Universidad Abierta Interamericana

Manual de Ingreso de la Facultad de Tecnología Informática

MÓDULO DE MATEMÁTICA

FACULTAD DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA

Manual de Ingreso de la Facultad de Tecnología Informática

Módulo de Matemática

AUTORES

Prof. Dra. Cristina Camós

Prof. Lic. Inés Casetta

COORDINADOR

Dr. Marcelo De Vincenzi

Camós, Cristina
Manual de Ingreso de la Facultad de Tecnología Informática: módulo de Matemática / Cristina Camós; Inés Casetta; Coordinación general de Marcelo De Vincenzi. - 1a ed - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Universidad Abierta Interamericana, 2022.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-8403-28-1

1. Matemática. I. Casetta, Inés II. De Vincenzi, Marcelo, coord. III. Título.
CDD 510

Fecha de catalogación: 16/09/2022

Edición: Jesica Castelli
Corrección: Abigail Ríos
Diseño editorial: María Juiz

©Universidad Abierta Interamericana
Hecho el depósito que indica la Ley 11.723
2022 Universidad Abierta Interamericana, Chacabuco 90, 1er. Piso.
Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Tel.: 4342-7788.
https://www.uai.edu.ar/publicaciones/editorial-uai/

Derechos reservados, prohibida su reproducción total o parcial, su almacenamiento en sistemas informáticos, su transmisión por medios electrónicos, fotocopias y otros métodos, sin el permiso previo del editor.

Índice

Introducción y bienvenida

Nos interesa muchísimo contarles, aunque quizás ya lo saben, que la Matemática tiene una imagen generalmente negativa. No solo en nuestra sociedad sino en casi todas las sociedades del mundo. Esta imagen tiene una "historia" que se remonta a cientos de años atrás. Cierto es que no podemos contarles en detalle cómo se generaron estas frases tan reiterativas de "es difícil", "me provoca mucho miedo tener un examen", "no entiendo", "¿para qué sirve?", "es solo para algunos-algunas" y así podríamos seguir enumerando muchas otras expresiones.
Lo que sí podemos afirmar es que la Informática no existiría sin la Matemática, que detrás de la logística de una empresa existe un modelo matemático, que la medicina utiliza imágenes producto de la Matemática, que la minería de datos utiliza algoritmos matemáticos, y tantos otros ejemplos. Desde esta mirada estimados y estimadas alumnos y alumnas, encaremos este pequeño camino con una actitud positiva, pensando que todos y todas pueden aprender, con perseverancia, los temas que desarrollaremos. Es nuestra intención presentarles un recorrido que puedan comprender y poner en práctica. ¡¡¡¡Les damos entonces la bienvenida!!!!!

Unidad 1: Conjuntos numéricos

1.01 El conjunto de los números naturales

Tanto en su recorrido escolar por la primaria como por la escuela media, ustedes han trabajado con distintos conjuntos numéricos. Vamos entonces a revisar algunos conceptos que ya han adquirido y tal vez a incorporar algunos nuevos.
La historia de los números es tan antigua como el hombre mismo, pero es recién en la Edad de Bronce cuando comienzan las "operaciones" entre números. Los sumerios, tan solo por dar un ejemplo, utilizaban un sistema de numeración de base 60. En la actualidad se utiliza un sistema de numeración de base 10.
Veamos un ejemplo:
El número 3847 en base 60 se escribe como: $1.60^2 + 4.60 + 7$
El número 3847 en base 10 se escribe como:

$$3.10^3 + 8.10^2 + 4.10 + 7$$

En la informática, se utiliza la base 2.
Para que puedan comprender el significado de la base de un sistema de numeración les acercamos algunos conceptos:
La base en un sistema de numeración indica las formas de agrupar. Todos sabemos que en el sistema decimal (base 10) agrupamos cada diez.

Análisis en un ejemplo 3847 : al agrupar de a diez pueden quedar valores sin completar un grupo, son las unidades, en el ejemplo 7 unidades, se pudieron encontrar 4 grupos de 10, denominados decenas: 4 decenas que equivalen a 40 unidades (4.10). Se conformaron 8 grupos de 10 decenas, denominados centenas: 8 centenas que equivalen a 800 unidades ($8.10.10 = 8.10^2$) y finalmente se obtienen 3 grupos de 10 centenas, denominados unidades de mil: 3 unidades de mil que equivalen a 3000 unidades ($3.10.10.10 = 3.10^3$).
Análisis del mismo número en base 60 agrupamos entonces cada sesenta: $1.60^2 + 4.60 + 7$ significa que 7 son valores que no se pudieron agrupar, 4 significa cuatro grupos de 60 (4.60) y 1 significa un grupo de 60 grupos de 60 cada uno ($1.60.60 = 1.60^2$).

Volviendo a la escolaridad, recordarán que los primeros números que aprendieron fueron los que se utilizan "para contar", que se denominan **números naturales** y que en lenguaje matemático o simbólico se anota con una $\mathbb{N}$.
Este símbolo nos permitirá entender a todos que el conjunto está formado por los infinitos números naturales y se acepta expresarlo así:

$\mathbb{N}$= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ...}

Es interesante advertir que el significado de los puntos suspensivos es la existencia de infinitos números, que podemos pensarlos formalmente con la relación *"el siguiente de…"*

El siguiente de 8 es 9, el siguiente de 9 es 10…y así sucesivamente

Estos números también se utilizan para "ordenar", por ejemplo "siéntese en la 4ta fila y ocupe la 3er butaca". El conjunto $\mathbb{N}$ tiene, además, *primer elemento* que es el número 1.
Algunos autores de textos incluyen el cero en el conjunto de los números naturales y otros no. Con respecto a la suma y a la multiplicación, cuando sumamos o multiplicamos dos números naturales obtenemos siempre otro número natural. Por este motivo se afirma que:

"El conjunto de los números $\mathbb{N}$ es cerrado con respecto a la adición y a la multiplicación".

1.02 El conjunto de los números enteros

Si hablamos de operaciones, está faltando pensar qué ocurre con la resta y la división.
¿Es posible restar dos números naturales cualesquiera?
Si resolvemos 8 - 5 = 3, evidentemente obtenemos otro número natural. Pero que ocurre si resto 5 – 8 = - 3 y -3 no es un número natural.

Podemos pensar también si resolvemos ecuaciones utilizando solamente números naturales.

Resolver ecuaciones en $\mathbb{N}$

Cuando se indica que una ecuación se resuelve en un conjunto numérico se está advirtiendo que puede o no encontrarse una respuesta.

Por ejemplo, $x + 5 = 8$ su solución es un número natural.

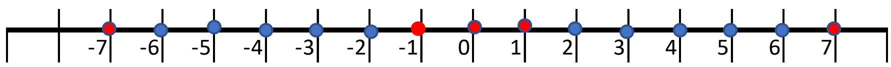
Si la ecuación es $x + 5 = 3$ su solución no es un número natural.

Lo mismo ocurre con la división, 14: 7 = 2 es una división cuyo resultado es un número natural, pero 11: 2 = 5,5 y este resultado no es un número natural. Luego, **no podemos decir** que el conjunto de los números $\mathbb{N}$ es cerrado con respecto a estas operaciones.
Como acabamos de explicar que el conjunto de los naturales no es cerrado para la sustracción precisamos otro conjunto de números que permita realizar $a - b$ si $a < b$.
Este es el conjunto de los **números enteros**, que en lenguaje simbólico se anota con una $\mathbb{Z}$ que está formado por los naturales, el cero y los números negativos (*opuestos de los naturales o enteros positivos*).
Aclaración: Para expresar que dos números enteros son opuestos definimos:

Dos números enteros son opuestos si tienen igual distancia al cero.

1 y -1 son opuestos. -7 y 7 son opuestos. El "0" no tiene opuesto.

Representemos estos números en una recta:



Nuevamente, este símbolo $\mathbb{Z}$, nos permitirá entender a todos que el conjunto está formado por los infinitos números enteros y se acepta expresarlo así:

$\mathbb{Z}$= {…, -4,-3-2,-1,0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ...}

Debemos advertir que el significado de los puntos suspensivos es la existencia de infinitos números, que también podemos pensarlos formalmente con la relación *"el siguiente de…"*

El siguiente de -4 es -3, el siguiente de -1 es 0, el siguiente de 0 es 1………. y así sucesivamente.

Ahora con el mismo razonamiento que utilizamos para los números naturales, podemos afirmar que:

"El conjunto de los números $\mathbb{Z}$ es cerrado con respecto a la adición, a la sustracción y a la multiplicación".

Está faltando analizar la división, pero ocurre que no siempre al dividir dos números enteros, el resultado es un número entero. Pensemos, por ejemplo, al realizar el cociente entre 2 y 5, obtenemos como resultado 0,4 que no es un número entero.
Como ya mencionamos antes, los números naturales forman parte del conjunto de los números enteros, entonces podemos afirmar que los naturales están incluidos en los enteros. En lenguaje simbólico escribimos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$**,** que se lee: el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros.
Los números negativos también son números para contar, por ejemplo, cuando hablamos de pérdidas o de expresiones como "1.000 metros *bajo el nivel del mar*", o 300 años antes de Cristo, y otros que ustedes pueden ejemplificar en este momento.

1.03 El conjunto de los números racionales

Pensemos ahora que ocurre cuando resolvemos ecuaciones utilizando números enteros.

Resolver ecuaciones en $\mathbb{Z}$

¿encontramos siempre respuesta en $\mathbb{Z}$?

Si la ecuación es 2x+1=-3 su solución es un número entero.

2x=-3-1

x=-4:2

x=-2

Veamos en este ejemplo:

-3x+1=-3 resulta: x=-4:(-3)

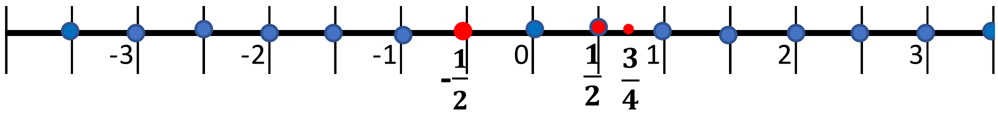
x no es un número entero.

Hasta aquí hemos marcado la idea de que los números naturales dieron fundamentalmente respuestas a la necesidad de contar, y ampliamos a los enteros que también dan respuesta a otras necesidades de contar con números negativos.
Desde la antigüedad además se planteó otra necesidad, ***"la de medir"***, los números enteros no pueden dar esa respuesta. ¿Por qué?
Pensemos que la medición necesita de números que le den significado, por ejemplo, a la expresión: "medio metro". ¿Nos alcanzan los números enteros? ¿Existe algún número entero entre 1 y 2? La respuesta es no, con lo cual otra vez precisamos ampliar a otro conjunto de números para resolver esta situación. Mencionamos en páginas anteriores que al dividir dos números enteros no siempre obtenemos un entero, con lo cual este nuevo conjunto dará solución a esta necesidad.
Este es el conjunto de los **números racionales**, que en lenguaje simbólico se anota con una $\mathbb{Q}$**.** Otra vez, podemos expresar a este conjunto numérico como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \ldots, -4, \ldots -3, \ldots\ldots -1, \ldots -\frac{1}{2}, \ldots 0, \ldots.1, \ldots\frac{1}{2}, \ldots\ldots\frac{3}{4}, \ldots 2, \ldots\ldots\frac{9}{4}, \ldots 3, \ldots \right\}$$

Recuerden que el conjunto es denso, entre cada elemento del conjunto existen infinitos números racionales.

Representemos nuevamente alguno de estos números en una recta:



La palabra racional viene del latín «*ratīo*», que quiere decir "razón". Los griegos decían que eran números que tenían "razón de ser". Tenemos que recordar que en la antigüedad todo estaba ligado a la filosofía. Seguramente cuando en la escuela media estudiaron proporcionalidad también utilizaron el término "razón". En la actualidad justamente, se establece el concepto de razón como una relación entre dos números enteros dada por el cociente entre ellos. Por ejemplo, cuando hablamos de que 7 de cada 10 alumnos suponen que la matemática es difícil, escribimos la razón $\frac{7}{10}$
Antes de que conocieran el término "razón" vieron ya desde la escuela primaria las "fracciones", que permiten expresar un medio. La definición es la siguiente:

Las fracciones se definen como el cociente entre dos números enteros, siempre que el denominador sea distinto de cero. En lenguaje simbólico: $\frac{a}{b}$ siempre que $b \neq 0$.

$\frac{a}{b}$ se denomina razón o fracción.

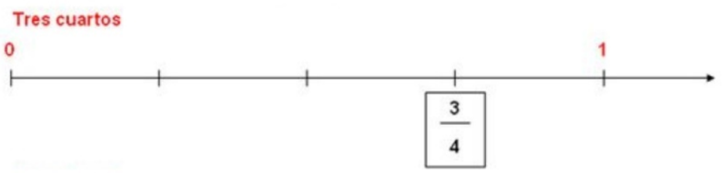
Los números escritos como fracciones tienen otra forma de escribirse, u "otra forma de representación". Veamos por ejemplo la fracción $\frac{3}{4}$ puede escribirse también como 0,75

pues como hemos expresado más arriba $\frac{3}{4}$ significa $3:4$ y su resultado es $0{,}75$. Este número es un *decimal finito*. Pero $\frac{1}{7}$ significa 1:7 y su resultado es 0,142857142857… (los puntos suspensivos en este caso indican que sigue la tendencia) donde los números 142857 (periodo) se repite indefinidamente, por este motivo 0,142857142857…. es un número *decimal infinito periódico*.
Entonces, el conjunto $\mathbb{Q}$ está formado por los enteros y por las fracciones también expresadas como decimales finitos e infinitos periódicos.

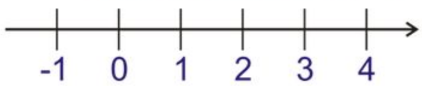
Por último,

“el conjunto de los números $\mathbb{Q}$ es cerrado con respecto a la adición, a la sustracción, a la multiplicación y a la división”.

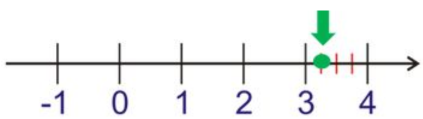
Tal vez se pregunten porque los $\mathbb{Q}$ incluyen a los enteros. Simplemente porque puedo escribir por ejemplo al número 7 como $\frac{14}{2}$, al número -3 como $\frac{-12}{4}$, al 5 como $\frac{5}{1}$.
Los conjuntos numéricos pueden representarse en una recta. Ubiquemos por ejemplo la fracción $\frac{3}{4}$ en la recta. Como el numerador es menor que el denominador esta fracción es menor que la unidad. Recordarán que se divide a la unidad en cuatro partes iguales y luego ubico la fracción en el lugar, que indique el numerador.



Veamos como representamos $\frac{13}{4}$ en la recta numérica. Esta fracción es mayor a la unidad. Al realizar la división, el cociente es 3 y el resto es 1. Con lo cual podemos escribir que: $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$ Luego deberemos ubicar esta fracción entre 3 y 4.



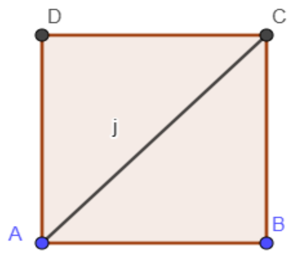
Entonces dividimos nuevamente esa unidad en cuatro partes y la ubicamos en la tercera parte.



Esta expresión, $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$ que muchas veces les habrán dicho que es lo mismo que realizar, la cuenta: 3.4 + 1= 13 y es lo mismo que decir $\frac{13}{4}$

1.04 El conjunto de los números irracionales

Es importante advertir en este punto que existen números que no pueden representarse como el cociente entre dos números enteros, es decir por una fracción.
Cuando los griegos se dieron cuenta de este obstáculo, les llevó muchísimos años por un lado poder aceptarlo y por otro lado solucionarlo. Ocurrió que al medir la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, la longitud que encontraron no podían expresarla como un cociente entre dos enteros, es decir por una fracción. Esa longitud la expresamos, en la actualidad como $\sqrt{2}$. Podemos analizarlo: El segmento representado como j o bien AC es la diagonal, y los lados del cuadrado tienen longitud 1.



Una observación directa permite ver que la diagonal AC divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos. Consideremos ABC triángulo rectángulo en B si aplicamos el Teorema de Pitágoras (que tantas veces han visto en la formación secundaria) resulta que $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ es $(AC)^2 = (1)^2 + (1)^2$ luego $(AC)^2 = 2$ finalmente para la notación actual es $AC = \sqrt{2}$ pero no para los griegos….
Esto provocó tal impacto que creyeron que todo lo que habían construido hasta ese momento era incorrecto. Pasaron muchos años hasta que se dieron cuenta de que debían definir otro conjunto numérico, diferente a todos los anteriores. Los llamaron "números locos" (seria la expresión actual), ya que eran números que *"no tenían razón de ser"*, es decir que no podían representarse como la razón entre dos números enteros. Con el tiempo pasaron a llamarse **números irracionales** y en lenguaje simbólico se anotan con una $\mathbb{I}$. Algunos de los números irracionales que seguramente conocen, son, por ejemplo: π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{11} - 1$, etc., etc. En la actualidad entendemos que los números irracionales se definen así:

Los números irracionales son aquellas expresiones decimales que no pueden expresarse como razón o fracción.

Hasta ahora sabemos que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Acabamos de comentar que los números irracionales no pueden expresarse como un número racional, con lo cual $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, piénsenlo así: ningún número puede ser racional e irracional a la vez.

Podemos entonces afirmar que el conjunto formado por los números racionales $\mathbb{Q}$, unión los números irracionales $\mathbb{I}$, forman un nuevo conjunto que se denomina, el conjunto de los números reales. En lenguaje simbólico es $\mathbb{R}$
Podemos representar en la Figura 1 que está debajo, la relación de los conjuntos numéricos para una mayor comprensión:

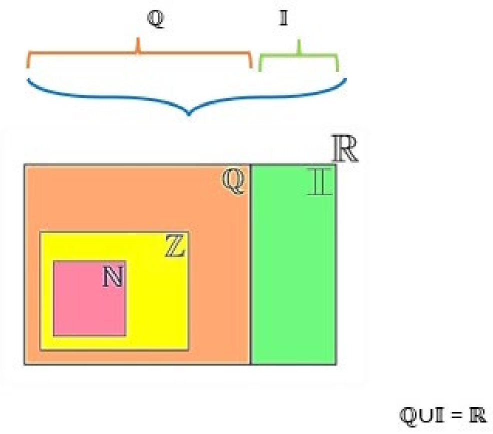


Figura 1

*Apliquemos ahora todo lo que hemos leído y respondan las siguientes preguntas a modo de una **primera autoevaluación**: (las respuestas las encontrarán al final del texto).*

<u>ACTIVIDAD 1.</u> PRIMERA AUTOEVALUACIÓN

I) *Analiza y responde*:

a) ¿Qué números tienen en común el conjunto de los $\mathbb{N}$ y el conjunto de los $\mathbb{Z}$?
b) ¿Y entre los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$?

II) *En las siguientes expresiones colocar Falso(F) o Verdadero(V)*

a) -7 $\in$ (se lee pertenece) a $\mathbb{Q}$………………

b) -7 $\in$ a $\mathbb{N}$………………

c) $\frac{8}{7} \in$ a $\mathbb{R}$……………

d) 4 $\notin$ (se lee no pertenece) a $\mathbb{I}$………

e) $\pi \in$ a $\mathbb{R}$ y $\pi \in$ a $\mathbb{I}$…….

