

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления

Курсовая работа
**Анализ точности решения задачи
аэрогравиметрии при использовании ускорений
СНС**

Accuracy analysis for using GNSS accelerations in the airborne
gravimetry problem

Работу выполнила
студентка 4 курса
Архипова Александра

Научный руководитель
в.н.с. Вязьмин В.С.

Москва, 2022

Содержание

1	Введение	2
2	Задача скалярной аэрогравиметрии	2
2.1	Подход с привлечением данных скорости СНС в качестве корректирующей информации	2
2.2	Подход с привлечением данных ускорения СНС в качестве корректирующей информации	4
2.3	Модель аномалии силы тяжести	4
2.4	Постановка задачи оценивания в виде задачи МНК	5
3	Определение ускорения объекта по фазовым измерениям СНС	6
4	Результаты оценивания аномалии силы тяжести	7
4.1	Входные данные	7
4.2	Анализ ускорений СНС (стандартный режим)	9
4.3	Результаты оценивания аномалии (стандартный режим)	11
4.4	Результаты оценивания аномалии (дифференциальный режим)	14
5	Выводы	16

1. Введение

Аэрогравиметрия является прикладной наукой об измерении силы тяжести Земли с борта летательного аппарата специальным прибором - гравиметром. Аэрогравиметр (бескарданный) включает бескарданную инерциальную навигационную систему, состоящую из трех акселерометров, трех ДУС (датчиков угловых скоростей) и приемника СНС (спутниковой навигационной системы). Акселерометры измеряют проекции удельной внешней силы, действующей на чувствительную массу, на оси чувствительности датчиков. ДУС (гироскопы) измеряют проекции вектора абсолютной угловой скорости корпуса гравиметра на оси чувствительности датчиков.

Одной из значимых проблем является то, что шум СНС высокочастотный, он перекрывает верхние частоты искомого сигнала аномалии силы тяжести. В аэрогравиметрии обычно используются координаты и скорости GPS, в курсовой работе планируется исследовать возможность применения ускорений GPS.

Целью работы является произвести оценку аномалии силы тяжести, используя ускорения СНС, получаемые по первичным (фазовым) спутниковым измерениям и провести анализ точности оценивания аномалии силы тяжести. В данной работе использовались данные, полученные с бескарданного гравиметра.

2. Задача скалярной аэрогравиметрии

2.1 Подход с привлечением данных скорости СНС в качестве корректирующей информации

В работе используются данные, которые представлены в разных координатных трехгранниках: географический - Mx , приборный - Mz , модельный - My . Все расчеты с данными проводятся в географическом трехграннике, координатами в котором являются широта, долгота и высота над референц-эллипсоидом. Модельный и приборный трехгранники считаем эквивалентными, то есть матрица ориентации приборного трехгранника известна точно. Ориентация приборного трехгранника относительно географического задается углами курса, крена, тангажа (ψ, θ, γ) .

$$Mx \xrightarrow{\psi, \theta, \gamma} Mz \approx My$$

Из проекции уравнения движения чувствительно массы гравиметра на вертикальную ось географического трехгранника получаем основное уравнение скалярной аэрогравиметрии:

$$\dot{V}_{up} = g_{ETV} - g_o + f_{up} - \Delta g$$

Модельное уравнение:

$$\dot{V}'_{up} = g_{ETV} - g_o + f'_{up}$$

Где:

g_o – нормальная сила тяжести,

$\Delta g = g_{up} - g_o$ – аномалия силы тяжести по определению,

g_{up} – вертикальная проекция истинной силы тяжести,

$g_{ETV} = \frac{V_e^2}{R_e + h} + \frac{V_n^2}{R_n + h} + 2V_e \cos(\varphi)$ – поправка Этвеша является проекцией сил инерции,

φ - широта,

V_e, V_n – проекции скорости на восточное и северное направление,

R_e, R_n – проекции радиуса кривизны Земли на восточное и северное направление,
 f_{up} – вертикальная проекция внешней удельной силы, действующей на чувствительную массу гравиметра,
 $f'_{up} = L_{zx}^T f'_z$ – проекция измерений внешней удельной силы на географическую вертикаль,
 L_{zx} – матрица перехода от географической к приборной системе координат. Эта матрица выражается через углы курса (ψ), крена (γ) и тангажа (θ):

$$L_{zx} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma & \sin \theta \cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \cos \gamma & -\cos \theta \sin \gamma \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ -\sin \theta \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \theta \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma & \cos \theta \cos \gamma \end{pmatrix}$$

Введем ошибку вертикальной скорости

$$\Delta V_{up} = V_{up} - V'_{up}$$

V_{up} – истинное значение вертикальной скорости гравиметра,

V'_{up} – значение модельной вертикальной скорости гравиметра, полученное из решения модельного уравнения.

Уравнение ошибок вертикальной скорости:

$$\Delta \dot{V}_{up} = -\Delta g + f_{up} - f'_{up}$$

Обозначим $q_f = f_{up} - f'_{up}$ – ошибка показаний гравиметра, которая в работе моделируется белым шумом.

Имеем итоговый вид уравнения:

$$\Delta \dot{V}_{up} = -\Delta g + q_f$$

Введем измерение, используя данные СНС скорости гравиметра:

$$z_v = V_{up}^{gps} - V'_{up}$$

Уравнение корректирующих измерений:

$$z_v = \Delta V_{up} + \delta V_{up}^{gps}$$

δV_{up}^{gps} – ошибка скорости gps, моделируется белым шумом.

Стохастическая система уравнений для постановки задачи оценивания с использованием скоростей $V_{СНС} = V_{gps}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta \dot{V}_{up} = -\Delta g + q_f \\ z_v = \Delta V_{up} + \delta V_{up}^{gps} \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в первое:

$$\dot{z}_v = -\Delta g + q_f + \delta \dot{V}_{up}^{gps} \quad (1)$$

где $q_f, \delta V_{up}^{gps}$ – белый шум.

