1 Задание

Найти численное решение задачи поиска устойчивой периодической траектории пассивной системы, приведенной на рисунке 1 статьи на языке python. Предполагается абсолютно неупругий удар, как в статье. Проанализировать влияние параметров на устойчивость решения. Получить фазовый портрет движения, анимацию.

2 Теоретическая справка

Отдельный шаговый цикл может быть описан следующим уравнением, записанным в матричной форме:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{a}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = 0$$

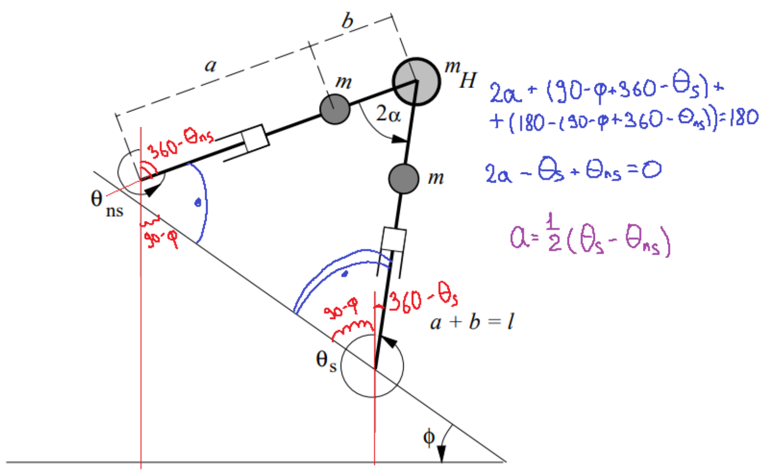
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{pmatrix} \beta^2 & -(1+\beta)\beta\cos 2\alpha \\ -(1+\beta)\beta\cos 2\alpha & (1+\beta)^2(\mu+1)+1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \begin{pmatrix} 0 & (1+\beta)\beta\dot{\theta}_s\sin(\theta_s-\theta_{ns}) \\ -(1+\beta)\beta\dot{\theta}_{ns}\sin(\theta_s-\theta_{ns}) & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{pmatrix} g\beta\sin\theta_{ns} \\ -((\mu+1)(1+\beta)+1)\,g\sin\theta_s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Однако ходьба циклична, поэтому при смене опорной ноги необходимо выполнить преобразование с вектором обобщенных координат. Для производных обобщенных координат:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^+ = (\boldsymbol{Q}^+(\alpha))^{-1}\boldsymbol{Q}^-(\alpha)\dot{\boldsymbol{\theta}}^- = \boldsymbol{H}(\alpha)\dot{\boldsymbol{\theta}}^-$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}^-(\alpha) &= \begin{pmatrix} -\beta & -\beta + \left(\mu(1+\beta)^2 + 2(1+\beta)\right)\cos 2\alpha \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{Q}^+(\alpha) &= \begin{pmatrix} \beta(\beta-(1+\beta)\cos 2\alpha) & (1+\beta)((1+\beta)-\beta\cos 2\alpha) \\ & \cdots + 1 + \mu(1+\beta)^2 \\ \beta^2 & -\beta(1+\beta)\cos 2\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Для обобщенных координат:$\Theta^+ = J\Theta^-$, где J – антисимметричная единичная матрица 2x2.



Значение угла α рассчитывается согласно геометрии на рисунке выше.

В решении реализовано "переключение"при смене опорной ноги по примерному периоду системы 0.1 сек, видно из графиков. Это условие переключения не реалистично и принято "заглушкой". Для точного определения момента переключения нужно написать уравнение движения центра масс системы и отслеживать экстремумы.

Система, описывающая движение, имеет второй порядок, поэтому вектор обобщенных координат должен принять вид: $q = [\Theta_s, \Theta_{ns}, \dot{\Theta_s}, \dot{\Theta_{ns}}]^T$. Так мы сведем систему к первому порядку. Решить в явном виде систему нельзя, поэтому необходимо применить численное интегрирование методом Рунге-Кутта. Мною были найдены коэффициенты для метода пятого порядка точности в книге Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи."