III) *Completar la siguiente tabla colocando en las casillas si cada número, pertenece, no pertenece o pertenece a más de un conjunto numérico.*

Números	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
34.563					
$4\sqrt{11}$					
$-\frac{3}{4}$					
0,363636…					
$2\frac{3}{4}$					
-24,3					

IV) *Ubicar en una recta numérica, los números entre -3 y 5. ¿Cuántos son? ¿A qué conjunto numérico pertenecen?*

V) *¿Cómo escribirías en lenguaje simbólico que -3 y 5 pertenecen al conjunto de los números enteros?*

VI) *Ubicar en una recta numérica, los números entre* $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$ *¿A qué conjunto numérico pertenecen? ¿Cuántos son?*

Podemos afirmar que: "entre dos números enteros distintos, siempre existe un número finito de números que pertenecen al conjunto de los enteros". Se dice entonces que el conjunto de los $\mathbb{Z}$ es un conjunto discreto. ¿Se cumplirá esta afirmación para el conjunto de los números $\mathbb{N}$?

En el inciso **VI)** ¿Pudiste contar cuantos números había? Seguramente que no, entonces:

Podemos afirmar que: "entre dos números racionales distintos, siempre existe un número infinito de números que pertenecen al conjunto de los racionales". Se dice entonces que el conjunto de los $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso.

Los números irracionales también se pueden representar en la recta numérica, claro es más complicado porque tienen infinitos números que no se repiten periódicamente, pero los podemos aproximar para representarlos. Finalmente, si "unimos" el conjunto de los números $\mathbb{Q}$ con el conjunto de los números $\mathbb{I}$, obtendremos el conjunto de los números $\mathbb{R}$.

Los números $\mathbb{R}$ completan la recta numérica, es decir que a cada punto de la recta le corresponde un número real.

1.05 Fracciones que se expresan como números decimales

Ya dijimos anteriormente que las fracciones se pueden expresar como números decimales finitos e infinitos periódicos. $\frac{1}{2}$ es 0,50 que es un número decimal finito, pero $\frac{1}{3}$ es 0,333333333... Y seguro que recuerdan que se representa también con un sombrerito arriba del 3, se escribía de esta forma: $0,\hat{3}$. Y la cuestión es si recuerdan cómo se transforma la expresión decimal de estos números con periodo, sea que el periodo esté formado por uno o más números, a una fracción, es decir al cociente entre dos enteros. Antes mencionamos el número 0,142857142857... que se escribe: $0,1\widehat{42857}$ (el sombrerito abarca a todos los números detrás de la coma), ya que su periodo es 142857.

¿Cuál será el periodo de 0,50? (lo dejamos a tu cargo, **ACTIVIDAD 2**).

Pero volvamos a pensar como pasamos de números decimales a fracciones. Creo que si piensan un poco les debe aparecer una imagen: "... que se dividía por 9, pero no me acuerdo...". Totalmente normal, porque era una técnica y cuando pasa el tiempo y no se aplica, necesariamente nos olvidamos. Les propongo entonces que los pensemos sin técnica.

¿Qué buscamos? Una fracción, que no conozco, entonces le asigno una letra, por ejemplo, **f.** Veamos como del $0,\hat{3}$ podemos llegar a $\frac{1}{3}$

Veamos si **f =** $0,\hat{3}$ debo lograr eliminar matemáticamente el periodo 3, entonces voy a multiplicar por 10, ambos lados de la igualdad, resulta así: 10. **f =** 10. $0,\hat{3}$

Luego esto es lo mismo que decir que: 10. **f =** $3,\hat{3}$ pero sabemos que **f =** $0,\hat{3}$

Miro ambas igualdades y veo que tengo de un lado $3,\hat{3}$ y debajo $0,\hat{3}$ Así: 10. **f =** $3,\hat{3}$
f = $0,\hat{3}$

Si resto ambas igualdades, queda eliminado matemáticamente el periodo que era lo que estaba buscando. Veamos: 10. **f** – **f** = 9 **f** y del otro lado $3,\hat{3}$ - $0,\hat{3}$= 3; llegamos entonces a que 9 **f** = 3; con lo cual **f =** $\frac{3}{9}$ Pero ¿podré simplificar? Seguro, porque ambos números son múltiplos de 3, luego **f =** $\frac{1}{3}$**.** Listo encontré la fracción.

Sintetizamos esta secuencia de transformación:

f = $0,\hat{3}$	Expresión decimal del número.
10. **f** = 10. $0,\hat{3}$	Multiplicamos ambos miembros por 10 con el objetivo de eliminar el periodo.
10. **f** = $3,\hat{3}$	Igualdad obtenida por la multiplicación.
10. **f** = $3,\hat{3}$ **f** = $0,\hat{3}$	Comparamos la expresión obtenida con la original: ambos tienen el mismo periodo.
10. **f** – **f** = $3,\hat{3} - 0,\hat{3}$	Si se restan ambos miembros de las igualdades se puede eliminar el periodo.
9 **f** = 3	Igualdad luego de efectuar la resta.
f = $\frac{3}{9}$	Despejamos **f** para encontrar la fracción
f = $\frac{1}{3}$	Numerador y denominador son múltiplos de 3, entonces se simplifica la fracción.

Les propongo como desafío que encuentren la fracción que le corresponde a $0,\hat{4}$ y a $2,\widehat{804}$ (periodo 804, con lo cual deberán pensar por cuanto multiplico para eliminar el período) **<u>ACTIVIDAD 3.</u>**

Un último caso que tiene un poquito más de complicación. Existen números decimales, que tienen solo algunos números que se repiten, por ejemplo, el 6,93333… es decir el número es $6{,}9\hat{3}$. Utilizamos el mismo razonamiento. **f =** 6,933333…, si multiplico por 10, obtengo

10. **f** = 69,33333…; pero si resto no elimino el periodo, entonces veo que ocurre si, además, multiplico por 100. Me quedaría:

f = 6,933333…

10. **f =** 69,33333…

100. **f =** 693,3333…

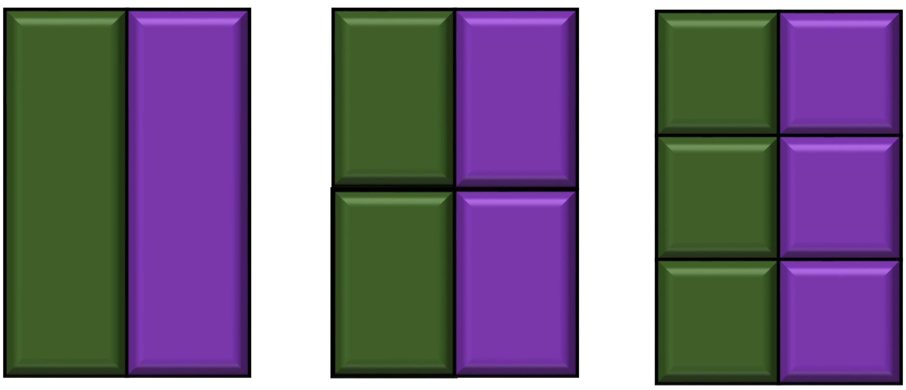
Luego me conviene restar 100. **f** - 10.**f** = 693 – 69; entonces 90. **f=** 624 y **f=** $\frac{624}{90}$

Sintetizamos esta secuencia de transformación:

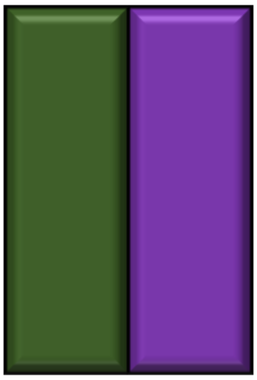
f = 6,933333…	Expresión decimal del número.
10. **f** = **69**,33333….	Multiplicamos ambos miembros por 10 con el objetivo de eliminar matemáticamente el periodo.
10. **f** = 69,33333…. **f** = 6,933333….	Comparamos la expresión obtenida con la original: en este caso la resta no permite eliminar el periodo.
100. **f** = 693,3333…	Se multiplica por 100 para que el periodo coincida con el de 10. **f**
100. **f** -10. **f**=693,3333…-69,33333…	Si se restan ambos miembros de las igualdades se puede eliminar el periodo.
90 **f** = 624	Igualdad luego de efectuar la resta.
f = $\frac{624}{90}$	Despejamos **f** para encontrar la fracción.
f = $\frac{104}{15}$	Numerador y denominador son múltiplos de 6, entonces se simplifica la fracción.

1.06 Relación entre las fracciones

Recién acabamos de mencionar que $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ con solo simplificar. A estas dos fracciones las denominamos fracciones equivalentes, pero pensemos que $\frac{9}{27}$ es también equivalente a $\frac{1}{3}$ y así podemos encontrar infinitas fracciones. ¿Pero que significa que sean equivalentes? Veamos una representación gráfica, para recordar mejor:



$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$



Si estos gráficos representaran una barra de cereal, es sencillo ver que repartiríamos en los tres casos la misma cantidad. Como vemos un mismo objeto matemático, se puede representar de distintas formas, pero el significado es el mismo.

$$= \quad \frac{1}{2} = 0{,}50 = \frac{50}{100} = 50\%$$

Son todas distintas representaciones de **"la mitad de un todo".** Pero tenemos que pensar, que el "todo" o "entero" pueden variar. ¿En qué sentido?

En el ejemplo anterior, el entero era la barra de cereal. Pero también podemos tener 16 lápices, de los cuales queremos repartir 8. Repartimos entonces "la mitad" de estos lápices. Es decir:

$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ "la mitad de los lápices"

En este caso el todo "no es un entero". Similar al caso de comprar $\mathbf{\frac{1}{2}}$ Kg de pan. El caso de la barra de cereal, comparado con el de los lápices o el pan, son muy diferentes. Podemos decir que en el primer caso estamos ante un *"continuo"* que partimos. En el caso de los lápices, decimos que es un caso *"discreto"*. Estas diferencias son importantes de notar. Tal vez en algún momento ustedes mismos analizaron que es muy distinto pensar en "media torta" a pensar en "medio kilo de pan", sin embargo, el concepto de "un medio", "la mitad" es el mismo, donde lo que cambia es el contexto.

Sigamos aplicando lo que leímos hasta acá y les propongo la ***segunda autoevaluación,*** *respondiendo preguntas o resolviendo ejercicios o algunas situaciones problemáticas (las respuestas las encontraran al final del texto).*

ACTIVIDAD 4. SEGUNDA AUTOEVALUACIÓN

I) *En las siguientes expresiones colocar Falso(F) o Verdadero(V)*

e) $3,\widehat{804} = \frac{3801}{999}$ …… …

f) $5,8\hat{4} = \frac{526}{90}$ …..

g) $2,\hat{9} = 3$ ……….

h) $\frac{13}{14} < \frac{12}{13}$ …….

Nos ocuparemos ahora de revisar operaciones y reglas del cálculo con fracciones.

1.07 Operaciones con números racionales $\mathbb{Q}$

SUMA Y RESTA

La suma y resta de fracciones se define para aquellas fracciones que tienen el mismo denominador. Esto desde ya es muy sencillo:

$$\frac{2}{7} + \frac{6}{7} = \frac{8}{7}$$

Cuando no tienen el mismo denominador, se reemplazan por fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$

Comenzamos a buscar fracciones equivalentes a $\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{6}} = \frac{3}{9} = \cdots$

Continuamos con $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{3}{6}} = \frac{4}{8} = \cdots$

Ubicamos las fracciones con el mismo denominador y sumamos los numeradores, luego:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Para restar fracciones el proceso es el mismo.

Observación: muchos docentes utilizan el "común denominador" para sumar o restar fracciones. Es un procedimiento válido, pero muchas veces al no utilizarse con frecuencia, nos olvidamos.

Comparación

Desde ya que una fracción positiva será siempre mayor que una negativa. Entre dos fracciones con el mismo denominador, será mayor la que tenga mayor numerador.

En cambio, si comparo dos fracciones que tienen distinto denominador, deberé buscar dos fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador. Luego me bastará observar el numerador para decidir cuál es mayor.

Por ejemplo, quiero comparar:

a) $\frac{2}{7}$ con $\frac{3}{5}$

Comienzo a buscar fracciones equivalentes a $\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \frac{8}{28} = \mathbf{\frac{10}{35}} = \frac{12}{42} = \cdots$

Realizo el mismo procedimiento con $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30} = \mathbf{\frac{21}{35}} = \frac{24}{40} = \cdots$

Localizamos las fracciones que tienen el mismo denominador y ahora estamos en condiciones de comparar solo los numeradores, luego $\mathbf{\frac{3}{5}} > \mathbf{\frac{2}{7}}$ (tres quintos es mayor que dos séptimos).

Como observarán, el concepto de "fracción equivalente" se utiliza también para comparar.

PRODUCTO Y COCIENTE

Para realizar el producto entre dos fracciones se multiplican el numerador y el denominador de ambas fracciones. Ejemplo:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 10} = \frac{18}{50}$$

Recordemos que ya vimos la definición de fracción, donde afirmamos que es el cociente entre dos números enteros y que el denominador debe ser distinto a cero.

Entonces ahora en símbolos afirmamos: “dados a, b, c y d enteros, con b ≠0 y d ≠0, se verifica que $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$ “

Veamos ahora cómo se realiza el cociente entre dos fracciones: realizamos el producto de la primera fracción por la inversa de la segunda fracción. Ejemplo:

$$\frac{3}{8} : \frac{4}{3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 4} = \frac{9}{32}$$

En símbolos afirmamos: “dados a, b, c y d enteros, con b ≠0 c≠0 y d ≠0, se verifica que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$ “

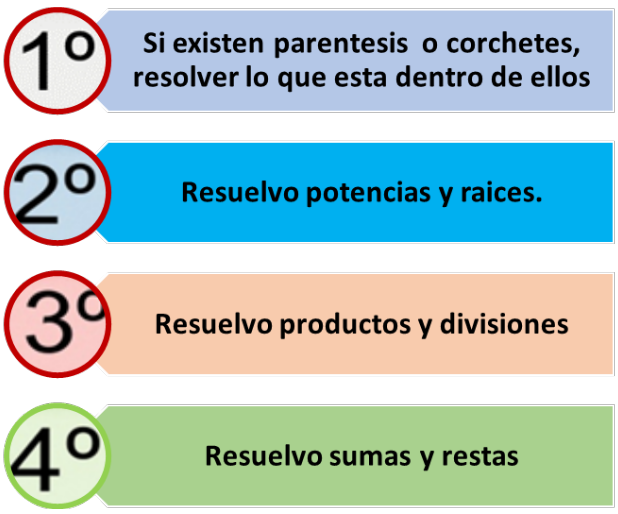
Sigamos entonces revisando algunos conceptos. Ustedes seguramente recordarán ejercicios de este tipo:

5 – 24: 6 + 14: 7 =

O también con este formato:

3 – [12 :6 – (-5 + 3)] – 7=

Como habrán observado, en el primer ejercicio no hay ni paréntesis ni corchetes, pero en el segundo sí. En realidad, son distintas formas de expresarlos, pero ambas son correctas. Lo que debemos tener presente es la **“jerarquía de las operaciones”,** es decir el orden en que resolvemos las operaciones. En el siguiente esquema, se detalla:



Veamos un ejemplo:

$$[2 + 5.(3 + 3)] - 3.\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4 - 3^0.2 =$$

Como existe corchete y paréntesis, comienzo resolviendo lo que está dentro de los mismos.

$$[2 + 5.6] - 3.\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad + 4 - 3^0.2 =$$

$$32 - 3.\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ + 4 - 3^0.2 =$$

Luego debo resolver potencias. Resuelvo $3^0 = 1$, luego:

$$32 - 3.\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4 - 1.2 =$$

Luego multiplicación. Resuelvo: $3.\frac{1}{3} = 1 \; y \; 1.2 = 2$

$$32 - 1 + \frac{1}{2} \ + 4 - 2 =$$

Por último, sumas y restas:

$$32 - 1 \ + 4 - 2 + \frac{1}{2} =$$

$$33 + \frac{1}{2} = \frac{33}{1} + \frac{1}{2} = \frac{66}{2} + \frac{1}{2} = \frac{67}{2}$$

Habrán notado que utilizamos potencias. Revisemos entonces definición, propiedades y convenciones de las potencias de los números reales.

1.08 Operaciones con números reales $\mathbb{R}$

POTENCIA

Comenzamos resolviendo problemas.

ACTIVIDAD 5. PROBLEMAS

Problema 1

En un concurso participaron 15 coros y cada uno tenía 15 integrantes. ¿Cuántos coristas participaron en el concurso? Expresar el resultado como una potencia.

Problema 2

El padre de Juan coloca en una alcancía:

El 1° día ……………..1 moneda

El 2° día……………… 2 monedas

El 3° día……………… 4 monedas

El 4° día …………… 8 monedas

…………………………………………..

El día 11………………… ¿Cuántas monedas tendrá Juan en la alcancía? Expresar el resultado como una potencia.

Vamos a realizar una pequeña revisión de la definición y propiedades de la potenciación de números reales.

Recordarán que $5^4 = 5.5.5.5 = 625$, es decir en esta expresión el 5 es la "base" y 4 el "exponente". Podemos decir que 5^4 indica, que se multiplica la base tantas veces como lo expresa el exponente.

En lenguaje simbólico o matemático, **la definición es**: $a^m = \underbrace{a.a.a.\dots\dots a}_{m\ veces}$

Por convenio:

$a^0 = 1$ con $a \neq 0$

$a^1 = a$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ con $a \neq 0$

Ejemplos: $(-7)^0 = 1$ $\qquad 14^1 = 14$ $\qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

Otros ejemplos: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{(3)^2}{(4)^2}} = \frac{(4)^2}{(3)^2} = \frac{16}{9}$

Propiedades:

1) $(a.\ b)^n = (a)^n.(b)^n$ (la potencia es distributiva respecto del producto)

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (la potencia es distributiva respecto de la división, con $b \neq 0$)

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$ (con $a \neq 0$ y $b \neq 0$)

4) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (en el producto de potencias de igual base se suman los exponentes)

5) $(a^m)^p = a^{m.p}$ (potencia de potencia se multiplican los exponentes)

6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (en la división de potencias de igual base se restan los exponentes, con $a \neq 0$)

*Sigamos aplicando lo que leímos hasta acá y les propongo la **tercera autoevaluación**, respondiendo preguntas o resolviendo ejercicios o algunas situaciones problemáticas (las respuestas las encontraran al final del texto).*

<u>ACTIVIDAD 6.</u> TERCERA AUTOEVALUACIÓN

I) *En las siguientes expresiones colocar Falso(F) o Verdadero(V)*

a) $(4 - (-2)^0)^{-1} = \frac{1}{3}$ ....

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{25}{16}$ ....

II) *Verificar las siguientes igualdades.*

a) $\left(1-2\left(\frac{2^4}{5}\right)^{-1}.\frac{2^3}{5}\right)^{25}=0$

b) $(3.\ 2^2)^{-2}.3(\frac{1}{2^3}\ (3.2)^{-1})^{-1}=1$

Nos está faltando recordar la definición y propiedades de la:

Radicación

La (raíz cuadrada de 169) $\sqrt{169}=13$ porque 13^2 = 169. Es decir, la operación inversa de *elevar al cuadrado es extraer la raíz cuadrada.*

De la misma manera $\sqrt[3]{64}=4\ porque\ 4^3=64$ y de esta forma podemos pensar en una raíz de índice *n*.

