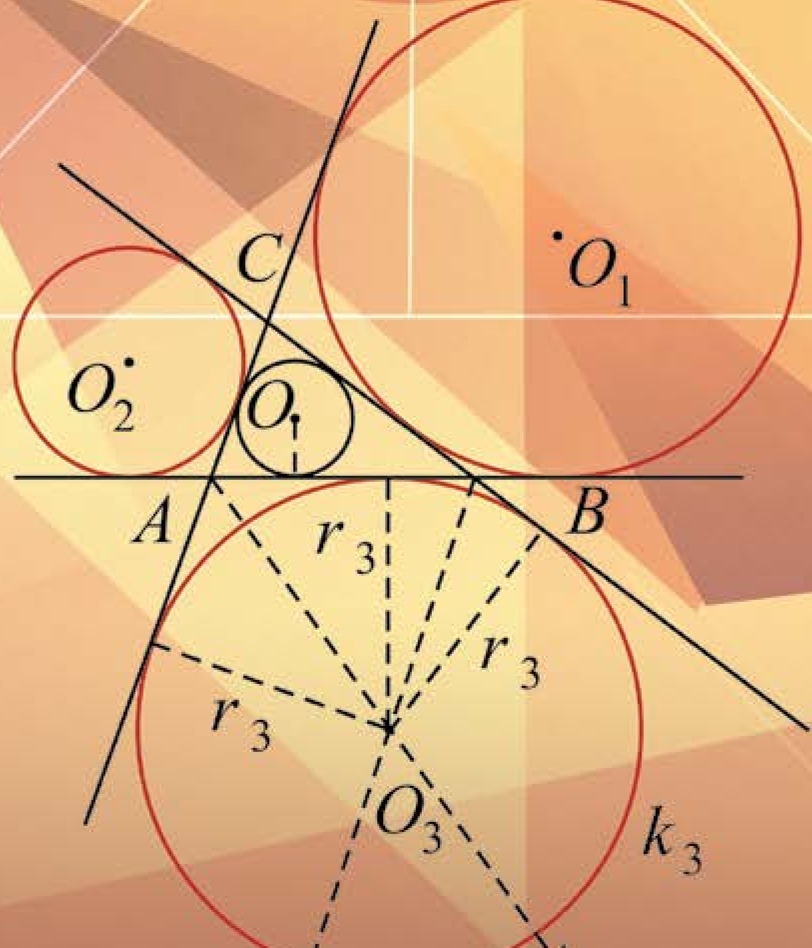
Здравка Паскалева, Мая Алашка, Пламен Паскалев, Райна Алашка

МАТЕМАТИКА

8 КЛАС



АрхИМеД
ИЗДАТЕЛСТВО

Здравка Паскалева, Мая Алашка, Пламен Паскалев, Райна Алашка

МАТЕМАТИКА

8 клас

АрхИМеД
ИЗДАТЕЛСТВО

Означения, използвани в учебника:

О Определение

Т Теорема

! Знания, които трябва да се запомнят

! Основни знания

Обърнете внимание! – пояснения към решението на задачите

Интересни допълнения към учебния материал

1, 2, ... Задачи с повишена трудност

Рецензенти: проф. д.п.н. Сава Гроздев
доц. д-р Драго Михалев
Владимир Николов
Консултант по графичния дизайн: проф. Илия Иванов Илиев

ISBN: 978-954-779-213-5

СЪДЪРЖАНИЕ

ВХОДНО НИВО

(Урок № 1 – Урок № 4)

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

- Цели изрази
- Уравнения и неравенства
- Триъгълници

ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА ВХОДНО НИВО С РЕШЕНИЯ
ДВА ПРИМЕРНИ ТЕСТА ЗА ВХОДНО НИВО
УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНКА НА ВСИЧКИ ТЕСТОВЕ, ДАДЕНИ В УЧЕБНИКА

1. ЦЕЛИ ИЗРАЗИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. ПРЕГОВОР

ЗАДАЧА 1 Приведете изразите в нормален вид и пресметнете числената им стойност, ако:

а) $A = (2x + 3)^2 - (2x - 1)(2x + 5)$ при $x = -3\frac{3}{4}$;

б) $B = (x + 2)^3 - (x - 1)(x^2 + x + 1)$ при $x = -\frac{5}{6}$.

Решение:

а) $A = (2x + 3)^2 - (2x - 1)(2x + 5) =$

$= 4x^2 + 12x + 9 - (4x^2 + 10x - 2x - 5) =$

$= 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 - 10x + 2x + 5 =$

$= 4x + 14$

При $x = -3\frac{3}{4}$

$$A = 4 \cdot \left(\frac{-15}{4}\right) + 14 = -15 + 14 = -1.$$

б) $B = (x + 2)^3 - (x - 1)(x^2 + x + 1) =$

$= x^3 + 3x^2 \,.\, 2 + 3x \,.\, 2^2 + 2^3 - (x^3 - 1^3) =$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 1 =$

$= 6x^2 + 12x + 9$

При $x = -\frac{5}{6}$

$$B = 6 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + 12 \cdot \left(\frac{-5}{6}\right) + 9 =$$

$$= \frac{25}{6} - 10 + 9 = 4\frac{1}{6} - 1 = 3\frac{1}{6}.$$

ЗАДАЧА 2 Разложете на множители:

а) $4x^3 - 9x$; б) $3x^2 - 7x + 4$; в) $x^4 - 10x^2 + 9$; г) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

Решение:

а) $4x^3 - 9x =$

$= x(4x^2 - 9) =$

$= x((2x)^2 - 3^2) =$

$= x(2x + 3)(2x - 3)$

в) $x^4 - 10x^2 + 9 =$

$= x^4 - x^2 - 9x^2 + 9 =$

$= x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) =$

$= (x^2 - 1)(x^2 - 9) =$

$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$

б) $3x^2 - 7x + 4 =$

$= 3x^2 - 3x - 4x + 4 =$

$= 3x(x - 1) - 4(x - 1) =$

$= (x - 1)(3x - 4)$

г) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 =$

$= x^2(x - 3) - 4(x - 3) =$

$= (x - 3)(x^2 - 4) =$

$= (x - 3)(x + 2)(x - 2)$

ЗАДАЧА 3 Решете уравненията:

а) $(x + 3)^2 = (x - 3)(x + 1) - 4$;

б) $(x + 2)(x - 2) = x(x - 1)$;

в) $(2x + 1)^2 - 4x = (2x + 3)(2x - 3) + 5$;

г) $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{3} = 1 - \frac{12-x}{6}$.

Решение:

а) $(x + 3)^2 = (x - 3)(x + 1) - 4$

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + x - 3x - 3 - 4$

$8x = -16$

$x = -2$

б) $(x + 2)(x - 2) = x(x - 1)$

$x^2 - 4 = x^2 - x$

$x = 4$

в) $(2x+1)^2-4x=(2x+3)(2x-3)+5$

$4x^2+4x+1-4x=4x^2-9+5$

$0\,.\,x=-5$

няма корени.

г) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x+3}{3}=1-\dfrac{12-x}{6}$

$3x-2(x+3)=6-(12-x)$

$0\,.\,x=0$

всяко число е корен.

ЗАДАЧА 4 Решете уравненията:

а) $(x+4)^2-10=3(x+2)$;

б) $(x+1)^3-3x(x+4)=1$;

в) $x^2+6x-7=0$;

г) $x^2+8x+20=0$.

Решение:

а) $(x+4)^2-10=3(x+2)$

$x^2+8x+16-10=3x+6$

$x^2+5x=0$

$x(x+5)=0$

$x=0$ или $x+5=0$

$x_1=0,\quad x_2=-5$

б) $(x+1)^3-3x(x+4)=1$

$x^3-9x=0$

$x(x^2-9)=0$

$x(x+3)(x-3)=0$

$x=0$ или $x+3=0$ или $x-3=0$

$x_1=0,\quad x_2=-3,\quad x_3=3$

в) $x^2+6x-7=0$

$x^2+2\,.\,x\,.\,3+3^2-3^2-7=0$

$(x+3)^2-16=0$

$(x+3+4)(x+3-4)=0$

$(x+7)(x-1)=0$

$x_1=-7,\quad x_2=1$

г) $x^2-8x+20=0$

$x^2-2\,.\,x\,.\,4+4^2-4^2+20=0$

$(x-4)^2+4=0$

$(x-4)^2+4>0$ за всяко x

няма корени.

ЗАДАЧА 5 Решете неравенствата:

а) $x(x-2)<(x+4)(x-4)$;

б) $\dfrac{x+5}{2}-\dfrac{2x+1}{3}\geq 1-\dfrac{5-x}{6}$;

в) $(x+5)(x-2)\leq x(x+3)-22$;

г) $(x+3)^2>(x+8)(x-2)$.

Решение:

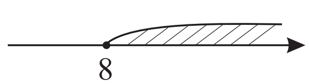
а) $x(x-2)<(x+4)(x-4)$

$x^2-2x<x^2-16$

$-2x<-16\;\;/.\,(-1)$

$2x>16$

$x>8$



$x\in(8;+\infty)$

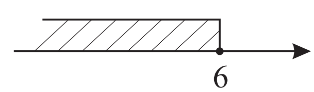
б) $\dfrac{x+5}{2}-\dfrac{2x+1}{3}\geq 1-\dfrac{5-x}{6}$

$3(x+5)-2(2x+1)\geq 6-(5-x)$

$3x+15-4x-2\geq 6-5+x$

$2x\leq 12$

$x\leq 6$



$x\in(-\infty;6]$

в) $(x+5)(x-2)\leq x(x+3)-22$

$x^2-2x+5x-10\leq x^2+3x-22$

$0x\leq -12$

няма решение.

г) $(x+3)^2>(x+8)(x-2)$

$x^2+6x+9>x^2-2x+8x-16$

$x^2+6x+9>x^2+6x-16$

$0\,.\,x>-25$

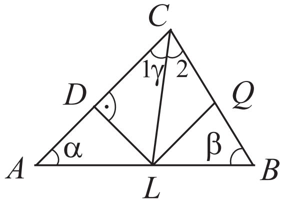
всяко число е решение.