2.2 Подход с привлечением данных ускорения СНС в качестве корректирующей информации

Из проекции уравнения движения чувствительной массы гравиметра на вертикальную ось географического трехгранника получаем основное уравнение скалярной аэрогравиметрии:

$$a_{up} = g_{ETV} - g_o + f_{up} - \Delta g$$

Модельное уравнение:

$$a'_{up} = g_{ETV} - g_o + f'_{up}$$

Ошибка измерений ускорения:

$$\Delta a_{up} = a_{up} - a'_{up}$$

a_{up} - истинное значение вертикального канала ускорения гравиметра,

a'_{up} - модельное значение вертикального канала ускорения гравиметра, полученное из модельного уравнения.

Введем измерение на основе данных СНС об ускорениях гравиметра:

$$z_a = a_{up}^{gps} - a'_{up} = \Delta a_{up} + \delta a_{up}^{gps}$$

δa_{up}^{gps} - ошибка измерения ускорения СНС, которая представлена в работе белым шумом.

Проведем преобразования последнего уравнения, подставляя в него значения компонент:

$$z_a = a_{up} - a'_{up} + \delta a_{up}^{gps} = g_{ETV} - g_o + f_{up} - \Delta g - g_{ETV} + g_o - f'_{up} + \delta a_{up}^{gps} = f_{up} - f'_{up} - \Delta g + \delta a_{up}^{gps}$$

Как и выше, введем ошибку измерений гравиметра:

$$q_f = f_{up} - f'_{up}$$

Итоговый вид уравнения корректирующих измерений:

$$z_a = q_f - \Delta g + \delta a_{up}^{gps} \quad (2)$$

2.3 Модель аномалии силы тяжести

Для решения задачи аэрогравиметрии введем модель аномалии силы тяжести в виде разложения в ряд Фурье. Приведем скалярную формулу для момента времени $t_i \in [0, T_g]$:

$$\Delta g(t_i) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(\phi_n) + b_n \sin(\phi_n)$$

$$\phi_n = \frac{2\pi n t_i}{T_g}$$

Где t_i – рассматриваемый момент времени, $T_g = 7$ часов – время полета.

$N = \frac{T_g}{T_{min}^g}$ – порядок разложения в ряд. Для определения T_{min}^g – периода минимальной волны аномалии силы тяжести, введем $\lambda_{min}^g = 20$ км - минимальная длина волны аномалии, $v = 70 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ - средняя скорость самолета, тогда $T_{min}^g = \frac{\lambda_{min}^g}{v}$. Вычисления показали, что в данном случае $N = 78$.

2.4 Постановка задачи оценивания в виде задачи МНК

В курсовой работе рассматривается два подхода вычисления аномалии силы тяжести: с применением скоростей СНС и с применением ускорений СНС. Для вычисления аномалии в каждом из подходов использовалась модель разложения в ряд Фурье. Задача оценивания коэффициентов аномалии решалась с применением метода наименьших квадратов (МНК) для каждого из подходов:

$$z = Ax + \delta z$$

где $x = (a_0, a_1, a_2 \dots a_N, b_1 \dots b_N)^T$ - искомый вектор состояний, размерности $(2N + 1 \times 1)$

Подход	1: с привлечением скорости СНС	2: с привлечением ускорения СНС
Вектор измерений	$\dot{z}_v = \dot{V}_{up}^{gps} - a'_{up}$	$z_a = a_{up}^{gps} - a'_{up}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T_g}\right) & \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi t_1}{T_g}\right) & \dots & \cos\left(\frac{2 N\pi t_1}{T_g}\right) & \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T_g}\right) & \sin\left(\frac{2 \cdot 2\pi t_1}{T_g}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2 N\pi t_1}{T_g}\right) \\ \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{2\pi t_2}{T_g}\right) & \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi t_2}{T_g}\right) & \dots & \cos\left(\frac{2 N\pi t_2}{T_g}\right) & \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T_g}\right) & \sin\left(\frac{2 \cdot 2\pi t_2}{T_g}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2 N\pi t_2}{T_g}\right) \\ & & & \dots & & & & & \\ \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{2\pi t_m}{T_g}\right) & \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi t_m}{T_g}\right) & \dots & \cos\left(\frac{2 N\pi t_m}{T_g}\right) & \sin\left(\frac{2\pi t_m}{T_g}\right) & \sin\left(\frac{2 \cdot 2\pi t_m}{T_g}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2 N\pi t_m}{T_g}\right) \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов размерности $(m, 2N+1)$, где m - число измерений, а $2N+1$ - число членов в разложении аномалии силы тяжести в ряд.

3. Определение ускорения объекта по фазовым измерениям СНС

Измеряемой величиной фазовых измерений является мгновенная разность фаз сигнала спутника и сигнала, генерируемого приемником. Также существует стандартный и дифференциальный режим функционирования СНС. В первом случае используются данные с одного приемника, а во втором – с двух.

Фазовые измерения, в дальнейшем обозначаемые через Z_ϕ , представляют собой результат измерения разности фаз ϕ между принимаемым спутниковым радиосигналом и непрерывно генерируемым в приемнике опорным сигналом. Фазовые измерения интерпретируются как измерения расстояния ρ объект-спутник с неопределенной систематической составляющей, равной целому числу N длин волн несущей частоты.

Рассмотрим достаточно общую модель фазовых измерений:

$$Z_\phi(t_{rec}) = \phi^{rcv}(t_{rec}) - \phi^{sat}(t_{rec}) + N + \delta\phi_{ion} + \delta\phi_{trop} + \delta\phi_{sat} + \delta\phi_{rcv} + \delta\phi^s$$

$\phi^{rcv}(t_{rec}) - \phi^{sat}(t_{rec})$ – разность фаз опорного сигнала приемника и детектируемого сигнала спутника, эта разность равна $\frac{\rho}{\lambda}$ без учета ошибки часов приемника и спутника,

λ – длина волны спутникового сигнала,

t_{rec} – время приемника,

N – целочисленная неопределенность фазовых измерений,

$\delta\phi_{ion}, \delta\phi_{trop}$ – ошибки ионосферы и тропосферы,

$\delta\phi_{sat}, \delta\phi_{rcv}$ – ошибки аппаратуры спутника и приемника,

$\delta\phi^s$ – случайная ошибка измерения.