Definiciones:

$$\sqrt[n]{a}=b\quad si\quad b^n=a$$

Se lee: la raíz enésima de a es igual a b si b a la *n* es igual a a. Donde *n* es un número natural y se llama índice de la raíz. a es el radicando. (2)

Si *n* es impar a puede ser cualquier número.

Si *n* es par, a debe ser un número positivo, es decir a > 0. (1)

Veamos algunos ejemplos:

$\sqrt[3]{-27}=-3\quad porque\quad (-3)^3=-27$

$\sqrt[4]{-16}$ $no\ tiene\ como\ solución\ un\ número\ real, ya\ que\ no\ cumple\ con\ lo$

$afirmado\ en$ **(1) No es correcto decir que no existe solución ya que existe un conjunto numérico que si le da solución a esa raíz. Sí podemos decir que "no existe solución real" o "que no existe solución en el campo de los números reales".**

La raíz enésima de un número real puede expresarse como potencia. Por ejemplo:

$\sqrt[3]{4^5}=4^{\frac{5}{3}}$

Como verán, el exponente que tiene el **radicando** pasa a ser el numerador de la fracción que se transforma en exponente, y el **índice** de la raíz, pasa a ser el denominador. Recuerden que los nombres **radicando e índice** los definimos en **(2).**

Otro ejemplo:

$$\sqrt{\mathbf{7}} = 7^{\frac{1}{2}}$$

(en una raíz cuadrada no se escribe el 2 porque se sobreentiende, y el radicando tiene exponente 1).

Ahora sí, pasemos a las propiedades de la radicación.

Propiedades:

1) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}$ (la radicación es distributiva respecto del producto)

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (la potencia es distributiva respecto de la división, con $b \neq 0$)

3) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Vamos a resolver ahora un ejercicio de dos maneras distintas, con la intención de expresar ese producto debajo de una misma raíz:

$\sqrt[3]{y}\,.\sqrt[4]{3y}$ = ¿puedo aplicar la propiedad 1? No, porque los índices de las raíces son diferentes. ¿Cómo puedo hacer para que tengan índices iguales?

Comienzo con la primera raíz. Puedo multiplicar el índice de la primera raíz que es 3 por 4 y al índice de la segunda raíz que es 4 por 3, con lo cual ambos índices se transforman en 12.

Pero si multiplico el índice de una raíz, el resultado se modifica. Para que no ocurra, elevo el radicando al mismo número. De esta forma:

$\sqrt[3.4]{y^4}.\ \sqrt[4.3]{(3.y)^3} = \sqrt[12]{y^4}\ \sqrt[12]{3^3.y^3}$ = ahora si podemos aplicar la propiedad 1) y la igualdad quedará como

$= \sqrt[12]{y^4}\ \sqrt[12]{3^3.y^3} = \sqrt[12]{y^4.\ 3^3.\ y^3} =$ ¿Qué puedo hacer? Miro dentro de la raíz y veo que tengo potencias de la misma base y existe una propiedad de potencia…

Luego obtengo = $\sqrt[12]{y^4.\ 3^3.\ y^3} = \sqrt[12]{y^7.\ 3^3}$ **(3)**

¿De qué otra forma lo podemos resolver? Expresemos las raíces como potencias. Volvamos entonces al enunciado original del ejercicio:

$$\sqrt[3]{y}\,.\,\sqrt[4]{3y} = y^{\frac{1}{3}}\,.\,(3y)^{\frac{1}{4}} = y^{\frac{1}{3}}\,.\,3^{\frac{1}{4}}\,y^{\frac{1}{4}} = y^{\frac{7}{12}}.\,3^{\frac{1}{4}} =$$

y ahora vuelvo a preguntar que necesito para cumplir la consigna del ejercicio que era expresar el producto debajo de una misma raíz. Es evidente que debo conseguir transformar el exponente $\frac{1}{4}$ en una fracción con denominador 12. Bueno solo debemos encontrar una fracción equivalente. Sabemos que $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, luego podemos volver a la igualdad y escribimos:

$$y^{\frac{7}{12}}.\,3^{\frac{1}{4}} = y^{\frac{7}{12}}\,.\,3^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{y^7}\,.\,\sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{y^7.\,3^3} \quad \textbf{(4)}$$

Como verán la expresión **(3) es igual a la (4).**

Como podrán ver, aplicar propiedades se puede transformar en un juego cuando uno las comprende realmente. Quiero, por último, plantear algunas operaciones con números irracionales. Veamos, como resuelvo la siguiente operación:

$$\sqrt[5]{3} - 3\sqrt[5]{3} + 6\sqrt[5]{3} =$$

$\sqrt[5]{3}$ es un número irracional. ¿Qué ocurre si multiplico a un número irracional por un número que no es irracional? ¿Podré simplificar? Te sugiero que vuelvas a leer cuáles son las características de estos números.

En esta expresión hay "sumandos" y "factores". El signo de los sumandos en los números naturales es siempre positivo, pero en cualquier otro conjunto numérico los sumandos pueden ser positivos o negativos. El primer sumando tiene signo positivo y podemos expresarlo como $1.\sqrt[5]{3}$, el segundo sumando es negativo y el tercero positivo. Lo podemos pensar como "una vez $\sqrt[5]{3}$, menos tres veces $\sqrt[5]{3}$, más 6 veces $\sqrt[5]{3}$. Eso da como resultado cuatro veces $\sqrt[5]{3}$, luego resulta:

$$\sqrt[5]{3} - 3\sqrt[5]{3} + 6\sqrt[5]{3} = 4\sqrt[5]{3}$$

Otra vez les propongo la ***cuarta autoevaluación*** *respondiendo preguntas o resolviendo ejercicios o algunas situaciones problemáticas (las respuestas las encontraran al final del texto).*

<u>ACTIVIDAD 7.</u> CUARTA AUTOEVALUACIÓN

I) *Calcular*

a) $\sqrt{y}\,.\,\sqrt[3]{2.\,y} =$

b) $\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[4]{4}\,.\,\sqrt{2} =$

c) $\dfrac{3\sqrt{y}}{6\sqrt[3]{y}} =$

II) *Simplificar*

a) $\dfrac{\left(8^{\frac{1}{2}}\right).\left(8^{\frac{-2}{3}}\right)}{\left(8^{\frac{1}{2}}\right):\left(8^{\frac{-2}{3}}\right)} =$

b) $\left(\dfrac{9^{\frac{1}{2}}.9^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{3}{2}} =$

III) *Calcular*

a) $3\sqrt{b} + 2\sqrt{b} =$

b) $3\sqrt{b} - 2\sqrt{b^3} =$

Unidad 2: Funciones

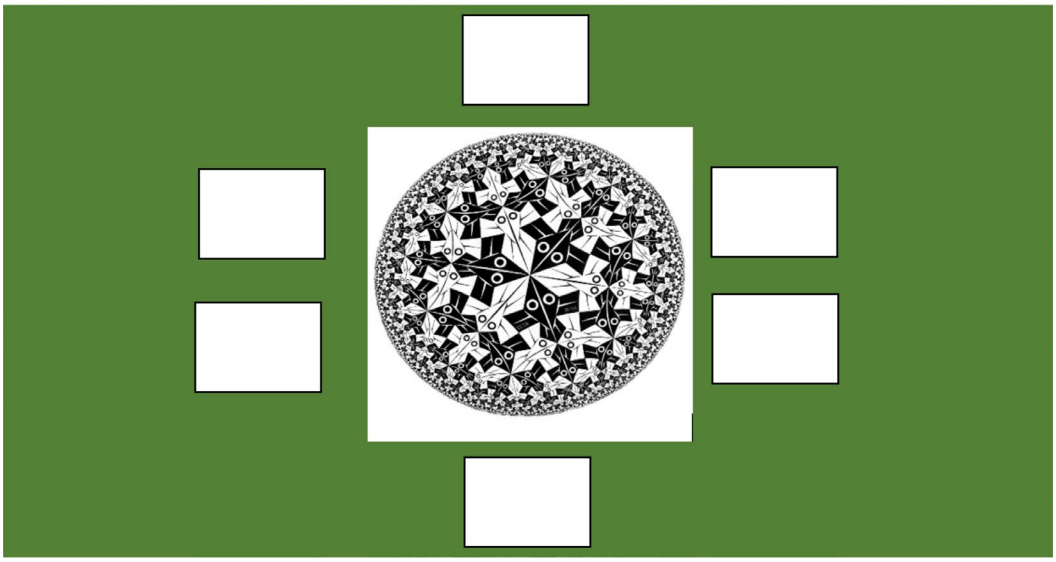
2.01 Polinomios

Seguimos pensando recorridos placenteros y dinámicos para los conceptos matemáticos.

“El Laberinto de los espejos”

En diferentes museos, y en muchos casos al aire libre o en juegos virtuales encontramos una linda actividad lúdica como es recorrer un laberinto y lograr la salida.

Les presentamos el diseño del Laberinto de los espejos, lo ideamos para este trabajo, esperamos que les gusten las obras de arte de **M.C. Escher (**1898–1972). Lo definen como el maestro de las **figuras imposibles,** las **ilusiones ópticas** y los **mundos imaginarios**[1]**. Deseamos que disfruten de conocer a Escher, si aún no lo conocen y de pensar lo matemático en este interesante laberinto. Comencemos….** Cada obra está rodeada por espejos de esta forma:

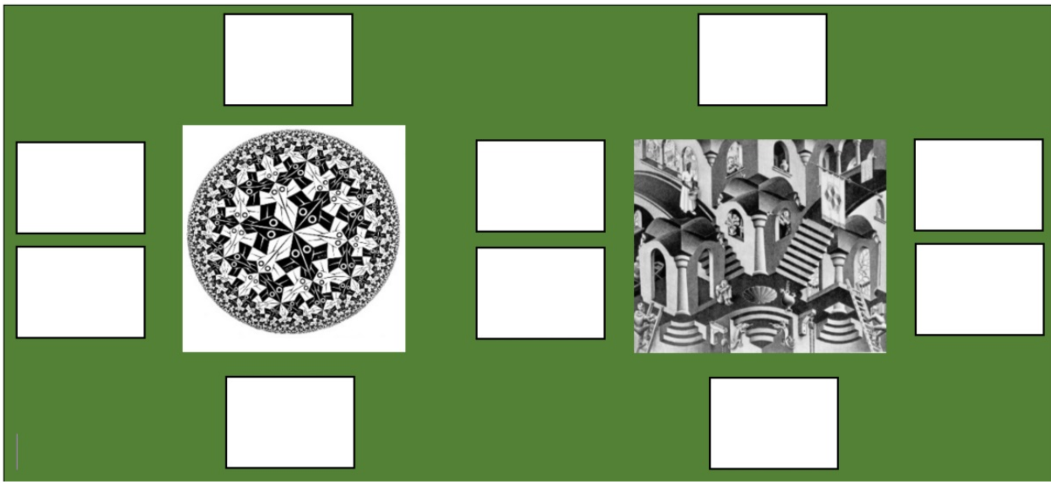


[1] Escher fue un notable artista. Si les interesa para una primera aproximación pueden acceder a https://cdn.educ.ar/dinamico/UnidadHtml__get__d77f8acf-7a06-11e1-831b-ed15e3c494af/index.html

Es probable que vayamos observando todo y si nos preguntaran: ¿Cuántos espejos rodean a cada obra? Haríamos un conteo directo y responderíamos 6.

Supongamos que de manera consecutiva se presenta otra obra y nos vuelven a preguntar ¿cuántos espejos, en total, rodean las dos obras? Contestamos $6x2 = 12$. Demasiado rápido…

Veamos el esquema completo:



Contemos mirando la configuración de obras y espejos. ¡Resulta que son 10!

Sigamos por el laberinto, el recorrido es largo, la configuración se extiende de la misma manera aún en los cambios de direcciones, y cuenta con un total de 41 obras. Importantísimo dato para identificar la salida, - pues encontraremos la obra número 42 que no está rodeada de espejos-.

¿Cómo contarías los espejos de todo el laberinto? Te pedimos que lo pienses un rato sin seguir leyendo, te sugerimos escribir tu estrategia…

Si fuera una configuración con 3 obras, podríamos bosquejarlo y contar los espejos, si son 4, 5, 10 quizás también. Pero si en el recorrido hay 41 obras ¿contarías uno por uno los espejos? Seguro que no.

Probablemente cada uno de nosotros buscaría la forma más práctica de contar la cantidad de espejos. Analicemos algunas de esas formas de contar

En el siguiente cuadro realizamos dos formas de conteo, sobre configuraciones de 2 obras, de 3, de 5, de M número de obras (representamos con M la cantidad de obras)[2].

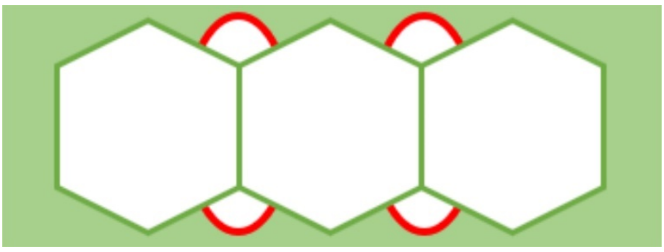
Conteo de espejos	2 obras	3 obras	5 obras	M obras
1ª forma	$6.2 - 2.1$	$6.3 - 2.2$	$6.5 - 2.4$	$6.M - 2.(M-1)$
2ª forma	$4.2 + 2$	$4.3 + 2$	$4.5 + 2$	$4.M + 2$

[2] Usamos M se trata del nombre de Pila del artista Maurits Escher

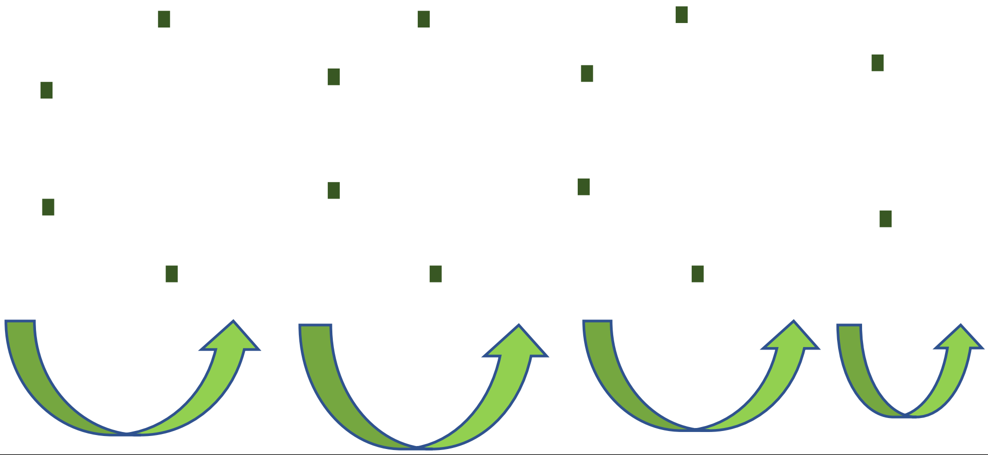
Configuración geométrica del conteo. Para el caso de tres obras:

1ª forma: Contamos los vértices como representantes de los espejos (de a seis) y en color rojo marcamos lo que es necesario restar (cada vértice de los hexágonos representa un espejo. En rojo están marcados los que comparten dos obras consecutivas).

$$6.3-2.2$$



2ª forma: Contamos de a cuatro espejos dos a la izquierda, uno arriba, uno abajo y le sumamos los dos últimos. (Cada punto representa un espejo).



4 + 4 + 4 + 2 =

= $4.3+2$

Analizaremos la relación entre estas dos formas:

Número de obras	3 obras
Primera forma	$6.3-2.2$
Segunda forma	$4.3+2$

En ambas formas el conteo da: $6.3 - 2.2 = 4.3 + 2 = 14$ “14 espejos”.

Te proponemos que completes para 2 obras: (**Actividad 8** preguntas en el texto).

Número de obras	2 obras
Primera forma	
Segunda forma	

¿Cuánto da el conteo de espejos?

Veamos para 4 obras:

Número de obras	4 obras
Primera forma	$6.4 - 2.3$
Segunda forma	$4.4 + 2$

En ambas formas el conteo da: $6.4 - 2.3 = 4.4 + 2 = 18$ “18 espejos”.

Ahora realiza el conteo para 5 obras (**Actividad 8** preguntas en el texto).

Número de obras	5 obras
Primera forma	
Segunda forma	

¿Cuánto da el conteo de espejos?

Hasta aquí has podido observar que, si bien por ser el número de obras 1,2,3,4,5 y algunas más, podríamos contar la cantidad de espejos uno por uno. Sin embargo, encontramos otras formas.

Sería demasiado aburrido seguir contando los espejos del laberinto uno por uno, a medida que crece el número de obras.

Entonces…. Nuestra propuesta es que pienses un formato, lo llamaremos fórmula, para que a partir del número de obras se pueda obtener el número de espejos para ver si funcionan. Eso es un buen paso en la tarea. Escribe tu propuesta para analizarla a posteriori. Te acercamos aquí nuestra propuesta.

Elige la que consideres correcta, piensa los fundamentos de tu elección: (llamamos M al número de obras, puede elegirse cualquier símbolo que lo represente).

$a)\ 6.M - 2.(M-1)$
$b)\ 6M - 2 + 2M$
$c)\ 6M - 2 - 2M$
$d)\ 4M + 2$
$e)\ 6 + 4(M-1)$

¿La fórmula correcta es única? Vuelve a analizarlas.

¿Podrías explicar por qué descartaste alguna o algunas de ellas?

Si elegiste más de una entre las correctas, realiza una comparación entre ellas.

Sugerencia: Para comparar las fórmulas puede trabajarse algebraicamente sobre ellas. Por ejemplo: sumar o restar términos, aplicar propiedades para resolver, etc.

Si avanzaste e hiciste tus elaboraciones puedes continuar leyendo. No te tientes a seguir sin pensarlo antes. Recordá que tu aprendizaje se favorece si probas tus ideas.

Ahora si te acercamos una comparación entre dos fórmulas:

$6.M-2.(M-1)$	fórmula $a)$
$6M-2M\ +2$	propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la resta
$4M+2$	Asociación de términos semejantes para restar
$4M+2$	fórmula d)

Podemos asegurar matemáticamente que partiendo de la fórmula $a)$ obtuvimos fórmula d) , lo que indica que son equivalentes entre sí.

$$6.M-2.(M-1)=\ 4M+2$$

Vamos a precisar algunos conceptos.

CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN EL LABERINTO:

Expresiones algebraicas enteras. Polinomios.

Las expresiones como: $6.5-2.4$ y $4.5+2$ se denominan **expresiones numéricas** y al resolver las operaciones se obtiene un resultado numérico.

Las expresiones como: $6M-2(M-1)$ y $4M+2$ se denominan **expresiones algebraicas enteras.**

Una expresión algebraica entera es una combinación de números, letras y de por lo menos una operación entre ellos. Es importante aclarar que las letras, los números son símbolos del álgebra y permiten generalizar situaciones, establecer relaciones.