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
y_1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
$\hat{y}_1$	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

Задача имеет вид $\dot{q} = f(q)$

Определение 1.1. Пусть s — целое положительное число («число стадий», или «этапов») и $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{s1}, a_{s2}, a_{s,s-1}, \ldots, b_1, \ldots, b_s, c_2, \ldots, c_s$ — вещественные коэффициенты. Тогда метод

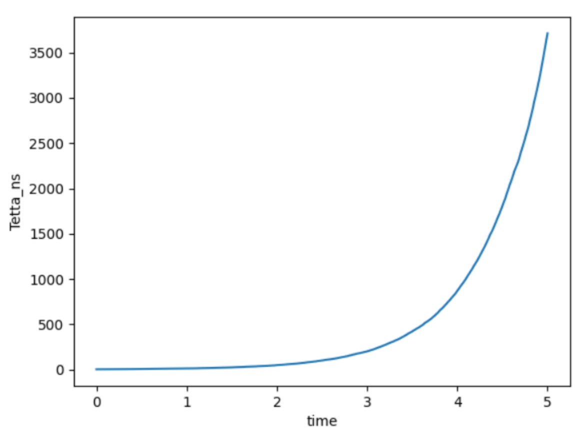
$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0),\\
k_2 &= f(x_0 + c_2 h, \quad y_0 + h a_{21} k_1),\\
k_3 &= f(x_0 + c_3 h, \quad y_0 + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
k_s &= f(x_0 + c_s h, \quad y_0 + h(a_{s1} k_1 + \ldots + a_{s,s-1} k_{s-1})),\\
y_1 &= y_0 + h(b_1 k_1 + \ldots + b_s k_s)
\end{aligned}
$$

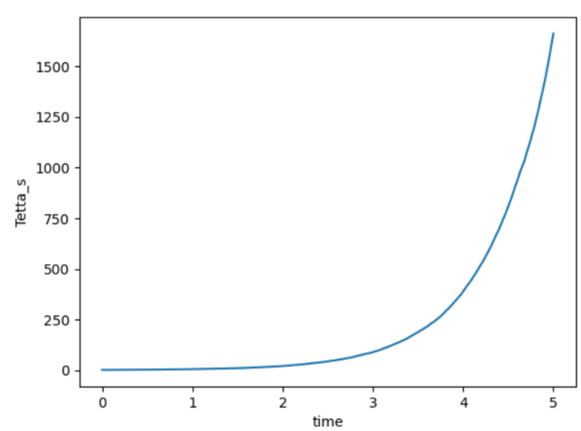
называется *s-стадийным* (*s*-этапным) *явным методом Рунге—Кутты* (ЯМРК) для задачи

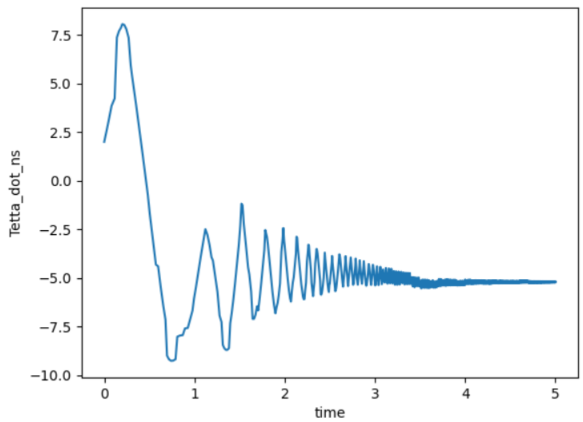
Автоматическое управление длиной шага интегрирования также реализовано. Для этого используется специфичная норма, коэффициенты для которой приведены в последней строчке таблицы. Новый шаг высчитывается по формуле, где все константы известны: $h_{new} = h \cdot \min(facmax,\ \max(facmin,\ fac \cdot (tol/err)^{1/(p+1)}))$.

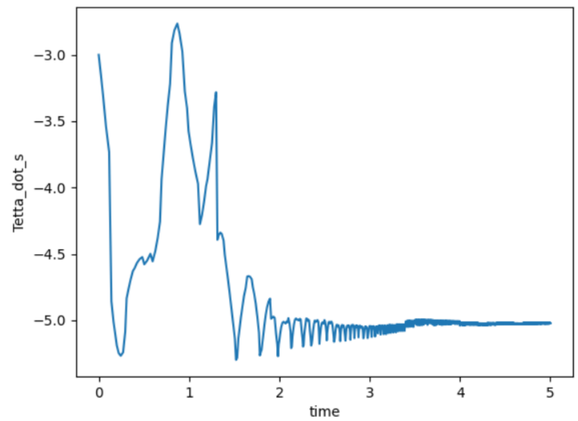
3 Обсуждение предварительных результатов

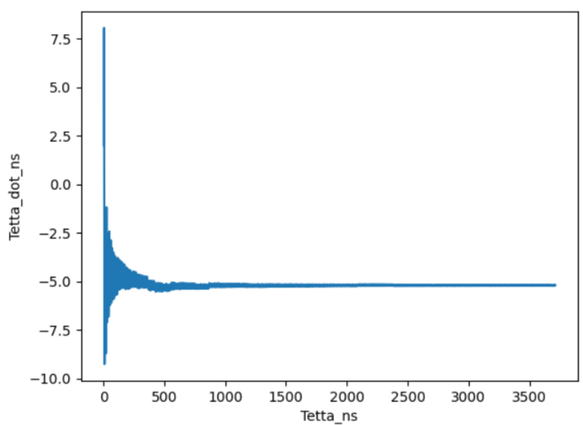
Графики производных и координат в зависимости от времени выглядят не достоверно, это связано с неверным выбором момента переключения.
Начальные условия $q_0 = [\Theta_s^0, \Theta_{ns}^0, \dot{\Theta_s}^0, \dot{\Theta_{ns}}^0] = [pi, pi/4, 2, -3]$,
Параметры системы имели вид: $\beta = 1, \phi = 30, \mu = 2$.

