehmen dabei alle dort verwendeten Notationen. Anstelle der dortigen beliebigen Ordnung $\trianglelefteq$ auf $\underline{n}$ ist hier die Ordnund $\prec$ (siehe 3.2) zu verwenden.

Satz 3.13.2 (Straightening Algorithmus, Teil 2) *Sei $\lambda \in \Lambda^+(r)$ eine Partition und $\mathbf{j} \in I(n,r)\backslash I_\lambda^{\text{mys}}$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{k} \in I(n,r)$ mit $]\mathbf{k}[>]\mathbf{j}[$ eine Zahl $a_{\mathbf{jk}} \in R$ (möglicherweise Null), so daß in $\mathcal{K}$ für alle $\mathbf{i} \in I(n,r)$ gilt:*

$$T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) \equiv \sum_{]\mathbf{k}[>]\mathbf{j}[} a_{\mathbf{jk}} T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{k}) \quad mod \quad \mathcal{K}(> \lambda)$$

Beweis: Nach dem ersten Teil (Satz 3.7.1) des Satzes brauchen wir für $\mathbf{j}$ nur noch den Fall $\mathbf{j} \in I_\lambda^\prec \backslash I_\lambda^{\text{mys}}$ zu betrachten. Hier ist das entscheidende Hilfsmittel der oben bewiesene Satz 3.13.1. Sei $T_\mathbf{j}^\lambda$ ein Standardtableau bezüglich $\prec$, welches nicht spiegelsymplektisch ist. Die spiegelsymplektische Bedingung sei etwa in der s-ten Spalte $\mathbf{j}_{\lambda'}^s$ verletzt. Dann ist auch die Menge $K := I(\mathbf{j}_{\lambda'}^s)$ der Einträge dieser Spalte gemäß der Definition in 3.9 nicht spiegelsymplektisch. Sei $h := \lambda'_1 + \ldots + \lambda'_{s-1} + 1$ die Position des ersten Eintrages der s-ten Spalte und $k := h + \lambda'_s - 1$ die des letzten. Dann gilt $\mathbf{j}_{\lambda'}^s = (j_h, j_{h+1}, \ldots, j_{k-1}, j_k)$ und $j_h \prec j_{h+1} \prec \ldots \prec j_k$. Es gibt eine Permutation $w \in \mathcal{S}_{\lambda'}$ im Spaltenstabilisator von T^λ, welche die s-te Spalte bezüglich der gewöhnlichen Ordnung in aufsteigende Reihenfolge bringt, also $j_{w(h)} < j_{w(h+1)} < \ldots < j_{w(k)}$ und $w(i) = i$ für $i < h$ und $k < i$. Zunächst erhält man nach Korollar 3.6.12

$$T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}) = a_\mathbf{j}(w) T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}w) \ + \ \sum a_{\mathbf{jk}}(w) T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{k}).$$

Auf $T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}w)$ kann man nun Satz 3.13.1 unter Beachtung der Produktformel (3.8) für Bideterminanten, anwenden:

$$T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}w) = \det{}_q(\mathbf{i}_{\lambda'}^1, \mathbf{j}_{\lambda'}^1)\det{}_q(\mathbf{i}_{\lambda'}^2, \mathbf{j}_{\lambda'}^2) \ldots \det{}_q(\mathbf{i}_{\lambda'}^s, K) \ldots \det{}_q(\mathbf{i}_{\lambda'}^p, \mathbf{j}_{\lambda'}^p)$$

$$= \sum a_{KL} \det{}_q(\mathbf{i}_{\lambda'}^1, \mathbf{j}_{\lambda'}^1) \ldots \det{}_q(\mathbf{i}_{\lambda'}^s, L) \ldots \det{}_q(\mathbf{i}_{\lambda'}^p, \mathbf{j}_{\lambda'}^p)$$

$$= \sum a_{KL} T_q^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j}_{\lambda'}^1 + \ldots \mathbf{j}_{\lambda'}^{s-1} + \mathbf{i}(L) + \mathbf{j}_{\lambda'}^{s+1} + \ldots + \mathbf{j}_{\lambda'}^p).$$

Darin läuft die Summe über alle $L \in \underline{n}_{\lambda'_s}$, für die $||\mathbf{i}(L)|| = ||L|| > ||K|| = ||\mathbf{j}_{\lambda'_s}^s||$ gilt. Gemäß (3.22) erhält man für $\mathbf{k} := \mathbf{j}_{\lambda'}^1 + \ldots \mathbf{j}_{\lambda'}^{s-1} + \mathbf{i}(L) + \mathbf{j}_{\lambda'}^{s+1} + \ldots + \mathbf{j}_{\lambda'}^p$ die Ungleichung $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$. Setzt man dann zu $\mathbf{k}$ mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$

$$a_{\mathbf{jk}} := \begin{cases} a_{\mathbf{jk}}(w) + a_\mathbf{j}(w) a_{KL} & \text{falls } \mathbf{k}_{\lambda'}^s = \mathbf{i}(L) \text{ und } \mathbf{k}_{\lambda'}^i = \mathbf{j}_{\lambda'}^i \text{ für } i \neq s \\ a_{\mathbf{jk}}(w) & \text{sonst} \end{cases},$$

so folgt die Behauptung, da mit $||\mathbf{k}|| > ||\mathbf{j}||$ auch $]\mathbf{k}[>]\mathbf{j}[$ gilt. □

In völlig analoger Weise zu Korollar 3.7.3 und Korollar 3.7.4 zeigt man

Korollar 3.13.3 (Straightening Formula) *Sei* $\lambda \in \Lambda^+(r)$ *und* $\mathbf{j} \in I(n,r)$. *Dann gibt es zu jedem* $\mathbf{k} \in I_\lambda^{\mathrm{mys}}$ *eine Zahl* $a_{\mathbf{jk}} \in R$ *(möglicherweise Null), so daß in* $\mathcal{K}$ *für alle* $\mathbf{i} \in I(n,r)$ *gilt:*

$$T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) \equiv \sum_{\mathbf{k}\in I_\lambda^{\mathrm{mys}}} a_{\mathbf{jk}} T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{k}) \quad \mathit{mod}\ \mathcal{K}(>\lambda).$$

Korollar 3.13.4 *Die Menge* $\mathbf{C}_r = \{T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\ \lambda \in \Lambda^+(m,r),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{\mathrm{mys}}\}$ *ist ein Erzeugendensystem von* $\mathcal{K} = A^{\mathrm{sh}}(n,r)'$

Bemerkung 3.13.5 *Wie bereits in Bemerkung 3.7.6 ausgeführt kann man im klassischen Fall auch mit symplektischen Standardtableaus anstelle von spiegelsymplektischen arbeiten. Man hat dann anstelle von Satz 3.10.4 den Satz 3.10.1 zu verwenden und daraus eine analoge Version zu Satz 3.13.1 abzuleiten. Anstelle von* $[] \cdot [] : I(n,r) \to \mathcal{N}$ *verwendet man dann die Funktion* $[] \cdot []'$ *mit* $[]\mathbf{i}[]' := (||\mathbf{i}||^\times, \mathbf{i})$. *Dann gilt auch die Straightening Formula 3.13.3 und Korollar 3.13.4 im klassischen Fall mit* I_λ^{sym} *anstelle von* I_λ^{mys}.

3.14 Der Basissatz

Wir kommen nun zum Ziel dieses Kapitels und zeigen zunächst

Satz 3.14.1 *Der R-Modul* $A^{\mathrm{s}}(n,r)'$ *besitzt für jedes* $r \in \mathbb{N}_0$ *die freie Basis*

$$\mathbf{B}_r = \{g^l T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\ 0 \le l \le \frac{r}{2},\ \lambda \in \Lambda^+(m, r-2l),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{\mathrm{mys}}\}.$$

Beweis: Nach Satz 3.4.1 ist auch die der Folge (3.14) entsprechende Sequenz

$$0 \to A^{\mathrm{s}}(n,r-2)' \to A^{\mathrm{s}}(n,r)' \to A^{\mathrm{sh}}(n,r)' \to 0 \tag{3.46}$$

Rechts und in der Mitte exakt. Daß $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{B}_1$ jeweils Basen von $A^{\mathrm{s}}(n,0)' = A^{\mathrm{s}}(n,0) = R$ und $A^{\mathrm{s}}(n,1)' = A^{\mathrm{s}}(n,1) = \mathcal{E}^*$ sind, ist klar. Also folgt induktiv aus Korollar 3.13.4 und obiger Folge, daß $\mathbf{B}_r$ ein Erzeugendensystem von $A^{\mathrm{s}}(n,r)'$ ist. Der Beweis der linearen Unabhängigkeit geht völlig analog zum entsprechenden Beweis von Satz 3.7.7 im Fall $r = 2$ unter Verwendung von Satz 3.3.3 und Korollar 2.5.10. Dabei beachte man, daß über dem Quotientenkörper $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}$ nach (3.40) wegen der Invertierbarkeit der $\{r\}_y!$ kein Unterschied zwischen $A^{\mathrm{s}}(n,r)'$ und $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ vorhanden ist. Wie dort sieht man dann zunächst, daß $\mathbf{B}_r$ linear unabhängig im Fall $R = \mathcal{Z}$ ist, woraus man dann mit Hilfe von Satz 2.5.2 im Sinn von Bemerkung 3.12.2 auf den allgemeinen Fall schließt. □

Bemerkung 3.14.2 *Die Folge (3.46) ist nicht nur eine solche von R-Moduln, sondern auch von Halbkoalgebren (was man auch in Bezug auf (3.14) sagen kann). Der Morphismus auf der linken Seite* $\varpi' : A^{\mathrm{s}}(n,r-2)' \to A^{\mathrm{s}}(n,r)'$, $\varpi'(x) = gx$ *ist sogar ein solcher von Koalgebren. In Anbetracht von Satz 3.14.1 ist (3.46) exakt und zerfällt als Folge von R-Moduln.*

Als direkte Konsequenz halten wir weiterhin fest

Korollar 3.14.3 *Der R-Modul $A^{\mathrm{sh}}(n,r)'$ besitzt für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ die freie Basis*

$$\mathbf{C}_r = \{T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\ \lambda \in \Lambda^+(m,r),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{\mathrm{mys}}.\}$$

Satz 3.14.1 zeigt zusammen mit (3.40), daß im Fall wo alle $\{r\}_y! \in R$ von Null verschieden sind (z.B. also für $R = \mathcal{Z}$), $\mathcal{I}$ genau der Torsionsuntermodul von $A^{\mathrm{s}}(n)$ ist. Andererseits erhält man zusammen mit Satz 3.12.3 und Bemerkung 3.13.5

Satz 3.14.4 *Der R-Modul $A^{\mathrm{s}}_{R,1}(n,r)$ besitzt für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ die freien Basen*

$$\mathbf{B}_r = \{(d^{\mathrm{s}})^l T^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\ 0 \le l \le \frac{r}{2},\ \lambda \in \Lambda^+(m,r-2l),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{\mathrm{mys}}\}$$

und

$$\mathbf{B}'_r := \{(d^{\mathrm{s}})^l T^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\ 0 \le l \le \frac{r}{2},\ \lambda \in \Lambda^+(m,r-2l),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{\mathrm{sym}}\}.$$

Wir ziehen daraus zunächst bereits angekündigte Konsequenzen im klassischen Fall, nämlich die Verallgemeinerung der Sätze aus 2.6.

Korollar 3.14.5 *Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K beliebiger Charakteristik hat man folgenden Isomorphismus von graduierten Matrix-Bialgebren:*

$$K\left[\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}\right] \cong A^{\mathrm{s}}_{K,1}(n) \cong A^{\mathrm{s}}_K(n).$$

Insbesondere wird das Verschwindungsideal von $K\left[\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}\right]$ in $K\left[\mathrm{M}_n(K)\right]$ von der Menge

$$F := \{f_{ij}, \bar{f}_{ij}, f_{ll'} - \bar{f}_{kk'} |\ 1 \le i < j \le n, i \ne j',\ 1 \le l \le k \le \frac{n+1}{2}\}$$

mit $f_{ij} := \sum_{k=1}^m x_{ik}x_{jk'} - x_{ik'}x_{jk}$ und $\bar{f}_{ij} := \sum_{k=1}^m x_{ki}x_{k'j} - x_{k'i}x_{kj}$ als Ideal erzeugt.

Beweis: Die Dimension der homogenen Summanden von $K\left[\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}\right]$ kann wie im Beweis von Satz 3.3.3 durch die Dimensionen der (dort betrachteten) induzierten Moduln $Y(\lambda)$ berechnet werden. Deren Dimension ist bekannterweise durch die Weylsche Charakterformel gegeben und damit unabhängig von der Charakteristik des Körpers (siehe 2.2c in [Do1]). Also ist die Dimension der homogenen Summanden von $K\left[\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}\right]$ stets $|\mathbf{B}_r|$. Dies ist nach obigem Satz aber auch die Dimension von $A^{\mathrm{s}}_{K,1}(n)$. Folglich ist der im Beweis von Satz 2.6.1 betrachtete Epimorphismus von $A^{\mathrm{s}}_{K,1}(n)$ nach $K\left[\overline{\mathrm{GSp}_n(K)}\right]$ stets ein Isomorphismus. Der Isomorphismus rechts besteht nach Satz 2.5.3 und die Behauptung über die Menge F folgt aus der Definition von $A^{\mathrm{s}}_K(n)$ in 2.1. □

Mit Hilfe von Theorem 6.1 aus [Co] kann man ebenso die Dimension des r-ten homogenen Summanden des Koordinatenringen $K\left[\mathrm{SpH}_n(K)\right]$ der Halbgruppe $\mathrm{SpH}_n(K)$ zu $|\mathbf{C}_r|$ berechnen, da diese Halbgruppe genau die dort betrachtete Varietät S ist (im Fall $r = s$ bezüglich dortiger Notation). Auf völlig gleiche Weise wie obiges Korollar beweist man daraus unter Hinzunahme von Korollar 3.14.3 und Satz 3.12.3

Korollar 3.14.6 *Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K beliebiger Charakteristik hat man folgenden Isomorphismus von graduierten Halbbialgebren:*

$$K\left[\mathrm{SpH}_n(K)\right] \cong A^{\mathrm{sh}}_{K,1}(n).$$

Insbesondere wird das Verschwindungsideal von $K\left[\mathrm{SpH}_n(K)\right]$ in $K\left[\mathrm{M}_n(K)\right]$ von der Menge

$$F' := \{f_{ij}, \bar{f}_{ij} |\ 1 \le i < j \le n\}$$

als Ideal erzeugt.