Los **polinomios** se simbolizan $p(x), q(x), r(x)$ …. significa que la expresión algebraica entera utiliza x que representa algún valor que no está determinado. Aclaramos que x es la letra utilizada habitualmente, pero es sólo un símbolo.

Los polinomios tienen características expresadas por grado, orden y completud.

El grado de un polinomio es el mayor exponente de x.

Los polinomios se ordenan por sus términos, por lo general en forma descendente por eso el primer término es el que corresponde al grado.

Los polinomios están completos si tienen todos los términos desde el que corresponde a su grado.

$p(x) = ax + b$ polinomio de grado 1, ordenado y completo (término lineal ax e independiente b) Ejemplo: $p(x) = -3x + 2$

$q(x) = ax^2 + bx + c$ polinomio de grado 2, ordenado y completo (término cuadrático ax^2, término lineal bx e independiente c) Ejemplo: $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$

$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomio de grado 3, ordenado y completo. Ejemplo: $r(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 0{,}4$

…………………………………………………

El conteo de espejos puede representarse por un polinomio, $E(x) = 4x + 2$. Es un polinomio de grado 1, de término lineal $4x$ e independiente 2 .

Si en el laberinto hay 41 obras, entonces el número de espejos se logra resolviendo:

$E(x) = 4x + 2$	Expresión generalizada: x representa el número de obras y $E(x)$ representa el número de espejos. x y $E(x)$ son variables, x es variable independiente y $E(x)$ es variable dependiente. La relación entre las variables está representada por un polinomio.
$E(x) = 4.41 + 2$	Expresión particularizada: Se reemplaza x por un valor determinado.
$E(x) = 166$	Se obtiene el número de espejos correspondiente a 41 obras.

La relación entre el número de espejos y el número de obras cumple las siguientes condiciones:

- ✓ A medida que varía el número de obras también cambia el número de espejos.
- ✓ A cada número de obras le corresponde un único número de espejos.

Veamos ahora qué significan estas dos condiciones que acabamos de enunciar.

2.02 Funciones

La relación entre el conjunto de obras y el de espejos se denomina función.

Definición de función. Variables independiente y dependiente. Dominio y Codominio. Conjunto Imagen.

Definición de función: Dados dos conjuntos no vacíos A y B se llama función de A en B a una relación o correspondencia que establece que a cada elemento de A le hace corresponder un único elemento de B.

Simbólicamente $\boldsymbol{f: A \to B, y = f(x)}$

Sabemos que:

- El objetivo es transmitir lo convenido en la comunidad matemática sobre el concepto de función.
- Las definiciones necesitan ser interpretadas.
- Las definiciones deben ser ejemplificadas.

En el cuadro hacemos una posible elaboración bajo esta pregunta ¿Qué elementos incluye la definición? ¿Cómo los relaciona?

Elementos de la definición	Condiciones (Significado)	Ejemplo
Dados dos conjuntos no vacíos A y B	-Es indispensable la existencia de dos conjuntos que tengan por lo menos un elemento.	Dados $A = \{1,2,4,5\}$ $B = \{1,2,4,8,10,15,\}$ ***Importante: En este caso los conjuntos son finitos.*** *Son un subconjunto de N (naturales).*
Dados dos conjuntos no vacíos A y B se llama función de A en B	-Al indicar que existe una función es imprescindible presentar los conjuntos sobre los que se va a establecer la relación o correspondencia.	Dados $A = \{1,2,4,5\}$ $B = \{1,2,4,8,10,15,\}$ es una función de *A* en *B.*
Dados dos conjuntos no vacíos A y B se llama función de A en B a ***una relación que establece que……***	-Los elementos de los conjuntos *A* y *B* se relacionan, pero no de cualquier manera -La frase en negrita nos avisa que a posteriori se van a establecer las condiciones -.	La relación es *"A cada elemento de A le corresponde su doble en B"* Veremos las condiciones.
a cada elemento de A le hace corresponder un único elemento de B.	**Condición 1** (C_1) Cada elemento de A tiene un correspondiente en B (todos los elementos de A se relacionan con elementos de B).	**Condición 1** (C_1) Los elementos $1,2,4,5$ tienen doble en *B* **Condición 2** (C_2) El doble de 1 es 2

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Se denomina condición de existencia
Condición 2 (C_2)
Cada elemento de A tiene un único correspondiente en B
Se denomina condición de unicidad.</td>
<td>El doble de 2 es 4
El doble de 4 es 8
El doble de 5 es 10

El doble de cada elemento es único.</td>
</tr>
<tr>
<td>$f: A \to B$</td>
<td>$\to$ este símbolo es un acuerdo en la comunidad matemática e indica en el contexto de definir una función “le corresponde”.
Ese mismo símbolo puede tener otro significado en otro contexto[3].</td>
<td>$1 \to 2$
$2 \to 4$
$4 \to 8$
$5 \to 10$
Es importante aclarar que esa correspondencia puede expresarse en una tabla de valores.
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Conjunto no vacío A</td>
<td>Dominio de la función:</td>
<td>$A = \{1,2,4,5\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Conjunto no vacío B</td>
<td>Codominio de la función</td>
<td>$B = \{1,2,4,8,10,15\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Conjunto no vacío B´ incluido en B</td>
<td>Conjunto Imagen de la función: Es el conjunto formado por los elementos del Codominio que son correspondientes de los elementos del dominio.</td>
<td>$B´ = \{2,4,8,10\}$
Los elementos $1 \; y \; 15$
No pertenecen al conjunto imagen pues no son el doble de ningún elemento de A.</td>
</tr>
<tr>
<td>Los elementos de A y de B se denominan variables</td>
<td>Variable: Se trata de un conjunto de valores de una magnitud. Una función tiene dos magnitudes variables.
Habitualmente se simbolizan con letras $x \; e, y$</td>
<td>Los valores de A los representamos con x.
Los valores de B los representamos con y</td>
</tr>
<tr>
<td>Las variables en una función se clasifican en: independiente y dependiente</td>
<td>Variable independiente: conjunto de valores del Dominio. (x).
Variable dependiente: se denomina así pues su valor se logra al aplicar a cada valor del dominio la relación o correspondencia que indica la función. El conjunto de valores (y)está incluido en el Codominio. $y = f(x)$</td>
<td>Variable independiente x, son los valores del conjunto A
x varía tal que puede tomar los valores: 1, 2, 4, 5.
Variable dependiente y
y depende de x.
$y = f(1)$, $y = f(2)$, .
$y = f(4)$, . $y = f(5)$</td>
</tr>
</table>

[3] Por ejemplo, puede entenderse como entonces. Si 8 es par $\to$ 8 es múltiplo de 2 significa si 8 es par entonces 8 es múltiplo de 2.

Veamos la relación en el Laberinto:

<table>
<tr><th>Elementos de la definición</th><th>Ejemplo del Laberinto</th></tr>
<tr><td>Dados dos conjuntos no vacíos A y B</td><td>Dados A : número de obras que forman una configuración[4] (subconjunto de números naturales), varían de 1 a 41.
B: número de espejos (es un subconjunto de números naturales), varían desde 6 a 166.
Importante: En este caso los conjuntos son finitos. Y también son subconjuntos de los números naturales, en símbolos N.</td></tr>
<tr><td>Relación de A en B</td><td>A cada obra la rodean 6 espejos.</td></tr>
<tr><td>A cada elemento de A le hace corresponder un único elemento de B.</td><td>Condición 1 (C_1)
Según la configuración por cada número de obras le corresponden un número de espejos.
Condición 2 (C_2)
1 obra le corresponden 6 espejos.
2 obras le corresponden 10 espejos.
……….
41 obras le corresponden 166 espejos.</td></tr>
<tr><td>$f: A \to B$</td><td>$1 \to 6$
$2 \to 10$
$4 \to 16$
$41 \to 166$
También puede representarse en una tabla de valores
<table><tr><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>4</td><td>16</td></tr><tr><td>…</td><td>…</td></tr><tr><td>41</td><td>166</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>En este caso la correspondencia se puede hacer con una fórmula.</td><td>$f: A \to B, f(x) = 4x + 2$</td></tr>
</table>

<u>ACTIVIDAD 9.</u> QUINTA AUTOEVALUACIÓN

I) Las funciones definidas de $A\ en\ B$ $f: A \to B$, si $A = \{2,3,5,10,15\}$ $B = \{1,2,4,5,6,7,9,10,11,14,15,21,31\}$, representadas en a y b pueden ser expresadas, respectivamente, por una fórmula. Te pedimos, si es posible, que escribas la fórmula para cada caso.

[4] Denominamos configuración al grupo completo formado por obras y espejos. Por ejemplo, es una configuración el grupo de 2 obras con 10 espejos.

a)

A	*B*
2	5
5	11
10	21
3	7
15	31

b) $2 \to 1\,, 3 \to 2,\ 10 \to 9, 5 \to 4,\ 15 \to 14$

II) Pensar una fórmula.

Las funciones definidas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representadas en a y b pueden ser expresadas, respectivamente, por una fórmula. Te pedimos, si es posible, que escribas la fórmula para cada caso.

Aclaración importante: En este caso, en que los conjuntos son infinitos, las representaciones por tablas o correspondencias con el símbolo →, son un recorte finito. Es decir, no puede escribirse una tabla "de infinitas filas", se utiliza un subconjunto finito de valores y se sostiene que el resto cumple la misma correspondencia.

a)

A	*B*
-2	2
5	-5
-13	13
3	-3
-18	18
0	0

b) $2 \to 4\,, 23 \to 46, 0 \to 0, -10 \to -20,\ 0{,}5 \to 1\,, -\frac{1}{4} \to -\frac{1}{2}$

III) Problema (sigue la ruta de trabajo).

Tarifas de taxis en CABA

Si la bajada de bandera es de $\$\,67,50$ y cada ficha diurna de $\$$ 7,25 te pedimos que busques una forma de cálculo para distintos viajes.

Una vez que hayas bosquejado tus ideas aborda lo que sigue:

a) Identifica los conjuntos A y B en esta relación.
b) ¿La relación entre A y B cumple las condiciones para ser una función? Expresa tus argumentos.
c) ¿Es posible hallar una fórmula en este caso? Si la respuesta es afirmativa escribe la expresión completa, en la estructura $f\colon A \to B, f(x) = y$

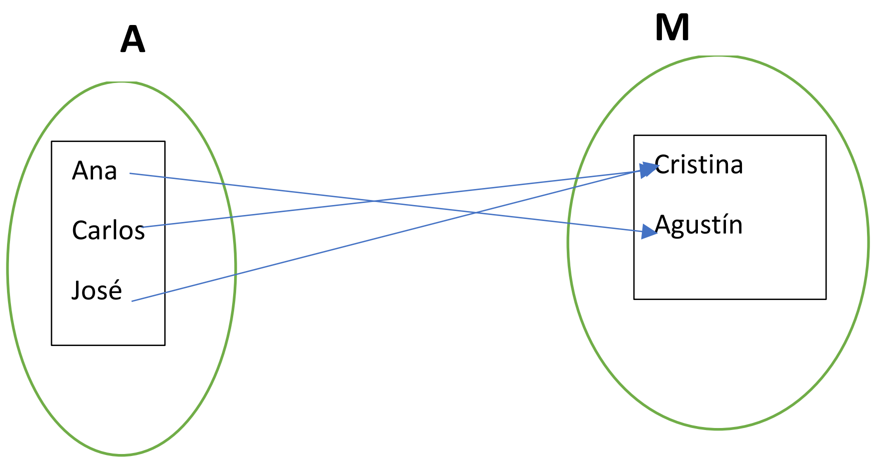
Un poco de explicaciones para analizar las características del Dominio y del Codominio y las representaciones de las funciones.

Las funciones pueden trabajarse con distintos tipos de conjuntos y representaciones.

1) Si la relación está dada por una expresión coloquial: *"…tiene por maestro a…"* y se establecen las siguientes condiciones: el conjunto A está formado por los alumnos de un curso de primaria y el conjunto B por el conjunto de maestros. Los niños son de primer año y tienen sólo un maestro o maestra.

Análisis: El dominio y el codominio están formados por personas y es un conjunto finito. Una representación puede ser utilizando diagramas de Venn. La relación es función pues a cada alumno le corresponde una y sólo una maestra.

Para ejemplificar utilizamos conjuntos de pocos elementos[5] $A = \{Ana,\ \ Carlos, josé\}$ $M = \{\ Cristina, Agustín\}$

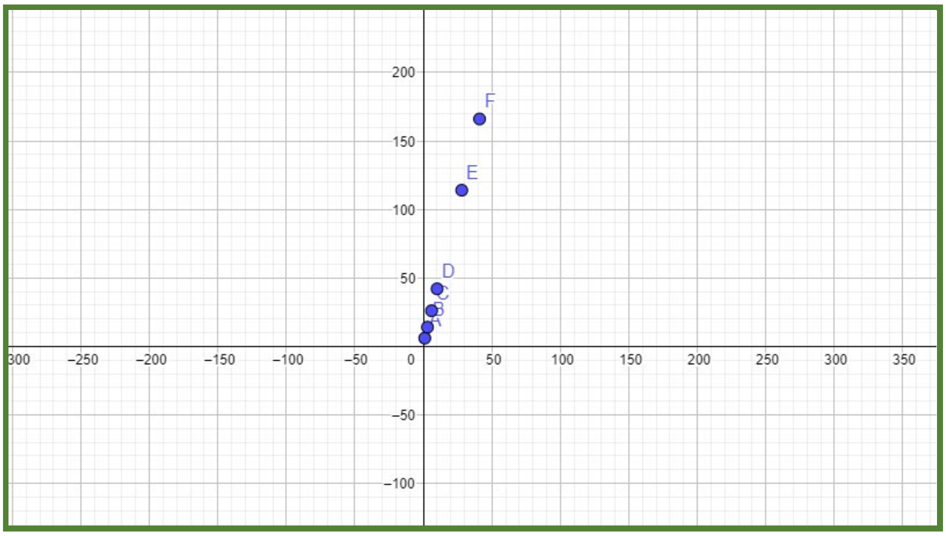


2) Si la relación está dada por una fórmula que permite evaluar $f: A \rightarrow B, f(x) = y$, se puede desarrollar dentro de un caso particular.

   Aclaración importante: Fórmula para evaluar significa que se reemplaza $\boldsymbol{x}$ en la fórmula por un valor del dominio y se obtiene $\boldsymbol{y}$ un valor del Codominio.
   Ejemplo:

   En el estudio del laberinto llegamos a esta fórmula $f: A \rightarrow B, f(x) = 4x + 2$. En ella evaluamos únicamente los números naturales desde 1 a 41 pues representan la cantidad de obras de Escher (Dominio) y obtenemos desde 6 a 166 (valores no consecutivos). Observemos su representación gráfica:

[5] En matemática es una buena estrategia trabajar con pocos elementos para comprender la idea o el concepto.



En el plano cartesiano se ven puntos aislados, veamos cómo se generan. Se trata de una tabla de valores, seguramente la has usado muchas veces.
En esta tabla, a modo de muestra, trabajamos con algunos valores para recordar el proceso.

Variable independiente. Valores del dominio	Variable dependiente. Valores del codominio	Fórmula para evaluar	Par ordenado
x	$y = f(x)$	$f(x) = 4x + 2$	(x, y)
1	6	$f(x) = 4.1 + 2$	$(1,6)$
13	54	$f(x) = 4.13 + 2$	$(1,54)$
41	166	$f(x) = 4.41 + 2$	$(41,166)$

Es importante que sepas que no puede hacerse el trazo de una recta, aunque los puntos en este caso están alineados.

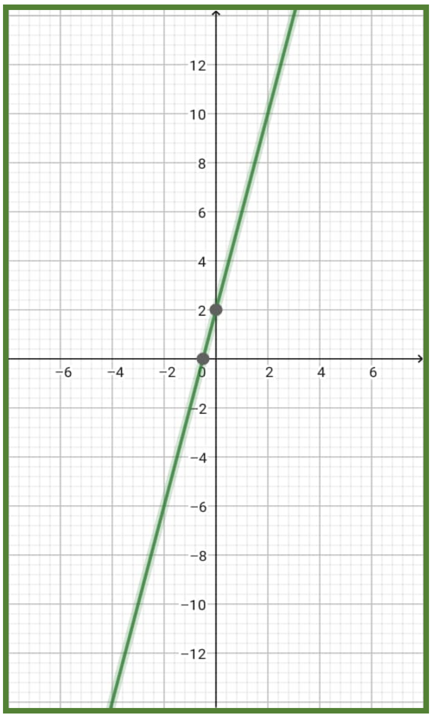
Al estilo Paenza[6] te pedimos que pienses los motivos de la afirmación anterior.? (A)

Continuemos y luego analizaremos.

3) Si la relación está dada por una fórmula que permite evaluar $f: A \to B, f(x) = y$, se puede desarrollar como formato general. En el recorrido de la Matemática a nivel superior se trabaja con funciones reales, significa que el dominio y el Codominio es el conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Se expresa así $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = y$

[6] Adrián Paenza es un matemático argentino, importante divulgador de esa ciencia. Los libros de mayor difusión para todo público es una zaga: "Matemática…¿Estás ahí?" (episodio 1, 2 y 3).

Ejemplo: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x + 2$ (observa que es la fórmula que trabajamos en el laberinto, pero ahora con otro dominio y codominio).

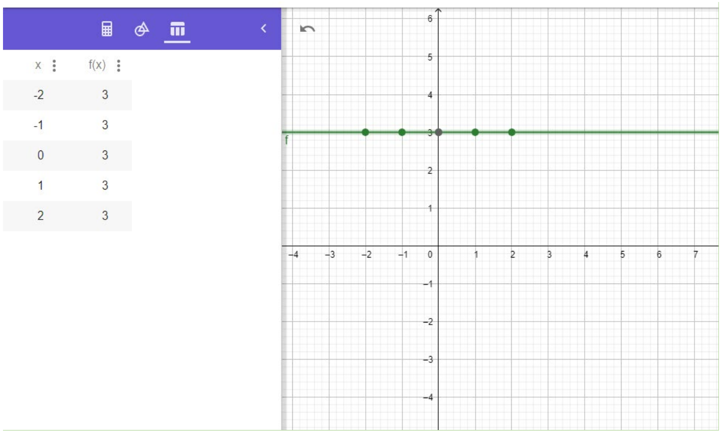


Para que pienses… (B) ¿Por qué quedó trazada la recta?

Compara las funciones expresadas así: $\boldsymbol{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x + 2}$
$\boldsymbol{f\colon A \to B, f(x) = 4x + 2}$.

4) Si la relación está dada por una expresión numérica, no es una fórmula para evaluar $f\colon A \to B, f(x) = K$ (En matemática suele usarse una letra por ejemplo K para representar un número constante).

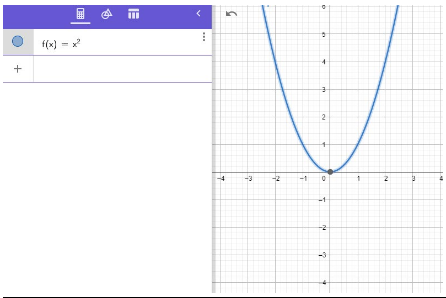
Ejemplo: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3$



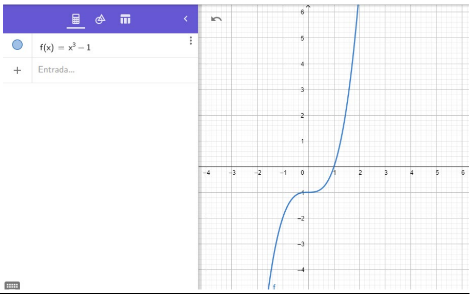
Nuevamente te pedimos que pienses… ¿? (C) ¿Por qué se dice que la fórmula no es para evaluar?