Введем разность фазовых измерений : $\nabla Z_\phi = Z_{\phi_i}^{base} - Z_{\phi_i}^{rcv}$

Рассмотрим их двойную разность :

$$\nabla \Delta Z_\phi = (Z_{\phi_i}^{base} - Z_{\phi_i}^{rcv}) - (Z_{\phi_z}^{base} - Z_{\phi_z}^{rcv})$$

$Z_{\phi_i}^{base}, Z_{\phi_z}^{base}$ – фазовые измерения базовой станции,

$Z_{\phi_i}^{rcv}, Z_{\phi_z}^{rcv}$ – аналогичные измерения бортового приемника,

i – номер спутника, z – номер зинитного спутника.

При использовании двойных разностей уменьшаются уровень остаточных погрешностей дифференциального фазового измерения, ионосферных и тропосферных погрешностей, погрешностей многолучевости, случайных погрешностей измерений. Размер погрешностей тем меньше, чем расстояние между базовым и бортовым приемником, а также, чем меньше перепад высот между ними. Подход позволяет избежать в модели инструментальных погрешностей приемника и спутников, прежде всего погрешностей их часов.

Задача определения ускорения бортового приемника решается путем составления центральной второй разности на основе трех измерений: $\nabla \Delta Z_\phi(t_{j-1}), \nabla \Delta Z_\phi(t_j), \nabla \Delta Z_\phi(t_{j+1})$. Из них составляется система уравнений по всем видимым спутникам, в правой части которой стоит неизвестная производная относительной скорости приемника. Её оценка определяется по МНК.

4. Результаты оценивания аномалии силы тяжести

4.1 Входные данные

На вход было предоставлено несколько файлов с измерениями в стандартном режиме, соответствующими одному и тому же полету. Над данными СНС была проведена предварительная обработка пакетами лаборатории. Данные включали:

Спутниковые данные:

- вертикальное ускорение в $\frac{м}{с^2}$
- вертикальная скорость в $\frac{м}{с}$
- составляющая скорости, направленная на север в $\frac{м}{с}$
- составляющая скорости, направленная на восток в $\frac{м}{с}$
- широта, долгота в радианах
- высота в метрах

Показания гравиметра:

- три составляющих внешней удельной силы $\frac{м}{с^2}$ в приборной системе координат

Также были даны оценки углов курса, крена, тангажа в градусах.

Были даны калибровочные параметры акселерометров: смещение нулевого сигнала – Δf_{zi} и масштабные коэффициенты – K_i (приведены в таблице). Показания акселерометров по каждой оси преобразовывались по формуле: $f_{zi}^{new} = f'_{zi} - \Delta f_{zi} - K_i f'_{zi}$

Ось гравиметра	Смещение нулевого сигнала $\frac{м}{с^2}$	Масштабный коэффициент $\frac{м}{с^2}$
1	-0.0001	-0.00009
2	0.0002	-0.00009
3	0.00007	-0.000092

Коэффициенты определялись разностью показаний гравиметра и точно известного ускорения свободного падения в точке стоянки самолета. Значения были предоставлены лабораторией.

Также лабораторией были предоставлены данные СНС в дифференциальном режиме для этого же полета (то есть использовалось два приемника: база и приемник на самолете, это позволяет учесть ошибки атмосферы):

- вертикальная скорость в $\frac{м}{с}$
- составляющая скорости, направленная на север в $\frac{м}{с}$
- составляющая скорости, направленная на восток в $\frac{м}{с}$
- широта, долгота в радианах
- высота в метрах

Данные СНС в дифференциальном режиме использовались для построения оценки аномалии и сравнения её с оценкой в стандартном режиме.

В самолёте гравиметр был расположен, согласно рисунку 1.



Рис. 1: Расположение гравиметра в самолёте

Самолётом было выполнено 6 галсов, расстояние между соседними составляло 6 км. Траектория полёта представлена на рисунке 2. График изменения высоты полёта от времени представлен на рисунке 3. Общее время полёта составило 7 часов.

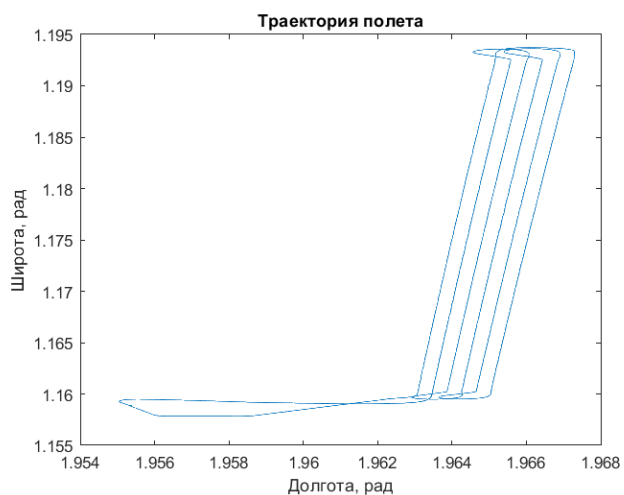


Рис. 2: Траектория полёта

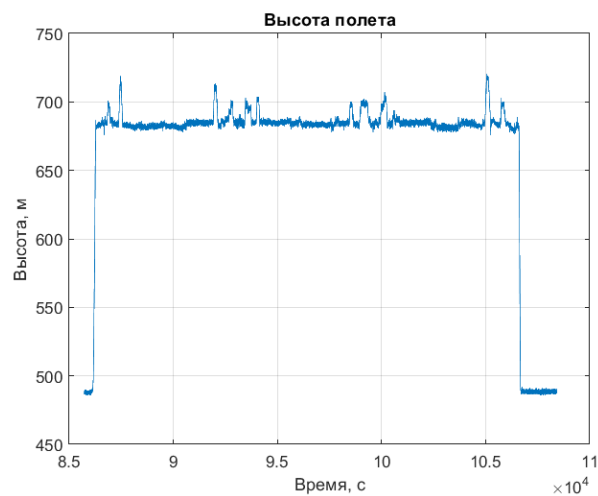


Рис. 3: Высота полёта

4.2 Анализ ускорений СНС (стандартный режим)

Сравним ускорения, полученные численным дифференцированием из скоростей СНС, и ускорения СНС, полученные по фазовым измерениям. На рисунке 4 представлены графики без сглаживания. Шум ускорений СНС более амплитудный, чем у вычисленных по скоростям.