Wie in 2.6 erhält man aus Korollar 3.14.5

Korollar 3.14.7 *Für algebraisch abgeschlossene Körper gilt $\overline{\mathrm{GSp}_n(K)} = \mathrm{SpM}_n(K)$.*

Dies wurde – wie dort erwähnt – bereits von S. Doty ([Dt], Corollary 5.5. (c)) gezeigt. Das Korollar 3.14.5 findet man in [Dt] allerdings nur im Charakteristik Null Fall.

Wir wollen nun einen möglichst allgemeinen Basissatz für $A^{\mathrm{s}}(n,r)$ formulieren, d.h. wir versuchen die Identität $\mathcal{I} = 0$ aus Satz 3.12.3 auf allgemeinere Situationen zu übertragen. Dazu müssen wir Einschänkungen für den Parameter q hinnehmen. Wir betrachten Kreisteilungspolynome $\Phi_e(X) \in \mathbb{Z}[X]$ zu primitiven e-ten Einheitswurzeln in der Unbestimmten X. Aus allgemeinhin bekannten Sätzen erhält man mit $y = q^2$

$$\{r\}_y = \prod_{1 \ne e | r} \Phi_e(y) = \prod_{1,2 \ne e | 2r} \Phi_e(q). \tag{3.47}$$

Der senkrechte Strich steht darin für die Teilerbeziehung in $\mathbb{Z}$. Die Rechte Seite liefert mit $\Phi_e(X)$ anstelle von $\Phi_e(q)$ eine Primfaktorenzerlegung von $\{r\}_y$ (mit $y = X^2$) in $\mathbb{Z}[X]$. Aus (3.40) erhält man sofort:

Satz 3.14.8 *Falls für alle Kreisteilungspolynome $\Phi_e(X) \in \mathbb{Z}[X]$ mit $1 < e \le m$ das Element $\Phi_e(y) = \Phi_e(q^2)$ eine Einheit in R ist, so gilt $A^{\mathrm{s}}(n) = A^{\mathrm{s}}(n)'$.*

Wir versuchen dies noch ein wenig zu verbessern. Für eine Primzahlpotenz $e = p^k$ gilt bekanntlich

$$\Phi_{p^k}(X) = X^{(p-1)p^{k-1}} + X^{(p-2)p^{k-1}} + \ldots + X^{p^{k-1}} + 1.$$

Daraus erhält man $\Phi_{p^k}(1) = p$. Umgekehrt muß wegen $r = \{r\}_y(1) = \prod_{1 \ne e|r} \Phi_e(1)$ zu einer Nichtprimzahlpozenz e für die Auswertung an Eins $\Phi_e(1) = \pm 1$ gelten.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall eines Elementes $u \in \mathcal{Z}$ welches unter dem Ringhomomorphismus $Q \mapsto 1$, $X_{ij} \mapsto 1$ und $X_k \mapsto 1$ nach $\mathbb{Z}$ auf eine Primzahl p abgebildet wird und dazu die Lokalisation von $\mathcal{Z}$ an dem von u erzeugten Primideal und schreiben für diesen Integritätsbereich kurz $\mathcal{Z}_u$. Dies ist derjenige Unterring im Quotientenkörper $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}$, für dessen Elemente der Nenner (bei teilerfremder Bruchdarstellung) nicht durch u dividierbar ist. Es handelt sich um einen lokalen Ring, dessen eindeutig bestimmtes maximales Ideal das von u erzeugte ist. Den dadurch bestimmten Residuenkörper $\mathcal{Z}_u / < u >$ bezeichnen wir mit $\mathbb{K}_u$. Dies ist gerade der Quotientenkörper von $\mathcal{Z} / < u >$. Die spitzen Klammern stehen darin wiederum für das Idealerzeugnis in den jeweiligen Ringen. $\mathbb{K}$ ist auch der Quotientenkörper von $\mathcal{Z}_u$

Lemma 3.14.9 *Für jedes Primelement $u \in \mathcal{Z}$ mit $u \mapsto p \in \mathbb{Z}$ (prim) gilt $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}_u} = 0$. Insbesondere ist $A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}_u,Q}(n) = A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}_u,Q}(n)'$ ein freier $\mathcal{Z}_u$-Modul.*

Beweis: Wir verwenden die Abkürzung $R = \mathcal{Z} / < u >$. Wegen $u \mapsto p$ erhält man durch $Q \mapsto 1, X_{ij} \mapsto 1$ und $X_k \mapsto 1$ einen Ringhomomorphismus von R auf den Restklassenkörper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Diesbezüglich ergibt sich nach Satz 2.5.2 für jedes $r \in \mathbb{N}_0$

$$A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{F}_p,1}(n,r) \cong \mathbb{F}_p \otimes A^{\mathrm{s}}_{R,Q}(n,r)$$

Die Dimension dieses $\mathbb{F}_p$-Vektoraumes ist nach Satz 3.14.4 gerade $|\mathbf{B}_r|$. Nach Lemma A.2.1 aus dem Anhang erhält man über dem Quotientenkörper $\mathbb{K}_u$ von R für

$$A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{K}_u,Q}(n,r) \cong \mathbb{K}_u \otimes A^{\mathrm{s}}_{R,Q}(n,r)$$

als Dimension daher höchsten $|\mathbf{B}_r|$. Dies ergibt für den $\mathcal{Z}_u$- Modul $W := A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}_u,Q}(n,r)$ die folgende Ungleichung

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K} \otimes_{\mathcal{Z}_u} W) = \dim_{\mathbb{K}}(A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{K},Q}(n,r)) \geq [\dim_{\mathbb{K}_u}(A^{\mathrm{s}}_{\mathbb{K}_u,Q}(n,r)) = \dim_{\mathbb{K}_u}(\mathbb{K}_u \otimes_{\mathcal{Z}_u} W)$$

zwischen der Dimension von W über dem Quotientenkörper $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}_u$ und dem Residuenkörper $\mathbb{K}_u$ davon. Abermalige Anwendung von Lemma A.2.1 liefert darin zunächst die Gleichheit der Dimensionen und damit, da $\mathcal{Z}_u$ lokaler Ring ist, das Freisein des Moduls W. Also ist $A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}_u,Q}(n)$ ein freier $\mathcal{Z}_u$-Modul. Da in $\mathcal{Z}_u$ alle $\{r\}_y!$ von Null verschieden sind, muß $\mathcal{I}$ wegen (3.40) aber im Torsionsuntermodul von $A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}_u,Q}(n)$ enthalten sein. Folglich ist es Null. □

Sei nun $\phi_m(X)$ das Produkt über alle Kreisteilungspolynome $\Phi_e(X) \in \mathbb{Z}[X]$ zu Nichtprimzahlpotenzen $2 < e \leq n$. Wir betrachten nun die Lokalisation $\mathcal{Z}' := \mathbb{Q}[Q, Q^{-1}]_{(\phi_m(Q))}$ des Laurentpolynomringes über den rationalen Zahlen am Element $\phi_m(Q)$. Also ist $\mathcal{Z}'$ derjenige Unterring des Quotientenkörpers $K = \mathbb{Q}(Q)$ von $\mathbb{Q}[Q, Q^{-1}]$, dessen Elemente im Nenner (bei teilerfremder Bruchdarstellung) eine Potenz von $\phi_m(Q)$ enthalten. Im Gegensatz zu $\mathcal{Z}_u$ ist dies kein lokaler Ring. Man beachte allerdings, daß es sich um einen Hauptidealring handelt (dies leitet man sofort aus der gleichen Eigenschaft von $\mathbb{Q}[Q]$ ab).

Lemma 3.14.10 *Es gilt $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}'} = 0$. Insbesondere ist $A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}',Q}(n) = A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}',Q}(n)'$ ein freier $\mathcal{Z}'$-Modul. Die Wahl des Z-Parametertupels ist dabei beliebig.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß die Erzeuger $G_I - a_I g^r$ für $r > 1$ und $I \in \underline{n}_{2r}$ Null sind. Sei x ein solcher. Nach (3.40) wissen wir immerhin, daß $\{r\}_y! x = 0$ gilt mit $y = Q^2$. Nach Konstruktion des Ringes $\mathcal{Z}'$ kann man alle Kreisteilungspolynome zu Nichtprimzahlpotenzen aus der Primfaktorzerlegung (3.47) von $\{r\}_y!$ (in $\mathbb{Z}[Q]$) abdividieren. Es bleibt damit ein Produkt f von Kreisteilungspolynomen zu Primzahlpotenzen übrig, für welches $fx = 0$ erfüllt ist. Im Hinblick auf einen Widerspruchsbeweis nehmen wir $x \neq 0$ an. Sei A der Annihilator von x. Da $\mathcal{Z}'$ ein Hauptidealring ist gibt es ein $v \in \mathcal{Z}'$ mit $A = < v >$. Man kann dann o.B.d.A. $v \in \mathbb{Z}[Q]$ annehmen. Wegen $f \in A$ (d.h. $v|f$), der Irreduzibilität der $\Phi_{p^k}(Q)$ und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von f in $Z[Q]$ gibt es eine Primzahlpotenz p^k so, daß $v \in < u >$ mit $u := \Phi_{p^k}(Q)$ gilt. Die Lokalisation $\mathcal{Z}'_u$ von $\mathcal{Z}'$ am Primideal $< u >$ innerhalb von $\mathbb{Q}[Q, Q^{-1}]$ bzw. $\mathcal{Z}'$ erhält durch $Q \mapsto Q,\ X_{ij} \mapsto p_{ij},\ X_k \mapsto t_k$ eine $\mathcal{Z}_u$-Algebrenstruktur (hier benötigt man, daß $\mathcal{Z}'$ über $\mathbb{Q}$ und nicht über einem Körper positiver Charakteristk konstruiert ist). Also ist nach Lemma 3.14.9 und Bemerkung 3.12.2 $A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}'_u,Q}(n)$ frei.

Andererseits ist wegen $v \in < u >$ der Annihilator A von x in $< u >$ enthalten. Aufgrund bekannter Sachverhalte über Lokalisationen an Primidealen (z.B. [Mt], Beweis von Theorem 4.6) würde dann aber $x \neq 0$ auch in $\mathcal{Z}'_u$ gelten im Widerspruch zum Torsionsfreisein von $A^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z}'_u,Q}(n)$. Also muß $x = 0$ bereits über $\mathcal{Z}'$ gegolten haben. □

Satz 3.14.11 *Sei R ein Integritätsbereich, welcher den Körper der rationalen Zahlen enthalte, mit Z-Parametertupel Z und Einheit q. Für jedes Kreisteilungspolynom $\Phi_e(X) \in \mathbb{Z}[X]$ zu einer Nichtprimzahlpotenz $2 < e \leq n$ sei $\Phi_e(q)$ eine Einheit in R. Dann gilt $A^{\mathrm{s}}(n) = A^{\mathrm{s}}(n)'$.*

Beweis: Nach Satz 2.5.8 können wir uns auf den Fall des trivialen Z-Parametertupels $Z = \mathbf{1}$ zurückziehen. In diesem Fall faktorisiert der übliche Ringhomomorphismus von $\mathcal{Z}$ nach R gemäß der Definition von $\mathcal{Z}'$ und den Voraussetzungen über R und q über $\mathcal{Z}'$. Die Behauptung folgt dann nach Satz 2.5.2 im Sinne von Bemerkung 3.12.2 aus Lemma 3.14.10. □

Dieser Satz deckt z.B. im Fall $R = \mathbb{C}$ alle Parameterwahlen für q, ausgenommen der e-ten primitiven Einheitswurzeln für Nichtprimzahlpotenzen $2 < e \leq n$ ab. Zusammenfasssend erhält man:

Theorem 3.14.12 (Basissatz) *Sei R ein Integritätsbereich mit einer Einheit q und Z-Parametertupel Z. Mit $\Phi_e(X) \in \mathbb{Z}[X]$ sei das Kreisteilungspolynom zu $e \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Für q bzw. $y = q^2$ und R gelte eine der drei folgenden Voraussetzungen*

- *$y = 1$ und R beliebig.*
- *$\Phi_e(y)$ ist invertierbar für alle $1 < e \leq m$ und R beliebig.*
- *$\Phi_e(q)$ ist invertierbar für alle $2 < e \leq n$, welche keine Primzahlpotenzen sind, und R enthalte den Körper der rationalen Zahlen.*

Dann ist $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n)$ ein freier R-Modul und der r-te homogene Summand $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ besitz die Basis

$$\mathbf{B}_r = \{g^l T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\ 0 \leq l \leq \frac{r}{2},\ \lambda \in \Lambda^+(m, r-2l),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in I_\lambda^{\mathrm{mys}}\}.$$

Beweis: Bis auf den Fall $q = -1$, sind alle Fälle durch obenstehende Sätze abgedeckt, in einigen Fällen jedoch nur für triviales Z-Parametertupel. Für allgemeines Z-Parametertupel erhält man die Behauptung daraus mit Hilfe von Satz 2.5.8. Dazu beachte man, daß der Isomorphismus aus diesem Satz nach Bemerkung 2.5.9 die Elemente von $\mathbf{B}_r$ auf Vielfache der entsprechenden Basiselemente abbildet. Die skalaren Faktoren sind dabei invertierbare Ringelemente.