5) Es muy importante que sepas que existen distintos tipos de funciones, que algunas conoces y otras no. Serán estudiadas en las materias de tu carrera.
Ejemplos: (de algunas de ellas).

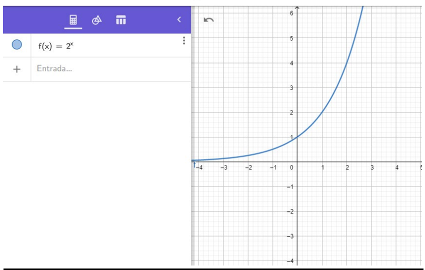
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$



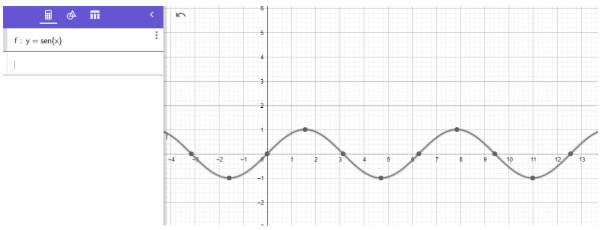
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$



Respondamos las preguntas que tenemos pendientes ¿? Compáralas con tus respuestas.

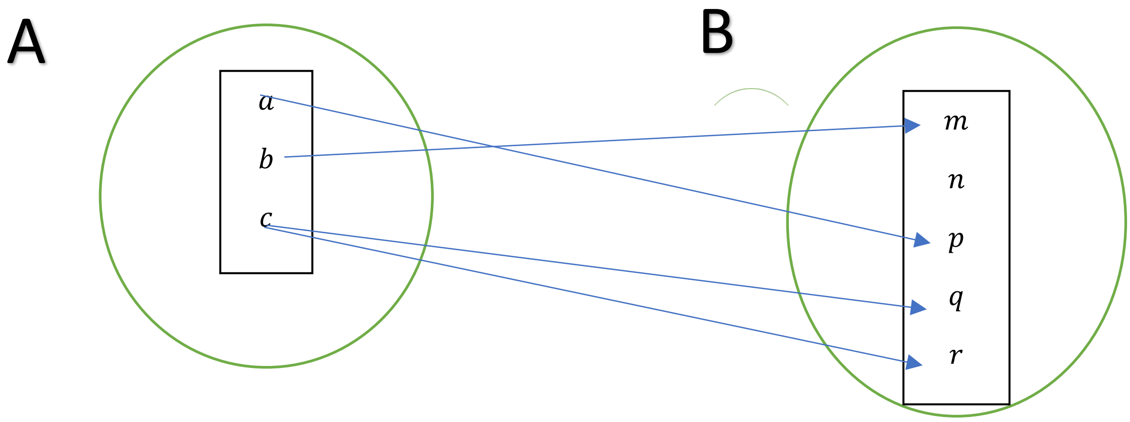
(A) No puede realizarse el trazo de la recta pues si la hiciera significaría que incluimos, por ejemplo, el par $(3,1; 14,4)$ no tiene sentido en el contexto del laberinto, pues estaríamos suponiendo que existen 3,1 obras y en consecuencia $14,4$ espejos. El valor $3,1$ no pertenece al dominio. O bien, $(-2,-6)$ tampoco tiene sentido hablar de un número de obras negativo. El valor -2 no pertenece al dominio.

(B) En este caso, la respuesta se construye como opuesta a (A) pues el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$. Como ejemplo, los pares $(3,1; 14,4)$ y $(-2,-6)$ tienen sentido pues $3,1$ y -2 pertenecen al dominio de la función. La comparación justamente radica en que las funciones coinciden en la fórmula y son distintas en el Dominio y Codominio. En el primer caso el dominio es un subconjunto de los números naturales y en el segundo el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$.

(C) La fórmula no es para evaluar pues la variable x no es parte de ella, para cualquier valor de x su correspondiente es un valor constante, en este caso 3.

<u>ACTIVIDAD 10.</u> SEXTA AUTOEVALUACIÓN

I) Le presentamos a un grupo de alumnos y alumnas algunas relaciones con distintas formas de representación para que decidan si puede asegurarse que se trata de una función:



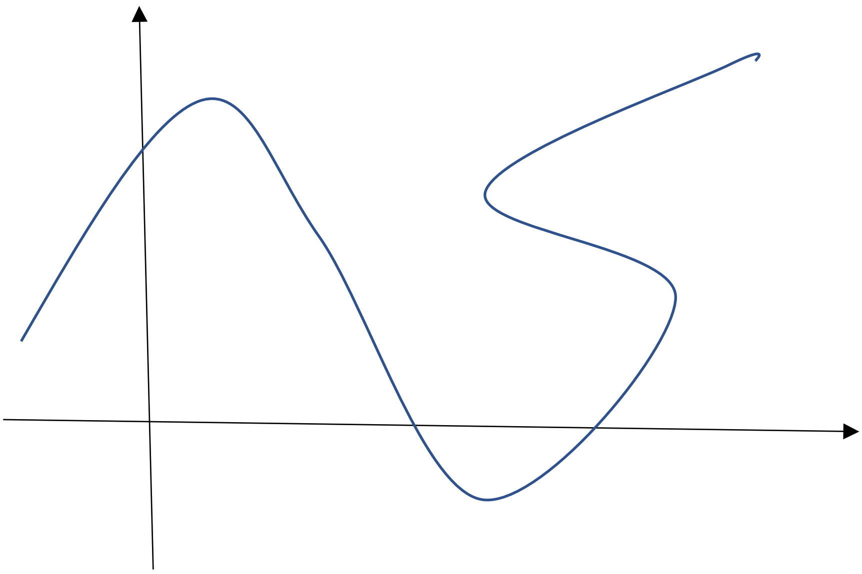
Indica V o F para las respuestas de los alumnos:

a) Antonio asegura que es una función porque los elementos del conjunto A, $a, b, y\ c$ tienen correspondencia en B.

b) Julián asegura que no es una función pues al elemento c le corresponde q pero también r.

c) Sofía sostiene que no es una función pues n no es correspondiente de ningún elemento de A.

II) En el siguiente gráfico cartesiano se ha representado una relación:



Considera que en el eje horizontal está representada la variable independiente x (Dominio), en el eje vertical la variable dependiente y (codominio).

Marca las proposiciones correctas respecto de la situación presentada:

a) La relación es una función pues a cada elemento del dominio le corresponde al menos un elemento del codominio.

b) La relación es una función pues a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del codominio.

c) La relación no es función pues existen elementos del dominio a los que les corresponden dos elementos del codominio.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es una proposición verdadera.

III) Una fábrica produce un tipo de soporte de acrílico para unas estanterías utilizadas en ferreterías, el armado requiere 3 soportes por estantería. En la entrega de los pedidos se mandan siempre dos adicionales por cualquier eventualidad. Los empleados administrativos disponen una fórmula matemática para hacer el control Elige la o las opciones correctas respecto de la construcción de la fórmula:

a) $S = 5E$ siendo S el número de soportes a entregar y E la cantidad de estanterías a armar.

b) $S = 3E + 2$

c) $S = 3(E + 2)$

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

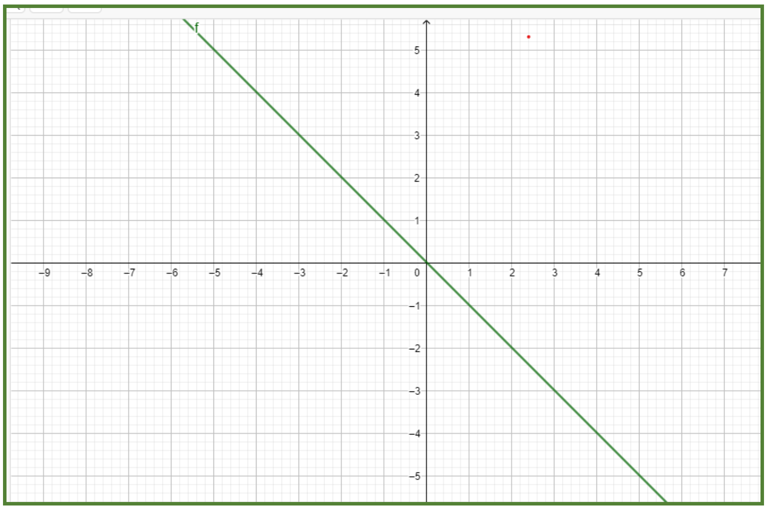
IV) Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x$ indica si las siguientes representaciones corresponden a la función dada:

a)

x	$y = f(x)$
1	-1
-13	13
5	-5
0	0

b) A todo valor del dominio le corresponde su opuesto.

c)



d) Todas las representaciones anteriores son válidas.

V) Si $(-1;2), (3{,}05;2), (0;2), (-25;2), \left(\frac{1}{2};2\right)$ son algunos de los pares ordenados de una función y nos aseguran que los infinitos pares siguen la misma tendencia elige entre las siguientes la única proposición correcta.

a) La función tiene una fórmula para evaluar.

b) La función tiene una fórmula, pero no se evalúa a los elementos del dominio.

c) La relación que determinan esos pares no corresponde a una función.

VI) El tren a Bahía Blanca hace su recorrido hasta las Flores (Distancia aproximada 200 km) con una determinada velocidad, luego aumenta su velocidad hasta Pigüé (Distancia aproximada 400 km) y desde allí hasta Bahía Blanca (Distancia aproximada 150 km) retoma la velocidad del primer tramo. Construye un gráfico cartesiano para representar la situación.

2.03 Factorización de polinomios

En general solemos preguntarnos para qué, por qué estudiamos algunos contenidos. Las respuestas suelen ser variadas y cada profesor aproxima una idea con la buena intención de convencer a los alumnos. Existen explicaciones que se justifican en las necesidades de la vida como ciudadano, en la formación para el futuro, y otras.
Para vos que estás ingresando a una carrera universitaria, las justificaciones nombradas están en plena acción, la mayoría de edad, la carrera elegida.
Eduardo Sáenz de Cabezón es un destacado matemático español e importante divulgador de esta ciencia. Les compartimos su idea sobre el tema:

Aprender matemáticas nos convierte en "ciudadanos más libres, más difíciles de manipular... Sirve para comprender el mundo en el que estamos, pero también para comprendernos a nosotros mismos"[7].
Sin embargo, al interior de la carrera los contenidos se conectan de modo que respondan a capacidades y competencias para tu profesión.
Aquí abordaremos la justificación de la **factorización de polinomios** *al interior de la matemática y con proyección a sus aplicaciones.*

FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS:
Los números enteros se clasifican en ***primos y compuestos*** excepto el "-1", "0" y "1". Un número entero es primo si admite sólo cuatro divisores y un número es compuesto si admite más de cuatro divisores.
Ejemplos:
3 es número primo pues sus divisores son $-3, -1, 1, 3$
8 es un número compuesto pues sus divisores son $-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$
-1 no es ni primo ni compuesto sus divisores son $-1, 1$.
1 no es ni primo ni compuesto sus divisores son $-1, 1$.
0 tiene infinitos divisores, "0 divido por cualquier valor es 0"

Conocer los factores de un número permite expresarlo como el producto de factores primos.
Los números compuestos pueden factorizarse. Los números primos tienen una factorización trivial.
El número cero no es factorizable.
Ejemplos:

$24 = 2.2.2.3$ lo que significa $24 = 2^3.3$
$250 = 2.5.5.5$ lo que significa $250 = 2.5^3$
$5 = 5.1$ no es una factorización que aporte para estudios numéricos.

[7] En este enlace podés acercarte a sus ideas *https://youtu.be/Cwq4dRBWcr8*

Vamos a pensar por analogía[8] con la factorización de enteros, a la factorización de polinomios.
Los polinomios, al igual que los números enteros, se clasifican en primos y compuestos, lo que nos permite asegurar que los polinomios compuestos pueden ser expresados por factores.

Comencemos por un polinomio que surge de una multiplicación

$3x.(x-2) = 3x^2 - 6x$ recordemos que para resolver aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o la resta.

Esta operación deja en claro que la expresión de la izquierda $3x.(x-2)$ es igual a la de la derecha $3x^2 - 6x$. Luego, podemos asegurar que $3x^2 - 6x$ es un polinomio compuesto porque es resultado de la multiplicación de dos factores:

$3x$; $x - 2$.

Si expresamos la igualdad de esta forma $3x^2 - 6x = 3x.(x-2)$ estamos en presencia de una factorización que se denomina ***factor común.***

Al *primer caso de factoreo se lo suele llamar factor común*

En el apartado “Propiedad Distributiva-Factor Común” en esta página te presentamos una explicación más amplia sobre estos conceptos.

<u>ACTIVIDAD 11.</u> POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

Completa el cuadro:

Polinomio Compuesto	Factor Común	Factorización
$-5x^2+25x^3-10x$	$5x$	$5x(-x+5x^2-2x)$
x^5+7x^3		
		$\frac{1}{2}(3x^2-7)$

Nos proponemos ahora analizar la interpretación geométrica de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta – Factor común. Esperamos tu participación antes de seguir leyendo.

Propiedad Distributiva-Factor Común

Es importante que analicemos la presencia del signo igual en las expresiones del álgebra.

Los cálculos de la aritmética nos hacen pensar que el primer miembro tendrá como resultado el segundo miembro. Por ejemplo $3(4-2) = 6$.

El signo igual indica que el primer miembro es equivalente al segundo y viceversa.

En álgebra el concepto de equivalencia se identifica con claridad. Consideremos el ejemplo del texto.

$$3x.(x-2) = 3x^2 - 6x$$

La equivalencia del primer miembro al segundo se justifica por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o la resta.

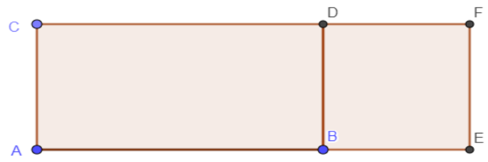
La equivalencia del segundo miembro al primero se justifica por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o la resta.

$$3x^2 - 6x = 3x.(x-2)$$

Este proceso queda nombrado como ***factor común.***

[8] Analogía se define en el diccionario como comparación. En matemática es un recurso muy usado tanto para estudiar conceptos como para resolver problemas buscando similitudes para trabajar.

Resuelve la siguiente actividad:
Halla el área de la siguiente figura, propone dos formas diferentes para el cálculo. Los valores adjudicados a los lados son determinados e indeterminados: longitud $AC = 2$ longitud $AB = x$



Cálculo de áreas 1

Si ya hiciste algún intento, sigue leyendo...

Seguramente por la figura decidiste suponer que $AC = BD = EF = BE = DF = 2$ y $AB = CD = x$

- ✓ Una forma es calcular las áreas por separado y luego sumarlas: $A_{ACDB} = 2.x$ y $A_{BDFE} = 2.2$, luego como $A_{ACFE} = A_{ACDB} + A_{BDFE}$, resulta

$$\boldsymbol{A_{ACFE} = 2.x + 4}$$

- ✓ Otra forma es calcular una única área:

$$\boldsymbol{A_{ACFE} = 2.(x + 2)}$$

Conclusión:

$$\boldsymbol{2.x + 4 = 2.(x + 2)} \textbf{ Factor Común}$$

Otra factorización con nombre propio:

Consideremos nuevamente una multiplicación: $(x + 3)(x + 3)$

$(x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

-En el primer paso aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

-En el segundo paso asociamos los términos semejantes (en este caso dos términos son de primer grado, se pueden asociar).

Luego $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$ o bien $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Si retomamos el concepto de equivalencia en las expresiones algebraicas, establecemos:

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ la primera expresión queda factorizada en la segunda, pues la potenciación indica el producto del binomio por sí mismo.

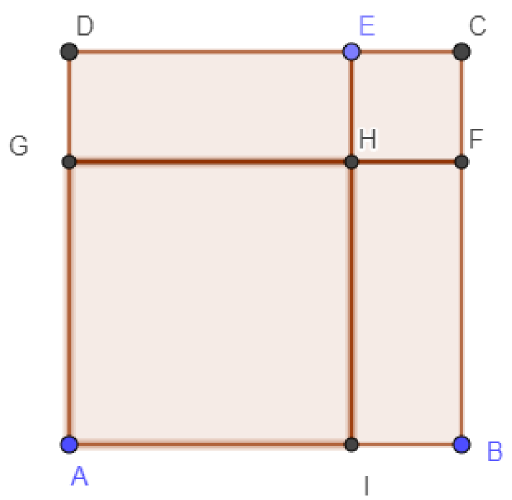
Esta factorización se denomina:

Trinomio cuadrado perfecto.

$$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

Trinomio cuadrado perfecto *(Tercer caso de factoreo) Se lo encuentra con esta denominación en la bibliografía con distintos soportes o en las búsquedas menos formales en la web.*

Realicemos la interpretación geométrica del cuadrado de un binomio. Esperamos tu participación antes de seguir leyendo.
Resuelve la siguiente actividad:
Halla el área de la siguiente figura, propone dos formas diferentes para el cálculo. Los valores adjudicados a los lados son determinados e indeterminados: longitud $AG = x$ longitud $GD = 2$, $AGHI$ cuadrado, $HECF$ cuadrado.



Trinomio Cuadrado Perfecto 1

Cuadrado de un binomio-Trinomio cuadrado perfecto

Destaquemos que el producto de una expresión por sí misma resulta la expresión elevada al cuadrado. Por ejemplo: $x.x = x^2$.

En el ejemplo del texto figura el producto de un binomio por sí mismo:

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

En general suele expresarse así:

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

Y se denomina:

Cuadrado de un binomio

Su desarrollo es el siguiente:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El segundo miembro es una expresión algebraica denominada:

Trinomio cuadrado perfecto

Consideremos el ejemplo del texto.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2.x.3 + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6.x + 9$$

En general, resulta:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Si ya hiciste algún intento, seguí leyendo…

- ✓ Una forma es calcular las áreas por separado y luego sumarlas:

  $A_{AGHI} = x^2$ y $A_{GDEH} = 2.x$, $A_{HECF} = 4$ y $A_{IHFB} = 2.x$ luego como $A_{ADCB} = A_{AGHI} + A_{GDEH} + A_{HECF} + A_{IHFB}$,

  resulta que:

$$A_{ADCB} = x^2 + 2x + 4 + 2x$$

$$\boldsymbol{A_{ADCB} = x^2 + 4x + 4}$$

- ✓ Otra forma es calcular una única área:

$$\boldsymbol{A_{ADCB} = (x + 2)^2}$$

Conclusión:

$$\boldsymbol{x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2}$$

En el cuadro te presentamos ejemplos de esta factorización y su proceso:

Trinomio	Términos cuadráticos	Término que verifica la existencia del TCP	Factorización
$a^2 + 2.a.b + b^2$	$(\boldsymbol{a})^2 = a^2$ $(\boldsymbol{b})^2 = b^2$	$2.\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$	$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$
$x^2 + 6x + 9$	$(\boldsymbol{x})^2 = x^2$ $(\boldsymbol{3})^2 = 9$	$2.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{3} = 6x$	$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{3})^2$
$x^6 + 9 + 6x^3$	$(\boldsymbol{x^3})^2 = x^6$ $(\boldsymbol{3})^2 = 9$	$2.\boldsymbol{x^3}.\boldsymbol{3} = 6\boldsymbol{x^3}$	$(\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{3})^2$
$\frac{1}{4} + x^4 - x^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y $(\boldsymbol{x^2})^2 = x^4$	$2.\boldsymbol{\frac{1}{2}}.\boldsymbol{x^2} = x^2$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{x^2}\right)^2$

<u>ACTIVIDAD 12.</u> POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Factoriza, cuando sea posible:

a) $16x^2 + \frac{25}{4} - 20x$

b) $-80x^5 + 16x^6 + 100x^4$

Queremos aclararte que las formas de factorización de polinomios se realizan de acuerdo a los recursos teóricos que tienes. Por ejemplo: Si el polinomio es

$5x^3 + 30x^2 + 45x = 5x(x^2 + 6x + 9) = 5x(x+3)^2$

Factor Común   Trinomio Cuadrado Perfecto

Aplicamos dos formas de factorización y de ese modo transformamos el polinomio dado en el producto de polinomios primos.