$x\in(-\infty;+\infty)$

2. ТРИЪГЪЛНИК. ПРЕГОВОР

ЗАДАЧА 1 За ъглите α, β и γ на $\triangle ABC$ е изпълнено, че $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$. CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Ако LQ ($Q \in BC$) е успоредна на AC и LD ($D \in AC$) е перпендикулярна на AC, намерете в градуси големината на:
а) α, β и γ; б) $\sphericalangle CLQ$; в) $\sphericalangle CLD$.

Решение:



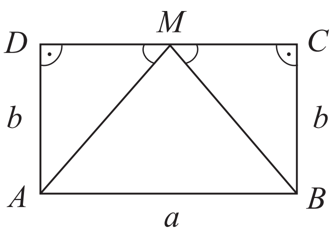
а) От $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4 \Rightarrow \alpha = 2x$, $\beta = 3x$, $\gamma = 4x$.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (сбор от вътрешните ъгли на триъгълника)
$2x + 3x + 4x = 180°$
$9x = 180°$, $x = 20° \Rightarrow \alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$

б) $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}80° = 40°$ (CL – ъглополовяща)
$\sphericalangle CLQ = \sphericalangle 1 = 40°$ (вътрешнокръстни за $(AC \parallel LQ) \times CL$)

в) $\sphericalangle CLD = 180° - 90° - \sphericalangle 1 = 90° - 40° = 50°$ ($LD \perp AC$)

ЗАДАЧА 2 Точката M е средата на страната CD на правоъгълника $ABCD$. Докажете, че:
а) $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$; б) $\triangle ABM$ е равнобедрен.

Решение:



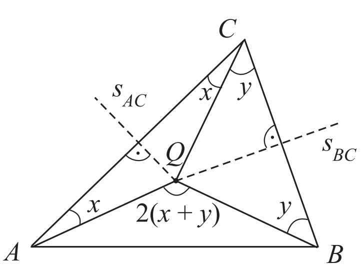
а) **1.** Разглеждаме $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$.
За тях $AD = BC = b$ (срещуположни страни в правоъгълник)
$DM = CM = \frac{a}{2}$ (M – среда на CD)
$\sphericalangle ADM = \sphericalangle BCM = 90°$ ($ABCD$ – правоъгълник)
$\Rightarrow \triangle AMD \cong \triangle BMC$ (I признак).

2. От (**1.**) $\Rightarrow \sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$; $AM = BM$

б) От $AM = BM \Rightarrow \triangle ABM$ е равнобедрен.

ЗАДАЧА 3 В остроъгълния $\triangle ABC$ симетралите на страните AC и BC се пресичат в точка Q. Докажете, че: а) точка Q лежи на симетралата на страната AB;
б) $\sphericalangle AQB = 2\sphericalangle ACB$.

Решение:



а) **1.** $Q \in s_{AC} \Rightarrow QA = QC \Rightarrow \triangle ACQ$ е равнобедрен
$\sphericalangle QAC = \sphericalangle QCA = x$

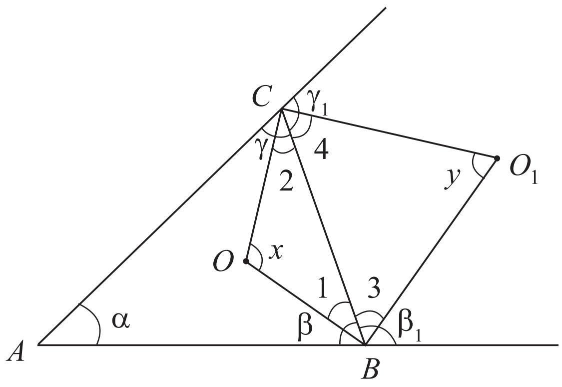
2. $Q \in s_{BC} \Rightarrow QB = QC \Rightarrow \triangle BCQ$ е равнобедрен
$\sphericalangle QBC = \sphericalangle QCB = y$

3. От (**1.**) и (**2.**) $\Rightarrow QA = QB \Rightarrow Q \in s_{AB}$

б) $\sphericalangle AQC = 180° - 2x$
$\sphericalangle BQC = 180° - 2y$
$\sphericalangle AQB = 360° - (\sphericalangle AQC + \sphericalangle BQC) =$
$= 360° - 180° + 2x - 180° + 2y =$
$= 2x + 2y = 2(x + y) = 2\sphericalangle ACB$
$\Rightarrow \sphericalangle AQB = 2\sphericalangle ACB$

ЗАДАЧА 4 В остроъгълния $\triangle ABC$ вътрешните и външните ъглополовящи при върховете B и C се пресичат съответно в точките O и O_1.
Изразете ъглите на четириъгълника OBO_1C чрез $\sphericalangle BAC = \alpha$.

Решение:



1. $\triangle BOC$, $\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\gamma$

$$\begin{aligned}\sphericalangle BOC &= 180° - (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2) = \\ &= 180° - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \\ &= 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = \\ &= 90° + \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

2. $\triangle BO_1C$, $\sphericalangle 3 = \frac{1}{2}\beta_1$, $\sphericalangle 4 = \frac{1}{2}\gamma_1$

$$\begin{aligned}\sphericalangle BO_1C &= 180° - (\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4) = \\ &= 180° - \frac{1}{2}(\beta_1 + \gamma_1) = \\ &= 180° - \frac{1}{2}(180° - \beta + 180° - \gamma) = \\ &= 180° - \frac{1}{2}(180° + \alpha) = \\ &= 90° - \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

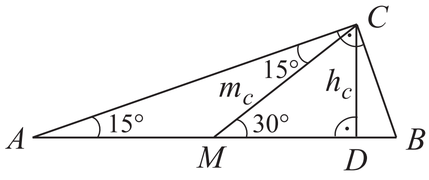
3. $\sphericalangle OBO_1 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta + \beta_1) = \frac{1}{2}180° = 90°$

4. $\sphericalangle OCO_1 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma_1) = \frac{1}{2}180° = 90°$

Отг. $OBO_1C\left(90° + \frac{\alpha}{2};\ 90°;\ 90° - \frac{\alpha}{2};\ 90°\right)$

ЗАДАЧА 5 В правоъгълния $\triangle ABC$ хипотенузата $AB = 12$ cm и $\sphericalangle BAC = 15°$.
Намерете големината на:
а) медианата към хипотенузата – m_c;
б) височината към хипотенузата – h_c;
в) лицето на $\triangle ABC$.

Решение:



а) CM – медиана към хипотенузата AB

$\Rightarrow CM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6$ cm, $m_c = 6$ cm

б) $CM = AM \Rightarrow \triangle ACM$ е равнобедрен

$\sphericalangle ACM = \sphericalangle BAC = 15°$

$\sphericalangle DMC = 15° + 15° = 30°$ (външен ъгъл за $\triangle ACM$)

$\triangle DMC$ – правоъгълен с $30°$

CD – катет срещу $30°$, CM – хипотенуза

$\Rightarrow h_c = \frac{1}{2}m_c = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$ cm, $h_c = 3$ cm

в) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB\,.\,CD}{2} = \dfrac{c\,.\,h_c}{2} = \dfrac{12\,.\,3}{2} = 18\text{ cm}^2$

Забележка: В общия случай $c = 2m_c = 4h_c$ или $h_c = \frac{1}{2}m_c = \frac{1}{4}c$.

3. ТЕСТ С РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА 1 Стойността на израза $M=(x^2-3)(x^2+1)-x(x^3-2x+3)$ при $x=-\dfrac{1}{3}$ е:

А) -4; **Б)** -2; **В)** -1; **Г)** 2.

Решение:

$$M=(x^2-3)(x^2+1)-x(x^3-2x+3)=$$
$$=x^4+x^2-3x^2-3-x^4+2x^2-3x=$$
$$=-3x-3$$

При $x=-\dfrac{1}{3}$

$$M=-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-3=1-3=-2$$

Отг. Б)

ЗАДАЧА 2 Коренът на уравнението $(x+3)^2-(x-2)^2=5x+3$ е:

А) $-2\dfrac{1}{2}$; **Б)** 2; **В)** $\dfrac{2}{5}$; **Г)** $-\dfrac{2}{5}$.

Решение:

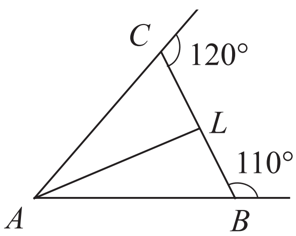
$$(x+3)^2-(x-2)^2=5x+3$$
$$x^2+6x+9-x^2+4x-4=5x+3$$

$$5x=-2$$
$$x=-\frac{2}{5}$$

Отг. Г)

ЗАДАЧА 3 В $\triangle ABC$ на чертежа AL е ъглополовяща. Големината на $\sphericalangle ALB$ е:

А) $70°$; **Б)** $75°$; **В)** $85°$; **Г)** $95°$.



Решение:

$$\sphericalangle ABC=\beta=180°-110°=70°$$
$$\sphericalangle ACB=\gamma=180°-120°=60°$$
$$\sphericalangle BAC=\alpha=180°-(\beta+\gamma)=50°$$
$$\sphericalangle BAL=\frac{\alpha}{2}=25°$$

В $\triangle ABL$

$$\frac{\alpha}{2}+\beta+\sphericalangle ALB=180°$$
$$25°+70°+\sphericalangle ALB=180°$$
$$\sphericalangle ALB=85°.$$

Отг. В)

ЗАДАЧА 4 Решенията на неравенството $(2x-3)^2\geq 4x(x-2)-3$ са:

А) $x\geq 3$; **Б)** $x\leq -3$; **В)** $x\geq -3$; **Г)** $x\leq 3$.

Решение:

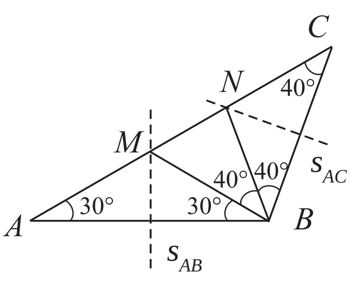
$$4x^2-12x+9\geq 4x^2-8x-3$$
$$-4x\geq -12 \quad |\,.(-1)$$

$$4x\leq 12$$
$$x\leq 3$$

Отг. Г)

ЗАДАЧА 5 В $\triangle ABC$ $\sphericalangle A=30°$ и $\sphericalangle B=110°$. Симетралите на страните AB и BC пресичат AC съответно в точките M и N. Ъглите на $\triangle MNB$ са:

А) $30°, 110°, 40°$; **Б)** $60°, 80°, 40°$; **В)** $30°, 30°, 120°$; **Г)** $80°, 80°, 20°$.