Den Fall $q = -1$ führt man mit Hilfe von Satz 2.5.8 auf den klassischen Fall in Satz 3.14.4 zurück, in dem man das Z-Parametertupel $t_k = 1$ und $p_{ij} = -1$ für $i \neq j, j'$ verwendet. Für allgemeines Z-Parametertupel erhält man daraus die Behauptung wie oben. □

Kapitel 4

Ausblick auf symplektische q-Schur-Algebren

Um den Umfang der Arbeit nicht allzu groß werden zu lassen, geben wir nun in aller Kürze die Anwendung der in Kapitel 3 erreichten Resultate auf die symplektischen Schur-Algebren $S_K^s(n,r)$ im Sinne von [Do2] und [Dt] (siehe Einleitung) und q-analogen Versionen von diesen, die wir als duale Algebren zu den Koalgebren $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)'$ aus Paragraph 3.12 also durch

$$S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r) := (A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)')^* = \mathrm{Hom}_R(A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)', R)$$

definieren. Wir beginnnen zunächst mit Grundlegenden Eigenschaften und zeigen dann ihre Struktur als *Zelluläre Algebren* im Sinne von [GL]. Schließlich verifizieren wir das dort gegebene Kriterium für die *quasierbliche Struktur* einer zellulären Algebra.

4.1 Grundlegende Eigenschaften

In allen Fällen, in denen wir $A^{\mathrm{s}}(n) = A^{\mathrm{s}}(n)'$ wissen, also z.B. bei Wahl von q und R wie im Basissatz 3.14.12, gilt nach Definition

$$S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r) = A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)^*. \tag{4.1}$$

Insbesondere erhält man aus den Sätzen 3.12.3 und 3.14.5 sofort

Satz 4.1.1 *Im klassischen Fall $q = p_{ij} = t_k = 1$ (für alle i,j,k) stimmt $S^{\mathrm{s}}_{K,1}(n,r)$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper beliebiger Charakteristik mit den symplektischen Schur-Algebren $S_K^s(n,r) := A^{\mathrm{s}}_K(n,r)^* = S_0(n,r) = S_r(\mathrm{GSp}_n(K))$ im Sinne von S. Donkin ([Do2] bzw. S. Doty ([Dt]) überein.*

Ist T der Torsionsuntermodul eines R-Moduls W, so gilt offenbar $W^* = (W/T)^*$, da jede Linearform auf W auf allen Torsionselementen verschwinden muß (beachte, daß R als Integritätsbereich vorausgesetzt wird). Daher gilt (4.1) auch in den Fällen, wo sich $A^{\mathrm{s}}(n)$ und $A^{\mathrm{s}}(n)'$ nur um Torsionselemente unterscheiden, Nach (3.40) ist dies stets dann erfüllt, wenn alle y-Analoga $\{r\}_y$ für $r = 2, \ldots, m$ von Null verschieden sind, insbesondere also im Fall des Grundringes $\mathcal{Z}$. Aus dem ersten Vergleichsatz 1.5.3 folgt nach Definition von $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ mittels der Darstellung der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra $\mathcal{C}_{R,P^{\mathrm{s}}_n(q),r}$ zum BMW-Parametertripel $P^{\mathrm{s}}_n(q)$ auf $V^{\otimes r}$ gemäß Paragraph 2.2.2

Satz 4.1.2 *Falls R und q einer der drei Bedingungen aus dem Basissatz genügen, oder falls $\{r\}_y \neq 0$ für $2 \leq r \leq m$ erfüllt ist, so gilt*

$$S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{R,P^{\mathrm{s}}_n(q),r}}(V^{\otimes r}).$$

Insbesondere gilt im klassischen Fall bezüglich der Braueralgebra $\mathcal{B}_{R,-n,r}$ für jeden Integritätsbereich R

$$S^{s}_{R}(n,r) := A^{\mathrm{s}}_{R}(n,r)^* \cong \mathrm{End}_{\mathcal{B}_{R,-n,r}}(V^{\otimes r}).$$

Bemerkung 4.1.3 *Die Aussage in Bezug auf den klassischen Fall wurde für einen Körper der Charakteristik Null auch von S. Doty ([Dt], Corollary 9.3 (c)) gezeigt.*

Nach Satz 3.14.1 erhält man eine freie Basis von $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ durch Dualisieren der Basis $\mathbf{B}_r$ von $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$. Wir formulieren die Basis $\mathbf{B}_r$ neu und schreiben $M(\lambda) := I^{\mathrm{mys}}_{\mu}$ zu einem $\lambda = \mu + lz_g + P \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$, welches gemäß Paragraph 3.1 in eindeutiger Weise durch $\mu \in \Lambda^+(m, r-2l)$ und $0 \leq l \leq \frac{r}{2}$ dargestellt sei. Zu $0 \leq l \leq \frac{r}{2}$ setzen wir $\mathbf{m}_l := (m,m',m,m',\ldots,m,m') \in I(n,2l)$ und unter Verwendung der Bezeichnungweise aus 3.6 für den Endomorphismus $\kappa_{\mu'} = \sum_{w\in\mathcal{S}_{\mu'}}(-y)^{-l(w)}\beta(w) \in \mathcal{E}_{r-2l}$

$$\varsigma_\lambda := (-y)^{-l}\underbrace{\gamma\otimes\ldots\otimes\gamma}_{l\ \mathrm{mal}}\otimes\kappa_{\mu'} \quad \in \rho^{\mathrm{s}}_r(\mathcal{C}_{R,r}) \subseteq \mathcal{E}_r \tag{4.2}$$

sowie zu $\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n, r-2l)$

$$D^{\lambda}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := g^l T^{\mu}_q(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = \varsigma_\lambda x_{(\mathbf{m}_l+\mathbf{i})(\mathbf{m}_l+\mathbf{j})} = x_{(\mathbf{m}_l+\mathbf{i})(\mathbf{m}_l+\mathbf{j})}\varsigma_\lambda.$$

Die beiden Gleichheitszeichen gelten aufgrund von (3.9) und (1.3). Die Basis $\mathbf{B}_r$ schreibt sich dann

$$\mathbf{B}_r = \{D^{\lambda}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \mid \lambda \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r),\ \ \mathbf{i},\mathbf{j} \in M(\lambda)\}.$$

Die duale Basis von $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ bezeichnen wir mit $\mathbf{B}_r{}^*$ und ihre Elemente mit $C^{\lambda}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$. Diese sind also durch

$$C^{\lambda}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(D^{\mu}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}) = \begin{cases} 1 & \lambda=\mu, \mathbf{i}=\mathbf{k}, \mathbf{j}=\mathbf{l} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß es sich um eine *zelluläre Basis* im Sinn von [GL] handelt. Zuvor untersuchen wir in Analogie zu Satz 2.5.2 das Verhalten der symplektischen q-Schur-Algebren unter Grundringerweiterungen $R \to S$. Dazu betrachtet wir den natürlichen Homomorphismus $\psi_W : W^{*S} \to W^{S*}$ aus Anhang A.1 im Fall $W = S_{R,q}(n,r)$. Aufgrund der Natürlichkeit der ψ_W und der im Anhang A.3 betrachteten Homomomorphismen $\lambda_{U,W} : U^S \otimes W^S \to (U\otimes W)^S$ bestätigt man leicht, daß es sich um einen Algebrenhomomorphismus handelt, wenn man die Algebrenstruktur auf $S \otimes S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ in der üblichen Weise (komponentenweise Multiplikation) erklärt (vgl. die Betrachtung von $\psi_{\mathcal{E}}$ in 1.5.2). Da $S_{R,q}(n,r)$ frei ist, erhält man:

Satz 4.1.4 *Sei S ein Integritätsbereich, der mittels einem Ringhomomorphismus $R \to S$ mit $q \mapsto \bar{q}$ als R-Algebra aufgefaßt werde. Dann gibt es einen Isomorphismus von S-Algebren*

$$S \otimes_R S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r) \cong S^{\mathrm{s}}_{S,\bar{q}}(n,r),$$

welcher die Basiselemente $1_S \otimes C^{\lambda}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ auf die entsprechenden Elemente $C^{\lambda}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ in $S^{\mathrm{s}}_{S,\bar{q}}(n,r)$ abbilden.

Den Zusammenhang der Isomorphismen aus dem Satz mit den natürlichen Homomorphismen η_S zwischen $S \otimes \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{R,P^{\mathrm{s}}_n(q),r}}(V^{\otimes r})$ und $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{S,P^{\mathrm{s}}_n(\bar{q}),r}}(V^{\otimes r})$ erhält man aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S \otimes S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r) & \longrightarrow & S^{\mathrm{s}}_{S,\bar{q}}(n,r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S \otimes \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{R,P^{\mathrm{s}}_n(q),r}}(V^{\otimes r}) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{S,P^{\mathrm{s}}_n(\bar{q}),r}}(V^{\otimes r}) \end{array}$$

worin die senkrechten Pfeile durch die Isomorphismen ρ aus Satz 4.1.2 (tensoriert mit id_S im linken Fall) gegeben sind. Also ist η_S sicherlich dann ein Isomorphismus, wenn dies von beiden Abbildungen ρ aus Satz 4.1.2 bekannt ist.

Wir betrachten nun die duale Abbildung ϖ'^* zum Koalgebrenmorphismus ϖ' aus der Folge (3.46). Zu $\lambda = \mu + l z_g + P \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$ mit $\mu \in \Lambda(m,r)$ und Rang $\mathrm{rg}(\lambda) = l \geq 1$ sei $\lambda^{-g} := \mu + (l-1)z_g + P \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n, r-2)$. Aufgrund von Bemerkung 3.14.2 erhält man

Satz 4.1.5 *Es gibt einen Epimorphismus $\sigma := \varpi'^* : S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r) \to S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r-2)$ von R-Algebren auf der Basis $\mathbf{B}_r{}^*$ gegeben durch*

$$\sigma(C^{\lambda}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}) = \begin{cases} C^{\lambda^{-g}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} & \mathrm{rg}(\lambda) \geq 1 \\ 0 & \mathrm{rg}(\lambda) = 0 \end{cases} .$$

Als nächstes Zerlegen wir das Einselement von $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ in eine Summe von *orthogonalen Idempotenten.* Sei dazu $\lambda = \mu + P \in \Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)$ mit $\mu \in \Lambda(n,r)$ ein polynomiales (nicht unbedingt dominantes) Gewicht vom Grad r und $(V^{\otimes r})^{\lambda}$ der zugehörige Gewichtsraum in $V^{\otimes r}$ gemäß 3.1. Man hat dazu eine Projektion $f_\lambda \in \mathcal{E}_r$ entsprechend der direkten Summenzerlegung

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)} (V^{\otimes r})^{\lambda}$$

gegeben durch

$$f_\lambda(v_{\mathbf{i}}) = \begin{cases} v_{\mathbf{i}} & |\mathbf{i}| \in \lambda = \mu + P \\ 0 & |\mathbf{i}| \notin \lambda \end{cases}$$

Nach Satz 3.1.1 sind die f_λ in $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{R,P^{\mathrm{s}}_n(q),r}}(V^{\otimes r})$ enthalten und liefern in dieser Algebra eine Zerlegung der Eins in eine Summe orthogonaler Idempotente

$$\mathrm{id}_{V^{\otimes r}} = \sum_{\lambda \in \Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)} f_\lambda .$$

Daraus erhält man etwa im Fall des Grundrings $R = \mathcal{Z}$ mittels des Isomorphismus ρ aus Satz 4.1.2 eine Zerlegung in orthogonale Idempotente $e_\lambda := \rho^{-1}(f_\lambda)$ von $S^{\mathrm{s}}_{\mathcal{Z},Q}(n,r)$. Nach Satz 4.1.4 ergibt sich eine ebensolche Zerlegung in $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ für beliebigen Integritätsbereich R mit Einheit q und Z-Parametertupel Z.

Nach Definition des Algebrenhomomorphismus $\rho = \mathrm{Ev}_{\mathcal{E}}^{-1} \circ \pi^*$ aus Satz 4.1.2 (gemäß Satz 1.5.2) berechnet man zu $B \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{R,P^{\mathrm{s}}_n(q),r}}(V^{\otimes r})$ das Urbild unter ρ zu

$$\rho^{-1}(B)(x_{\mathbf{ij}}) = b_{\mathbf{ij}}$$

wobei $(b_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,r)}$ die Koeffizientenmatrix von B beüglich der Basiselemente $v_{\mathbf{i}}$ sei, also $B = \sum b_{\mathbf{ij}} e_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$. Für e_λ ergibt dies

$$e_\lambda(x_{\mathbf{ij}}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \text{und} \quad |\mathbf{i}| \in \lambda = \mu + P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.3}$$

Ist W ein beliebiger $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$-Rechtsmodul so kann man eine Gewichtsraumzerlegung von W durch

$$W^\lambda := We_\lambda, \quad W = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)} W^\lambda$$

definieren. Wir betrachten zunächst $A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)'$ als $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$-Rechtsmodul, indem wir zu $D \in A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)'$ und $C \in S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,)$ das Produkt DC durch

$$(\mathrm{id} \otimes C) \circ \Delta(D) \quad \in A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)' \otimes R = A^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)'$$

definieren. Man berechnet dann die Gewichtsräume von $A^{\mathrm{s}}(n,r)'$ mit Hilfe von (4.3) zu

$$(A^{\mathrm{s}}(n,r)')^\lambda = \langle \{ x_{\mathbf{ij}} | \ \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,r), |\mathbf{j}| \in \lambda \} \rangle$$

als R-Modulerzeugnis (vgl. (1.11)). Entsprechend erhält man eine Operation von links und dazu eine analoge Gewichtsraumzerlegung. Für Bideterminanten gilt $T^\mu_q(\mathbf{i} : \mathbf{j}) \in (A^{\mathrm{s}}(n,r)')^{|\mathbf{j}|+P}$. Aus der Direktheit der Zerlegung ergibt sich das folgende Hilfsmittel für den Beweis der Quasierblichkeit von $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n,r)$ in 4.3

Lemma 4.1.6 *Die Zahlen $a_{\mathbf{jk}}$ aus der Straightening Formula (Satz 3.13.3) sind Null, wenn $|\mathbf{j}|+P \neq |\mathbf{k}|+P$ in $\Lambda^{\mathrm{s}}(n,r)$ gilt. Insbesondere folgt im Fall* $\mathrm{rg}(|\mathbf{j}|+P) = 0$ *(nach (3.3)) aus $a_{\mathbf{jk}} \neq 0$ die Gleichheit $|\mathbf{j}| = |\mathbf{k}|$ der Inhalte.*

4.2 Zelluläre Struktur

Definition 4.2.1 (J. Graham, G.I. Lehrer ([GL])) *Eine* zelluläre Algebra *ist eine assoziative (unitale) Algebra A über einem kommutativen Ring R mit Eins zusammen mit einer teilweise geordneten, endlichen Menge Λ und endlichen Mengen $M(\lambda)$ zu jedem $\lambda \in \Lambda$ (Menge der "λ-Tableaus"), so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(C1) *A besitzt eine Basis $\{C^\lambda_{S,T} | \lambda \in \Lambda,\ S, T \in M(\lambda)\}$.*

(C2) *A besitzt eine R-lineare Anti-Involution $*$, für die $(C^\lambda_{S,T})^* = C^\lambda_{T,S}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und $S, T \in M(\lambda)$ gilt.*

(C3) *Für alle $a \in A, \lambda \in \Lambda$ und $S, T \in M(\lambda)$ gilt:*

$$aC^\lambda_{S,T} \equiv \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S', S) C^\lambda_{S',T} \quad mod\ A(< \lambda),$$

wobei die Zahlen $r_a(S', S) \in R$ unabhängig von T sind und $A(< \lambda)$ der R-lineare Aufspann der Basiselemente $C^\mu_{U,V}$ mit $\mu < \lambda$ und $U, V \in M(\mu)$ ist.