Рис. 4: Ускорения, полученные из скоростей СНС, и ускорения СНС без сглаживания

После сглаживания ускорений (осреднением) с окном 100 секунд амплитуда шума в ускорениях становится одинаковой, однако невооруженным взглядом видно, что присутствует сдвиг данных по вертикальной оси, рисунок 5.

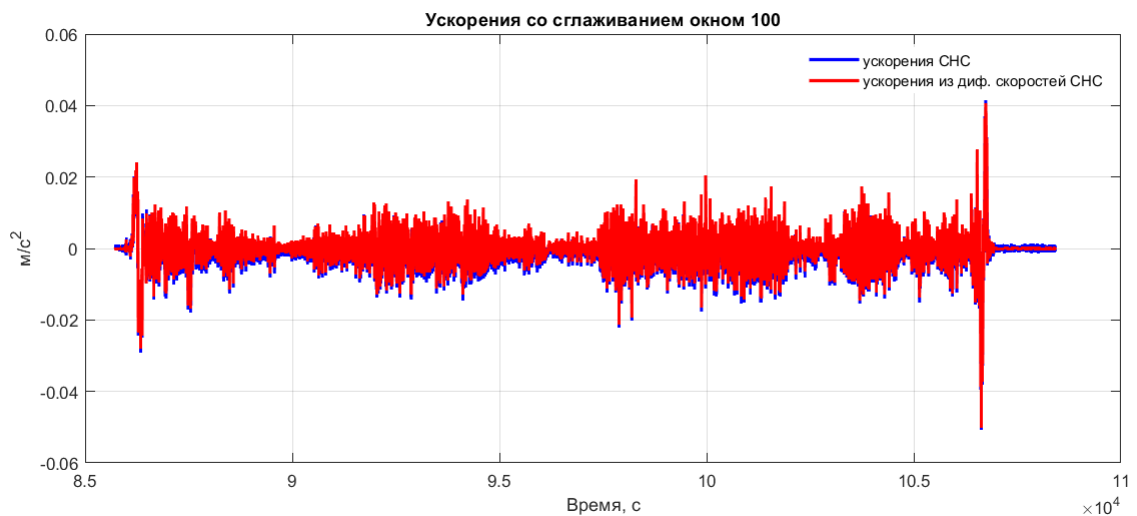


Рис. 5: Ускорения, полученные из скоростей СНС, и ускорения СНС со сглаживанием

На рисунке 6 приведена разность сглаженных ускорений. Среднее квадратическое отклонение составило $0.627 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, а среднее значение разности: $0.64 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Смещение вызвано ошибками в обработке данных СНС пакетом лаборатории, оно не имеет физического объяснения.

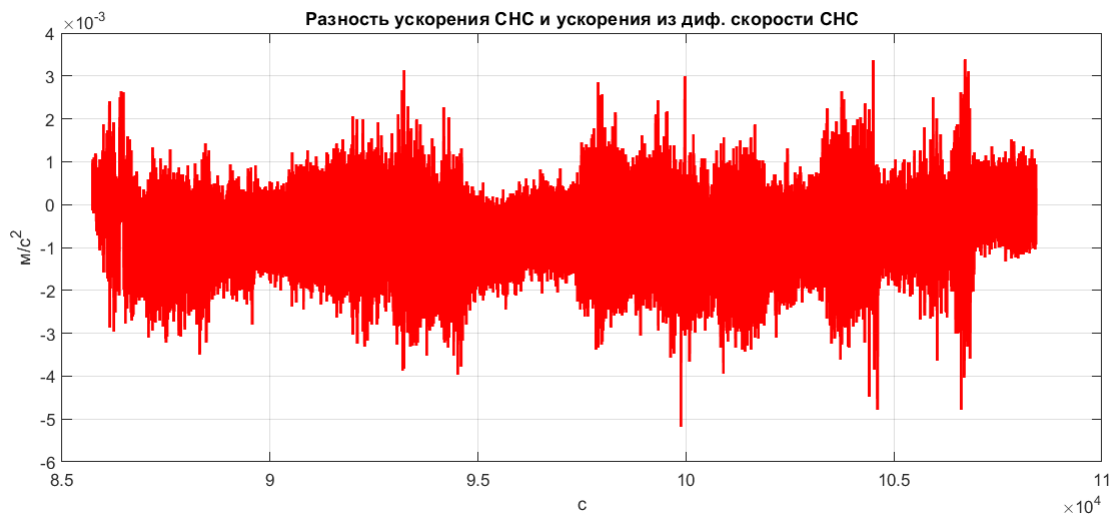


Рис. 6: Разность ускорения СНС и ускорения из дифференцирования скорости СНС

Рассмотрим спектр ускорений на стоянке самолета, рисунок 7. Рассматривается участок данных на стоянке так как, нет движения, что позволяет проанализировать ошибки измерений СНС. Шум ускорений, полученных из дифференцирования скоростей СНС, и ускорений СНС на диапазоне до 1 Гц имеют схожие частотные характеристики, на высоких частотах шум ускорений СНС значительно быстро возрастает. На рабочих частотах до 1 Гц спектры ускорений совпадают, что предположительно позволяет использовать ускорения СНС в аэрогравиметрии.

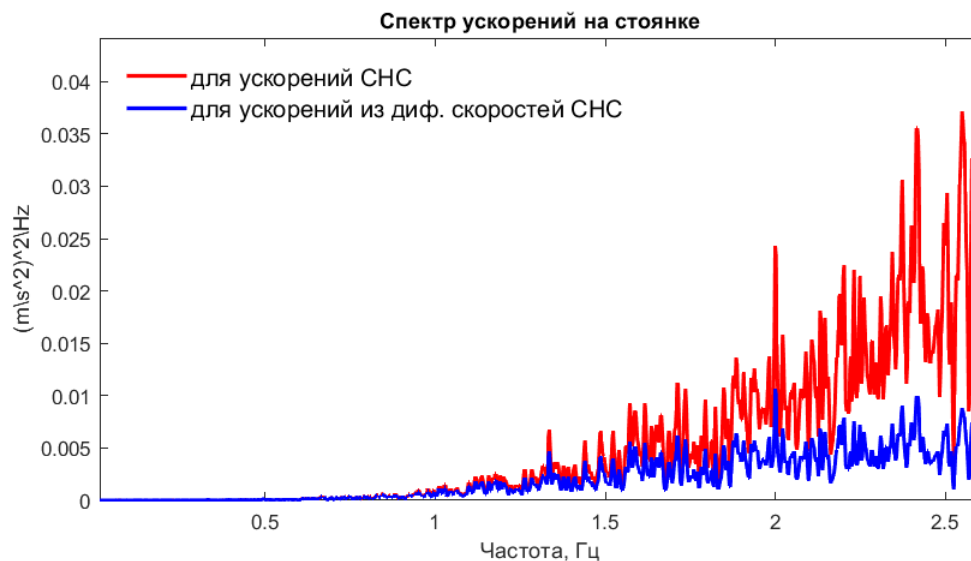


Рис. 7: Спектр ускорений

4.3 Результаты оценивания аномалии (стандартный режим)