Решение:

$\sphericalangle C=180°-(30°+110°)=40°$

$M\in s_{AB}\Rightarrow MA=MB,\ \sphericalangle ABM=30°,\ \sphericalangle BMN=60°$

$N\in s_{BC}\Rightarrow NC=NB,\ \sphericalangle NBC=40°,\ \sphericalangle BNM=80°$

$\sphericalangle MBN=110°-(30°+40°)=40°$

$\triangle MNB(60°; 80°; 40°)$

Отг. Б)

ЗАДАЧА 6 Колко литра вода трябва да се добавят към 5 литра спирт от 80%, за да се получи спирт от 50%?

А) 2; **Б)** 3; **В)** 4; **Г)** 5.

Решение: x – литра вода

Уравнението е $\dfrac{5\,.\,80}{100}=\dfrac{(x+5)\,.\,50}{100}$

$8=x+5,\;\; x=3$

Отг. Б)

ЗАДАЧА 7

Числената стойност на израза $N=\dfrac{x^3+8}{3x^2-6x+12}$ при $x=-8$ е:

А) –2; **Б)** 2; **В)** –6; **Г)** 6.

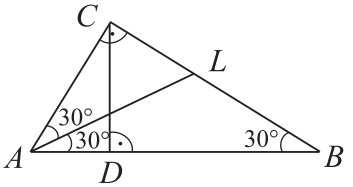
Решение: $N=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{3(x^2-2x+4)}=\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{-8+2}{3}=-2$

Отг. А)

ЗАДАЧА 8

В $\triangle ABC$ $\alpha:\beta:\gamma=2:1:3$ и ъглополовящата $AL=20$ cm. Намерете в сантиметри дължината на: а) страната BC; б) височината CD.

Решение: а) $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$, $\gamma=90^\circ$, $\sphericalangle BAL=\sphericalangle LAC=30^\circ$



$\triangle ABL$ – равнобедрен, $LA=LB=20$ cm

$\triangle ACL$ – правоъгълен с 30°, $CL=\dfrac{1}{2}AL=\dfrac{1}{2}\cdot 20=10$ cm

$BC=BL+LC=20+10=30$ cm

б) $\triangle BCD$ – правоъгълен с 30°, $CD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\cdot 30=15$ cm

Отг.
а) 30 cm
б) 15 cm

ЗАДАЧА 9

В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на еквивалентното му уравнение.

(А)	$x^2+4x=0$	(1)	$(x+2)(x-4)=0$
(Б)	$(2x+1)^2=(x+5)^2$	(2)	$x^2+6x-7=0$
		(3)	$(x-1)^2+9=0$
(В)	$\lvert x+3\rvert=4$	(4)	$\lvert -x-2\rvert=2$

Решение:

(А) $x^2+4x=0$
$x(x+4)=0$
$x_1=0,\;\; x_2=-4$

(Б) $(2x+1)^2-(x+5)^2=0$
$(2x+1+x+5)(2x+1-x-5)=0$
$(3x+6)(x-4)=0$
$x_1=-2,\;\; x_2=4$

(В) $\lvert x+3\rvert=4$
$x+3=4$ или $x+3=-4$
$x_1=1,\;\; x_2=-7$

(1) $(x+2)(x-4)=0$
$x_1=-2,\;\; x_2=4$

(2) $x^2+6x-7=0$
$x^2+7x-x-7=0$
$x(x+7)-1(x+7)=0$
$(x+7)(x-1)=0$
$x_1=-7,\;\; x_2=1$

(3) $(x-1)^2+9=0$
$(x-1)^2=-9$ $\longrightarrow$ няма решение

(4) $\lvert -x-2\rvert=2$
$\lvert x+2\rvert=2$
$x+2=2$ или $x+2=-2$
$x_1=0,\;\; x_2=-4$

Отг.

(А)	(4)
(Б)	(1)
(В)	(2)

ЗАДАЧА 10

Намерете сбора от целите числа, които са между корените на уравнението $(x+2)^3-x(-x-1)^2=(3x+2)(x+4)$.

Решение:

$$x^3+6x^2+\underline{12x}+\underline{\underline{8}}-x(x^2+2x+1)=3x^2+\underline{12x}+2x+\underline{\underline{8}}$$
$$\underline{x^3}+6x^2-\underline{x^3}-2x^2-x=3x^2+2x$$

$$x^2-3x=0$$
$$x_1=0,\;\; x_2=3$$

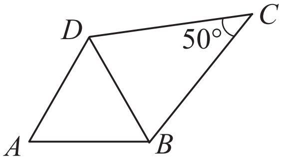
Целите числа, които са между 0 и 3 са 1 и 2. Сборът им е $1+2=3$.

Отг. 3

4. ВХОДНО НИВО
ПРИМЕРЕН ТЕСТ № 1

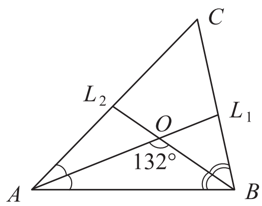
1. При $x = -\frac{1}{2}$ стойността на израза $A = (-6x - 1)^2 - 9(2x + 1)(2x - 1)$ е:
А) 16; Б) 4; В) –14; Г) –4.

2. Ако $\triangle ABD$ е равностранен и $CB = CD$, големината на $\sphericalangle ABC$ е:
А) 120º;
Б) 125º;
В) 130º;
Г) 135º.



3. Решенията на неравенството
$$\frac{(x-3)^2}{3} > x - \frac{(2x-1)(4-x)}{6}$$ са:
А) $x > 1\frac{5}{9}$;
Б) $x > 1\frac{3}{11}$;
В) $x < 1\frac{5}{9}$;
Г) $x > 5{,}5$.

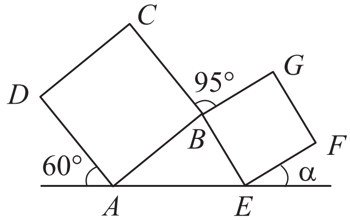
4. В $\triangle ABC$ ъглополовящите AL_1 и BL_2 се пресичат в точка O. Ако $\sphericalangle AOB = 132°$, големината на $\sphericalangle ACB$ е:
А) 48°;
Б) 61°;
В) 84°;
Г) 96°.



5. Многочленът $4x^2 - a^2 + 6a - 9$, разложен на множители, има вида:
А) $(2x + a + 3)(2x - a + 3)$;
Б) $(2x - a - 3)(2x - a + 3)$;
В) $(2x + a + 3)(2x - a - 3)$;
Г) $(2x + a - 3)(2x - a + 3)$.

6. От два вида месинг, първият от които съдържа 40% цинк, а вторият – 30% цинк, е получен месинг с 36% цинк. Ако теглото на сместа е 300 kg, намерете колко килограма е месингът от втория вид.
А) 180; Б) 160; В) 120; Г) 100.

7. На чертежа $ABCD$ и $EFGB$ са квадрати. Големината на ъгъл α е:
А) 10º;
Б) 15º;
В) 25º;
Г) 35º.



8. В успоредника $ABCD$ $AB = 18$ cm, $BC = 12$ cm и $\sphericalangle BAD = 30°$. Намерете:
а) по-голямата височина на успоредника в сантиметри;
б) лицето на успоредника в квадратни сантиметри.

9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на еквивалентното му уравнение.

(А) $(x - 2)^2 - (x + 3)(x - 1) = 6(2 - x)$
(Б) $3(x + 5)^2 = 2x^2 - 50$
(В) $(x + 3)^2 - (-x - 2)^2 = (x + 5)(x + 1)$
(1) $\lvert 5x + 10 \rvert - \lvert -2x - 4 \rvert = 6$
(2) $\frac{2x}{3} - \frac{3x+7}{6} = \frac{x-1}{6} - 1$
(3) $\lvert x + 15 \rvert = 10$
(4) $(x + 1)(x - 5) = -5$
(5) $\lvert 2x - 3 \rvert - \lvert 6 - 4x \rvert = 3$

10. В $\triangle ABC$ вътрешните ъглополовящи на ъглите с върхове точките B и C се пресичат в точка O, а външните ъглополовящи на ъглите със същите върхове – в точка O_1. Намерете големината на $\sphericalangle BAC$ в градуси, ако:
а) $\sphericalangle BO_1C = 70°$;
б) $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BO_1C$.

ВХОДНО НИВО
ПРИМЕРЕН ТЕСТ № 2

1. При $x=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ стойността на израза $A=(2x+1)^2-(3x-4)(x-2)-(-x-3)^2$ е:

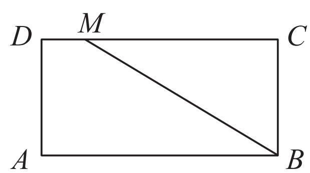
А) –17; Б) –16; В) –15; Г) $-\frac{1}{8}$.

2. Най-малкото цяло решение на неравенството $\frac{x(x+3)}{2}>x-\frac{(3x-1)(2-x)}{6}$ е:

А) –1; Б) 0; В) 1; Г) $\frac{1}{5}$.

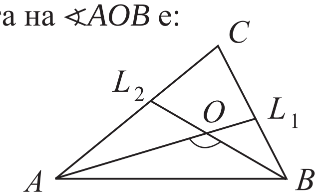
3. Върху страната CD на правоъгълника $ABCD$ е избрана точка M така, че $BM=CD$. Ако $CB=\frac{1}{2}AB$, големината на $\sphericalangle AMD$ е:

А) 30°;
Б) 60°;
В) 45°;
Г) 75°.



4. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB = 88°$ и ъглополовящите AL_1 и BL_2 се пресичат в точка O. Големината на $\sphericalangle AOB$ е:

А) 134°;
Б) 92°;
В) 140°;
Г) 136°.