Aufbauend auf diesen Vorgaben wird die Darstellungstheorie einer zellulären Algebra in [GL] entwickelt: Zunächst kann man zu jedem $\lambda \in \Lambda$ einen Standardmodul $W(\lambda)$ durch Vorgabe einer freien R-Basis $\{C^\lambda_S | S \in M(\lambda)\}$ und der Operation darauf durch $aC^\lambda_S = \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S', S) C^\lambda_{S'}$ definieren. Sodann findet man auf jedem $W(\lambda)$ eine symmetrische Bilinearform ϕ_λ mit $\phi_\lambda(a^*x, y) = \phi_\lambda(x, ay)$ für alle $a \in A$ und $x, y \in W(\lambda)$. Ist nun R ein Körper und $\phi_\lambda \neq 0$, so stimmt das Radikal des Moduls $W(\lambda)$ mit dem Radikal der Bilinearform ϕ_λ überein und der einfache Kopf L_λ von $W(\lambda)$ ist absolut irreduzibel. Darüber hinaus erhält man auf diese Art eine vollständige Menge paarweise nichtisomorpher einfacher A-Moduln $\{L_\lambda | \lambda \in \Lambda_0\}$, wobei $\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda | \phi_\lambda \neq 0\}$ gesetzt wurde.

Bezeichnet man zu $\lambda \in \Lambda$ und $\mu \in \Lambda_0$ mit $d_{\lambda\mu}$ die Vielfachheit von L_μ in $W(\lambda)$, so zeigen Graham und Lehrer weiter, daß $d_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \leq \mu$ und $d_{\lambda\lambda} = 1$ gilt. Unter einer Ordnung, welche die teilweise Ordnung auf Λ verfeinert, erhält man somit eine obere unitrianguläre Matrix als Zerlegungsmatrix $D = (d_{\lambda\mu})_{\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda_0}$. Die Cartan-Matrix C berechnet sich daraus zu $C = D^t D$. Die Theorie liefert ebenso Kriterien für die Halbeinfachheit bzw. Quasi-Erblichkeit von A. Im ersten Fall muß $\mathrm{rad}(\phi_\lambda) = (0)$ für alle $\lambda \in \Lambda$ gelten, für den zweiten Fall reicht $\Lambda_0 = \Lambda$.

Beispiele für zelluläre Algebren sind etwa die Brauer-Algebra $\mathcal{B}_{R,x,r}$, Ariki-Koike-Hecke-Algebren, Temperley-Lieb- und Jones-Algebren ([GL]). R.M. Green ([GR]) gibt eine q-analoge Version der sogenannten *Kodeterminantenbasis* von $S_R(n, r)$ (gemäß [Gr2]) für die q-Schur-Algebra $S_{R,q}(n, r)$ an, welche zellulär ist. Die Standardmoduln bezüglich dieser zellulären Struktur sind gerade die q-Weyl-Moduln im Sinne von [DJ3] ([GR], Proposition 5.3.6). Tatsächlich ist im klassischen Fall sogar die duale Basis zur Bideterminantenbasis aus Satz 3.3.1 eine zelluläre Basis von $S_R(n, r)$ ebenfalls mit den Weyl-Moduln als den Standardmoduln. Hier ist im übrigen der Zusammenhang zur Kodeterminantenbasis durch eine unimodulare Matrix (bei geeigneter Ordnung der Basiselemente), der sogenannnten *Désarménien Matrix* gegeben ([Gr2], Theorem 5.8). Es wäre interessant, eine q-analoge Version dieser Übergangsmatrix zwischen den q-Kodeterminanten nach R.M. Green und den quantenlinearen Bideterminanten gemäß Bemerkung 3.7.8 zu finden.

Da die Schur-Algebren als duale Algebren von Koalgebren in Erscheinung treten, wollen wir zunächst eine entsprechende Begriffsbildung für Koalgebren betrachten.

Definition 4.2.2 *Eine* zelluläre Koalgebra *ist eine Koalgebra K über einem kommutativen Ring R mit Eins, zusammen mit einer teilweise geordneten, endlichen Menge Λ und endlichen Mengen $M(\lambda)$ zu jedem $\lambda \in \Lambda$, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(C1*) *K besitzt eine Basis $\{C^{\lambda}_{S,T} | \ \lambda \in \Lambda, \ S,T \in M(\lambda)\}$.*

(C2*) *K besitzt einen R-linearen involutorischen Antikoalgebrenautomorphismus $*$, für den $(C^{\lambda}_{S,T})^* = C^{\lambda}_{T,S}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und $S,T \in M(\lambda)$ gilt.*

(C3*) *Für alle $\lambda \in \Lambda$ und $S,T \in M(\lambda)$ gilt bezüglich der Komultiplikation Δ:*

$$\Delta(C^{\lambda}_{S,T}) \equiv \sum_{S' \in M(\lambda)} h(S',S) \otimes C^{\lambda}_{S',T} \quad mod\ K \otimes K(> \lambda),$$

wobei die Koalgebrenelemente $h(S',S) \in K$ unabhängig von T sind und $K(> \lambda)$ der R-lineare Aufspann der Basiselemente $C^{\mu}_{U,V}$ mit $\mu > \lambda$ und $U,V \in M(\mu)$ ist.

Man beachte, daß man aufgrund des vorausgesetzten Freiseins einer zellulären Algebra stets eine duale Koalgebra hierzu erhält.

Satz 4.2.3 *Die duale Algebra einer zellulären Koalgebra über R ist stets eine zelluläre Algebra mit der dualen Basis als zellulärer Basis. Umgekehrte ist die duale Koalgebra einer zellulären Algebra über R stets eine zelluläre Koalgebra mit der dualen Basis als zellulärer Basis.*

Beweis: Wir bezeichnen jeweils die dualen Basiselement durch $D^{\lambda}_{S,T}$. Es gelte also $D^{\lambda}_{S,T}(C^{\mu}_{U,V}) = \delta_{\lambda\mu}\delta_{SU}\delta_{TV}$. Daß die jeweils ersten Axiome (C1) bzw. (C1*) erfüllt sind, ist klar. Durch Dualisieren der entsprechenden Diagramme sieht man leicht, daß die duale Abbildung eines involutorischen Antialgebrenautomorphismus zu einem involutorischen Antikoalgebrenautomorphismus wird, und umgekehrt die duale eines involutorischen Antikoalgebrenautomorphismus zu eine Anti-Involution. Bezeichnet man die duale Abbildung jeweils mit $*'$, so berechnet man auf der Basis

$$(D^{\lambda}_{S,T})^{*'}(C^{\mu}_{U,V}) = D^{\lambda}_{S,T}(C^{\mu}_{V,U}) = D^{\lambda}_{T,S}(C^{\mu}_{U,V})$$

für alle $\mu \in \Lambda$ und $U,V \in M(\mu)$. Also folgt Axiom (C2) bzw. (C2*) in Bezug auf $*'$ aus (C2*) bzw. (C2). Wir kommen zu den Axiomen (C3*) und (C3) und halten die Bezeichnung C für die Basiselemente der Algebra und D für die der Koalgebra fest unter der Voraussetzung daß sie jeweils dual zueinander sind. Da die $C^\lambda_{S,T}$ eine Basis bilden, gibt es eindeutig bestimmte Ringelemente $a(\mu UV, \lambda ST, \nu XY)$ mit

$$C^\mu_{U,V} C^\lambda_{S,T} = \sum_{\nu\in\Lambda, X,Y\in M(\nu)} a(\mu UV, \lambda ST, \nu XY) C^\nu_{X,Y}.$$

Da die Komultiplikation von A^* bis auf einen natürlichen Isomorphismus, unter welchem $D^\mu_{U,V} \otimes D^\lambda_{S,T}$ dem dualen Basiselement von $C^\mu_{U,V} \otimes C^\lambda_{S,T}$ in $(A \otimes A)^*$ entspricht, die duale Abbildung zur Multiplikation ist folgt (durch Transposition der Abbildungsmatrizen)

$$\Delta(D^\nu_{X,Y}) = \sum_{\mu,\lambda\in\Lambda,\ U,V\in M(\mu),\ S,T\in M(\lambda)} a(\mu UV, \lambda ST, \nu XY) D^\mu_{U,V} \otimes D^\lambda_{S,T}.$$

Auch hier sind die Zahlen $a(\mu UV, \lambda ST, \nu XY)$ aufgrund der Basiseigenschaft als Strukturkonstanten eindeutig bestimmt. Es bleibt daher zu zeigen, daß die Axiome (C3) und (C3*) auf die jeweils gleichen Bedingungen für diese Ringelemente führen. Im ersten Fall sieht man sofort, daß (C3) zu

$$a(\mu UV, \lambda ST, \nu XY) = \begin{cases} 0 & \nu \not< \lambda \quad \text{oder} \quad \nu = \lambda, Y \neq T \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.4}$$

äquivalent ist. In Bezug auf (C3*) setzt man

$$h(\nu XY, \lambda ST) := \sum_{\mu,\in\Lambda,\ U,V\in M(\mu)} a(\mu UV, \lambda ST, \nu XY) D^\mu_{U,V} \quad \in K.$$

(C3*) ist dann via $h(S, X) = h(\nu XT, \nu ST)$ zu $h(\nu XY, \lambda ST) = 0$ für $\nu \not< \lambda$ oder $\nu = \lambda$ und $Y \neq T$ äquivalent und damit zu (4.4). □

Bemerkung 4.2.4 *Die Vorgabe der Endlichkeit von Λ ist in der ursprünglichen Definition der zellulären Algebra in [GL] nicht enthalten. Nach einer Bemerkung von S. König und C. Xi ([KX], Abschnitt 3) ist es jedoch angebracht, dies zu verlangen. In unseren Anwendungen sowie in allen oben aufgeführten Beispielen ist diese Vorgabe stets erfüllt.*

Wir kommen nun zu den symplektischen q-Schur-Algebren zurück. Aufgrund von Satz 2.5.8 und der Funktorialität der Bildung dualer Algebren sind zwei solche zu unterschiedlichen Z-Parametertupeln zueinander isomorph als R-Algebren. Unter der Einbettung ρ in $\mathcal{E}_r$ gemäß Satz 1.5.2 ist ein Isomorphismus durch die Konjugation mit dem R-Automorphismus d_r von $V^{\otimes r}$ aus Lemma 2.5.7 gegeben. Wir können uns daher o.B.d.A. auf den Fall des trivialen Z-Parametertupels $\mathbf{1}$ mit $p_{ij} = t_k = 1$ für alle i, j, k zurückziehen.

Satz 4.2.5 *Die symplektischen q-Schur-Algebren $S^{\mathrm{s}}_{R,q}(n, r)$ sind zelluäre Algebren. Im Fall des trivialen Z-Parametertupel $\mathbf{1}$ ist durch*

$$\mathbf{B}_r{}^* = \{C^\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \mid \lambda \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n, r),\ \mathbf{i}, \mathbf{j} \in M(\lambda)\}$$

eine zelluläre Basis gegeben.