Формулы для вычисления модельного вертикального a'_{up} ускорения приведены в разделе 2.2, рисунок 8. Модельная скорость V'_{up} была получена из модельного ускорения интегрированием, рисунок 9.

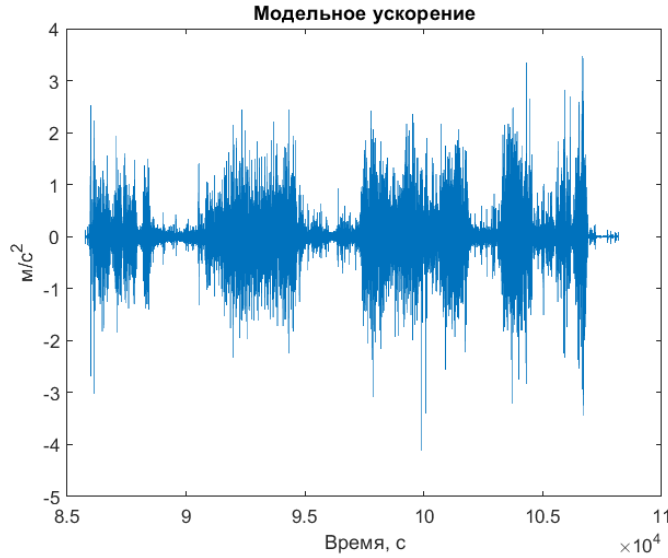


Рис. 8: Модельное ускорение

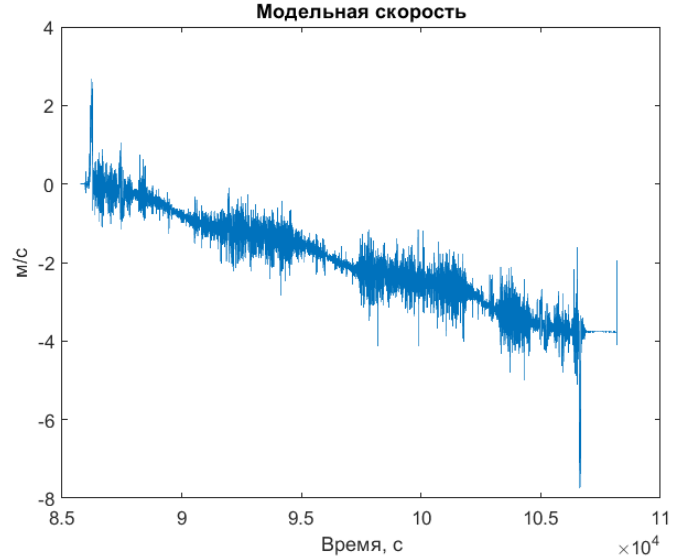


Рис. 9: Модельная скорость

На рисунках 10 и 11 представлены ошибки решения модельных уравнений. Ошибка модельной скорости за 7 часов составила $4 \frac{m}{c}$.

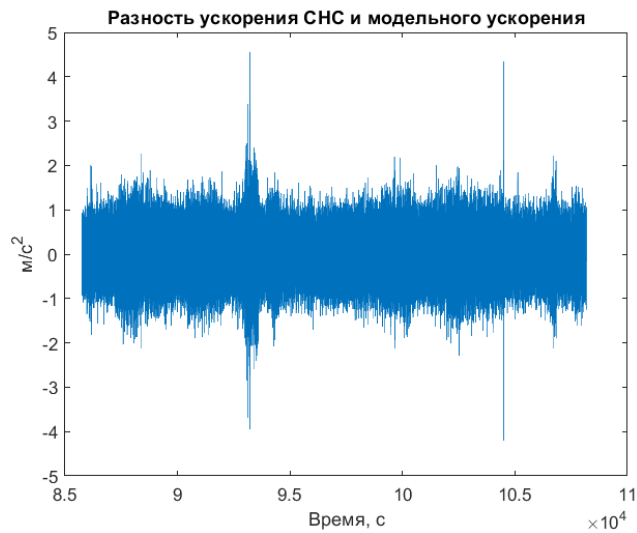


Рис. 10: Модельное ускорение

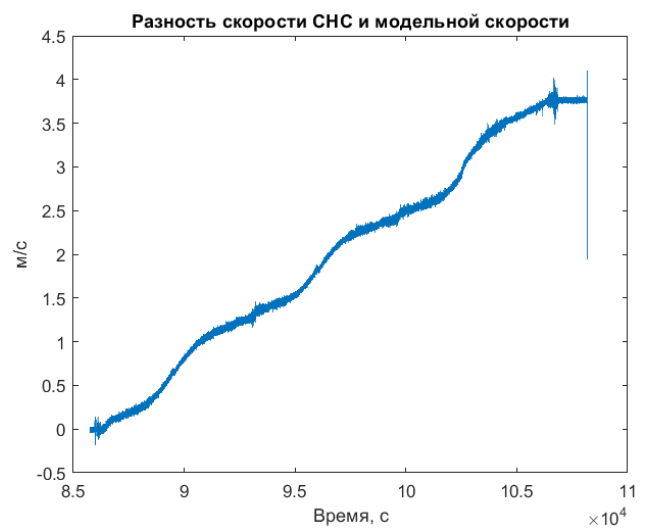


Рис. 11: Модельная скорость

На рисунке 12 приведена оценка аномалии от времени, вычисленная двумя подходами (1), (2). Можно заметить, что на нечетных галсах значения, полученные с использованием скоростей и ускорений СНС отличны, а на четных – близки. Это хорошо заметно на графике разности аномалий.