5. Многочленът x^3-5x^2-x+5, разложен на множители, има вида:

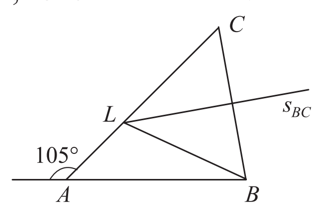
А) $(x+1)(x-1)(x+5)$;
Б) $(x^2+1)(x-5)$;
В) $(x^2+1)(x+5)$;
Г) $(x+1)(x-1)(x-5)$.

6. Един моторист изминава разстоянието между два града за 2 h, а друг – за 3 h. Ако двамата мотористи тръгнат едновременно от двата града един срещу друг, ще се срещнат след:

А) 1 h 10′;
Б) 1 h 12′;
В) 1 h 15′;
Г) 1 h 20′.

7. Външният ъгъл при върха A на $\triangle ABC$ е 105°. Ако симетралата на страната BC пресича страната AC в точка L и $\sphericalangle ABL = \sphericalangle ACB$, големината на $\sphericalangle ABC$ е:

А) 35°;
Б) 60°;
В) 70°;
Г) 75°.



8. В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 1 : 2$. CL и CP са съответно вътрешната и външната ъглополовящи на ъглите при върха C (L, $P \in AB$). Намерете дължината в сантиметри на:

а) PB, ако $AL = 3$ cm;
б) CL, ако $PB = 24$ cm.

9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на еквивалентното му уравнение.

(А) $\frac{x-4}{2}-\frac{2x+5}{3}=1-\frac{x+4}{6}$ (Б) $(2x+1)^2-(4x-1)(x+1)=x+2$ (В) $\lvert(x-2)^2-x(x-5)\rvert=6$
(1) $(x-10)(x+2)=0$ (2) $\lvert -x-3 \rvert = -2$ (3) $(x+2)(x-2)=(x-3)(x+3)+5$ (4) $(2x+1)^2-(x+3)^2=3x(x-2)$ (5) $(x+10)(x-2)=0$

10. В $\triangle ABC$ ($CA = CB$) $\sphericalangle ACB = 30°$ и AD е височина. Намерете лицето на $\triangle ABC$ в квадратни сантиметри, ако:

а) $AD = 8$ cm;
б) $BC - AD = 6$ cm.

УКАЗАНИЯ ЗА РЕШАВАНЕ НА ТЕСТОВЕТЕ, ДАДЕНИ В ТОЗИ УЧЕБНИК

В учебника са дадени 19 теста. Във всеки от тях има по 10 задачи:

- 7 с избираем отговор,
- 2 със свободен отговор и
- 1, за която се изисква писмено аргументирано решение.

След всяка задача с избираем отговор са посочени 4 отговора, от които само един е верен.

В бланката за отговори се записва:

- за задачите с избираем отговор – буквата, отговаряща на верния отговор;
- за задачите със свободен отговор – отговора на задачата, без да се посочва хода на решението.

За даден грешен отговор **не се отнемат точки**.

Ако решите да промените отговора на дадена задача, зачеркнете с "Х" първия си отговор и запишете до него новия.

Задачите в теста са с различна трудност.

В бланката за отговори е посочен броят на точките, които получавате при верен отговор на всяка от първите 9 задачи. Задача 10 се оценява с най-много 10 точки.

Максималният брой точки е 40.

Бланка за отговори		
Задача №	**Отговор**	**Точки**
1		2
2		2
3		2
4		3
5		3
6		3
7		3
Задача 8		
а)		3
б)		3
Задача 9		
а)		2
б)		2
в)		2
Задача 10		
		до 10

Препоръчителното време за работа е 1 учебен час.
Задачите се решават на допълнителни листове.
Върху теста не се пише и огражда.
Не се използва калкулатор.

Вариант за оценка:	
Точки	Представяне
от 0 до 6	слабо
от 7 до 14	средно
от 15 до 22	добро
от 23 до 30	много добро
от 31 до 40	отлично

ТЕМА

1

ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ

(Урок № 5 – Урок № 10)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- умножение и събиране на възможности;
- пермутации;
- вариации;
- комбинации.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да пресмятат възможности по правилата за събиране и умножение;
- да пресмятат пермутации, вариации и комбинации без повторение;
- да моделират конкретни ситуации.

5. УМНОЖЕНИЕ И СЪБИРАНЕ НА ВЪЗМОЖНОСТИ

Съвкупност от обекти, обединени по някакъв общ признак, наричаме **множество**. Всеки обект, който принадлежи на дадено множество, се нарича **елемент** на това множество.

Едно множество се нарича **безкрайно**, ако елементите му са безброй много – например естествените числа, точките върху една права и т.н.

Едно множество се нарича **крайно**, ако елементите му са краен брой – например буквите на азбуката, учениците от един клас и т.н.

Едно множество A се нарича **подмножество** на множество B, ако всички елементи на множество A са елементи и на множество B – например момичетата от един клас са подмножество на учениците в същия клас.

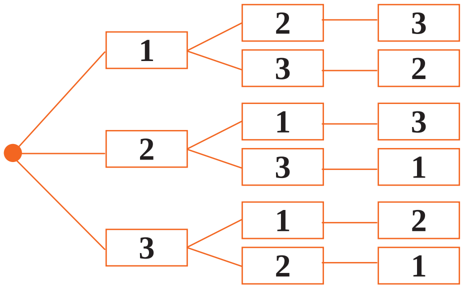
Ще изучаваме само крайни множества.

Елементите на едно крайно множество могат да се подреждат по различни начини. В много случаи това подреждане води до различни свойства на тези елементи. Например подреждането на въглеродните атоми в кристалните решетки определят вещества с различни свойства – графит и диамант.

Комбинаториката е раздел от математиката, в който се изследват **различните възможности за избор и подредба** на елементи от някакво крайно множество.

ЗАДАЧА 1 Намерете колко трицифрени числа могат да се образуват от цифрите 1, 2, 3, като в числата няма повтарящи се цифри.

Решение:



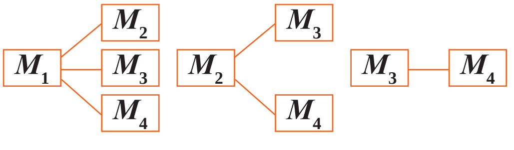
Цифрата на стотиците може да бъде коя да е от трите цифри, т.е. тя може да се избере по ***три начина***. След избора на цифрата на стотиците тази на десетиците може да се избере от останалите две цифри, т.е. по ***два начина***. Тогава за цифрата на единиците има само ***една възможност*** – оставащата трета цифра.

Следователно броят на начините за нареждане на трите цифри е $3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$. Така получаваме следните шест трицифрени числа: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Графичното изображение на задачата се нарича **граф-дърво**.

ЗАДАЧА 2 Дадени са четири точки M_1, M_2, M_3 и M_4, никои три от които не лежат на една права. Намерете броя на правите, определени от тези точки.

Решение:



Точката M_1 определя с останалите точки трите прави M_1M_2, M_1M_3 и M_1M_4.

Точката M_2 определя с останалите точки двете прави M_2M_3 и M_2M_4.

Точката M_3 определя с останалата точка правата M_3M_4.

Броят на всички прави, определени от четирите точки, е $3 + 2 + 1 = 6$.

Общото в *Задачи 1 и 2* е, че във всяка от тях е дадено крайно множество и трябва да се преброят техни подмножества, които удовлетворяват изказаните условия. Такива подмножества се наричат **съединения**.

О **Съединения** – групи или редици от елементи на едно или няколко крайни множества, които удовлетворяват определени условия.

О Броят на елементите, участващи в съединението, се нарича **клас на** това **съединение**.

В *Задача 1* съединенията са от клас 3, а в *Задача 2* – от клас 2.

В зависимост от това дали елементите на съединенията се повтарят съществуват:

- **съединения без повторения** – съставени от различни елементи;
- **съединения с повторения** – някои от елементите се повтарят.

В зависимост от това дали има значение подредбата на елементите в съединенията съществуват:

- **наредени съединения (вариации)** – подреждането на елементите в тях е от значение;
- **ненаредени съединения (комбинации)** – подреждането на елементите в тях не е от значение.

Ще изучаваме само съединения без повторения.

ЗАДАЧА 3 Певческа група се състои от 4 мъже и 6 жени.
Трябва да се избере един член за солово изпълнение на песен.
Намерете по колко различни начина може да стане това.

Решение: Певец може да се избере по 4 начина, а певица – по 6 начина. Тогава солист (певец или певица) може да бъде избран по $4 + 6 = 10$ начина.

! **Правило за събиране на възможности:** Ако един обект ***a*** може да бъде избран по ***m*** начина, а друг обект ***b*** – по ***n*** начина, различни от начините за избиране на ***a***, то кой да е от обектите ***a** или **b*** може да бъде избран по $m + n$ начина.

ЗАДАЧА 4 Певческа група се състои от 4 мъже и 6 жени.
Трябва да се избере една смесена двойка от групата за изпълнение на песен.
Намерете по-колко различни начина може да стане това.

Решение: Мъжът в дуета може да се избере по 4 начина. При всеки избор на мъж жената може да се избере по 6 начина. Тогава изборът на двойка изпълнители може да стане по $4 \cdot 6 = 24$ начина.

! **Правило за умножение на възможности:** Ако един обект ***a*** може да бъде избран по ***m*** начина и при всеки избор на ***a*** обектът ***b*** може да бъде избран по ***n*** начина, то изборът на наредена двойка (***a; b***) може да стане по $m \cdot n$ начина.

6. УМНОЖЕНИЕ И СЪБИРАНЕ НА ВЪЗМОЖНОСТИ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 В играта „домино“ се използват плочки, като всяка от тях е разделена на две и във всяка половина има 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки. Като се има предвид, че всяка възможна двойка точки е изобразена на плочка и никоя двойка точки не се повтаря, да се намери броят на всички плочки в играта.

Решение: *Числото 0* участва в двойките:

0 – 0, 0 – 1, 0 – 2, 0 – 3, 0 – 4, 0 – 5, 0 – 6, т.е. участва в **7 плочки**.

Числото 1, освен в двойката 0 – 1, участва в двойките:

1 – 1, 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5, 1 – 6, т.е. в още **6 плочки**.

Числото 2, освен в двойките с 0 и 1, участва в двойките:

2 – 2, 2 – 3, 2 – 4, 2 – 5, 2 – 6, т.е. в още **5 плочки**.