Otra factorización con nombre propio:

Consideremos nuevamente una multiplicación: $(x+3)(x-3)$

$(x+3)(x-3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$

Obtenemos: $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$ y como se trata de una equivalencia es válido: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

En general te lo presentamos en el apartado teórico.

Esta factorización se denomina **diferencia de cuadrados**

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Diferencia de cuadrados *(Quinto caso de factoreo) Se lo encuentra con esta denominación en la bibliografía con distintos soportes o en las búsquedas menos formales en la web.*

Te pedimos que lo apliques en los siguientes polinomios:

<u>ACTIVIDAD 13.</u> POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) *Factoriza los siguientes polinomios:*

a) $4x^2 - 16x^4$

b) $-0{,}36x^6 + 25x^2$

c) $0{,}01x^8 - 9$

d) $-x^4 + \frac{9}{4}x^2$

II) Intenta, si es posible, expresar como producto de factores primos los siguientes polinomios.

Recuerda que puedes aplicar varias formas de factorización.

Producto de suma por diferencia

$(a+b)(a-b)$

Para resolver aplicamos propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

$a^2 - ab + ba - b^2$

Términos opuestos

Obtenemos $a^2 - b^2$

Diferencia de cuadrados

$(a+b)(a-b) =$

$= a^2 - b^2$

La equivalencia entre las expresiones algebraicas asegura que:

$a^2 - b^2 =$

$= (a+b)(a-b)$

a) $2x^5 - 8x^3$

b) $\frac{5}{4}x^4 + 500x^2 - 50x^3$

c) $0{,}01x^{10} - 9x^2$

d) $x^4 - 18x^2 + 81$

Seguramente a esta altura te estarás preguntando: Si existe el primer caso: ***Factor común,*** el tercer caso: ***Trinomio cuadrado perfecto,*** y el quinto caso: ***Diferencia de cuadrados,*** ¿entonces cuál es el segundo?, ¿el cuarto?, ¿hay otros casos?
La respuesta es sí, los polinomios compuestos se pueden expresar como el producto de factores primos.

Te mostramos aquí el **cuatrinomio cubo perfecto**, nombrado como cuarto caso. Analicemos el siguiente producto:

$(x+3)(x+3)(x+3) = (x+3)^3$(1)

$(x+3)(x+3) = (x+3)^2$ y $(x+3)^2 = x^2 + 6.x + 9$ (2)

Reemplazamos (2) en (1) $(x^2 + 6.x + 9\ )(x+3) = (x+3)^3$

Aplicamos propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y obtenemos:

$(x+3)^3 = x^3 + 3.x^2 + 6x^2 + 18x + 9x + 27$
Al asociar términos semejantes

$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

Por la equivalencia que plantea el signo "=" aseguramos que $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x+3)^3$ el cuatrinomio de la izquierda ha sido factorizado pues $(x+3)^3$ es como se destaca en (1) el producto de tres binomios iguales.

Te presentamos ejemplos de esta factorización y su proceso

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$x \qquad\qquad\qquad\qquad 2$$

Verificamos que se trata de un CCP
$3a^2b$ si $a = x$, b=2 entonces $3x^2.2 = 6x^2$ se verifica
$3ab^2$ si $a = x$, b=2 entonces $3x.2^2 = 12x$ se verifica
Luego puede escribirse factorizado como:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$$

Cubo de un Binomio-Cuatrinomio Cubo Perfecto

Destaquemos que el producto de una expresión por si misma repetida tres veces resulta la expresión elevada al cubo. Por ejemplo: $x.x.x = x^3$.

En el ejemplo del texto figura el producto de un binomio por sí mismo:

$(x+3)(x+3)(x+3) = (x+3)^3$

En general suele expresarse así:
$(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^3$

Y se denomina:

Cubo de un binomio.

Su desarrollo es el siguiente:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

El segundo miembro es una expresión algebraica denominada:

Cuatrinomio cubo perfecto (CCP)

Consideremos que el signo = es una equivalencia y expresamos en general:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

<u>ACTIVIDAD 14.</u> POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Investiga si cada uno de los siguientes polinomios pueden clasificarse como cuatrinomio cubo perfecto, si es así aplica la factorización:

a) $x^3 - 64 - 8x^2 + 32x$

b) $125 - x^3 - 75x + 25x^2$

c) $x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 27x^3$

En el proceso de estudio de las materias de Matemática de la carrera es necesario muchas veces factorizar la expresión algebraica de una función pues el formato factorizado permite aproximarnos mejor a su estudio.

Por ejemplo:

Si se trata de una función cuyo polinomio es de grado 2 probablemente sea posible su factorización. $f: R \to R, f(x) = -6x^2 - 12x + 18$. El polinomio $-6x^2 - 12x + 18$, puede ser expresado en formato factorizado pues sabemos que:

Factorización del polinomio de grado dos

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}}$$

Luego hallamos los ceros o raíces de la ecuación $-6x^2 - 12x + 18$, aplicamos $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ los valores son $x_1 = -3$, $x_1 = 1$ así obtenemos la factorización del polinomio:

$$-6x^2 - 12x + 18 = -6\big(x - (-3)\big)(x - 1)$$

$$\boxed{\boldsymbol{-6x^2 - 12x + 18 = -6(x + 3)(x - 1)}}$$

Es importante concluir aquí que $-6x^2 - 12x + 18$ es un polinomio compuesto y ha sido expresado con el producto de polinomios primos.

ACTIVIDAD 15. POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Factoriza, cuando sea posible, los siguientes polinomios de segundo grado:

a) $-2x^2 - 8x + \frac{9}{2}$

b) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

c) $x^2 + 16$

Avanzaremos con **otros recursos para factorizar polinomios**

❖ Un requisito importante para factorizar un polinomio es intentar buscar sus ***raíces.***

Polinomios de grado dos.

Estudiamos que un polinomio de grado 2 tiene la posibilidad de expresarse en formato factorizado.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Para ello es imprescindible hallar los valores de las raíces si existen en Reales.

Por ejemplo, analicemos el siguiente polinomio de grado 2:

$$x^2 + 3x + 4$$

Al aplicar la fórmula resolvente para hallar las raíces:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

La solución no es real, se trata de raíces complejas.

Por lo tanto, no es posible expresar el polinomio $x^2 + 3x + 4$ en formato factorizado en Reales.

En general, un valor a es raíz de un polinomio P(x) si P(a)=0. Equivale a calcular *P*(x)=0

Por ejemplo:

A. $\boldsymbol{x = 3}$ **es raíz** de $3x - 9$ porque al reemplazarlo en la expresión obtengo $3.\mathbf{3} - 9 = 0$. Luego si $P(x) = 3x - 9$ entonces $P(3) = 3.3 - 9 = 0$, es $P(3) = 0$

B. $\boldsymbol{x = -2}$, $\boldsymbol{x = 1}$ **son raíces** de $x^2 + x - 2$ porque al reemplazarlo en la expresión obtengo $(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$ y $(1)^2 + (1) - 2 = 0$. Luego si $P(x) = x^2 + x - 2$ entonces $P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2$, es $P(-2) = 0$. De igual forma $P(1) = 0$

- Luego es importante considerar el **Teorema del factor.**

Un número a es una raíz de un polinomio P si y sólo si x-a divide exactamente a P(x)

Analizamos el Teorema del factor para el polinomio $3x - 9$

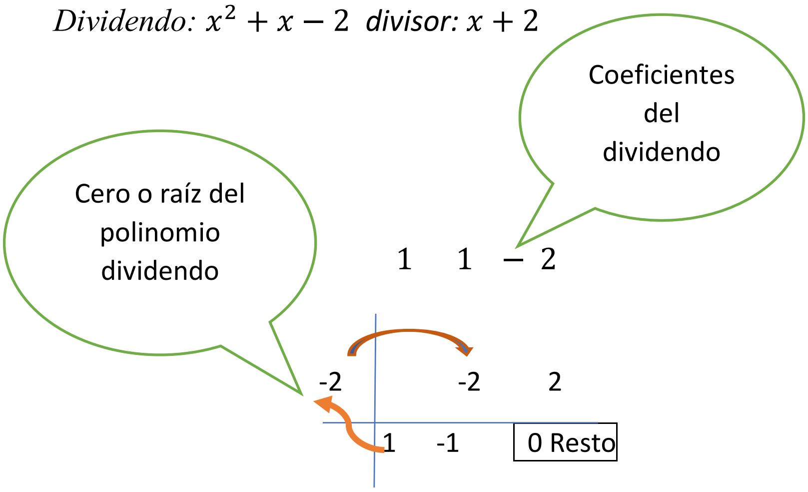
$x = 3$ es la raíz del polinomio $3x - 9$ si y sólo si $x - 3$ divide exactamente a $3x - 9$.

Resolvamos la división $(3x - 9): (x - 3)$

$$\begin{array}{r|l} 3x - 9 & x - 3 \\ \hline -3x + 9 & 3 \\ 0 & \end{array}$$

Analizamos para otro polinomio:
El Teorema del factor para el polinomio $x^2 + x - 2$
$x = -2$, $x = 1$ son raíces del polinomio $x^2 + x - 2$ sí y sólo si $x - (-2)$ ó $x - 1$ dividen exactamente a $x^2 + x - 2$. Resolvamos la división, por ejemplo $(x^2 + x - 2): (x + 2)$. El divisor es un binomio mónico, es decir, es un binomio de la forma *x-a, o bien reducible a ella, y es la condición para aplicar el procedimiento denominado Regla de Ruffini.*

Dividendo: $x^2 + x - 2$ *divisor:* $x + 2$



Cociente: $x - 1$

Regla de Ruffini

Se trata de un procedimiento que trabaja con los coeficientes de los polinomios.

Busca en distintos soportes una explicación sobre la Regla que te permita hacer un repaso.

Observemos que podríamos cambiar el divisor por $x - 1$, entonces el cociente es: $x + 2$

- Es un paso fundamental para la factorización establecer la siguiente propiedad:

La propiedad de la división: D=d.c+r. En el caso de la división exacta es D=d.c

Pensar un ejemplo numérico para comprender.

Ejemplo $9: 2$ el cociente es 4 y el resto 1.

$$\mathbf{9 = 2.4 + 1}$$

Si es $16: 2$ el cociente es 8 y el resto 0.

$$\mathbf{16 = 8.2}$$

Así resulta $\boxed{x^2 + x - 2 = (x - 1)(x - 2)}$ esta fue una forma de factorizar el polinomio y también puede hacerse con la forma factorizada de la expresión cuadrática, conviene releer el apartado "Polinomio de grado dos".

<u>ACTIVIDAD 16.</u> POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Factorizar, si es posible, aplicando ambos procedimientos:

$$-x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$

Si el polinomio a factorizar tiene grado mayor que 2 puede pensarse de la siguiente manera.

- Hallar, si existen, las ***raíces o ceros*** del polinomio.
- Aplicar el **teorema del factor.**
- Aplicar la **propiedad de la división**.

Vamos a trabajarlo con un ejemplo: $P(x) = -3x^3 + 12x^2 - 3x - 18$

- Hallar, si existen, las ***raíces o ceros*** de $P(x)$

Planteamos la ecuación $-3x^3 + 12x^2 - 3x - 18 = 0$ pero con las herramientas que conocemos no podemos resolverla.

Es necesario hacer la búsqueda de los ceros o raíces con otras estrategias. Utilizaremos el **Lema**[9] **de Gauss**, que es un tema abordado en la educación secundaria.

Sea una ecuación polinómica de grado n con coeficientes enteros. Si el número racional p/q escrito de manera irreducible, es solución de la ecuación entonces "p" es divisor del término independiente y "q" es divisor del coeficiente principal.

[9] ¿Qué es un Lema? Aceptaremos que es una proposición que fue demostrada y entonces está habilitado su uso por ser verdadera.

- Este Lema necesita ser interpretado.
- Este Lema necesita ser ejemplificado.

Elementos del Lema	Significado	Ejemplo
Ecuación polinómica. de grado n con coeficientes enteros	Se llama así pues uno de sus miembros es un polinomio. Su grado es el mayor exponente de x. Se refiere a que los coeficientes de cada término pueden ser únicamente números enteros. No puede tener un coeficiente fraccionario, ni irracional.	$-3x^3 + 12x^2 - 3x - 18 = 0$ Grado 3 Los coeficientes son: $-3,\ 12, -3, -18$
Si el número racional $\frac{p}{q}$ Escrito de manera irreducible es solución de la ecuación	Recordemos que los números racionales pueden ser expresados como fracciones o enteros (fracciones de denominador 1). Significa que la fracción ha sido simplificada o reducida. $\frac{p}{q}$ es solución de la ecuación si al reemplazar ese valor en x se encuentra la equivalencia entre los miembros.	los números racionales pueden ser $1, -1, 2, -2, \ldots \ldots \ldots$entre otros. Por ejemplo, si se expresara como $\frac{6}{3}$ (no es reducida) debe simplificarse y equivale a 2. Como $\frac{p}{q}$ en este caso es 2, lo reemplazamos en la ecuación $-3.2^3 + 12.2^2 - 3.2 - 18 = 0$ $-24 + 48 - 6 - 18 = 0$ *Se cumple la equivalencia* $0 = 0$
entonces "p" es divisor del término independiente y "q" es divisor del coeficiente principal.	Establece condiciones para saber cómo obtener p y q en el polinomio.	P divisor de -18 q divisor de -3

Actividad resuelta:

$$-3x^3 + 12x^2 - 3x - 18$$

Buscaremos un polinomio que lo divida en forma exacta. Para ello:

I. <u>Hallamos, si existen, raíces racionales aplicando el Lema de Gauss.</u>

Consideramos $\frac{p}{q}$ En este caso p es divisor de -18 y q es divisor de -3

Divisores enteros de p:

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$

Divisores enteros de q:

$\pm1, \pm3$

Los candidatos a ser raíces son todas las combinaciones de $\frac{p}{q}$

Comenzamos anotando algunas $\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1} \dots \frac{6}{3}, \frac{-6}{3}$, … ….

Luego de simplificar encontramos los siguientes **candidatos a raíces del polinomio:** $\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{3}, \pm\mathbf{6}, \pm\mathbf{9}, \pm\mathbf{18}, \pm\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

II. <u>Probamos para verificar si efectivamente por lo menos uno de los candidatos es raíz del polinomio.</u>

La prueba consiste en reemplazar los candidatos para encontrar uno que anule el polinomio. Por ejemplo, probamos con 2

$$-3.2^3 + 12.2^2 - 3.2 - 18 = 0$$

$$-24 + 48 - 6 - 18 = 0$$

¡El candidato es raíz! La indicamos simbólicamente $x_1 = 2$

III. <u>Construimos el divisor $x - a$</u> Luego x-a, tal que a es la raíz hallada, es el divisor exacto para el polinomio

IV. <u>Resolvemos la división</u>

V. $(-3x^3 + 12x^2 - 3x - 18):(x - 2)$ aplicamos la *Regla de Ruffini.*

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 12 & -3 & -18 \\ 2 & & -6 & 12 & 18 \\ \hline & -3 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

Cociente= $-3x^2 + 6x + 9$

VI. <u>Aplicamos la propiedad de la división</u>:

Por ser exacta: $D = d.c$ resulta

$$-3x^3 + 12x^2 - 3x - 18 = (x - 2).(-3x^2 + 6x + 9)$$

El polinomio se ha transformado en el producto de dos polinomios.

VII. Avanzamos en la búsqueda de raíces.
Para el polinomio de grado mayor que 1 se buscan, si existen, raíces

$-3x^2+6x+9$ es de grado 2 para hallar los ceros planteamos la ecuación:

$-3x^2+6x+9=0$ resolvemos aplicando la fórmula resolvente (lo dejamos a tu cargo) y hallamos $x_2=-1$ y $x_3=3$, las numeramos así pues ya habíamos identificado la primera raíz.

Recordemos que la ecuación de segundo grado se expresa factorizada así:

$$-3x^2+6x+9=-3(x-3)(x+1) \quad \textbf{(*)}$$

VIII. Polinomio factorizado: Se expresa la factorización completa

$$-3x^3+12x^2-3x-18=(x-2).(-3x^2+6x+9)$$

Reemplazamos por **(*)**

$$-3x^3+12x^2-3x-18=(x-2).(-3(x-3)(x+1))$$

$$\boxed{\boldsymbol{-3x^3+12x^2-3x-18=-3(x-2).(x-3)(x+1)}}$$

Aclaración importante: Si el polinomio es de grado mayor que dos y el término independiente es cero, podríamos pensar que no podemos aplicar el Lema de Gauss.

Por ejemplo: x^3-x^2-12x observemos que comúnmente se dice "no tiene término independiente". Formalmente el término independiente es 0 y el coeficiente principal es 1. No es posible determinar divisores de 0, son infinitos.

En este caso el primer paso es aplicar factor común y luego continuar la tarea.

ACTIVIDAD 17. SÉPTIMA AUTOEVALUACIÓN - POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Factoriza, si es posible, los siguientes polinomios:

a. x^4-36

b. x^4+9

c. $2x^3+2x^2+3x+3$

d. x^5-32

e. $x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{13}{2}x^2+3x$

Unidad 3: Ecuaciones

3.01 Ecuaciones y problemas

Resolver distintos tipos de problemas es un hacer casi constante en la vida de las personas y muy especialmente en la vida profesional.
Te proponemos resolver estas actividades, no sabemos si representarán un problema para cada alumno o alumna. Es interesante que ustedes puedan identificar si es así.

ACTIVIDAD 18

Los problemas que no están resueltos en el texto los encontrarás en respuestas.

I) *Resolver:*

a) Tres amigos juegan un billete de lotería, tuvieron suerte pues resultó premiado por un valor de $\$1.000.000$. Es necesario calcular cuánto le corresponde a cada uno, pues no aportaron de la misma manera, el primero juega el doble que el segundo y este el triple que el tercero.
b) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, luego las dos terceras partes del resto y quedan aún 1200 litros. Calcula la capacidad del depósito.
c) Con una soga de $100m$ se pueden rodear zonas rectangulares de área fija ¿qué valores pueden tener sus lados?
Determinar los lados según las siguientes condiciones:
   i. Si uno de los lados de la zona debe tener una longitud de $13m$.
   ii. Si uno de los lados de la zona debe tener el triple de longitud que el otro.
   iii. Si la zona rectangular es en particular un cuadrado.