BEWEIS: Gemäß der Vorbemerkung beschränken wir uns auf den Fall des trivialen Z-Parametertupels. Nach Satz 4.2.3 haben wir zu zeigen, daß $A^{\mathrm{s}}(n,r)'$ eine zelluläre Koalgebra bezüglich der Basis $\mathbf{B}_r$ ist. Wir ordnen die Menge $\Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$ der dominanten polynomialen Gewichte vom Grad r durch

$$\mu + lz_g + P < \nu + kz_g + P :\Longleftrightarrow l \leq k \quad \text{und} \quad \mu < \nu \ \text{ falls } \ l = k$$

Darin versteht sich die Ordnung auf $\Lambda^+(m, r-2l) \subseteq \Lambda^+(r-2l)$ wie in Paragraph 3.7 durch die lexikographische Ordnung der entsprechenden dualen Partitionen. Axiom (C1*) ist nach Satz 3.14.1 erfüllt. Als involutorischen Antikoalgebrenautomorphismus betrachten wir die Abbildung ϑ_r aus 3.5. Dabei beachte man, daß der Ringautomorphismus Θ von $\mathcal{Z}$ im Fall des trivialen Z-Parametertupels stets durch die Identität von R Fortgesetzt wird, so daß ϑ_r nach Satz 3.5.1 existiert und R-linear ist. Aus Satz 3.5.3 erhält man unter Beachtung der Algebrenhomomorphie von ϑ die in (C2*) geforderte Bedingung $\vartheta_r(D^\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}}) = D^\lambda_{\mathbf{j},\mathbf{i}}$. Es bleibt somit (C3*) zu zeigen. Zur Abkürzung schreiben wir $\mathcal{K} := A^{\mathrm{s}}(n,r)'$. Sei $D^\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ mit $\lambda = \mu + lz_g + P \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$ und $\mathbf{i},\mathbf{j} \in M(\lambda)$ gegeben. Da g^l gruppenähnlich und Δ ein Algebrenhomomorphismus ist, berechnet man nach Satz 3.11.6

$$\Delta(D^\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}}) = (g^l \otimes g^l)\Delta(T^\mu_q(\mathbf{i}:\mathbf{j})) = \sum_{\mathbf{h}\in I^{<'}_\mu} D^\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{h}} \otimes D^\lambda_{\mathbf{h},\mathbf{j}},$$

Darin ist $I^{<'}_\mu$ die Menge der Multi-Indizes zu μ-Spaltenstandardtableaus bezüglich der gewöhnlichen Ordnung (siehe 3.2). Zu jedem $\mathbf{h} \in I^{<'}_\mu$ und $\mathbf{k} \in M(\lambda)$ gibt es nach der Straightening Formula (Korollar 3.13.3 nach Anwendung von ϑ_r) eine Zahl $a_{\mathbf{hk}} \in R$ mit

$$D^\lambda_{\mathbf{h},\mathbf{j}} \equiv \sum_{\mathbf{k}\in M(\lambda)} a_{\mathbf{hk}} D^\lambda_{\mathbf{k},\mathbf{j}} \mod \ \mathcal{K}(>\lambda)$$

Wir setzen dann

$$h(\mathbf{k},\mathbf{i}) := \sum_{\mathbf{h}\in I^{<'}_\mu} D^\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{h}} a_{\mathbf{hk}} \quad \in \mathcal{K}(\geq \lambda)$$

und erhalten

$$\Delta(D^\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}}) \equiv \sum_{\mathbf{k}\in M(\lambda)} h(\mathbf{k},\mathbf{i}) \otimes D^\lambda_{\mathbf{k},\mathbf{j}} \mod \ \mathcal{K}(\geq\lambda)\otimes\mathcal{K}(>\lambda).$$

Dies ist impliziert (C3*). □

4.3 Quasierblichkeit

Zum Schluß überprüfen wir nun das in 4.2 erwähnte Kriterium für die Quasierblichkeit einer zellulären Algebra. Dazu haben wir die Bilinearformen ϕ_λ auf den Standardmoduln $W(\lambda)$ zu betrachten, und zu zeigen, daß diese nicht Null sind

([GL] 3.10). Wir berechnen zunächst einen Ausdruck für die Gram Matrix von ϕ_λ bezüglich der Basis $\{C_{\mathbf{i}}^\lambda |\ \mathbf{i} \in M(\lambda)\}$ von $W(\lambda)$. Wir kürzen die Einträge derselben durch $\phi_{\mathbf{ij}} := \phi_\lambda(C_{\mathbf{i}}^\lambda, C_{\mathbf{j}}^\lambda)$ ab. Nach der Definition in [GL] (2.3) sind diese durch

$$C_{\mathbf{i},\mathbf{k}}^\lambda C_{\mathbf{l},\mathbf{j}}^\lambda \equiv \phi_{\mathbf{kl}} C_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^\lambda \mod S_{R,q}^{\mathrm{s}}(n,r)(< \lambda)$$

bestimmt. Daß eine solche Kongruenz besteht, und $\phi_{\mathbf{kl}}$ unabhängig von $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ ist, folgt aus den Axiomen der zellulären Algebra (siehe [GL] 1.7). Im Vergleich mit der Notation aus dem Beweis von Satz 4.2.3 erhält man die $\phi_{\mathbf{kl}}$ als Strukturkonstanten

$$\phi_{\mathbf{kl}} = a(\lambda\mathbf{ik}, \lambda\mathbf{lj}, \lambda\mathbf{ij}).$$

Diese berechnet man gemäß dem Beweis von Satz 4.2.5 aus der Kongruenz

$$\Delta(D_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^\lambda) \equiv \sum_{\mathbf{h}\in I_\mu^{<'}} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\in M(\lambda)} a_{\mathbf{hk}} a_{\mathbf{hl}} D_{\mathbf{i},\mathbf{k}}^\lambda \otimes D_{\mathbf{l},\mathbf{j}}^\lambda$$

modulo $\mathcal{K}(\geq \lambda) \otimes \mathcal{K}(> \lambda) + \mathcal{K}(> \lambda) \otimes \mathcal{K}(\geq \lambda)$ zu

$$\phi_{\mathbf{kl}} = \sum_{\mathbf{h}\in I_\mu^{<'}} a_{\mathbf{hk}} a_{\mathbf{hl}} \tag{4.5}$$

Darin sind $a_{\mathbf{hk}}$ die (aufgrund des Basissatzes eindeutig bestimmten) Zahlen aus der Straightening Formula (Satz 3.13.3) für $T_q^\mu(\mathbf{i} : \mathbf{h})$ und $\mu \in \Lambda^+(m, r-2l)$ ist durch die Darstellung $\lambda = \mu + l z_g + P$ von λ gegeben.

Satz 4.3.1 *Für alle $\lambda \in \Lambda^{\mathrm{s}+}(n,r)$ gilt $\phi_\lambda \neq 0$.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß ein einziger Eintrag $\phi_{\mathbf{kl}}$ von Null verschieden ist. Wir berechnen $\phi_{\mathbf{kk}}$ wobei $\mathbf{k}$ durch das μ-Tableau $T_{\mathbf{k}}^\mu = T$ mit $T(i,j) := m+i$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq \mu_j$ definiert sei. Offenbar ist T sowohl bezüglich $<$ als auch bezüglich der Ordnung $\prec$ ein Standardtableau und es ist die spiegelsymplektische Bedingung $T(i,j)'^{\times} = m - (n - (m+i) + 1) + 1 = i \geq i$ erfüllt. Also gilt $\mathbf{k} \in M(\lambda) \cap I_\mu^{<'}$. Für den Inhalt $\eta := |\mathbf{k}|$ von $\mathbf{k}$ gilt

$$\eta_i = \begin{cases} 0 & i \leq m \\ \mu_{i-m} & i > m \end{cases}$$

Man beachte, daß $\mathbf{k}$ das einzige Spaltenstandardtableau bezügl $<$ mit diesem Inhalt ist. Aus der Definition des Ranges in 3.1 folgt sofort $\mathrm{rg}(\eta + P) = 0$. Gemäß Lemma 4.1.6 ist $a_{\mathbf{hk}}$ daher lediglich im Fall $|\mathbf{h}| = \eta$ von Null verschieden. Nun folgt aber – wie oben erwähnt – aus $\mathbf{h} \in I_\mu^{<'}$ und $|\mathbf{h}| = \eta$ bereits $\mathbf{h} = \mathbf{k}$ und damit

$$\phi_{\mathbf{kk}} = \sum_{\mathbf{h}\in I_\mu^{<'}} {a_{\mathbf{hk}}}^2 = {a_{\mathbf{kk}}}^2 = 1.$$

□

Gemäß Remark 3.10 in [GL] erhält man

Satz 4.3.2 *Die symplektischen q-Schur-Algebren $S_{R,q}^{\mathrm{s}}(n,r)$ sind quasierblich.*

Anhang A

Hilfsmittel aus der Theorie der Moduln über kommutativen Ringen

Der Zweck dieses Anhangs ist die Aufbereitung von Resultaten aus der Theorie der Moduln über einem Integritätsbereich R mit 1 in der hier verwendeten Symbolik und den hier maßgeblichen Zusammenhängen. Dabei stützen wir uns vornehmlich auf die Standardlehrbücher [Mt], [AM] und [Ja]. Einige Hilfsmittel sind jedoch so speziell, daß es mühsamer wäre, (sicherlich vorhandene) Literaturzitate zu finden als ihre einfachen Beweise zu geben, so daß wir lieber letzteres tun. Die hier zusammengestellten Hilfsmittel kommen vor allem in Kapitel 1, insbesondere in 1.5 zur Anwendung, aber auch in anderen Abschnitten und Kapitel.

A.1 Komplemente und Auswerteabbildung

Wir führen zu einem beliebigen R-Modul W und einem Untermodul $U \subseteq W$ die Bezeichnung

$$U^{\perp} := \{f \in W^* = \mathrm{Hom}_R(W, R) |\ f(u) = 0 \ \ \forall u \in U\}$$

ein und sprechen dabei vom *Komplement von* U . Falls W eine endliche freie Basis besitzt, können wir W mit W^{**} identifizieren mittels der *Auswerteabbildung* $\mathrm{Ev}_W : W \to W^{**}$ gegeben durch $\mathrm{Ev}_W(x)(y) := y(x)\ x \in W,\ y \in W^*$. Es gilt die folgende Vertauschungsregel in W^{***}

$$\mathrm{Ev}_{W^*}(U^{\perp}) = \mathrm{Ev}_W(U)^{\perp}. \tag{A.1}$$

Zu deren Beweis sei das Urbild zu $x \in W^{***}$ unter Ev_{W^*} mit $\bar{x}$ bezeichnet, während $\bar{y}$ das Urbild unter Ev_W zu $y \in W^{**}$ bedeutet. Man hat dann $x(y) = \mathrm{Ev}_{W^*}(\bar{x})(y) = y(\bar{x}) = \mathrm{Ev}_W(\bar{y})(\bar{x}) = \bar{x}(\bar{y})$. Damit gilt:

$$x \in \mathrm{Ev}_{W^*}(U^{\perp}) \Longleftrightarrow \bar{x} \in U^{\perp} \Longleftrightarrow \bar{x}(\bar{y}) = 0\ \forall \bar{y} \in U$$

$$\Longleftrightarrow x(y) = 0\ \forall y \in \mathrm{Ev}_W(U) \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Ev}_W(U)^{\perp}.$$

Leicht bestätigt man die folgende Enthaltensrelation

$$\mathrm{Ev}_W(U) \subseteq U^{\perp\perp}. \tag{A.2}$$

Wir wollen nun zeigen, daß Gleichheit hierin genau dann besteht, wenn W/U torsionsfrei ist (Satz A.1.2). Dies erfordert eine Betrachtung des induzierten Vektorraums $Q \otimes W$ über dem Quotientenkörper Q. In diesem Zusammenhang führen wir einige auch später benötigte Notationen ein.

Ist S ein weiterer Integritätsbereich, welcher mittels eines Ringhomomorphismus $R \to S$ als R-Algebra aufgefaßt werden kann, so erhält man bekanntlich einen Funktor $()^S$ von der Kategorie der R-Moduln in die Kategorie der S-Moduln durch

$$W^S := S \otimes_R W \quad \text{und} \quad \alpha^S := \mathrm{id}_S \otimes \alpha : U^S \to W^S \tag{A.3}$$

zu zwei R-Moduln W und U und einem Morphismus $\alpha : U \to W$ zwischen diesen. Ist U ein Untermodul von W so schreiben wir für die Einbettung $\iota : U \hookrightarrow W$ oder genauer falls Verwechslungen zu befürchten sind ι_U. Das Bild $\mathrm{im}((\iota_U)^S)$ eines induzierten Untermoduls U^S in W^S bezeichnen wir mit

$$U^{S^{\succ}} := (\iota_U)^S(U^S).$$

In dieser Situation gibt es natürliche Homomorphismen $\psi_W : W^{*S} \to W^{S*}$ auf Erzeugern gegeben durch

$$\psi_W(s \otimes v)(t \otimes w) := stv(w),\ s,t \in S,\ v \in W^*\ w \in W,$$

welche die Vertauschbarkeit zwischen den Funktoren $()^S$ und $()^*$ beschreiben. ψ_W ist ein Isomorphismus, falls S eine flache Erweiterung von R ist, z.B. die Lokalisation an einem Primideal von R oder der Quotientenkörper Q von R. Im Fall daß W frei von endlichem Rang ist, überlegt man sofort, daß ψ_W ebenfalls ein Isomorphismus von S-Moduln ist. Man erhält in diesem Fall auch einen Isomorphismus

$$\psi'_W := (\psi_W)^{*-1} \circ \psi_{W^*} : W^{**S} \to W^{S**}$$

wobei $\psi_W{}^*$ die duale Abbildung zu ψ_W bezeichnet.

Lemma A.1.1 *Sei W ein freier R-Modul von endlichem Rang, U ein Untermodul von W, T ein Untermodul von W^{*S}. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Ev}_{W^S} = \psi'_W \circ \mathrm{Ev}_W{}^S$.

(b) $\psi_W(U^{\perp S^{\succ}}) \subseteq U^{S^{\succ}\perp}$.

(c) $T^\perp = (\psi_W)^*((\psi_W(T))^\perp)$.

(d) Ist $S = Q$ der Quotientenkörper von R, so gilt in (b) Gleichheit.

Beweis: Betrachte Erzeuger $y = s \otimes v \in W^{*S}$ mit $s \in S$ und $v \in W^*$ sowie $x = t \otimes w \in W^S$, $t \in S, w \in W$. Man berechnet unter Beachtung von ${\mathrm{Ev}_W}^S(x) = t \otimes \mathrm{Ev}_W(w)$:

$$(\psi_W)^* \circ \mathrm{Ev}_{W^S}(x)(y) = \mathrm{Ev}_{W^S}(x)(\psi_W(y)) = \psi_W(y)(x) = stv(w) =$$

$$ts\mathrm{Ev}_W(w)(v) = \psi_{W^*}(t \otimes \mathrm{Ev}_W(w))(s \otimes v) = \psi_{W^*} \circ {\mathrm{Ev}_W}^S(x)(y)$$

woraus Behauptung (a) folgt. Zum Beweis von (b) sei $y := s \otimes v \in U^{\perp S^\succ}$ und $x := t \otimes u \in U^{S^\succ}$ also $v \in U^\perp$, $u \in U$. Man erhält $\psi_W(y)(x) = stv(u) = 0$ wegen $v(u) = 0$ also $\psi_W(y) \in U^{S^\succ \perp}$. Zum Beweis von (c) beachte man, daß ${\psi_W}^*$ ein Isomorphismus ist. Sei $f \in (W^{*S})^*$ und $g \in W^{S^{**}}$ mit ${\psi_W}^*(g) = f$. Zu $y \in W^{*S}$ erhält man

$$f(y) = 0 \iff {\psi_W}^*(g)(y) = 0 \iff g(\psi_W(y)) = 0,$$

also $f \in T^\perp \iff g \in (\psi_W(T))^\perp$ woraus (c) folgt. Zum Beweis von (d) bleibt wegen (b) nur noch $\supseteq$ zu zeigen. Sei dazu $f \in W^{*Q}$ mit $\psi_W(f) \in U^{Q^\succ \perp}$. Es gibt dann ein $0 \neq r \in R$ mit $rf = 1 \otimes g$ und $g \in W^*$. Dann gilt für alle $u \in U$ auch $\psi_W(rf)(1 \otimes u) = g(u) = 0$ also $g \in U^\perp$ und damit $f = \frac{1}{r} \otimes g \in U^{\perp Q^\succ}$. $\square$

Es sei daran erinnert daß R als Integritätsbereich mit Eins vorrausgesetzt war. Daher ist für jeden R-Modul W der duale Modul $W^* = \mathrm{Hom}_R(W, R)$ torsionsfrei, denn aus $rf(w) = 0$ für alle $w \in W$ mit $0 \neq r \in R$ und $f \in W^*$ folgt $f(w) = 0$ für alle $w \in W$.