Числото 3, освен в двойките с 0, 1 и 2, участва в двойките:

3 – 3, 3 – 4, 3 – 5, 3 – 6, т.е. в още **4 плочки**.

Числото 4, освен в двойките с 0, 1, 2 и 3, участва в двойките:

4 – 4, 4 – 5, 4 – 6, т.е. в още **3 плочки**.

Числото 5, освен в двойките с 0, 1, 2, 3 и 4, участва в двойките:

5 – 5, 5 – 6, т.е. в още **2 плочки**.

Числото 6, освен в двойките с 0, 1, 2, 3, 4 и 5, участва в двойката:

6 – 6, т.е. в още **1 плочка**.

Тогава броят на всички плочки в играта домино е

$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ (по правилото за събиране).

ЗАДАЧА 2 На шахматна дъска трябва да се поставят два топа (черен и бял) така, че всеки от тях да попада под удара на другия, т.е. двата топа да са на една вертикала или на една хоризонтала. Намерете по колко различни начина може да стане това.

Решение: Шахматна дъска има $8 \,.\, 8 = 64$ полета.

Белият топ може да бъде поставен на всяко от тях, т.е. **64** възможности. При всеки избор на поле за белия топ черният може да бъде поставен на 7 полета по хоризонтала или на 7 полета по вертикала. По правилото за събиране на възможности получаваме $7 + 7 =$ **14** различни места за черния топ. Тогава поставянето на двата топа на една хоризонтала или на една вертикала може да стане по **64 . 14 = 896** начина (по правилото за умножение).

Правилото за умножение на възможности може да се обобщи за намиране броя на наредени тройки обекти, наредени четворки обекти и т.н.

ЗАДАЧА 3 Намерете колко делителя има числото $10\,800 = 2^4 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2$, ако в броя им включваме единицата и самото число.

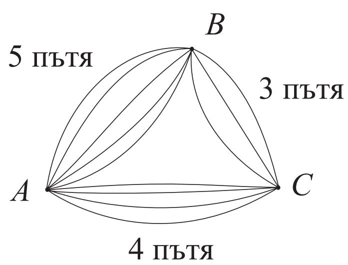
Решение: Всеки делител на числото $10\,800 = 2^4 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2$ има вида:

$2^{m} \,.\, 3^{n} \,.\, 5^{p}$, където
m може да взема стойностите 0, 1, 2, 3, 4,
n може да взема стойностите 0, 1, 2, 3,
p може да взема стойностите 0, 1, 2.

Така m може да бъде избрано по 5 начина. За всеки избор на m числото n може да бъде избрано по 4 начина. Така наредената двойка $(m;\, n)$ може да се избере по $5 \,.\, 4 = 20$ начина. При всеки избор на двойка $(m;\, n)$ числото p може да бъде избрано по 3 начина. Тогава наредената тройка $(m;\, n;\, p)$ може да се избере по $20 \,.\, 3 = 60$ начина.

Следователно числото 10 800 има **5 . 4 . 3 = 60** делителя.

ЗАДАЧА 4 От град A до град B има 5 директни пътя. От град B до град C има 3 директни пътя. От град A до град C има 4 директни пътя. Намерете по колко различни маршрута (директни и такива, които минават през B) може да се стигне от град A до град C.



Решение: Директен път от град A до град B може да бъде избран по 5 начина. За всеки избор на път от град A до град B директен път от град B до град C може да бъде избран по 3 начина.

По правилото за умножение на възможности броят на маршрутите от град A до град C през град B е **5 . 3 = 15**.

От град A до град C има 4 директни пътя и 15 маршрута през град B.

По правилото за събиране на възможности можем да изберем маршрут по **4 + 15 = 19** начина.

ЗАДАЧИ

1 От три фолклорни групи с 4, 8 и 12 участници трябва да се избере един солист. Намерете по колко различни начина може да стане това.

2 Дадени са пет точки, никои три от които не лежат на една права. Намерете броя на правите, които са определени от тези точки.

3 В турнир по шах взели участие 8 деца. Всяко от тях изиграло по една партия с всяко едно от останалите. Намерете колко партии шах са изиграли децата.

4 Намерете броя на плочките в играта домино, ако на плочките се изобразяват числата от 0 до 9.

5 Новият телефон на Ния има 4 различни цвята преден панел и три различни цвята заден панел. По колко различни начина може да изглежда телефонът на Ния?

6 За да се отиде от селището A в селището C, трябва да се мине през селището B. От A до B има един черен път, две различни шосета и една железопътна линия. От B до C има два различни черни пътя, три различни шосета и две различни железопътни линии. Намерете по колко различни маршрута може да се стигне от селище A до селище C.

7 Намерете колко делителя има числото 9 720, ако в броя им включваме единицата и самото число.

8 Намерете колко делителя има числото 36 000, ако в броя им включваме единицата и самото число.

9 Намерете колко делителя има числото 32 400, ако в броя им включваме единицата и самото число.

7. ПЕРМУТАЦИИ

ЗАДАЧА 1 Три деца решили да седнат на една пейка.
Намерете по колко начина може да стане това.

Решение: Номерираме местата на пейката с числата 1, 2 и 3.
***Място* № 1** може да бъде заето от кое да е от трите деца, т.е. за заемането му има **3** възможности.
Ако място № 1 се заеме от едно от трите деца, ***място* № 2** може да бъде заето от кое да е от останалите две деца, т.е. за заемането му има **2** възможности.
По правилото за умножение на възможности за заемането на първите две места има **3 . 2** възможности.
Ако първите две места се заемат от две деца, то за заемането на ***място* № 3** остава само **1** възможност.
По правилото за умножение за заемането на трите места има
3 . 2 . 1 = 6 възможности.

Очевидно тази задача и решението ѝ не се различават от задачата за определяне на броя на трицифрените числа с неповтарящи се цифри (*Задача 1* от урок № 5), които могат да се образуват от цифрите 1, 2 и 3.

Множеството, което се разглежда в тези задачи, се състои от 3 елемента. Всяко от съединенията, които се образуват, съдържа и трите елемента. Две съединения се различават помежду си само по наредбата на елементите. Такива съединения се наричат пермутации.

О **Пермутации** без повторение от ***n*** елемента се наричат такива съединения, във всяко от които влизат всички дадени елементи и се различават само по реда на елементите.

Броят на всички възможни начини на подреждане на n елемента, т.е. **броят на пермутациите от *n* елемента**, се означава с $\boldsymbol{P_n}$.

Намерихме, че $P_3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$.

Да пресметнем броя на пермутациите от n елемента. На първо място можем да сложим всеки от елементите, т.е. има $\boldsymbol{n}$ възможности. На второ място можем да поставим всеки от останалите $(n-1)$ елемента, т.е. има $\boldsymbol{n-1}$ възможности. За третото място има $\boldsymbol{n-2}$ възможности и т.н. На последното n-то място остава само **1** възможност. Намерихме, че броят на пермутациите от n елемента е $\boldsymbol{n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \dots 2 \,.\, 1}$.

Прието е произведението $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots (n-1) \,.\, n$ да се означава с $n!$. Символът $\boldsymbol{n!}$ се чете „n факториел“ и се използва за кратък запис на произведението на всички естествени числа от 1 до n.
Определяме $0! = 1$

! **Брой пермутации** без повторение от ***n*** елемента:

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, (n-1) \,.\, n = n!$$

ЗАДАЧА 2 Намерете броя на пермутациите, които могат да се получат от:
а) 4 различни елемента; б) 7 различни елемента.

Решение: а) $P_4 = 4! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$
б) $P_7 = 7! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 = 5\,040$

ЗАДАЧА 3 Намерете колко шестцифрени числа могат да се образуват с еднократно използване на цифрите 0, 1, 2, 3, 4 и 5.

Решение: От 6 цифри могат да бъдат съставени $P_6 = 6! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 = 720$ пермутации. От този брой трябва да извадим броя на пермутациите, при които първата цифра е 0, т.е. $P_5 = 5! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120$.
Следователно броят на шестцифрените числа, съставени от дадените 6 цифри, е $P_6 - P_5 = 6! - 5! = 720 - 120 = 600$.

ЗАДАЧА 4 Разполагаме със седем книги, три от които са от един автор, а останалите – от различни. Намерете по колко начина можем да ги подредим на един рафт в библиотека така, че книгите от един автор:
а) да са една до друга; б) да не са една до друга.

Решение: а) Трите книги, които са от един автор, могат да се подредят една до друга по $P_3 = 3! = 6$ начина.
Сега трите книги разглеждаме като един елемент и заедно с останалите 4 книги образуват множество от 5 елемента. Те могат да се подредят по $P_5 = 5! = 120$ начина.
Броят на начините, по които можем подредим книгите на един рафт така, че тези от един автор да са една до друга, е
$P_3 \,.\, P_5 = 3! \,.\, 5! = 6 \,.\, 120 = 720$ начина.
б) Седемте книги могат да се подредят една до друга по $P_7 = 7! = 5\,040$ начина. От тях трябва да извадим подредбите, при които книгите от един автор да са една до друга, т.е. 720. Броят на начините, по които можем да подредим книгите на един рафт така, че тези от един автор да не са една до друга, е $5\,040 - 720 = 4\,320$ начина.

ЗАДАЧИ

1 Намерете колко петцифрени числа могат да се образуват от цифрите 1, 2, 3, 4 и 6.

2 Намерете колко нечетни петцифрени числа могат да се образуват с еднократно използване на цифрите 0, 1, 2, 4 и 6.

3 Намерете колко различни четни номера на автомобили могат да се съставят от цифрите 5, 2, 4, 6, ако всяка цифра може да се използва само веднъж.

4 Намерете броя на новите буквени кодове, които се получават след разместването на буквите в думата „СЕЙФ”.

5 Намерете по колко различни начина могат да се подредят на рафт 5 книги така, че две от тях, предварително определени, да са една до друга.

6 Намерете броя на различните начини, по които могат да се подредят 7 ученици в редица така, че трима от тях винаги да са един до друг.

8. ВАРИАЦИИ

ЗАДАЧА 1 Намерете броя на двуцифрените числа с неповтарящи се цифри, които могат да се образуват от цифрите 1, 2, 3 и 4.