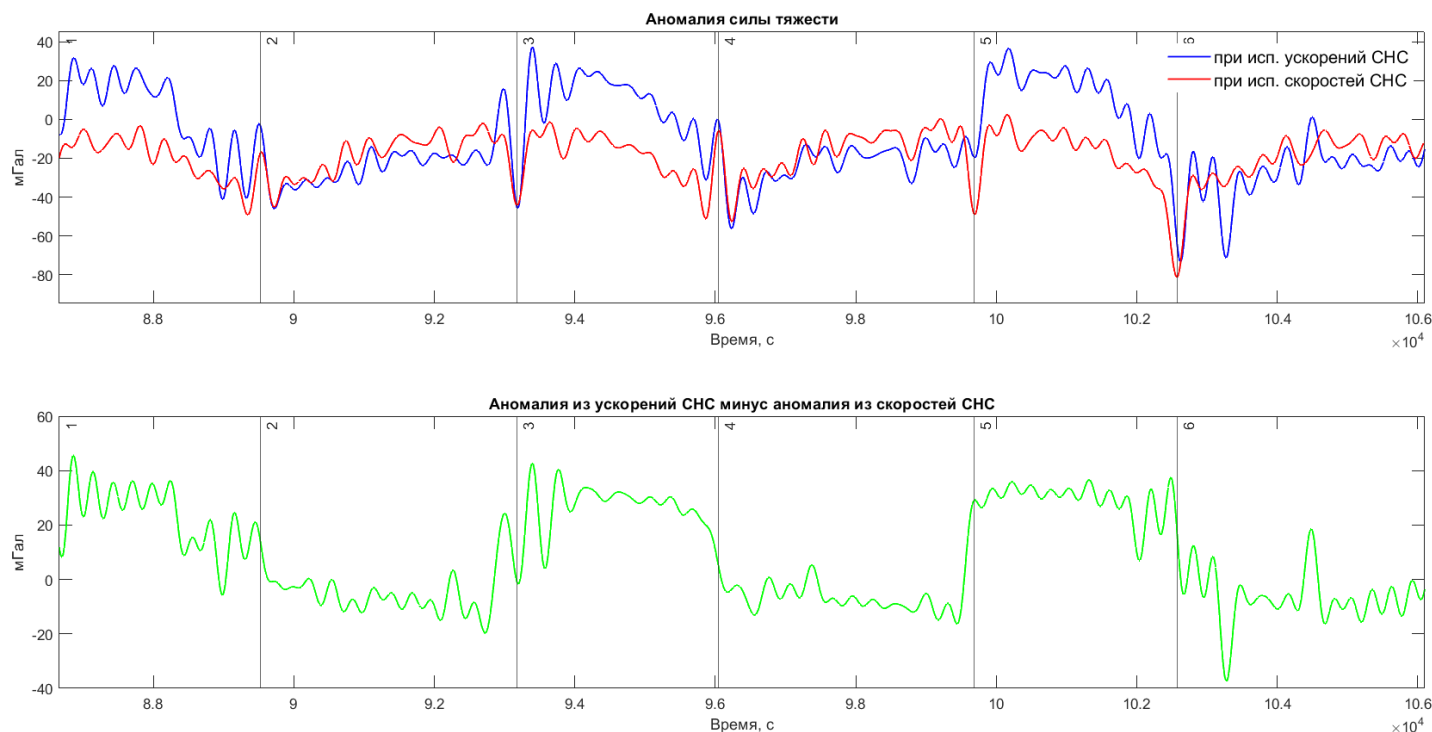


Рис. 12: Оценка аномалии силы тяжести; разность аномалий, вычисленных способом с использованием ускорений СНС и скоростей СНС на галсах

Номер галса	1	2	3	4	5	6
СКО для разности аномалий мГал	11.078	8.124	8.665	6.581	5.902	9.156
mean для разности аномалий мГал	23.142	-4.677	26.502	-6.111	29.347	-6.416

Рассмотрим рисунок 13, на котором представлена оценка аномалии от широты двумя методами. На графике видно, что для подхода с использованием скоростей СНС прямой и обратный галс совпадает по значению аномалии, однако, для по с использованием ускорения СНС, прямой и обратный галс смещены друг относительно друга примерно на 20 мГал. Значения аномалии должно примерно совпадать на всех галсах, так как галсы были выполнены часто: расстояние между соседними – 6 км, а между первым и последним – 36 км.