Satz A.1.2 *Sei W ein freier R-Modul von endlichem Rang mit einem Untermodul U und $U' := \mathrm{Ev}_W^{-1}(U^{\perp\perp})$. Dann ist der Torsionsuntermodul von W/U gerade U'/U. Insbesondere ist W/U genau dann torsionsfrei wenn $\mathrm{Ev}_W(U) = U^{\perp\perp}$ gilt.*

Beweis: Sei T der Torsionsuntermodul von W/U. Wir zeigen zunächt $T \subseteq U'/U$. Dazu genügt es, das Torsionfreisein von W/U' zu zeigen. Hierzu betrachten wir den dualen Homomorphismus $\iota^* : W^{**} \to U^{\perp *}$ zur Inklusion $\iota : U^\perp \to W^*$, der durch Einschränkung $\iota^*(f) := f_{|U^\perp}$ von Linearformen gegeben ist. Aus der Definition des dualen Komplementes folgt $\ker(\iota^*) = U^{\perp\perp}$. Nach der Vorbemekung ist $U^{\perp *}$ torsionsfrei. Wegen $\mathrm{Ev}_W(U') = U^{\perp\perp}$ gibt es eine Einbettung $W^{**}/\mathrm{Ev}_W(U') \hookrightarrow U^{\perp *}$ und es muß auch $W^{**}/\mathrm{Ev}_W(U')$ torsionsfrei sein. Nun induziert Ev_W einen Isomorphismus von W/U' nach $W^{**}/\mathrm{Ev}_W(U')$. Also muß auch W/U' torsionsfrei sein.

Zum Beweis von $U'/U \subseteq T$ sei $w \in U^{\perp\perp}$ mit $w \notin \mathrm{Ev}_W(U)$ gegeben. Falls ein solches nicht existiert ist U'/U der Nullmodul und man ist fertig. Gibt es jedoch solch ein w, so ist zu zeigen, daß $0 \neq r \in R$ existiert mit $rw \in \mathrm{Ev}_W(U)$. Sei Q der Quotientenkörper von R. Nach Lemma A.1.1 (d) und (c) hat man

$$\psi'_W(U^{\perp\perp Q^\succ}) = {\psi_W}^{*-1}(U^{\perp Q^\succ \perp}) = (\psi_W(U^{\perp Q^\succ})^\perp = U^{Q^\succ \perp\perp}$$

und gemäß Lemma A.1.1 (a) gilt $\psi'_W({\mathrm{Ev}_W}^Q(U^{Q^\succ})) = \mathrm{Ev}_{W^Q}(U^{Q^\succ})$. Da aber über dem Körper Q aus Dimensionsgründen $U^{Q^\succ \perp\perp} = \mathrm{Ev}_{W^Q}(U^{Q^\succ})$ gelten muß, erhält man schließlich $U^{\perp\perp^{Q^{\succ}}} = \mathrm{Ev}_W{}^Q(U^{Q^{\succ}})$.

Als Untermodul des torsionsfreien Moduls W^{**} ist auch $U^{\perp\perp}$ torsionsfrei, und daher ist $(1 \otimes w) \in U^{\perp\perp^{Q^{\succ}}} = \mathrm{Ev}_W{}^Q(U^{Q^{\succ}})$ von Null verschieden. Es gibt dann ein $u \in U$ und ein $r \in R$ mit $1 \otimes w = \mathrm{Ev}_W{}^Q(\frac{1}{r} \otimes u) = \frac{1}{r} \otimes \mathrm{Ev}_W(u)$. Das liefert insgesamt $rw \in \mathrm{Ev}_W(U)$ womit der Beweis beendet ist. □

A.2 Lokal freie Moduln

Zu einem Primideal $p \trianglelefteq R$ bezeichnen wir mit R_p die Lokalisation von R an p und für einen R-Modul W mit W_p die Lokalisation von W an p. Bekanntlich gilt: $W_p \cong R_p \otimes_R W = W^{R_p}$.

Wir nennen W lokal frei, wenn für jedes Primideal p von R die Lokalisation W_p ein freier Modul ist. In unseren Anwendungen ist R stets Noethersch und W endlich erzeugt. Zu W gehört dann eine kohärente Garbe auf $\mathrm{Spec}(R)$, die genau dann lokal frei ist wenn W gemäß obiger Definition lokal frei ist (siehe [Hs] II.5).

Wie bereits oben bemerkt, sind die Homomorphismen $\psi_W : W^{R_p *} \to W^{*R_p}$ Isomorphismen, so daß W genau dann lokal frei ist wenn dies für W^* gilt.

Lemma A.2.1 *Sei Q der Quotientenkörper von R und die R-Algebra S sei ein Körper. Das Ideal $p := \ker(R \to S)$ ist offenbar prim. Für einen endlich erzeugten R-Modul W gilt:*

$$\dim_Q(W^Q) \leq \dim_S(W^S) \textit{ sowie } \dim_Q(W^Q) = \dim_S(W^S) \Longleftrightarrow W_p \textit{ ist frei.}$$

Beweis: (vgl. [Mt], Theorem 2.3) S ist offenbar ein Erweiterungskörper des Quotientenkörpers T von R/p und dieser ist bekanntlich isomorph zu R_p/pR_p, dem Residuenkörper des lokalen Ringes R_p. Wegen $W^S \cong S \otimes_T W^T = (W^T)^S$ als S-Vektorräume gilt $\dim_S(W^S) = \dim_T(W^T)$, so daß man sich auf die Situation beschränken kann, in der S der Residuenkörper eines lokalen Ringes R_p zu einem Primideal p ist.

Sei dann $I := pR_p$ das maximale Ideal diese lokalen Ringes und $\pi : R_p \to S = R_p/I$ die natürliche Projektion. Weiter sei $\{\bar{w_1}, \ldots, \bar{w_m}\}$ eine Basis des S-Vektorraums $W^S = W_p/IW_p$. Wähle Urbilder $\{w_1, \ldots, w_m\}$ von $\{\bar{w_1}, \ldots, \bar{w_m}\}$ unter $\pi \otimes \mathrm{id}_W$. Es gilt dann $W_p = \sum_{i=1}^m R_p w_i + IW_p$ und weil I das Radikal von R_p ist, liefert *Nakayamas Lemma* (siehe etwa [Mt], Theorem 2.2) $W_p = \sum_{i=1}^m R_p w_i$.

Wegen $W^Q = Q \otimes_{R_p} W_p$ bilden $\{1 \otimes w_1, \ldots, 1 \otimes w_m\}$ ein Erzeugendensystem von W^Q und folglich gilt $\dim_Q(W^Q) \leq \dim_S(W^S) = m$. Falls darin Gleichheit gilt sind $\{1 \otimes w_1, \ldots, 1 \otimes w_m\}$ linear unabhängig. Eine nichttriviale Linearkombination der Null bezüglich $\{w_1, \ldots, w_m\}$ führt aber stets zu einer nichttrivialen Linearkombination der Null bezüglich $\{1 \otimes w_1, \ldots, 1 \otimes w_m\}$. Also ist $\{w_1, \ldots, w_m\}$ im Fall der Gleichheit eine freie Basis von W_p. Gilt umgekehrt $W_p = \oplus_{i=1}^k R_p u_i,\ u_i \in W_p$, so folgt aus der Distributivität zwischen Tensorprodukt und direkten Summen, daß $\dim_Q(W^Q) = k = \dim_S(W^S) = m$ gilt. $\square$

Das Lemma impliziert sofort:

Korollar A.2.2 *Ein endlich erzeugter R-Modul W ist genau dann lokal frei, wenn für jede R-Algebra S, welche ein Körper ist,* $\dim_Q(W^Q) = \dim_S(W^S)$ *gilt.*

Das folgende Korollar ist eine Analogie zur Argumentationsweise für die lineare Unabhängigkeit eines Erzeugendensystems mittels Dimension bei Vektoräumen, welches desöfteren verwendet wird.

Korollar A.2.3 *Sei W ein R-Modul mit Erzeugendensystem $\{w_1, \ldots, w_m\}$ und $R \to S$ eine Spezialisierung, derart daß W_p frei ($p :=$ $\ker(R \to S)$) und $\{1 \otimes w_1, \ldots, 1 \otimes w_m\}$ eine Basis von W^S ist. Dann ist $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine freie Basis von W.*

Beweis: Nach Lemma A.2.1 muß $\{1_Q \otimes w_1, \ldots, 1_Q \otimes w_m\}$ eine Basis von W^Q sein. Dies kann aber nur dann zutreffen, wenn $\{w_1, \ldots, w_m\}$ bereits über R linear unabhängig ist. $\square$

Ist W lokal frei so nennen wir $\dim_Q(W^Q) = m$ den Rang von W.

Lemma A.2.4 *Ein endlich erzeugter lokal freier Modul W vom Rang 0 ist der Nullmodul.*

Beweis: Wegen $W^Q = 0$ ist W ein Torsionsmodul. Angenommen es gäbe ein $0 \neq w \in W$, dessen Annhilatorideal in dem maximalen Ideal m enthalten ist. Dann folgt mit $S := R/m$ aus $\dim_S(W^S) = 0$ die Beziehung $W = mW$ wegen $W/mW = W^S$. Nakayamas Lemma liefert daraus die Existenz eines $r \in R$, $r \notin m$ mit $rW = 0$. Dies widerspricht der Wahl von m. $\square$

Lemma A.2.5 *Sei R Noethersch. Dann ist jeder endlich erzeugte, lokal freie R-Modul W flach.*

Beweis: (vgl. [AM] Abschnitt 7, Ex. 16). Sei $0 \to M \to N$ exakt. Zu zeigen ist $U := \ker(W \otimes M \to W \otimes N) = 0$. Nun ist für jedes Primideal $p \triangleright R$ die Lokalisation W_p flach, da jeder freie Modul flach ist. Da auch R_p flach ist ist die Sequenz

$$0 \to R_p \otimes_R U \to W_p \otimes_R M \to W_p \otimes_R N$$

exakt. Die Flachheit von W_p liefert daher $U_p = R_p \otimes_R U = 0$. Also ist U lokalfrei vom Rang 0. Da R Noethersch ist, ist U auch endlich erzeugt, also Lemma A.2.4 zufolge der Nullmodul. $\square$

Lemma A.2.6 *Sei R Noethersch und U ein Untermodul des lokal freien und endlich erzeugten Moduls W. Dann sind äquivalent:*

(a) W/U ist lokal frei.

(b) $\iota^S : U^S \to W^S$ ist injektiv für jede kommutative R-Algebra S.

(c) $\iota^S : U^S \to W^S$ ist injektiv für jede Spezialisierung S.

(d) W/U und U sind lokal frei.

(e) Die Sequenz $0 \to U \to W \to W/U \to 0$ zerfällt.

Beweis: Zunächst sei bemerkt, daß aufgrund der Annahme über R der Untermodul U endlich erzeugt ist. Mit Hilfe der langen exakten Homologiefolge $Tor_1^R(W/U, S) \to U^S \to W^S$ erhält man (b) aus (a), da auf Grund des Lemmas A.2.5 aus der Annahme von (a) $Tor_1^R(W/U, S) = 0$ folgt. Trivialerweise folgt (c) aus (b). Für eine Spezialisierung S bezeichnen wir die Dimensionen mit $n_S := \dim_S(W^S)$, $m_S := \dim_S(U^S)$ und $k_S := \dim_S((W/U)^S)$. Aus der Annahme von (c) folgt $n_S = m_S + k_S$. Nach Lemma A.2.1 gilt $m_S \geq m_Q$ und $k_S \geq k_Q$ wogegen nach Vorrausetzung über W stets $n_S = n_Q$ gilt. Daher muß auch stets $m_S = m_Q$ und $k_S = k_Q$ gelten, was nach Korollar A.2.2 (d) impliziert. (a) folgt trivialerweise aus (d), sodaß die Äquivalenz der ersten vier Aussagen gezeigt ist. Zum Beweis von (e) $\Rightarrow$ (b) betrachte man $p : W \to U$ mit $p \circ \iota = \mathrm{id}_U$. Aus $p^S \circ \iota^S = \mathrm{id}_{U^S}$ folgt dann, daß ι^S stets injektiv ist. Für den Beweis von (e) etwa aus (a) zusammen mit Lemma A.2.5 verweisen wir auf [Mt] Appendix zu Paragraph 7, Example 1 und Theorem 7.14. □

A.3 Verschiedenes

Wir listen nun einige verschiedene kleine Resultate. Das erste ist wohlbekannt und gilt auch in entsprechender Form für nichtkommutative Ringe.