Решение: За цифрата на десетиците може да се избере коя да е от дадените четири цифри, т.е. за избор на цифрата на десетиците има **4** възможности. Ако цифрата на десетиците се заеме от една от дадените четири цифри, за цифрата на единиците може да се избере коя да е от останалите три цифри, т.е. за нейния избор има **3** възможности. По правилото за умножение на възможности за съставянето на двуцифрените числа има **4. 3 = 12** възможности.

12	13	14
21	23	24
31	32	34
41	42	43

Множеството, което се разглежда в тази задача, се състои от 4 елемента. Всяко от съединенията, които се образуват, съдържа два елемента. Затова казваме, че съединенията са от втори клас.
Две съединения се различават помежду си или по самите елементи, или по наредбата на елементите. Такива съединения се наричат вариации.

О

Вариации без повторение на ***n*** елемента от ***k***-ти клас ($k \le n$) се наричат такива съединения, всяко от които съдържа по ***k*** различни елемента от дадените ***n*** и се различават едно от друго или по елементите, или по реда на елементите.

Броят на различните вариации без повторение от n елемента от k-ти клас се означава с V_n^k. Намерихме, че $V_4^2 = 4.3 = 12$.
Да пресметнем броя на вариациите без повторение на n елемента от k-ти клас. На първо място можем да сложим всеки от елементите, т.е. има ***n*** възможности. На второ място можем да поставим всеки от останалите $(n-1)$ елемента, т.е. има ***n* – 1** възможности. За третото място има ***n* – 2** възможности и т.н. На последното k-то място можем да поставим всеки от останалите ***n* – (*k* – 1)** възможности. Намерихме, че броят на вариациите на n елемента от k-ти клас е

$$\boldsymbol{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...\,(n-k+1)}.$$

!

Брой вариации без повторение на ***n*** елемента от ***k***-ти клас:
$$V_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},\ k \le n;\ \to V_n^n = n!$$

ЗАДАЧА 2 Намерете броя на вариациите без повторения :
а) на 6 елемента от 5-ти клас; б) на 8 елемента от 3-ти клас.

Решение: а) $V_6^5 = 6.5.4.3.2 = 720$; б) $V_8^3 = 8.7.6 = 336$.

ЗАДАЧА 3 Намерете по колко различни начина могат да се разпределят в един ден 9 различни учебни предмета, ако в дневната програма се включват по 6 учебни предмета.

Решение: Броят на различните разпределения на деветте учебни предмета по 6 на ден е равен на броя на вариациите на 9 елемента от 6-ти клас, тъй като е съществено кои 6 предмета се включват в програмата за този ден и подредбата им по часове.
Следователно $V_9^6 = 9.8.7.6.5.4 = 60\,480$.

ЗАДАЧА 4 Телефонен номер се състои от 7 различни цифри. Колко са възможностите за останалите 5 цифри, ако номерът започва с 97?

Решение: Номерът има вида: 97 _ _ _ _ _.
Остават 10 – 2 = 8 цифри, които могат да заемат останалите 5 позиции по $V_8^5 = 8.7.6.5.4 = 6\,720$ начина.

ЗАДАЧА 5 Във финала на състезание по скок на височина участват 12 атлети. Намерете броя на различните начини, по които могат да бъдат разпределени медалите (златен, сребърен и бронзов).

Решение: Броят на наредените тройки е равен на $V_{12}^3 = 12.11.10 = 1320$.
Следователно начините, по които могат да се разпределят медалите, са 1 320.

ЗАДАЧА 6 Намерете колко четирицифрени числа могат да се образуват от цифрите 0, 1, 2, 3, 4 и 5, така че да не се повтаря нито една от тях.

Решение: Броят на всички наредени четворки различни цифри е $V_6^4 = 6.5.4.3 = 360$ – броят на вариациите от 6 елемента от 4-ти клас.
Тъй като наредените четворки, започващи с 0, не са четирицифрени числа, от този брой трябва да извадим броя на вариациите, при които първата цифра е 0, т.е. $V_5^3 = 5.4.3 = 60$.
Следователно броят на четирицифрените числа, съставени от дадените 6 цифри, е $V_6^4 - V_5^3 = 360 - 60 = 300$.

ЗАДАЧА 7 Намерете колко четни четирицифрени числа могат да се образуват от цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 7 и 9, така че да не се повтаря нито една от тях.

Решение: Четните числа са тези, които завършват или на 2, или на 4.
Те имат вида _ _ _ 2 или _ _ _ 4.
И в двата случая остават 6 цифри, които могат да заемат първите три празни позиции по $V_6^3 = 6\ .\ 5\ .\ 4 = 120$ начина.
Следователно броят на четните четирицифрени числа е 120 + 120 = 240.

ЗАДАЧИ

1 Намерете броя на вариациите без повторения :
а) на 9 елемента от 3-ти клас;
б) на 7 елемента от 4-ти клас.

2 Намерете броя на всички трицифрени числа с неповтарящи се цифри, които могат да се запишат само с нечетни цифри.

3 Намерете броя на нечетните трицифрени числа с неповтарящи се цифри, които могат да се образуват от цифрите 1, 3, 4, 6 и 8.

4 Намерете броя на четните четирицифрени числа, които могат да се образуват от цифрите 0, 1, 3, 5 и 8, така че да не се повтаря нито една от тях.

9. КОМБИНАЦИИ

ЗАДАЧА 1 Жълта, синя, зелена и червена топки са поставени в кутия. Едновременно вадим две топки. Намерете по колко начина може да стане това.

Решение: Тъй като едновременно изваждаме двете топки, наредба не може да има. Означаваме с Ж, С, З и Ч факта, че сме извадили съответно жълта, синя, зелена и червена топка. Тогава всички възможни случаи са 6: ЖС, ЖЗ, ЖЧ, СЗ, СЧ, ЗЧ.

Множеството, което се разглежда в тази задача, се състои от 4 елемента (топки). Всяко от съединенията, които се образуват, съдържа 2 елемента. Две съединения се различават само, ако съдържат различни елементи. Такива съединения се наричат комбинации на 4 елемента от 2-ри клас.

ЗАДАЧА 2 Дадени са пет точки, никои три от които не лежат на една права. Намерете броя на триъгълниците с върхове, определени от тези точки.

Решение: Означаваме точките с M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5.
Три точки определят един триъгълник. Например точките M_1, M_2, M_3 определят един триъгълник $\Delta M_1M_2M_3$. $\Delta M_1M_2M_3$ и $\Delta M_1M_3M_2$ са един и същи триъгълник, т.е. наредбата на точките нямат значение.
Тогава търсените триъгълници са: $\Delta M_1M_2M_3$, $\Delta M_1M_2M_4$, $\Delta M_1M_2M_5$, $\Delta M_1M_3M_4$, $\Delta M_1M_3M_5$, $\Delta M_1M_4M_5$, $\Delta M_2M_3M_4$, $\Delta M_2M_3M_5$, $\Delta M_2M_4M_5$, $\Delta M_3M_4M_5$, т.е. 10 на брой.

Множеството, което се разглежда в тази задача, се състои от 5 елемента (точки). Всяко от съединенията (триъгълници), които се образуват, съдържа 3 елемента. Две съединения се различават само, ако съдържат различни елементи. Такива съединения се наричат комбинации на 5 елемента от 3-ти клас.

О **Комбинации** без повторение на ***n*** елемента от ***k***-ти клас ($k \le n$) се наричат такива съединения, всяко от които съдържа по k различни елемента от дадените n и се различават едно от друго с поне един елемент.

Броят на различните комбинации без повторение от n елемента от k-ти клас се означава с C_n^k. Намерихме, че $C_4^2 = 6$ и $C_5^3 = 10$.
Да пресметнем броя на комбинациите без повторение от n елемента от k-ти клас. Ако $a_1, a_2, \ldots, a_k$ е една комбинация на n елемента от k-ти клас, то всяка пермутация (разместване) на елементите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ представлява вариация на същите n елемента от k-ти клас.
Тогава $V_n^k = k!\,.\,C_n^k$.

! **Брой комбинации** без повторение на ***n*** елемента от ***k***-ти клас:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k \le n;\quad C_n^n = 1$$

ЗАДАЧА 3 Намерете броя на комбинациите без повторения на:
а) 7 елемента от 5-ти клас; б) 8 елемента от 4-ти клас.

Решение: а) $C_7^5 = \dfrac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = \dfrac{7\,.\,6}{1\,.\,2} = 21$ б) $C_8^4 = \dfrac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 2\,.\,7\,.\,5 = 70$

ЗАДАЧА 4 В играта „ТОТО 2" от 49 числа се изтеглят 6 числа, като редът на изтеглянето им не е от значение. Намерете по колко различни начина могат да бъдат изтеглени тези 6 числа.

Решение: Търсения брой е $C_{49}^6 = \dfrac{49\,.\,48\,.\,47\,.\,46\,.\,45\,.\,44}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} = 13\,983\,816$.

ЗАДАЧА 5 В един клас има 15 момичета и 20 момчета. За изпълнение на дадена задача на класа трябва да се изберат 5 ученици, от които 2 момичета и 3 момчета. Намерете по колко различни начина може да стане този избор.

Решение: От 15 момичета могат да бъдат избрани 2
по $C_{15}^2 = \dfrac{15\,.\,14}{1\,.\,2} = 15\,.\,7 = 105$ начина.
От 20 момчета могат да бъдат избрани 3
по $C_{20}^3 = \dfrac{20\,.\,19\,.\,18}{1\,.\,2\,.\,3} = 20\,.\,19\,.\,3 = 1\,140$ начина.
По правилото за умножение петчленната група може да бъде избрана
по $C_{15}^2\,.\,C_{20}^3 = 105\,.\,1\,140 = 119\,700$ начина.

ЗАДАЧИ

1 Намерете броя на комбинациите без повторения :
а) на 10 елемента от 2-ти клас;
б) на 6 елемента от 4-ти клас.

2 За приготвянето на плодов десерт са необходими три вида плодове. Ако на пазара се предлагат 8 вида, намерете колко различни десерта може да приготвите.

3 Колко различни фиша от играта „5 от 35" трябва да попълним, за да сме сигурни, че ще улучим петица?

4 В една купа има 6 бели и 4 червени топки. Намерете броя на различните начини, по които могат да се изтеглят едновременно 2 бели и 1 червена топка.