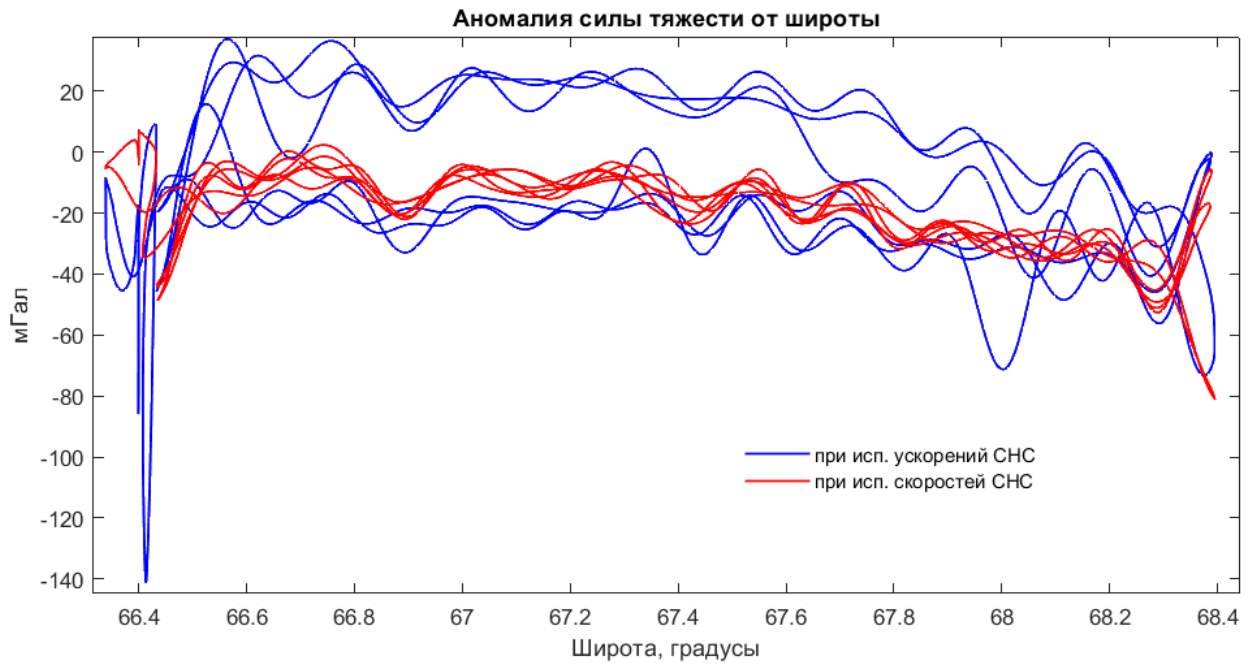


Рис. 13: Оценка аномалии силы тяжести от широты

Значения спектра оценки аномалии вычислялись по формуле: $(a_i^2 + b_i^2)^{\frac{1}{2}}$, где $i = 0 \dots N$, $N = 78$ - степень разложения. На рисунке 14 приведены спектры двух аномалии, вычисленные с использованием скоростей СНС и ускорений СНС. Видно, что спектры не совпадают абсолютно, но близки на высоких частотах и ярко выражено различны на низких.

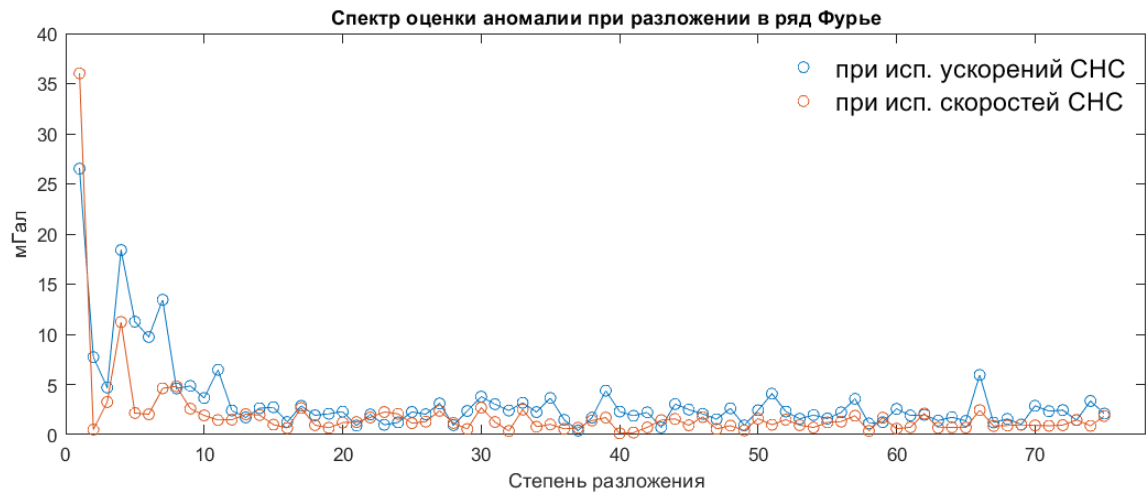


Рис. 14: Спектр аномалии в стандартном режиме

4.4 Результаты оценивания аномалии (дифференциальный режим)

На рисунке 15 приведено сравнение высоты полета в стандартном и дифференциальном режиме на шести галсах.

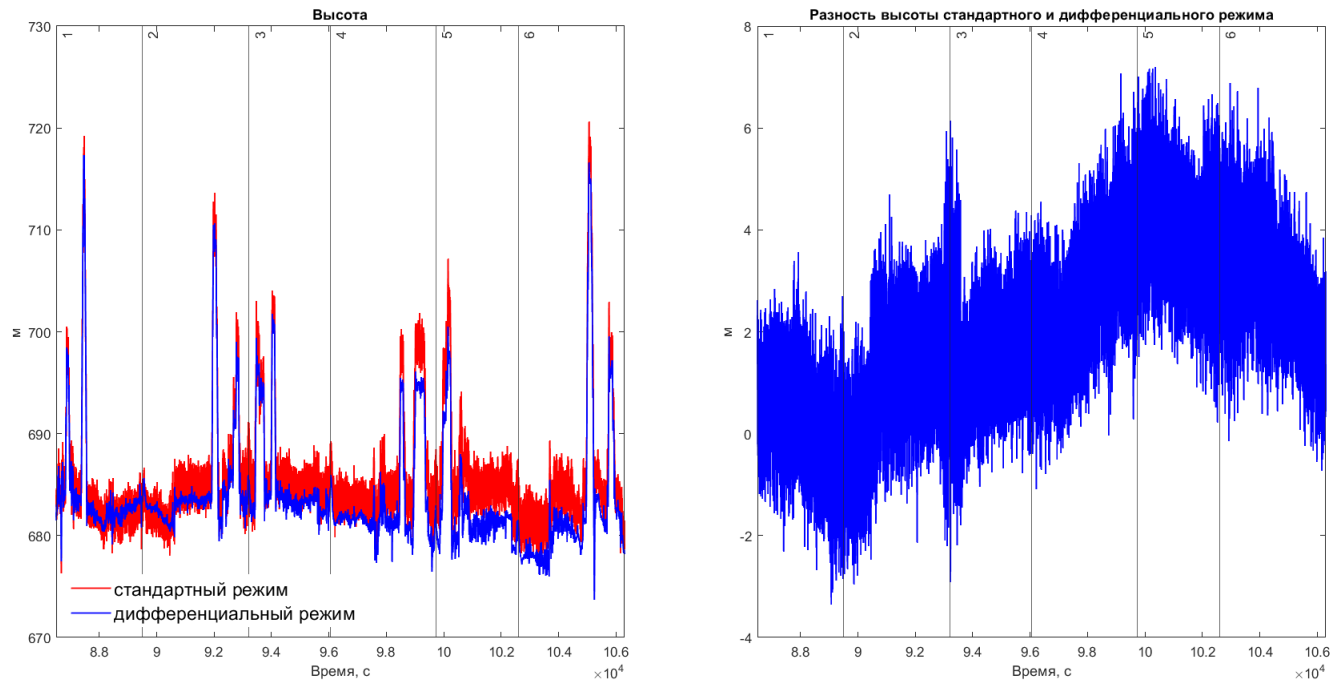


Рис. 15: Сравнение высоты в стандартном и дифференциальном режиме

Номер галса	1	2	3	4	5	6
СКО для разности высот м	0.825	1.096	0.837	1.059	0.843	0.958
mean для разности высот м	0.220	0.930	1.609	2.701	3.974	2.919