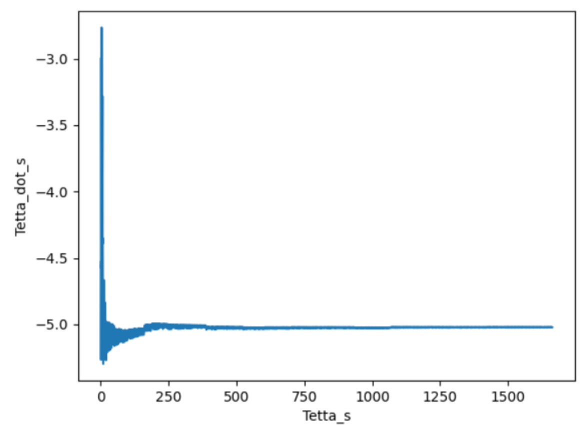


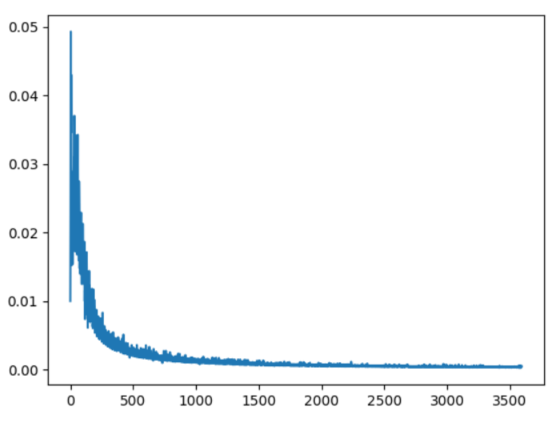












На последнем графике приведено изменение интервала интегрирования, согласно примененному алгоритму. Начальные условия я выбирала согласно указаниям в статье "Исследование устойчивости движения для модели двуногой ходьбы"С.А. Юдаев. Привожу выдержки из неё.

Первоначальный анализ устойчивости может быть проведен с помощью упрощенной, безразмерной модели. Такая модель предложена в [3]. При этом уравнения движения принимают вид

$$\ddot{\theta}_{st}(t)-\sin\left(\theta_{st}(t)-\alpha\right)=0 \tag{4}$$

$$\ddot{\theta}_{st}(t)-\ddot{\theta}_{sw}(t)+\dot{\theta}_{st}(t)^2\sin\phi(t)-\cos\left(\theta_{st}(t)-\alpha\right)\sin\theta_{sw}(t)=0. \tag{5}$$

В данном случае можно рассматривать первое уравнение системы независимо. В таком случае фазовый портрет уравнения (4) представляет собой фазовый портрет обыкновенного маятника. Синим цветом выделена линия соединяющая особые точки данной системы с координатами $(\alpha+n\pi,0), n\in Z$. Особая точка с координатами $(\alpha+2n\pi,0)$ представляет собой «седло», особые точки при $(\alpha+(2n+1)\pi,0)$ являются особыми точками типа «центр». При $\dot{\theta}_{st}<0,\ 0\le\theta_{st}\le 2\pi$ вышеуказанная линия, проходящая от центра к седлу, является сепаратрисой, разделяющей области различного поведения системы. Очевидно, чтобы удовлетворить начальным условиям (2) необходимо выбрать начальные точки ниже указанной сепаратрисы.

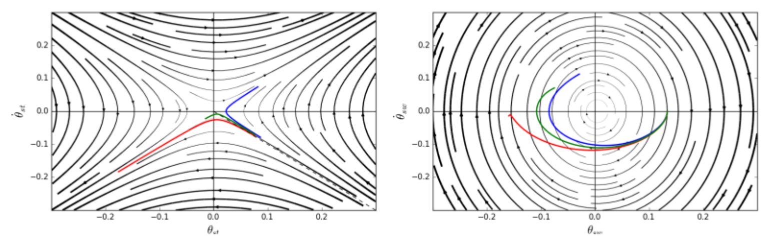


Рис. 2. Фазовые портреты линеаризованной системы.