Satz A.3.1 *Seien $\pi : W \to U$ und $\pi' : W' \to U'$ zwei Homomorphismen von R-Moduln. Dann gilt für den Kern des Tensorprodukts $\pi \otimes \pi' : W \otimes W' \to U \otimes U'$ von π und π'*

$$\ker(\pi \otimes \pi') = \ker(\pi) \otimes W' + W' \otimes \ker(\pi')$$

Beweis: [Ja], $V, 1$, Proposition 2. □

Wir betrachten die zu zwei R-Moduln U und W gegebenen natürlichen Homomorphismen

$$\lambda_{U,W} : U^S \otimes W^S \to (U \otimes W)^S,\ \lambda_{U,W}(s \otimes u \otimes t \otimes w) := st \otimes u \otimes w$$

und

$$\mu_{U,W} : U^* \otimes W^* \to (U \otimes W)^*,\ \mu_{U,W}(a \otimes b)(u \otimes w) := a(u)b(w)$$

mit $a \in U^*$, $b \in W^*$, $u \in U$, $w \in W$ und $s, t \in S$, welche die Vertauschbarkeit zwischen der Bildung des Tensorproduktes zweirer R-Moduln mit den Funktoren $()^S$ und $()^*$ beschreiben. Die Natürlichkeit ist wohlbekannt und einfach zu überprüfen. Es gilt

Lemma A.3.2 *Falls W endlich erzeugt und projektiv ist, so ist $\mu_{W,W}$ ein Isomorphismus.*

Beweis: Für den Fall eines endlich erzeugten freien Moduls ist die Aussage klar. Sei nun F ein endlich erzeugter freier Modul mit $F = W \oplus U$. Unter den natürlichen Isomorphismen, die die Vertauschbarkeit der Bildung direkter Summen mit Tensorprokukten bzw. $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ beschreiben und die wir der Einfachheit halber unterschlagen, hat man $F^* = W^* \oplus U^*$ sowie

$$\mu_{F,F} = \mu_{W,W} \oplus \mu_{W,U} \oplus \mu_{U,W} \oplus \mu_{U,U}.$$

Da nun $\mu_{F,F}$ ein Isomorphismus ist, muß dies folglich auch für $\mu_{W,W}$ gelten. $\square$

Lemma A.3.3 *Sei W ein torsionsfreier Modul über dem Noetherschen Integritätsbereich R und U eine freier Untermodul derart, daß W/U ein Torsionsmodul ist. Falls dann für die Einbettung $\iota_U : U \hookrightarrow W$ und jede R-Algebra S, welche ein Körper ist, die Spezialisierung ${\iota_U}^S$ injektiv ist, so gilt $W = U$.*

Beweis: Wir beweisen dies indirekt. Wäre $W/U \neq 0$, so gäbe es $x \in W \backslash U$, und dazu ein $s \in R$ mit $sx \in U \backslash sU$. Dabei beachte man, daß W nach Voraussetzung torsionsfrei ist, weshalb aus $sx = su$ mit $u \in U$ der Widerspruch $x = u \in U$ folgen würde. Da R als Noethersch vorausgesetzt wurde, können wir o.B.d.A. annehmen, daß s prim ist. Sei dann S der Quotientenkörper des Integritätsbereiches $R' := R/(s)$. Nun ist die Restklasse von sx in $U^{R'} \cong U/sU$ wegen $sx \notin sU$ von Null verschieden. Mit U ist aber auch $U^{R'}$ frei und damit $1_S \otimes sx \neq 0$ in U^S. Dahingegen ist offensichtlich $1_S \otimes sx$ in W^S Null. Dies Widerspricht der Injektivität von ${\iota_U}^S$. Also gilt $W = U$. $\square$

Anhang B

Arithmetik der quantensymplektischen äußeren Algebra

Um den Lesefluß in Kapitel 3 nicht allzusehr zu unterbrechen, sind die langwierigen technischen Beweise im Zusammenhang mit der Arithmetik der äußeren Algebra hierher ausgelagert.

B.1 Freie Basis für $\bigwedge$

Mit Hilfe des Diamantenlemmas der Ringtheorie ([Bg]) soll zunächst eine freie Basis für $\bigwedge$ konstruiert werden. Dazu verwenden wir wiederum die Totalordnung $\prec$ aus 3.2 auf der Indexmenge $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$, die durch

$$m' \prec m \prec (m-1)' \prec m-1 \prec \dots \prec 2' \prec 2 \prec 1' \prec 1$$

gegeben ist. Diese induziert durch lexikographische Ordnung eine Totalordnung auf den Monomen $v_{\mathbf{i}} \in V^{\otimes r}$ für Multi-Indizes $\mathbf{i} \in I(n, r)$, die mit dem selben Symbol bezeichnet wird. Auf den Monomen von $\mathcal{T}(V)$ erhält man dann eine partielle Ordnung, wenn man Monome unterschiedlichen Grades als nicht vergleichbar ansieht. Auch diese partielle Ordnung bezeichnen wir mit $\prec$. Es ist klar, daß sie sich mit der Halbgruppenstruktur auf der Menge der Monome von $\mathcal{T}(V)$ verträgt, wie dies in [Bg] gefordert wird.

Wir führen nun ein Reduktionssystem in $\mathcal{T}(V)$ durch die drei folgenden Typen von Reduktionen 2. Grades ein, die wir gemäß [Bg] als Paare (Monom, Ersetzungsausdruck) schreiben.

$(R1)$	$(v_i v_j, t_{ji} v_j v_i)$	für $j \prec i$ und $i \neq j'$ falls $i \neq m$
$(R2)$	$(v_i v_{i'}, t_{i'i} v_{i'} v_i + s_{i'} v_{(i+1)'} v_{i+1} + s_i v_{i+1} v_{(i+1)'})$	für $1 \leq i < m$
$(R3)$	$(v_i v_i, 0)$	für $1 \leq i \leq n$.

Darin sind die Ringelemente s_i für $i \leq m$ durch $s_i := q t_{i+1} t_i^{-1}$ bzw. $s_i := q t_{i+1} t_{i'}^{-1}$ für $i > m$ erklärt, während die t_{ij} wie in 3.8 definiert sind. Da alle Monome des

Systems größer sind als die in den zugehörigen Ersetzungsausdrücken auftretenden Monome, ist die oben eingeführte partielle Ordnung mit diesem Reduktionssystem kompatibel. Man überprüft leicht, daß der von den Differenzen der Monome aus dem System mit ihren Ersetzungsausdrücken erzeugte R-Untermodul von $V^{\otimes 2}$ gerade U_S ist.

Die Menge der Monome in $V^{\otimes r}$, die kein Monom aus dem Reduktionssystem als Teilwort enthalten ist offenbar

$$F_r := \{v_{\mathbf{i}} | \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I(n,r),\ i_1 \prec \ldots \prec i_r\}.$$

Während man sofort erkennt, daß die Restklassen der Elemente dieser Mengen Erzeugendensysteme für die homogenen Summanden $\bigwedge(r)$ der äußeren Algebra $\bigwedge$ bilden, muß man für den Beweis der linearen Unabhängigkeit die Auflösbarkeit von Zweideutigkeiten verifizieren. Da alle Monome aus dem Reduktionssystem von zweitem Grade sind, treten nur überlappende Zweideutigkeiten auf, und man kann sich auf solche dritten Grades beschränken. Zweideutigkeiten zwischen zwei Reduktionen vom Typ (R3) sind trivialerweise auflösbar, während solche zwischen Reduktionen von Typ (R2) überhaupt nicht auftreten. Es bleiben somit folgende Fälle zu behandeln:

1. Beide Reduktionen sind vom Typ (R1):
   $v_i v_j v_k$ mit $k \prec j \prec i$ und $i \neq j' \neq k$ oder $j = m$ ($i = m$ ist nicht möglich, da notwendigerweise $i \succ m$ gilt).

2. Zweideutigkeiten zwischen (R1) und (R3):
   (a) $v_i v_i v_j$ mit $j \prec i$ und $i \neq j'$ oder $i = m$
   (b) $v_j v_i v_i$ mit $i \prec j$ und $i \neq j'$ oder $i = m+1$

3. Zweideutigkeiten zwischen (R2) und (R3):
   (a) $v_i v_i v_{i'}$ mit $1 \leq i < m$
   (b) $v_i v_{i'} v_{i'}$ mit $1 \leq i < m$

4. Zweideutigkeiten zwischen (R1) und (R2):
   (a) $v_i v_j v_{j'}$ mit $j \prec i$ und $1 \leq j < m$
   (b) $v_j v_{j'} v_i$ mit $i \prec j'$ und $1 \leq j < m$

Zum Beweis der Auflösbarkeit dieser Zweideutigkeiten schreiben wir für die Anwendung einer Reduktion: Monom $\mapsto$ Ersetzungsausdruck. Beginnt man mit der Reduktion des linken Paares im ersten Fall, so erhält man:

$$v_i v_j v_k \mapsto t_{ji} v_j v_i v_k \mapsto t_{ji} t_{ki} v_j v_k v_i \mapsto t_{ji} t_{ki} t_{kj} v_k v_j v_i.$$

Bei Beginn mit dem rechten Paar erhält man ebenso

$$v_i v_j v_k \mapsto t_{kj} v_i v_k v_j \mapsto t_{ki} t_{kj} v_k v_i v_j \mapsto t_{ji} t_{ki} t_{kj} v_k v_j v_i.$$

Also sind diese Zweideutigkeiten auflösbar. Während die Auflösbarkeit der unter 2. aufgeführten Zweideutigkeiten einfach einzusehen ist, benötigt man für die weiteren Fälle Relationen zwischen den Ringelementen t_{ij} und s_i, die auf Grund der Relationen zwischen den p_{ij} und den t_i gelten und die wir nun auflisten:

$$t_{ij}^{-1} = t_{ji} \text{ für alle } i \neq j$$

$$t_{j'i}t_{ji} = -t_{i'i} \text{ für alle } i < j, j' < i$$
$$t_{j'i}t_{ji} = s_{(i-1)'}s_{i-1}^{-1} \text{ für alle } j < i < j' \text{ oder } j' < i < j$$

Wir behandeln nun die Reduktionen nach 3. und dabei exemplarisch (a). Es ist zu zeigen, daß bei erster Anwendung der Reduktion (R2) auf das rechte Paar weiter zu Null reduziert werden kann.

$$v_i v_i v_{i'} \mapsto t_{i'i}v_i v_{i'} v_i + s_{i'}v_i v_{(i+1)'}v_{i+1} + s_i v_i v_{i+1}v_{(i+1)'} \mapsto \ldots \mapsto$$

$$s_{i'}(t_{i'i} + t_{(i+1)'i}t_{(i+1)i})v_{(i+1)'}v_{i+1}v_i + s_i(t_{i'i} + t_{(i+1)'i}t_{(i+1)i})v_{i+1}v_{(i+1)'}v_i.$$

Auf Grund obiger Relationen zwischen den t_{ij} folgt aber $t_{i'i} + t_{(i+1)'i}t_{(i+1)i} = 0$, was zu zeigen war. In Bezug auf den 4. Fall ist der Unterfall (b) der schwierigere. Im Fall (a) bedeutet $j \prec i$, daß entweder $i < j$ oder $i > j'$ gelten muß. Die Rechnung führt wiederum auf eine Anwendung der oben aufgeführten ersten zwei Relationen zwischen den t_{ij}. Im Fall $j < i < j'$ von (b) benötigt man die dritte Relation und es sind die Sonderfälle $i = j + 1$ und $i = j' - 1$ zu betrachten. Wir führen dies exemplarisch unter Beschränkung auf den ersten Sonderfall vor. Einerseits reduziert man in 4. (b):

$$v_j v_{j'} v_i \mapsto t_{ij'}v_j v_i v_{j'} \mapsto \ldots \mapsto$$

$$t_{ij'}t_{ij}t_{j'j}v_i v_{j'}v_j + s_{j'}t_{ij'}t_{ij}v_i v_{(j+1)'}v_{j+1}s_j t_{ij'}t_{ij}v_i v_{j+1}v_{(j+1)'} := f_1.$$

Andererseits bei Beginn mit dem linken Paar erhält man

$$v_j v_{j'} v_i \mapsto t_{j'j}v_{j'}v_j v_i \mapsto \ldots \mapsto$$

$$t_{ij'}t_{ij}t_{j'j}v_i v_{j'}v_j + s_{j'}v_{(j+1)'}v_{j+1}v_i + s_j v_{j+1}v_{(j+1)'}v_i := f_2$$

was sich im Fall $j + 1 < i < j' - 1$ zu

$$t_{ij'}t_{ij}t_{j'j}v_i v_{j'}v_j + s_{j'}t_{i(j+1)'}t_{i(j+1)j}v_i v_{(j+1)'}v_{j+1} + s_j t_{i(j+1)'}t_{i(j+1)}v_i v_{j+1}v_{(j+1)'}$$

weiter reduzieren läßt. Da nach der ersten und dritten Relation zwischen den t_{ij} offenbar $t_{ij'}t_{ij} = t_{i(j+1)'}t_{i(j+1)}$ gilt, stimmen beide Ausdrücke in diesem Fall überein. Im Fall $i = j + 1$ lassen sich f_1 und f_2 durch eine Anwendung von Reduktion (R3) auf

$$t_{(j+1)j'}t_{(j+1)j}t_{j'j}v_{(j+1)}v_{j'}v_j + s_{j'}t_{(j+1)j'}t_{(j+1)j}v_{j+1}v_{(j+1)'}v_{j+1}$$

bzw.

$$t_{(j+1)j'}t_{(j+1)j}t_{j'j}v_{(j+1)}v_{j'}v_j + s_j v_{j+1}v_{(j+1)'}v_{j+1}$$

verkürzen. Aus der ersten und dritten Relation folgt aber $s_{j'}t_{(j+1)j'}t_{(j+1)j} = s_j$, sodaß auch in diesem Fall beide Ausdrücke übereinstimmen. Zusammenfassend erhält man

Satz B.1.1 *Die Restklassen der Monome aus $\cup_{r=1}^{n} F_r$ zusammen mit der Eins aus $\mathcal{T}(V)$ bilden eine freie Basis der äußeren Algebra $\bigwedge$ über dem Grundring R. Die Restklassen der Monome aus F_r bilden für $r = 1, \ldots, n$ eine frei Basis des homogenen Summanden $\bigwedge(r)$. Der Rang von $\bigwedge(r)$ ist $\binom{n}{r} = |F_r|$.*

B.2 Beweise technischer Lemmata

Um den Lesefluß in 3.9 nicht zu stark zu Unterbrechen werden die Routinebeweise einiger technischer Lemmata hier aufgeführt.