Уход от нулевого значения графика разности высоты в стандартном и дифференциальном режиме вызван ошибками атмосферы, которые содержатся в стандартном режиме. Ошибки высоты должны быть отражены при расчете аномалии в стандартном режиме, так как высота входит в формулу Гельметра для нормальной силы тяжести.

На графике 16 приведено сравнение аномалии в стандартном и дифференциальном режиме на шести галсах. В каждом из этих режимов применялся подход расчета с использованием скоростей СНС.

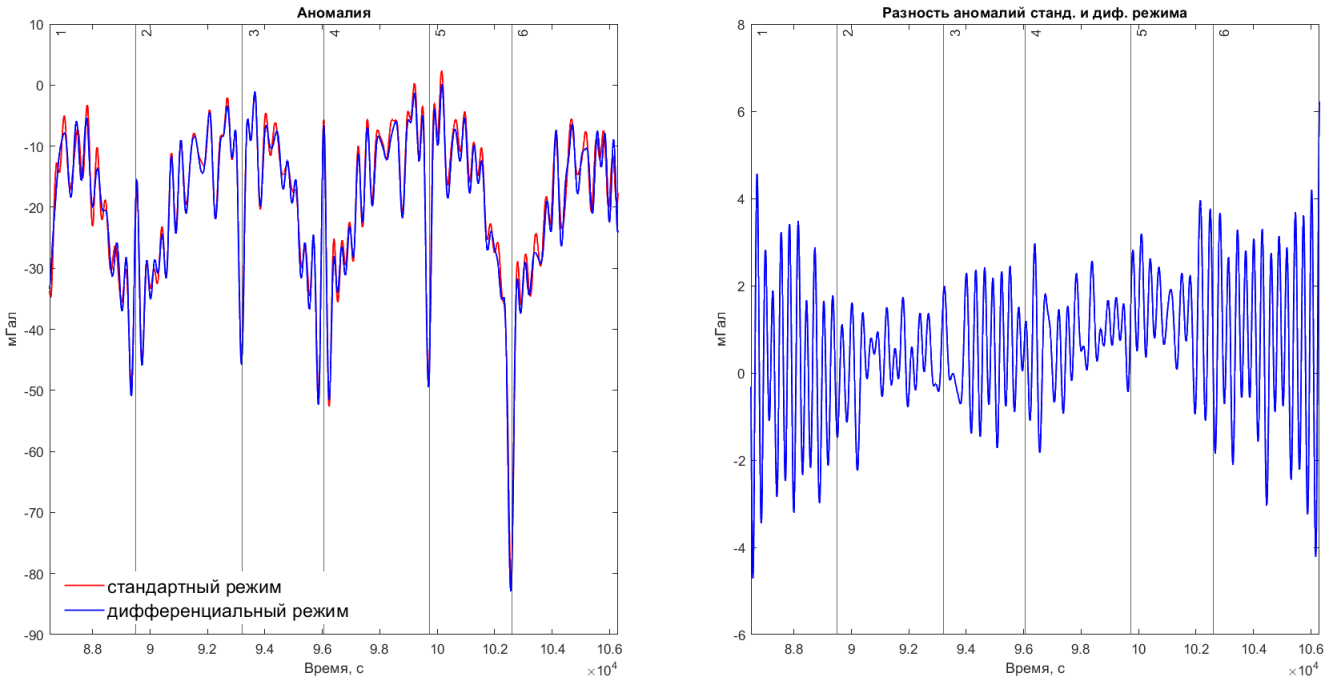


Рис. 16: Сравнение высоты в стандартном и дифференциальном режиме

Номер галса	1	2	3	4	5	6
СКО для разности аномалий мГал	1.954	0.785	1.123	0.922	1.077	1.835
mean для разности аномалий мГал	0.137	0.272	0.506	0.778	1.474	0.773

Сравним спектры оценки аномалии, полученные из дифференциального и стандартного режима с использованием скоростей СНС, рисунок 17. Самое значимое различие в нулевом коэффициенте разложения в ряд Фурье, остальные коэффициенты гармоник схожи.



Рис. 17: Спектр аномалии в стандартном и дифференциальном режиме

5. Выводы

1. Спектры ускорений СНС, полученных по первичным измерениям, и ускорений, полученных из дифференцирования скоростей СНС, совпадают на низких частотах (до 1 Гц). Это позволяет сделать предположение о применимости ускорений СНС для решения задачи аэрогравиметрии.
2. Ускорения СНС содержат ошибку обработки, которая наиболее заметно проявляется в области низких частот.
3. Подход с использованием скоростей СНС в стандартном режиме дал достоверный результат (судя по коррелированности оценок аномалии на соседних галсах).
4. Сравнение результатов вычислений аномалии при помощи скорости СНС в стандартном и дифференциальном режиме показало, что стандартный режим можно использовать для первичной экспресс-диагностики полета. Расхождение оценок аномалии в стандартном и дифференциальном режиме составило около 1 мГал (СКО).
5. Ошибки, связанные с атмосферой в данных СНС в стандартном режиме, вносят вклад в аномалию силы тяжести. Максимальная величина ошибки составила 1.5 мГал для 6-часового полета.

Список литературы

- [1] Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. "Математические основы инерциальных навигационных систем." М.: Изд-во Московского университета. 2020.
- [2] Н.Б. Вавилова, А.А. Голован "Определение ускорения объекта при помощи первичных измерений спутниковой навигационной системы." 2003.
- [3] Лаборатория управления и навигации МГУ "Математические модели, методы и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Дифференциальный и относительный режим." 2019.