5 В урна са поставени 3 печеливши и 7 непечеливши билета. Намерете броя на различните начини, по които могат да се изтеглят 5 билета, от които точно 2 са печеливши.

6 Намерете колко различни комплекта от 2 молива и 3 химикалки могат да се съставят от 6 различни молива и 9 различни химикалки.

7 За хандбален мач треньор има на разположение двама вратари и дванадесет играчи. Намерете по колко различни начина може да се образува началната седмѝца, ако в нея задължително влизат един вратар и шест нападатели.

8 В една купа има 8 бели, 12 зелени и 10 червени топки. Намерете броя на различните начини, по които могат да се изтеглят едновременно:
а) 1 бяла, 2 зелени и 1 червена топки;
б) 2 бели, 3 зелени и 1 червена топки;
в) 3 бели, 2 зелени и 2 червени топки.

10. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ“

ЗАПОМНЕТЕ!

Множество – съвкупност от обекти, обединени по някакъв общ признак.

Крайно множество – множество, което съдържа краен брой елементи.

Подмножество – A е подмножество на B, ако всички елементи на множество A са елементи и на множество B.

Съединения – групи или редици от елементи на едно или няколко крайни множества, които удовлетворяват определени условия.

Клас на съединение – броят на елементите, участващи в съединението.

Видове съединения:

- *съединения без повторения* – съединения, съставени от различни елементи;
- *съединения с повторения* – някои от елементите се повтарят;
- *наредени съединения (вариации)* – подреждането на елементите е от значение;
- *ненаредени съединения (комбинации)* – подреждането на елементите не е от значение.

Пермутации без повторение от n елемента – съединения, във всяко от които влизат всички дадени елементи и се различават само по реда на елементите.

Брой пермутации без повторение от $\boldsymbol{n}$ елемента:

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \,.\, n = n!,\ 0! = 1$$

Вариации без повторение на $\boldsymbol{n}$ елемента от $\boldsymbol{k}$-ти клас $(k \le n)$ – съединения, всяко от които съдържа по k различни елемента от дадените n и се различават едно от друго или по елементите, или по реда на елементите.

Брой вариации без повторение на $\boldsymbol{n}$ елемента от $\boldsymbol{k}$-ти клас:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},\ k \le n;\ V_n^n = n! = P_n$$

Комбинации без повторение на $\boldsymbol{n}$ елемента от $\boldsymbol{k}$-ти клас $(k \le n)$ – съединения, всяко от които съдържа по k различни елемента от дадените n и се различават едно от друго с поне един елемент.

Брой комбинации без повторение на $\boldsymbol{n}$ елемента от $\boldsymbol{k}$-ти клас:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k \le n;\ C_n^n = 1;\ C_n^1 = n$$

ЗАДАЧА 1 От град A до град B има 6 директни пътя. От град A до град C има 3 директни пътя. От град A до град C може да се стигне по 33 различни маршрута – директни и някои, които минават през B. Намерете колко са директните пътища от град B до град C.

Решение: Означаваме с x броя на директните пътища от град B до град C.
Директен път от град A до град B може да бъде избран по 6 начина. За всеки избор на път от град A до град B директен път от град B до град C може да бъде избран по x начина. Тогава броят на маршрутите от град A до град C през град B е **6 . *x***.
От град A до град C има 3 директни пътя и $6x$ маршрута през град B, т.е. можем да изберем маршрут по **3 + 6*x*** начина.
Решаваме уравнението $3 + 6x = 33$ и получаваме $x = 5$.
От град B до град C има **5 директни пътя**.

ЗАДАЧА 2 Четири момчета и три момичета трябва да се подредят в два реда за снимка, като момчетата са прави, а момичетата са седнали пред тях. Намерете по колко начина може да стане това.

Решение: Подреждането на момичетата не зависи от подреждането на момчетата.
Момичетата могат да се подредят една до друга по $P_3 = 3! = 6$ начина.
Момчетата могат да се подредят едно до друго по $P_4 = 4! = 24$ начина.
По правилото за умножение на възможности момчетата и момичетата могат да се подредят по $P_3 \,.\, P_4 = 6 \,.\, 24 = 144$ начина.

ЗАДАЧА 3 Намерете броя на различните изрази от вида $ax + b$ ($a \neq b$), ако a и b могат да приемат различни стойности от множеството $\boldsymbol{A}$, състоящо се от всички нечетни числа, по-големи от 4 и по-малки от 18.

Решение: Множеството $\boldsymbol{A} = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ съдържа седем елемента.
Задачата се свежда до намиране на броя на вариациите на 7 елемента от 2-ри клас.
Пресмятаме: $V_7^2 = 7 \,.\, 6 = 42$ израза.

ЗАДАЧА 4 Дадени са девет точки, никои три от които не лежат на една права. Намерете броя на правите, определени от тези точки.

Решение: Две точки определят една права, като няма значение коя точка е първа и коя втора, т.е. редът на елементите не е от значение.
Задачата се свежда до намиране на броя на комбинациите на 9 елемента от 2-ри клас. Пресмятаме: $C_9^2 = \dfrac{9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2} = 9 \,.\, 4 = 36$ прави.

ЗАДАЧА 5 Намерете броя на диагоналите на правилен n-ъгълник.

Решение: Всички прави през 2 точки са $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} = \dfrac{n^2 - n}{2}$.
От тях трябва да извадим броя на страните n.
Пресмятаме: $\dfrac{n^2 - n}{2} - n = \dfrac{n^2 - n - 2n}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2}$.
Броят на диагоналите на правилен n-ъгълник е $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ“

1. Мая прави сандвичи, като разполага с 4 продукта: кашкавал, сирене, филе и луканка. На всеки сандвич слага по един или по два продукта. Колко различни вида сандвичи може да приготви Мая?

2. Намерете колко четирицифрени числа могат да се образуват с еднократно използване на цифрите 1, 2, 6 и 0.

3. Намерете колко четни четирицифрени числа могат да се образуват с еднократно използване на цифрите 3, 5, 4 и 8.

4. Известно е, че кодът на един сейф се състои от 5 различни нечетни цифри. Какъв е максималният брой опити, които трябва да се направят, за да се открие кодът на този сейф?

5. Намерете по колко различни начина могат да се разпределят в един ден 6 различни учебни предмета, ако в дневната програма се включват по 6 предмета.

6. В турнир по футбол участвали 10 отбора. Всеки два отбора играли помежду си по два мача. Колко футболни мача са изиграли общо?

7. Намерете по колко различни начина 6 души могат да седнат на една пейка.

8. Намерете по колко различни начина 6 души могат да се подредят в един кръг.

9. Четири момчета и едно момиче трябва да се подредят в един ред за снимка, като момичето винаги е в средата. Намерете по колко начина може да стане това.

10. Намерете по колко различни начина могат да се разпределят в един ден 10 различни учебни предмета, ако в дневната програма се включват по 5 предмета.

11. Дадени са 7 различни по цвят ленти. Намерете колко различни трицветни знамена могат да се ушият от тях, като лентите са разположени хоризонтално една под друга.

12. В играта „ТОТО 2” от 49 числа се изтеглят 6 числа, като редът на изтеглянето им не е от значение. Намерете колко фиша трябва да се попълнят, ако във всеки от тях трябва задължително да има две числа от 1 до 14.

13. Намерете броя на диагоналите на правилен 10-ъгълник.

14. В кутия има 5 червени и 10 сини топки. Намерете по колко начина едновременно могат се извадят 4 от тях, така че:

а) четирите топки да са червени;

б) четирите топки да са сини;

в) двете топки да са червени, а другите две – сини;

г) едната топка да е червена, а другите три – сини.

15. В партида има 6 изделия I качество, 8 изделия II качество и 10 изделия III качество. Намерете по колко начина едновременно могат се вземат 5 изделия, така че:

а) всички да са I качество;

б) всички да са от едно качество;

в) двете да са I качество, двете да са II качество, а едно да е III качество;

г) едно да е I качество, едно да е II качество, а три да са III качество.

16. В състезание по математика могат да участват отбори, състоящи се от двама, трима или четирима ученика. Намерете колко различни отбора могат да се сформират от 6 равностойни ученици.

ТЕМА

2

ВЕКТОРИ

(Урок № 11 – Урок № 18)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- вектори;
- действия с вектори;
- приложения на вектори.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

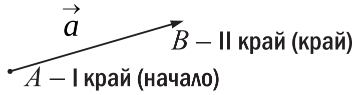
- да извършват операции с вектори;
- да използват вектори при решаване на задачи.

11. ВЕКТОР

Определение

От двете твърдения
„Автомобил изминава разстоянието между градовете A и B“ и
„Автомобил изминава разстоянието от града A до града B“ второто дава повече информация за движението, като указва и посоката – от A към B. Онагледяването във втория случай става, като в края B на отсечката AB поставим стрелка.

О Отсечка, на която единият край е приет за първи, а другият – за втори, се нарича **насочена отсечка** или **вектор**.



Означения: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$

Всяка отсечка AB определя два вектора: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

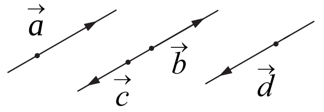
Векторът има следните елементи, които го определят:

краища – първият край A на вектора се нарича **начало**, а вторият B – **край** на вектора;

дължина – дължината на един вектор $\overrightarrow{AB}$ $(\vec{a})$ се нарича дължината на отсечката AB. Записва се $|\overrightarrow{AB}| = AB$ $(|\vec{a}| = a)$;

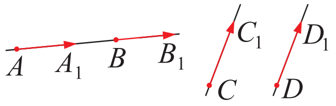
посока – посока на един вектор $\overrightarrow{AB}$ се нарича посоката на обхождането му от началото A към края B.

колинеарни вектори



Вектори, които лежат на една и съща права или на успоредни прави, се наричат колинеарни.
Например $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

еднопосочни вектори



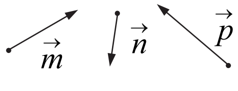
Колинеарни вектори, които имат една и съща посока, се наричат еднопосочни.
Означения: $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB_1}$
$\overrightarrow{CC_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DD_1}$

нулев вектор

Вектор, чиито краища съвпадат, се нарича нулев вектор $(\vec{0})$. Той няма определена посока, а дължината му е 0. Всяка точка A може да се разглежда като нулев вектор $\overrightarrow{AA}$.