Beweis von Lemma 3.9.1

Der Beweis von (a), (b) und (c) erfolgt durch Induktion über $m - l$. Der Induktionsanfang $l = m$ folgt im Fall von (a) und (c) aus Formel $d_m = y^{1-m}c_m$ aus 3.8 und im Fall von (b), da für $r > 0$ auf linker und rechter Seite Null steht. Zum Beweis des Induktionsschrittes schreibt man die Berechnungsformel der d_i aus den c_i zu $d_l = y^{1-l}C_{l,1} - y^{-l}C_{l+1,1}$ um, woraus (a) folgt. Wegen der Symmetrie zwischen zwischen den beiden Formeln in (3.33) genügt es, (b) für D zu zeigen. Dazu zerlegen wir $D_{l,r} = d_l D_{l+1,r-1} + D_{l+1,r}$ und erhalten

$$D_{l,1}D_{l,r} = d_l d_l D_{l+1,r-1} + d_l D_{l+1,r} + D_{l+1,1}(d_l D_{l+1,r-1} + D_{l+1,r}) =$$

$$((y-1)\{r\}_y + 1 + \{r\}_y) d_l D_{l+1,r} + \{r+1\}_y D_{l+1,r+1}.$$

Wegen $(y-1)\{r\}_y + 1 + \{r\}_y = \{r+1\}_y$ folgt (b). Der Beweis des Induktionsschrittes in (c) unterteilt sich in die zwei Fälle $l \in M$ und $l \in L$. Im ersten Fall berechnet man

$$D_{l,r} = d_l \sum_{I \in \underline{(l+1)m}_{r-1}} y^{s(I, M\setminus\{l\}, l+1)} c_{I\cap L} d_{I\cap M} + \sum_{I \in \underline{(l+1)m}_r} y^{s(I, M\setminus\{l\}, l+1)} c_{I\cap L} d_{I\cap M} =$$

$$\sum_{I \in \underline{lm}_r, l \in I} y^{s(I\setminus\{l\}, M\setminus\{l\}, l+1)} c_{I\cap L} d_{I\cap M} + \sum_{I \in \underline{lm}_r, l \notin I} y^{s(I, M\setminus\{l\}, l+1)} c_{I\cap L} d_{I\cap M},$$

und erhält mit den ganzen Zahlen $s(I, M, l) := s(I\setminus\{l\}, M\setminus\{l\}, l+1)$ die Behauptung. Im zweiten Fall berechnet man zunächst (unter Verwendung von (a) und (b)):

$$D_{l,r} = d_l D_{l+1,r-1} + D_{l+1,r} = y^{1-l} c_l D_{l+1,r-1} + y^{-l}(y-1) C_{l+1,1} D_{l+1,r-1} + D_{l+1,r} =$$

$$y^{1-l} c_l D_{l+1,r-1} + ((y-1)\{r\}_y + 1) D_{l+1,r}.$$

Wegen $(y-1)\{r\}_y + 1 = y^r$ kann man dann die Argumentation entsprechenend dem ersten Fall fortführen.

Durch Induktion über r erhält man (d) direkt aus dem Spezialfall für $l = 1$ in (b). Ebenso erhält man den Spezialfall $C_1 = D_1$ für $r = 1$ in (e) als den Fall $l = 1$ aus (a). Aus (d) folgt dann $\{r\}_{y^{-1}} C_r = \{r\}_y D_r$. Da $\bigwedge$ torsionsfrei ist, erhält man wegen $\{r\}_y = y^{\binom{r-1}{2}} \{r\}_{y^{-1}}$ die Behauptung (e). Zum Beweis von (f) berechnet man zunächst für $j \le m$

$$v_j c_i = \begin{cases} y t_{j'} t_j^{-1} c_i v_j & j < i \\ y^i t_{j'} t_j^{-1} d_i v_j & i = j \\ t_{j'} t_j^{-1} c_i v_j & i < j \end{cases}$$

woraus man wegen $y^i d_i = yc_i + (y-1)\sum_{j=i+1}^{m} c_j$ und $t_{j'j} = -yt_{j'}t_j^{-1}$ die Behauptung erhält. Der Fall $j > m$ geht ähnlich, wenn man C_1 gemäß (a) durch D_1 ersetzt.

Beweis von Lemma 3.9.3

Im Fall $I = \emptyset$ steht auf beiden Seiten der Gleichung Null, so daß die Gültigkeit in diesem Fall gesichert ist. Wir führen nun wieder vollständige Induktion nach $m - l$. Im Fall $l = m$ bleibt lediglich $I = \{m\} = M$ zu betrachten. Man berechnet dann $0 = s(I, M, m) = (1 - m) + (m - 1) = 0$. Beim Induktionsschritt behandeln wir zunächst den Fall $l \in I$. Gemäß Bemerkung 3.9.2 (b) berechnet man

$$s(I, M, l) = s(I\backslash\{l\}, M\backslash\{l\}, l+1) = (1-(l+1))|I\backslash\{l\}| + t(I\backslash\{l\}, (\underline{m}\backslash M) \cup \{l\}).$$

Nun gilt aber

$$t(I\backslash\{l\}, (\underline{m}\backslash M) \cup \{l\}) =$$
$$t(I, (\underline{m}\backslash M)) + t(I, \{l\}) - t(\{l\}, (\underline{m}\backslash M) \cup \{l\}) = t(I, \underline{m}\backslash M) + |I| - l,$$

da $t(I, \{l\}) = |I|$ und $t(\{l\}, (\underline{m}\backslash M) \cup \{l\}) = l$ wegen $I, M \subseteq \underline{lm}$ erfüllt ist. Somit folgt

$$s(I, M, l) = (1 - l - 1)(|I| - 1) + |I| - l + t(I, \underline{m}\backslash M) = (1 - l)|I| + t(I, \underline{m}\backslash M).$$

Der Fall $l \in M\backslash I$ führt auf

$$s(I, M, l) = s(I, M\backslash\{l\}, l+1) = (1-(l+1))|I| + t(I, (\underline{m}\backslash M) \cup \{l\}) =$$
$$(1-(l+1))|I| + t(I, \underline{m}\backslash M) + |I| = (1-l)|I| + t(I, \underline{m}\backslash M).$$

Schließlich erhält man im Fall $l \notin M$

$$s(I, M, l) = s(I, M, l+1) + |I| =$$
$$(1-(l+1))|I| + t(I, \underline{m}\backslash M) + |I| = (1-l)|I| + t(I, \underline{m}\backslash M).$$

Literaturverzeichnis

[AM] Atiyah, M.F., Macdonald, I.G.: Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1969, 128 S.

[AST] Artin, M., Schelter, W., Tate, J.: Quantum Deformations of GL_n. Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), 879-95.

[Be] Berele, A.: Constuction of Sp-Modules by Tableau. Linear and Multilinear Algebra 19 (1986), 299-307.

[Bg] Bergman, G.M.: The Diamond Lemma for Ring Theory Advances in Math. 29 (1978), 178-218.

[BW] Birman, J., Wenzl, H,: Braids, Link Polynomials and a new Algebra. Tansactions of the Amer. Math. Soc., Vol. 313, No. 1 (1989), 249-273.

[Br] Brauer, R.: On Algebras which are connected with the semisimple continous Groups. Annals of Math. Vol. 38, No. 4 (1937), 857-871.

[CP] Chari, V., Pressley, A.: A Guide to Quantum Groups. Cambridge University Press. 1994. 651 S.

[Co] De Concini C.: Symplectic Standard Tableaux. Advances in Mathematics 34 (1979), 1-27.

[Di2] Dipper, R.: Polynomial representations of finite general linear groups in non-describing charcteristic. Progr. in Math., Vol. 95 (1991), 343-370.

[DD] Dipper, R., Donkin, S.: Quantum GL_n. Proc. London Math. Soc. 63 (1991), 165-211.

[DJ1] Dipper, R., James, G.: Representations of Hecke algebras of general linear groups. Proc. London Math. Soc. (3). 52 (1985), 20-52.

[DJ2] Dipper, R., James, G.: The q-Schur Algebra. Proc. London Math. Soc. (3) 59 (1989), 23-50.

[DJ3] Dipper, R., James, G.: q-tensor space and q-Weyl modules, Trans. A.M.S. 327 (1991), 251-282.

[Do1] Donkin, S.: On Schur Algebras and Related Algebras I, Journal of Algebra 104 (1986), 310-328.

[Do2] Donkin, S.: Good Filtrations of Rational Modules for Reductive Groups. Arcata Conf. on Repr. of Finite Groups. Proceedings of Symp. in Pure Math., Vol. 47 (1987), 69-80.

[Do3] Donkin, S.: Representations of symplectic groups and the symplectic tableaux of R.C. King. Linear and Multilinear Algebra, Vol. 29 (1991), 113-124.

[Dt] Doty, S.: Polynomial Representations, Algebraic Monoids, and Schur Algebras of Classical Type. ersch. im J. of Algebra.

[DRS] Doubilet, P., Rota, G.C., Stein, J.: On the Foundations of Combinatorial Theory: IX Combinatorial Methods in Invariant Theory. Stud. in Appl. Math. Vol. LIII, No. 3 (1974), 185-216.

[FG] Fishel, S., Grojnowski, I.: Canonical Bases for the Brauer Centralizer Algebra. Math. Res. Letters 2 (1995), 15-26.

[GL] Graham, J.J., Lehrer, G.I.: Cellular Algebras. Invent. Math. 123 (1996), 1-34.

[Gr1] Green, J.A.: Polynomial Representations of GL_n. Lecture Notes in Math. 830. Springer 1980.

[Gr2] Green, J.A.: Combinatorics and the Schur algebra. J. of Pure and Appl. Alg. 88 (1993), 89-106.

[GR] Green, R.M.: q-Schur algebras and quantized enveloping algebras. Thesis. University of Warwick, 1995.

[Gg] Grigor'ev, D. J.: An Analogue of the Bruhat Decomposition for the Closure of the Cone of a Chevalley Group of the Classical Series. Soviet Math. Dokl., Vol. 23 (1981), No. 2.

[Hs] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Springer, GTM 52, 1977.

[HH] Hashimoto, M., Hayashi, T.: Quantum Multilinear Algebra. Tohoku Math. J., 44 (1992), 471-521.

[HR] Halverson, T., Ram, A.: Characters of algebras containing a Jones basic construction: The Temberley-Lieb, Okada, and Birman-Wenzl algebras. Preprint to appear in Adv. Math.

[Ha1] Hayashi, T.: Quantum Deformation of Classical Groups. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 28 (1992), 57-81.

[Ha2] Hayashi, T.: Quantum Groups and Quantum Determinants. J. of Algebra 152 (1992), 146-165.

[Ha3] Hayashi, T.: Non-Existence of Homomorphisms between Quantum Groups. Tokyo J. Math. Vol. 15, No. 2 (1992), 431-435.

[Hu] Humphreys, J. E.: Reflection Groups and Coxeter Groups Cambr. stud. in advanced math. 29. Cambr. Univ. Pess, 1990. 204 S.

[Ia] Iano-Fletcher, M.: Polynomial Representations of Symplectic Groups. Thesis, University of Warwick, 1990.

[Ja] Jacobson, N.: Structures of Rings. A.M.S. Colloqium Publications, Vol. XXXVII, Providence, 299 S.

[Ka] Kassel, C.: Quantum Groups, GTM 155, Springer 1995, 531 S.

[Ke] Kerov, S.V.: Characters of Hecke and Birman-Wenzl-Algebras. In: Quantum Groups: Proceedings of workshops held in the Euler International. Math. Institute, Leningrad, 1990, (Hrsg. Kulish), Springer Lecture Notes in Math. No. 1510 (1992), 335-340.

[Ki] King, R.C.: Weight multiplicity for classical groups., Group Theoretical Methods in Physics (fourth International Colloquium, Nijmegen 1975), Lecture Notes in Physics 50, Springer 1975.

[KX] König, S., Xi, C.: On the structure of cellular algebras. preprint.

[Ma] Martin, S.: Schur Algebras and Representation Theory. Cambridge University Press, 1993.

[Mt] Matsumura, H.: Commutative ring theory. Cambridge University Press, 1986.

[Me] Mead, D.G.: Determinantal Ideals, Identities, and the Wronskian. Pacific J. of Math., Vol. 42, No. 1 (1972), 165-175.

[Mu] Murphy, G.: The Representations of Hecke Algebras of Type A_n, Preprint ?.

[RW] Ram, A., Wenzl, H.: Matrix Units for Centralizer Algebras. J. of Algebra, Vol 145, No. 2 (1992), 378-395.

[RTF] Reshetikhin, N. Y., Takhtadjian, L. A., Faddeev, L. D.: Quantization of Lie groups and Lie algebras, Leningrad Math. J. 1 (1990), 193-225.

[Sc] Schur, I.: Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen.. In I. Schur: Gesammelte Abhandlungen Vol. I (Hrsg.: A. Brauer und H. Rohrbach), Springer-Verlag, Berlin (1973), 1-71.

[Su] Sudbery, A.: Matrix-Element Bialgebras Determined by Quadratic Coordinate Algebras. J. of Algebra, Vol 158, (1993), 375-399.

[Ta1] Takeuchi, M.: Quantum Orthogonal and Symplectic Groups and their Embedding into Quantum GL. Proc. Japan Acad., Vol. 65, Ser. A, No. 2 (1989), 55-58.

[Ta2] Takeuchi, M.: Matric Bialgebras and Quantum Groups. Israel J. of Math., Vol. 72, Nos. 1-2, (1990), 232-251.

[Ta3] Takeuchi, M.: Some Topics on $GL_q(n)$. J. of Algebra., 147 (1992), 379-410.

[Tk] Takhtajan, L.A.: Lectures on Quantum Groups. In: Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory (Hrsg.: M.-L. Ge, B.-H. Zhao. World Scientific, 1990.

[We1] Wenzl, H.: On the structure of Brauer's centalizer algebras. Annals of Math., 128 (1988), 173-193.

[We2] Wenzl, H.: Quantum Groups and Subfactors of Type B, C and D. Commun. Math. Phys. 133 (1990), 383-432.