Al estilo Paenza[10] te pedimos que pienses los problemas, toma un borrador y anota tus elaboraciones. Recuerda que tu producción tiene valor, aún cuando no obtengas la respuesta definitiva, y eso es porque el pensamiento propio se pone en acción.

¡No te tientes, seguí con la lectura luego de tu trabajo!

Trabajemos sobre las soluciones:

1. Datos: 1º es el doble de 2º, 2º es el triple del 3º (la presentación de datos muestra una dependencia de cada participante con otro).

[10] Adrián Paenza es un matemático argentino, importante divulgador de esa ciencia. Los libros de mayor difusión para todo público es una zaga: “Matemática… ¿Estás ahí?” (episodio 1, 2 y 3).

Derivación de los datos: el monto del 3º no depende de los otros dos.
Ideas para resolver: el 3º será la incógnita a hallar y simbólicamente lo representaré con una letra (lo habitual en matemática es x, y, z pero podría ser cualquiera).
Organización: $3º = x,\ 2º = 3.x,\ 1º = 2(3.x)$
Planteo: $x + 3.x + 2(3.x) = 1.000.000$

$$x + 3.x + 6x = 1.000.000$$
$$10x = 1.000.000$$
$$10x = 1.000.000$$
$$x = 1.000.000 : 10$$
$$x = 100.000$$

Organización de la respuesta:

$$3º = 100.000, \quad 2º = 3.100.000,\ 1º = 2(3.100.000)$$
$$3º = 100.000, \quad 2º = 300.000,\ 1º = 600.000$$

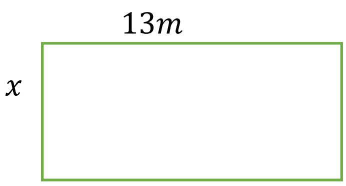
Validación de la respuesta:

$$100.000 + 300.000 + 600.000 = 1.000.000$$

Con esta distribución salió todo muy bien, cada cual recibió una cantidad y los valores fueron exactos ¿será siempre así? Te proponemos que lo pienses si las condiciones son: El primero juega el triple que el segundo y este cuatro veces lo del tercero. (Actividad 18)

Veamos la resolución del punto c). i

Datos: Realizamos un esquema para ubicar los datos



Perímetro: $100m$

Planteo:

$$x + 13 + x + 13 = 100$$
$$2x + 26 = 100$$
$$2x = 100 - 26$$
$$2x = 74$$
$$x = 74 : 2$$
$$x = 37$$

ORGANIZACIÓN DE LA RESPUESTA:

Si un lado mide $13m$, el otro puede medir únicamente $37m$

3.02 Definición de ecuación y conjunto solución

Sabemos que por tu recorrido en la educación secundaria has resuelto muchas veces ecuaciones.

Realizaremos aquí algunas observaciones teóricas:

Una ecuación es una proposición que para algún o algunos valores de la incógnita es verdadera.

Analicemos esta expresión con ejemplos:

A. Elige entre los siguientes el número real que verifica la proposición: “El triple de cierto número aumentado en 12 unidades equivale a 36”.
$a)\ 5$ $\qquad b)\ 8$ $\qquad c)\ -1,$

Simbólicamente la proposición es: $3x + 12 = 36$ puedo probar $a)\ 3.5 + 12 = 36$ Falso $b)\ 3.8 + 12 = 36$ Verdadero $c)\ 3.(-1) + 12 = 36$ Falso

B. Halla el valor o los valores que verifican la proposición: “Un número real es equivalente a la suma entre el triple de dicho número y dos, disminuido en el doble de ese número”.
Simbólicamente la proposición es: $x = (3x + 2) - 2x$
$x = (3x - 2x) + 2$ operamos algebraicamente, propiedad asociativa y conmutativa de la suma.
$x = x + 2$ restamos los términos semejantes.

. ? Antes de continuar…una alerta…haciendo matemática solemos, todos alguna vez, convertirnos en resolutores ciegos…Queremos ser resolutores advertidos….

Un resolutor advertido es el que en cada acción analiza:

- La propuesta original.

- Las proposiciones transformadas.

Análisis de resolutor advertido:

- La propuesta original pide que encontremos un valor o valores que verifiquen una proposición.
- La proposición transformada algebraicamente es $x = x + 2$, para analizarla la expresaremos en lenguaje coloquial: “un número es equivalente a si mismo aumentado en 2”.

  ? pensemos…por ejemplo ¿3 es igual a 3 aumentado en 2? ¿21 es igual a 21 aumentado en 2?...¿3 es igual a 5? ¿21 es igual a 23?....................

  No tiene sentido, en matemática se dice que es una contradicción o un absurdo.

  Ahora supongamos que no hubiesemos logrado aún estar advertidos y continuaramos sólo como resolutores, resolvemos la ecuación:

  $x = x + 2$

  $x - x = 2$

  $0x = 2$

  Analicemos aquí valores de x en la igualdad anterior:

  $x = 1$ entonces $0.1 = 2$ falso

  $x = -5$ entonces $0.(-5) = 2$ falso

  $x = \frac{1}{4}$ entonces $0.\frac{1}{4} = 2$ falso

  $x = 0,\hat{2}$ entonces $0.(0,\hat{2}) = 2$ falso

  ………………………………………………………..

  ………………………………………………………..

  ¿Existe algún número real que multiplicado por 0 sea igual a 2?

  ¡imposible!

  $0 = 2$ *en Matemática a estas expresiones las calificamos como contradicción o absurdo.*
- No existe ningún número real que cumpla la proposición.

C. La proposición que sigue es muy usada en los juegos de “Piensa un número, yo lo adivino”. Alguien se lo contó a Gustavo y por ser un niño quiso demostrarle a su hermano su viveza. Comenzó: *“Piensa un número entre 1 y 10, ahora súmale 5 a lo que te da multiplícalo por 3 ahora réstale tres veces tu número, réstale 15, finalmente súmale tu número”*

¡¡Gustavo acertó!!

Simbólicamente la proposición es: $(x + 5).3 - 3x - 15 + x = x$

$3x + 15 - 3x - 15 + x = x$ operamos algebraicamente, propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

$\cancel{3x + 15 - 3x - 15} + x = x$ aplicamos la propiedad cancelativa de la suma.

$$x = x$$

No puede fallar, si le proponemos las operaciones que permitan la cancelación de los términos entonces queda el valor elegido.

¡Se espera que ambos hagan bien las cuentas!

Pensando lo matemático: Esta equivalencia es válida para todo número real.

$x = x$ *¡cualquier valor lo cumple! ¡identidad!*

Conjunto solución

El conjunto solución de una ecuación es el conjunto de valores que la verifican. Se simboliza $S = \{x \ valores \ que \ satisfacen \ la \ ecuación\}$

A. $S = \{8\}$
B. $S = \{\ \ \}$ o bien $S = \emptyset$
C. $S = \mathbb{R}$

El proceso de resolución debe mantener la equivalencia entre las ecuaciones y el conjunto solución.

Ejemplo:

Ecuación	Justificaciones de la equivalencia
$3(x-1)+5=-x+3$	Proposición inicial: ecuación.
$3x-3+5=-x+3$	Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la resta.
$3x+x-3+5+3-5-3=-x+x+3+3-5-3$	Propiedad uniforme de la suma o leyes de monotonía de la suma.
$3x+x\cancel{-3}+\cancel{5}\cancel{+3}-\cancel{5}-3=-\cancel{x}+\cancel{x}\cancel{+3}+3-5\cancel{-3}$	Propiedad cancelativa de la suma.
$4x-3+3=-2+3$	Suma de términos semejantes.
$4x-3+3=-2+3$	Propiedad uniforme de la suma.
$4x:4=1:4$	Propiedad uniforme de la multiplicación.
$x=0{,}25$	Valor que verifica la ecuación.

<u>Observación</u>: Para esta ecuación el conjunto solución es $S = \{0{,}25\}$ y este es válido pues se verifica si se lo reemplaza en la ecuación original y en cualquiera de sus equivalentes a medida que resolvemos. Pero además tenemos asegurada la verificación pues se aplicaron las propiedades matemáticas en cada paso.

Dejamos constancia que los procesos en los que se aplican las leyes uniformes es lo que comúnmente denominamos pasaje de términos y factores.

Ejemplos

Resolución aplicando propiedades	Pasaje de términos (se justifica con la propiedad indicada en la primera columna)
$2x - 3 = -2$ ecuación a a trabajar	$2x - 3 = -2$ ecuación a a trabajar
$2x - 3 + 3 = -2 + 3$ (propiedad uniforme de la suma)	$2x = -2 + 3$ (pasaje de términos)
$2x = -2 + 3$ (propiedad cancelativa de la suma)	$2x = 1$
$2x = 1$	
$2x : 2 = 1 : 2$ (propiedad uniforme de la suma)	$x = 1 : 2$(pasaje de un factor a divisor)
$x = 1 : 2$ (simplificación de factor y divisor en el primer miembro)	
$x = 0{,}5$ o bien $x = \frac{1}{2}$	$x = 0{,}5$ o bien $x = \frac{1}{2}$

Trabajaremos a partir de aquí con distintos tipos de ecuaciones.

3.03 Ecuaciones lineales

Se denominan ecuaciones lineales a las que se presentan como una equivalencia entre polinomios de grado 1.

Son las ecuaciones que hemos trabajado desde el comienzo de este bloque.

ACTIVIDAD 19

I) Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $-2\left(x + \frac{3}{4}\right) = -(x + 3) - 5x$

b) $\frac{-2x+3}{4} - 1 = -8 + x$

II) Responde:

a) ¿Para qué números reales la expresión $-8 - (x + \frac{1}{4}) - 2(x + \frac{3}{4}) - x$ se anula?

b) ¿Para qué números reales la expresión $-8 - (x + \frac{1}{4}) - 2(x + \frac{3}{4}) - x$ se iguala a 5?

Actividad resuelta:
La suma de un número entero y su consecutivo es igual a la mitad de dicho número disminuido en 3 unidades. ¿Cuál es el número entero que verifica esta proposición?

Expresión simbólica: $x + (x + 1) = \frac{1}{2}x - 3$

Resolución:
$$x + x - \frac{1}{2}x = -3 - 1$$
$$\frac{3}{2}x = -4$$
$$x = -4 : \frac{3}{2}$$
$$x = -\frac{8}{3}$$

En este punto como resolutores advertidos sabemos:

La ecuación tiene solución y su conjunto es solución es $S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$

El problema no tiene solución pues $-\frac{8}{3}$ *no es un número entero.*

3.04 Ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones de segundo grado completas
En el bloque factorización de polinomios trabajamos con estas ecuaciones en el que el polinomio de segundo grado está completo y aplicamos la fórmula resolvente. Por ejemplo:

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ con $a \neq 0$. Es una ecuación de segundo grado completa y se aplica la siguiente fórmula resolvente

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ahora vamos a ampliar a otras ecuaciones en que es posible aplicar la fórmula citada, pero existen otros procedimientos más ágiles.

Ecuaciones de segundo grado incompletas.

1) $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ la ecuación de segundo grado es incompleta pues el término lineal (bx) es nulo, en ese caso $b = 0$. Se puede aplicar la fórmula resolvente reemplazando $b\ por\ 0$ (lo dejamos a tu cargo).

Otro procedimiento consiste en la posibilidad de despejar la incógnita.

Ejemplo: $$\boldsymbol{x^2+4=8}$$

$$\boldsymbol{x^2=8-4}$$

$$\boldsymbol{x^2=4}\ \textbf{(*)}$$

En este paso un resolutor advertido puede preguntarse *¿qué número real elevado al cuadrado da por resultado* 4*?*

El valor de x puede ser 2 y también -2,ya que $2^2=4$, y $(-2)^2=4$. Podemos entonces asegurar que esta ecuación tiene dos soluciones $x_1=2$, $x_2=-2$

En esta resolución si sólo consideramos la respuesta $x=2$ sucede lo siguiente:

- ✓ Si realizamos la verificación reemplazando en la ecuación $2^2+4=8$ esta igualdad nos dejaría tranquilos.
- ✓ El conjunto solución es $S=\{-2,2\}$ y este se cumple en cada paso.
- ✓ Luego, la verificación no alcanza.

Retomemos $$\boldsymbol{x^2=4}\ \textbf{(*)}$$

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{4}}$$

El módulo aplicado a la incógnita es un indicador matemático respecto de que la base de una potencia de exponente par puede ser un número negativo o un número positivo. (El conectivo o indica que puede ser uno, u otro o ambos.)

Propiedad: $|x|=\boldsymbol{a}$ equivale a $\boldsymbol{x_1=a}$ ó $\boldsymbol{x_2=-a}$

$$|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{2}$$

Luego $$\boldsymbol{x_1=2,\ x_2=-2}$$

2) $\boldsymbol{ax^2+bx=0}$ la ecuación de segundo grado es incompleta pues el término independiente (c es nulo, en ese caso $c=0$. Se puede aplicar la fórmula resolvente reemplazando $c\ por\ 0$) (lo dejamos a tu cargo).
Otro procedimiento consiste en la posibilidad de aplicar una propiedad para hallar la incógnita.

Ejemplo: $$\boldsymbol{x^2+2x=0}$$

Aplicamos factor común en el primer miembro:

$$\boldsymbol{x(x+2)=0}\ \textbf{(**)}$$

En este caso puede aplicarse la siguiente propiedad:

Si el producto de dos o más factores es "0" significa que uno, varios o todos los factores son "0"

Si $\boldsymbol{A.B.\ldots.Z=0}$ significa que $\boldsymbol{A=0}$ ó $\boldsymbol{B=0}$ ó. ... . $\boldsymbol{Z=0}$

En el caso de la ecuación de segundo grado incompleta se aplica para dos factores: Si $\boldsymbol{A.B=0}$ significa que $\boldsymbol{A=0}$ ó $\boldsymbol{B=0}$

Retomemos $\boldsymbol{x(x+2)=0}$**(**)**

Consideremos $A=x$ ó $B=x+2$

Al aplicar la propiedad

$$\boldsymbol{x=0} \text{ ó } \boldsymbol{x+2=0}$$
$$\boldsymbol{x=0} \text{ ó } \boldsymbol{x=0-2}$$

Luego $x_1=0, x_2=-2$

3) $\boldsymbol{ax^2=0}$ la ecuación de segundo grado es incompleta pues el término lineal (bx) es nulo, en ese caso $b=0$ y también el término independiente (c es nulo, en ese caso $c=0$. Se puede aplicar la fórmula resolvente reemplazando $b\ por\ 0$ y $c\ por\ 0$. (lo dejamos a tu cargo).

Otro procedimiento consiste en la posibilidad de despejar la incógnita.

Ejemplo: $\boldsymbol{3x^2=0}$ **(***)**

$$\boldsymbol{x^2=\frac{0}{3}}$$

$$\boldsymbol{x^2=0}$$

Aplicamos la propiedad del módulo:

$$\boldsymbol{|x|=0}$$

$$x_1=x_2=0$$

Observemos que en este caso un resolutor advertido puede detener el proceso en **(***)** obtuvimos dos soluciones reales y coincidentes. El conjunto solución es $S=\{0\}$ y este se cumple en cada paso.

ACTIVIDAD 20. OCTAVA AUTOEVALUACIÓN

I) Halle el conjunto solución para cada ecuación:

$a)(2x + 8)\,(3x - 9) = 0$

$b)\ (4x - 5).(2x + 7).(1 - x) = 0$

$c)\ 2x^2 - 12 = 0$

$d)\ 4x^2 + 5x = 0$

$e)\ 5x^2 - 5x - 10 = 0$

$f)\ 6x^2 - 8 = 0$

$g)\ 5x^2 = 0$

Anexo con respuestas

Unidad 1: Conjuntos numéricos

ACTIVIDAD 1. PRIMERA AUTOEVALUACIÓN

I) *Analiza y responde*:

a) ¿Qué números tienen en común el conjunto de los $\mathbb{N}$ y el conjunto de los $\mathbb{Z}$?

El conjunto de los $\mathbb{N}$ y el conjunto de los $\mathbb{Z}$**,** tienen en común los números positivos, podríamos decir los $\mathbb{N}$

b) ¿y entre los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$?

El conjunto de los $\mathbb{Z}$ y los $\mathbb{Q}$, tienen en común al conjunto de los $\mathbb{Z}$,ya que podemos expresar por ejemplo al 4 como $\frac{4}{1}$

II) *En las siguientes expresiones colocar Falso(F) o Verdadero(V)*

a) -7 ∈ (se lee pertenece) a $\mathbb{Q}$ … **V** …

b) -7 ∈ a $\mathbb{N}$**… F …**

c) $\frac{8}{7}$ ∈ a $\mathbb{R}$ … **V** …

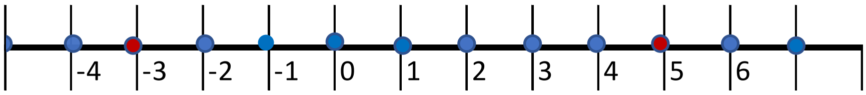
d) 4 ∉ (se lee no pertenece) a $\mathbb{I}$ … **V** …

e) $\pi \in$ a $\mathbb{R}$ y $\pi \in$ a $\mathbb{I}$ … **V** …

III) *Completar la siguiente tabla colocando en las casillas si cada número, pertenece, no pertenece o pertenece a más de un conjunto numérico.*

Números	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
34.563	∈	∈	∈	∉	∈
$4\sqrt{11}$	∉	∉	∉	∈	∈
$-\frac{3}{4}$	∉	∉	∈	∉	∈
0,363636…	∉	∉	∈	∉	∈
$2\frac{3}{4}$	∉	∉	∈	∉	∈
-24,3	∉	∉	∈	∉	∈

IV) *Ubicar en una recta numérica, los números entre -3 y 5. ¿Cuántos son? ¿A qué conjunto numérico pertenecen?*

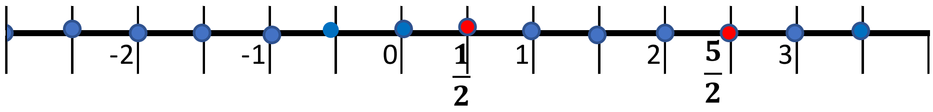


Son números enteros, pero también son racionales, irracionales y también son números reales. Hay infinitos números entre -3 y5.

V) *¿Cómo escribirías en lenguaje simbólico que -3 y 5 pertenecen al conjunto de los números enteros?*

$$-3 \wedge 5 \in \mathbb{Z}$$

VI) *Ubicar en una recta numérica, los números entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$ ¿A qué conjunto numérico pertenecen? ¿Cuántos son?*



Pertenecen al conjunto de los números racionales, irracionales y reales. Son infinitos números.

Preguntas en el texto

ACTIVIDAD 2

¿Cuál será el periodo de 0,50?

En realidad 0,50 es un numero decimal exacto y se expresa como $\frac{50}{100}$ ó $\frac{5}{10}$. No es un número decimal periódico. Con lo cual no tiene periodo.

ACTIVIDAD 3

Les propongo como desafío que encuentren la fracción que le corresponde a $0,\hat{4}$ y a $2,\widehat{804}$ (periodo 804, con lo cual deberán pensar por cuanto multiplico para eliminar el período).

Si $f = 0,\hat{4} \quad \rightarrow \quad f = 0,444 \ldots$

$$f = 0,444 \ldots$$

$$10.f = 4,444 \ldots$$

$$10.f - f = 4,444 \ldots - 0,444 \ldots$$

$$9.f = 4$$

$$\boldsymbol{f = \frac{4}{9}}$$

Si $f = \ 2,\widehat{804} \ \rightarrow \quad f = 2,804804 \ldots$

$$f = 2,804804 \ldots$$

$$1000f = 2.804,804804 \ldots$$

$$1000f - f = 2.804,804804 \ldots - 2,80480 \ldots$$

$$999f = 2.802$$

$$\boldsymbol{f = \frac{2802}{999}}$$

<u>ACTIVIDAD 4.</u> SEGUNDA AUTOEVALUACIÓN

I) *En las siguientes expresiones colocar Falso(F) o Verdadero(V)*

a) $3,\widehat{804} = \frac{3801}{999}$ … **V** …

b) $5,8\hat{4} = \dfrac{526}{90}$ … **V** …

c) $2,\hat{9} = 3$ … **V** …

d) $\dfrac{13}{14} < \dfrac{12}{13}$ … **F** …

e) Representar en la recta numérica: $4\frac{1}{4}$; $\frac{17}{8}$; $\frac{36}{6}$; $\frac{0}{1}$

ACTIVIDAD 5. PROBLEMAS

Problema 1

Respuesta: $\mathbf{15^2}$

Problema 2

El día 11, Juan tendrá $\mathbf{2^{10}}$ monedas.

ACTIVIDAD 6. TERCERA AUTOEVALUACIÓN

I) *En las siguientes expresiones colocar Falso(F) o Verdadero(V)*

a) $(4-(-2)^0)^{-1} = \frac{1}{3}$ … **V** …

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{25}{16}$ … **F** …

II) *Verificar las siguientes igualdades.*

a) $\left(1-2\left(\frac{2^4}{5}\right)^{-1}.\frac{2^3}{5}\right)^{25} = 0$

$$\left(1-2.\frac{5}{16}.\frac{8}{5}\right)^{25} = \left(1-2.\frac{1}{2}\right)^{25} = 0^{25} = \mathbf{0}$$

b) $(3.\ 2^2)^{-2}.3(\frac{1}{2^3}\ (3.2)^{-1})^{-1} = 1$

$$\left(\frac{1}{12}\right)^2.3\left(\frac{1}{8}.\frac{1}{6}\right)^{-1} = \frac{1}{144}.3.48 = \frac{144}{144} = \mathbf{1}$$

ACTIVIDAD 7. CUARTA AUTOEVALUACIÓN

I) *Calcular*

a) $\sqrt{y}\,.\sqrt[3]{2.y} = y^{\frac{1}{2}}\,.\ (2.y)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{1.2}{3.2}}.y^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{2}{6}}.y^{\frac{5}{6}} =$

$\sqrt[6]{2^2}.\sqrt[6]{y^5} = \mathbf{\sqrt[6]{4.y^5}}$

b) $\sqrt[3]{3}\,.\sqrt[4]{4}\,.\sqrt{2} = 3^{\frac{1}{3}}\,4^{\frac{1}{4}}\,2^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}}\,.(2^2)^{\frac{1}{4}}\,2^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}}\,.(2)^{\frac{2}{4}}\,2^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}}\,.(2)^{\frac{4}{4}} =$

$= \mathbf{2.\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{3\sqrt{y}}{6\sqrt[3]{y}} = \frac{3.y^{\frac{1}{2}}}{6.y^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\ y^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{6}} = \mathbf{\frac{1}{2}\sqrt[6]{y}}$

II) *Simplificar*

a) $\frac{\left(8^{\frac{1}{2}}\right).\left(8^{\frac{-2}{3}}\right)}{\left(8^{\frac{1}{2}}\right):\left(8^{\frac{-2}{3}}\right)} = \frac{8^{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)}}{8^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)}} = \frac{8^{-\left(\frac{1}{6}\right)}}{8^{\frac{7}{6}}} = 8^{\left(-\frac{1}{6}-\frac{7}{6}\right)} = 8^{-\frac{8}{6}} =$

$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4096}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{4096}} = \mathbf{\frac{1}{16}}$

b) $\left(\frac{9^{\frac{1}{2}}.9^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{9^{\frac{5}{6}}}{9^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 9^{\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{2}\right)} = \mathbf{9}$

III) *Calcular*

a) $3\sqrt{b} + 2\sqrt{b} = \mathbf{5.\sqrt{b}}$

b) $3\sqrt{b} - 2\sqrt{b^3} = 3\sqrt{b} - 2\left(\sqrt{b}\right)^3 = 3\sqrt{b} - 2\sqrt{b}\sqrt{b}\sqrt{b} =$

$\sqrt{b}\left(3 - 2\left(\sqrt{b}\right)^2\right) = = \mathbf{\sqrt{b}\ (3 - 2b)}$

Unidad 2: Funciones

Preguntas en el texto

ACTIVIDAD 8

Número de obras	2 obras
Primera forma	6.2-2.1
Segunda forma	4.2+2

En ambas formas el conteo da: $6.2 - 2.1 = 4.2 + 2 = 10$ "10 espejos"

Número de obras	5 obras
Primera forma	6.5-2.4
Segunda forma	4.5+2

En ambas formas el conteo da: $6.5 - 2.4 = 4.5 + 2 = 22$ "22 espejos"

ACTIVIDAD 9. QUINTA AUTOEVALUACIÓN

I) a) $f: A \to B, f(x) = 2x + 1$ b) $: A \to B, f(x) = x - 1$

II) a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$ a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$

III) Problema (sigue la ruta de trabajo)

a) A es el conjunto formado por los metros recorridos (o cuadras) y B es el conjunto Precio del viaje.

b) La relación entre A y B cumple las condiciones para ser una función: A cada cantidad de metros recorridos le corresponde un único precio.

c) $f: A \to B, f(x) = 7{,}25\, x + 67{,}50$

ACTIVIDAD 10. SEXTA AUTOEVALUACIÓN

I)

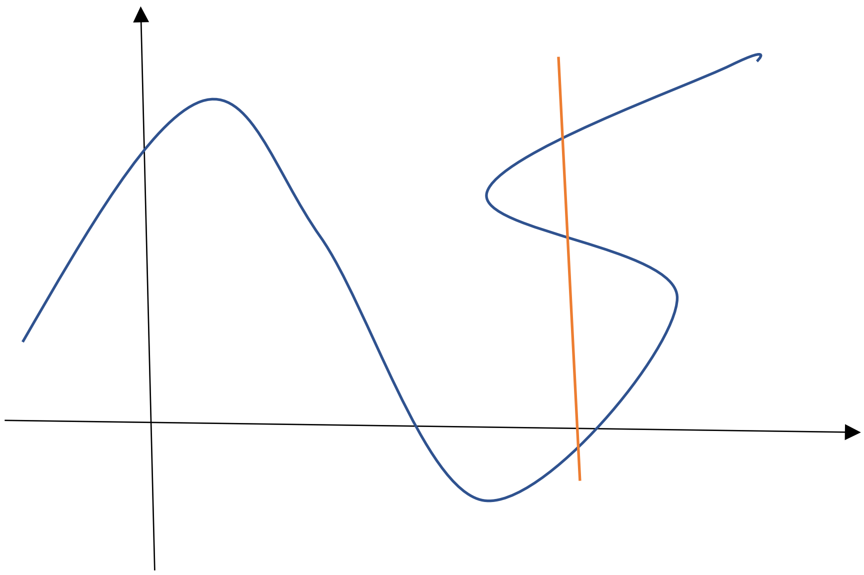
a) Falso. Si bien cada elemento tiene un correspondiente (cumple la relación de existencia) en c tiene dos correspondientes $q\ y\ r$ (no cumple la condición de unicidad).

b) Verdadero. Expresa la explicación sintética de las condiciones de la función.

c) Falso. El Codominio puede tener algún elemento que no tenga correspondiente y eso no determina que no sea función. Sólo indica que el Codominio no coincide con el conjunto imagen. En este caso es $CI = \{m, p, q, r\}$ Las condiciones de la función Sofía sostiene que no es una función pues n no es correspondiente de ningún elemento de A.

II)

a) Falso: Existen elementos del dominio con más de una imagen. Eso se observa si se traza una recta por un valor x paralela al eje y interseca en más de un punto a la curva. Es un indicador de que un valor de x tiene más de un correspondiente en y.



b) Falso. Es otra forma de expresar lo que dice en el punto a) vale la explicación gráfica para este caso también.

c) Verdadero. Este ítem aclara en palabras lo que se explica en a) y b) con el gráfico. En este caso habla de dos elementos, pero pueden ser más como se ve en el gráfico que la línea interseca en tres puntos.

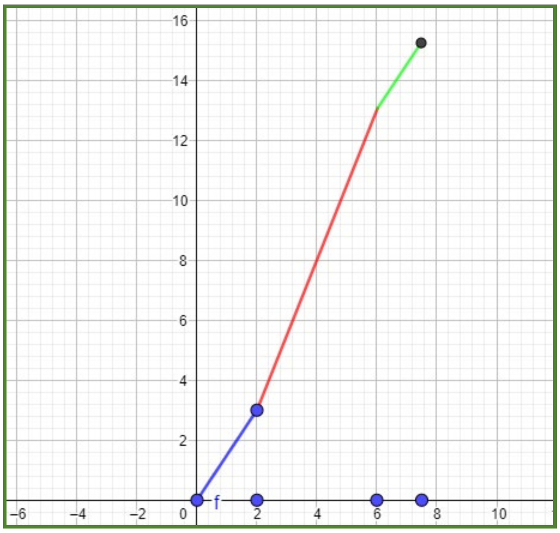
d) Falso pues c) es verdadera.

III) La fórmula matemática correcta es: $S = 3E + 2$

IV) La respuesta correcta es d) pues tanto en la tabla de valores como en la expresión coloquial como en el gráfico cartesiano se muestra el concepto de opuesto la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$

V) La respuesta correcta es b) pues la fórmula es $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2$ Los valores del dominio tienen todos como imagen el número 2.

VI) El tren a Bahía Blanca, realizamos un gráfico aproximado considerando una escala sobre 100 y una velocidad cualquiera entre Flores y Pigüé pues no está indicada en el problema.



ACTIVIDAD 11. POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) El cuadro completo

Polinomio Compuesto	Factor Común	
$-5x^2+25x^3-10x$	$5x$	$5x(-x+5x^2-2x)$
x^5+7x^3	x^3	$x^3(x^2+7)$
$\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(3x^2-7)$

ACTIVIDAD 12. POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Factorizaciones:

a) $\left(4x-\frac{5}{2}\right)^2$

b) $4x^4.(2x-5)^2$

ACTIVIDAD 13. POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) *Factoriza los siguientes polinomios*

a) $4x^2.(1+2x).(1-2x)$

b) $x^2.(25-0{,}36x^2)$ esta respuesta puede ampliarse aplicando diferencia de cuadrados usando números irracionales. $x^2.(5+0{,}6x).(5-0{,}6x)$

c) $(0{,}1x^4+3).(0{,}1x^4-3)$

d) $x^2.\left(\frac{3}{2}+x\right).\left(\frac{3}{2}-x\right)$

II) Intenta, si es posible, expresar como producto de factores primos los siguientes polinomios.
Recuerda que puedes aplicar varias formas de factorización.

a) $2x^3(x+2).(x-2)$

b) $5x^2\left(\frac{1}{2}x-10\right)^2$

c) $x^2(0{,}1x^4-3)(0{,}1x^4+3)$

d) $(x^2-9)^2$

<u>ACTIVIDAD 14.</u> POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Investiga si cada uno de los siguientes polinomios pueden clasificarse como cuatrinomio cubo perfecto, si es así aplica la factorización.

a) $x^3-64-8x^2+32x$ No se verifica pues si consideramos $(x-4)^3$por sus términos cúbicos, no se pueden validar los términos no cúbicos: $3.x^2.(-4)=-12x^2$ y $3.x.(-4)^2=48x$

b) $125-x^3-75x+25x^2$ No verifica (imita el desarrollo en a)

c) $x^6-9x^5+27x^4-27x^3$ Si verifica es $(x^2-3x)^3$

<u>ACTIVIDAD 15.</u> POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Factoriza, cuando sea posible, los siguientes polinomios de segundo grado:

a) $-2.\left(x+\frac{9}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}.(x-4)^2$

c) x^2+16 no es un polinomio que se puede factorizar en el conjunto de Números Reales.

En el punto c) aconsejamos hacerlo en detalle para verificar lo que indicamos y retomarlo en Ecuaciones, que es el siguiente bloque.

<u>ACTIVIDAD 16.</u> POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Factorizar, si es posible, aplicando ambos procedimientos.

$$-x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$

Respuesta: lo más ágil es aplicar la resolución de la ecuación cuadrática:

$-1.(x - \frac{1}{2})(x + 3)$

Si quisiéramos aplicar el Lema de Gauss es necesario obtener coeficientes enteros, en este caso es posible.

$$-x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 2.\left(-x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\right) = -2x^2 - 5x + 3$$

Y así estamos en condiciones de aplicar el Lema y seguir el proceso.

<u>ACTIVIDAD 17.</u> SÉPTIMA AUTOEVALUACIÓN - POLINOMIOS-FACTORIZACIÓN

I) Factoriza, si es posible, los siguientes polinomios:

a. $(x^2 + 6).(x^2 - 6)$

b. $x^4 + 9$ no es un polinomio que se puede factorizar en el conjunto de Números Reales.

c. $(2x^2 + 3).(x + 1)$

d. $(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

e. $x\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 3\right)$

Unidad 3: Ecuaciones

ACTIVIDAD 18

Los problemas que no están resueltos en el texto los encontrarás en respuestas.

I) *Resolver*

a) Resuelto en el texto.
b) 7200 litros.
c) Determinar los lados según las siguientes condiciones:
   i. Resuelto en el texto.
   ii. $x + 3x + x + 3x = 100$ resulta que un lado mide 12,5 m y el otro 37,5m
   iii. Si la zona es cuadrada $4x = 100$ resulta cada lado de 25 m

Te proponemos que lo pienses si las condiciones son: El primero juega el triple que el segundo y este cuatro veces lo del tercero. (Actividad 18)

Organización: $3º = x,\ 2º = 4.x\,, 1º = 3(4.x)$
Planteo: $x + 4.x + 12x = 1.000.000$

$$17x = 1.000.000$$

$$x = 1.000.000 : 17$$

$x = 58.823{,}529411$ … ..este valor no es exacto y es la suma que le corresponde al tercero, luego tampoco serán exactos los valores del segundo y del primero.

ACTIVIDAD 19

I) Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a) $x = -\frac{3}{8}$

b) $x = \frac{31}{6}$

II) Responde.

a) $x = -\frac{39}{16}$

b) $x = -\frac{59}{16}$

<u>ACTIVIDAD 20.</u> SÉPTIMA AUTOEVALUACIÓN

I) Halle el conjunto solución para cada ecuación

$a)\ S = \{-4, 3\}$

$b) S = \left\{-\frac{7}{2}, 1, \frac{5}{4}\right\}$

$c) S = \left\{-\sqrt{6},\ \sqrt{6}\right\}$

$d)\ S = \left\{-\frac{5}{4}, 0\right\}$

$e)\ S = \{-1,2\}$

$f) S = \left\{-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$

$g)\ S = \{0\}$

Modelo de evaluación

1) Elige el resultado correcto para la siguiente operación y marca todas las justificaciones que correspondan a la resolución correcta.

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-4)^0\right]^{-1} =$$

Resultado de la operación:

$a)\ 8 \quad b)\ \frac{1}{24} \quad c)\ \frac{1}{8} \quad d) -\frac{1}{26}$

2) Dada la siguiente tabla, completa con verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

Todo número elevado al exponente 0 es igual a 1.	....
Las potencias de exponente negativo cambian el signo de la base	....
Observando el ejercicio planteado en 1) completar V o F leyendo la siguiente proposición: “se resuelven las potencias dentro del corchete, luego se hace la resta y finalmente la potencia del corchete”.	....

3) Resuelve aplicando las propiedades de la radicación y decide entre las respuestas indicadas.

$$\sqrt{2}.\ \sqrt[3]{2}.\ \sqrt[4]{2} =$$

$$a)\ 2\sqrt[6]{2} \quad b)\ \sqrt[2]{2^{13}} \quad c) 2.\ \sqrt[12]{2}$$

4) Calcula y elige la respuesta entre las propuestas.

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{8}\right)^2 =$$

$$a) -6 \quad b)\ 32 \quad c) 2$$

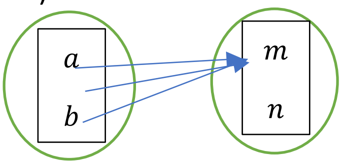
5) Calcula y elige la respuesta entre las propuestas.

$$\left(\frac{27^{\frac{1}{2}}\ 27^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$a) \sqrt[13]{27^6} \quad b)\ 27 \quad c)\ 3$$

6) Indica, en cada cuadro a la derecha de cada representación, verdadero (V) o falso (F), V indica que la relación es función y F indica que no lo es.

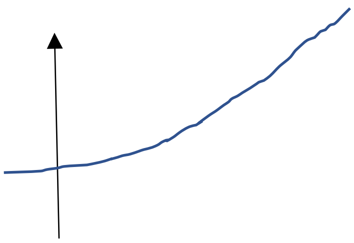
a) Relación de $A \to B \quad A = \{a, b, c\} \;\; B = \{m, n, p\}$



b) Relación de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x	y
-2	-2
7	-2
0	-3
0	3

c) Relación de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



7) Dada la siguiente tabla de valores ¿Cuál es la fórmula que le corresponde entre todas las propuestas?

x	y
-2	4
5	-3
0	2
$-0{,}1$	$2{,}1$

$$a)\; x + 2 \quad b)\; x - 2 \quad c) - x - 2 \; d) - x + 2$$

8) Factoriza los siguientes polinomios.a

e) $16x^2 - \frac{9}{4} =$

f) $3x^2 - 6x + 3 =$

9) Elige entre los conjuntos solución propuestos los que corresponden a las siguientes ecuaciones:

i. $x^2 - x - 6 = 0$

$a)\ S = \{3, -2\}\ b)\ \{-3,2\}\ c)\{-3, -2\}$

ii. $2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 = 0$
(Te recordamos la posibilidad de aplicar el Lema de Gauss para encontrar la primera raíz)

$a)\ S = \{-1,4,2\}\ b)\ \{1, -4, -2\}\ c)\{-1, -4, -2\}$

10) A un número lo multiplico por su anterior y al resultado le sumo 5 ¿qué número hace que la cuenta de 8? ¿es único?

Grilla de respuestas:

1) $c)$
2)

V
F
V

3) $c)$
4) $c)$
5) $b)$
6) $a)V\ b)F\ c)V$
7) $d)$
8) $a)\ \left(4x - \frac{3}{2}\right).\left(4x - \frac{3}{2}\right)\ b)3(x-1)^2$
9) $i)a)\ \ ii)\ a)$
10) No es única.

UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA

Manual de Ingreso de la Facultad de Tecnología Informática

MÓDULO DE MATEMÁTICA