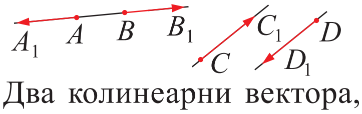
$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, $|\overrightarrow{AA}| = 0$

неколинеарни вектори



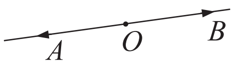
Такива са $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$.

противопосочни вектори



Два колинеарни вектора, които имат противоположни посоки, се наричат противопосочни.
Означения: $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BB_1}$
$\overrightarrow{CC_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DD_1}$

противоположни вектори

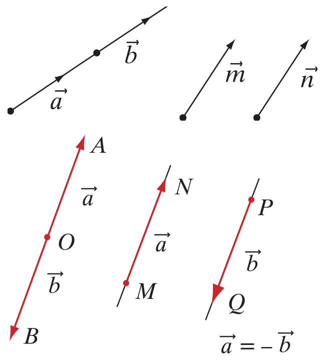


Два вектора, които са противопосочни и имат равни дължини, се наричат противоположни.
$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$

Равенство на вектори

О Вектори, които имат една и съща посока и една и съща дължина, се наричат **равни вектори**.

Всички нулеви вектори са равни и затова ще ги третираме като един вектор, който ще наричаме нулев и ще означаваме с $\vec{0}$.
Обратно, от $\vec{a}=\vec{b}$ следва, че
или векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ненулеви еднопосочни с равни дължини,
или векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са нулеви, т.е. $\vec{a}=\vec{0}$ и $\vec{b}=\vec{0}$.



Равни вектори: $\vec{a}=\vec{b}$; $\vec{m}=\vec{n}$

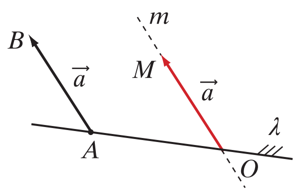
$$\vec{a}=\vec{b} \quad \begin{cases} \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \\ |\vec{a}|=|\vec{b}| \end{cases}$$

Твърденията, които се отнасят за дадени вектори, са в сила и за равните им вектори.

Например ако $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ са противоположни и то $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ са противоположни.
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{MN}$,
$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{PQ}$

На чертежа равните вектори са означени с една и съща малка буква.

ОСНОВНА ЗАДАЧА Даден е векторът $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Да се построи вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$, където O е произволна точка в равнината.



Решение:

През точката O построяваме права m, успоредна на правата AB. В полуравнината λ с контур AO, съдържаща точката B, нанасяме върху правата m отсечка OM с дължина $|\vec{a}|$. Векторът $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.

Построяването на вектора $\overrightarrow{OM}$ се нарича нанасяне или пренасяне на вектора $\overrightarrow{AB}$ в точката O.
От равенства от вида $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$ следва, че точките M и N съвпадат, т.е. от $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON} \Rightarrow M\equiv N$.

ЗАДАЧИ

1 Начертайте и означете:
а) два противопосочни вектора;
б) два еднопосочни вектора;
в) два противоположни вектора;
г) два равни вектора.

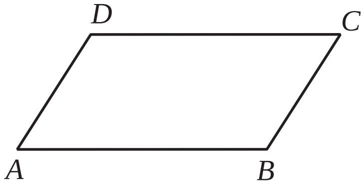
2 Начертайте и означете три колинеарни и три неколинеарни вектора.

3 Даден е вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $|\vec{a}|=3$ cm. Начертайте два вектора $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, равни на вектора $\vec{a}$ и с начало O произволна точка в равнината. Какъв извод ще направите за точките M и N?

4 Дадени са три неколинеарни вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и точка O. Начертайте последователно векторите $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$.

12. СЪБИРАНЕ НА ВЕКТОРИ

ЗАДАЧА 1 На чертежа четириъгълникът $ABCD$ е успоредник. Посочете кои от векторите с краища върховете на успоредника са равни и кои са противоположни.



Решение: Равни са векторите $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$.
Противоположни са векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

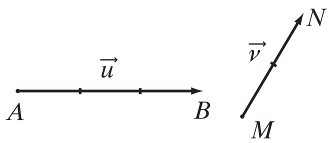
От определението за равни вектори следват свойствата:

1. рефлексивност: $\vec{a} = \vec{a}$;

2. симетричност: $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a}$;

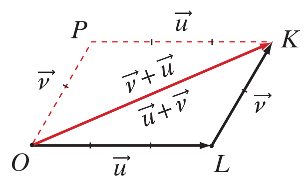
3. транзитивност: $\vec{a} = \vec{b},\ \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$.

Сбор на вектори



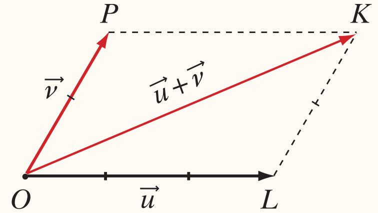
Нека са дадени два вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$.
Извършваме следното построение:

- избираме произволна точка O;
- с начало O построяваме $\overrightarrow{OL} = \vec{u}$;
- с начало L построяваме $\overrightarrow{LK} = \vec{v}$.

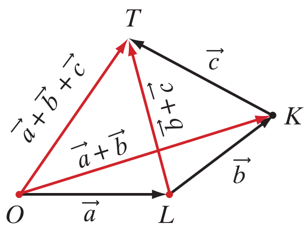


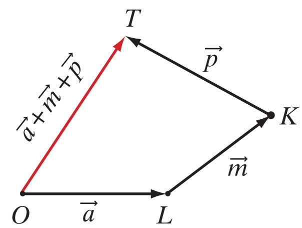
Векторът $\overrightarrow{OK}$ и всеки вектор, който е равен на него, наричаме сбор на векторите $\vec{\boldsymbol{u}}$ и $\vec{\boldsymbol{v}}$ и го означаваме $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$.
За всеки вектор $\vec{u}$ са изпълнени равенствата $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ и $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \vec{0}$.
Когато векторите $\vec{u}$ и $\vec{v}$ не са колинеарни, даденото по определение правило за построяване на сбора им се нарича **правило на триъгълника**.
Ако разменим реда на събираемите, сборът $\vec{v} + \vec{u}$ отново е векторът $\overrightarrow{OK}$.
Когато $\vec{u}$ и $\vec{v}$ не са колинеарни, сборът $\vec{u} + \vec{v}$ можем да получим и по правилото на успоредника.

Правило на успоредника:



- избираме произволна точка O;
- с начало O построяваме вектора $\overrightarrow{OL} = \vec{u}$;
- с начало O построяваме вектора $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$;
- построяваме успоредника $OLKP$;
- диагоналът $\overrightarrow{OK}$ на успоредника $OLKP$ е търсеният сбор $\vec{u} + \vec{v}$.





Може да се докаже, че сборът на произволни два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ не зависи от началната точка O и от реда на събираемите, т.е.

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (комутативен закон).

Събирането на три вектора има свойството

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоциативен закон).

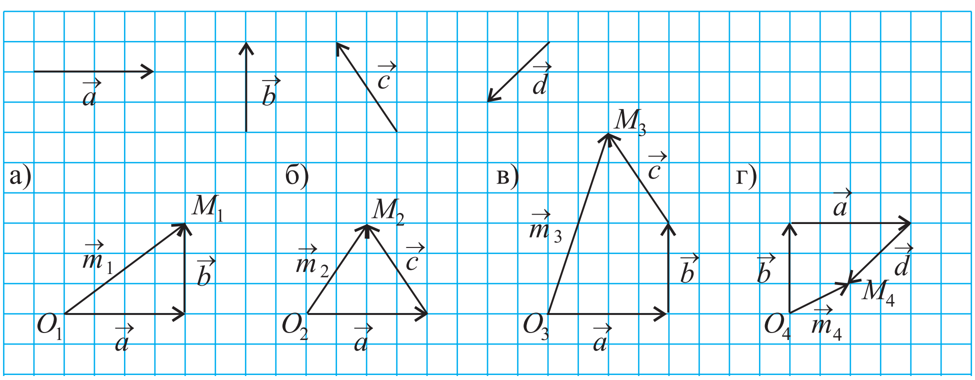
Ако $T \equiv O$, сборът $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Сборът на повече от два вектора може да се построи и без да го свеждаме до построяване на сбор на два вектора.

ЗАДАЧА 2 Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Начертайте:

а) $\vec{m}_1=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{m}_2=\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{m}_3=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{m}_4=\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$.

Решение:



$\overrightarrow{O_1M_1}=\vec{m}_1$ $\quad$ $\overrightarrow{O_2M_2}=\vec{m}_2$ $\quad$ $\overrightarrow{O_3M_3}=\vec{m}_3$ $\quad$ $\overrightarrow{O_4M_4}=\vec{m}_4$

$\vec{m}_1=\vec{a}+\vec{b}$ $\quad$ $\vec{m}_2=\vec{a}+\vec{c}$ $\quad$ $\vec{m}_3=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ $\quad$ $\vec{m}_4=\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$

ЗАДАЧИ

1 Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ върху квадратна мрежа. Начертайте:
а) $\vec{m}_1=\vec{b}+\vec{a}$; б) $\vec{m}_2=\vec{b}+\vec{d}$;
в) $\vec{m}_3=\vec{c}+\vec{d}$; г) $\vec{m}_4=\vec{d}+\vec{a}$;
д) $\vec{m}_5=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$; е) $\vec{m}_6=\vec{c}+\vec{b}+\vec{d}$.
Упътване: Можете да използвате дадените вектори в *Задача 2* от урока.

2 Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}|=2$ cm и $|\vec{b}|=3$ cm. Начертайте вектора $\overrightarrow{BB_1}$, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са:
а) еднопосочни;
б) противопосочни.

3 Дадени са два неколинеарни вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Начертайте вектора $\vec{u}+\vec{v}$, като използвате правилото на успоредника.

4 Дадени са отсечка MN и точка O. Изразете вектора $\overrightarrow{MN}$ като сбор на два вектора, краищата на които са в точките M, N и O. Кога двата събираеми вектора са колинеарни?

5 Докажете, че сборът на два противоположни вектора е нулевият вектор.

13. СЪБИРАНЕ НА ВЕКТОРИ. УПРАЖНЕНИЕ

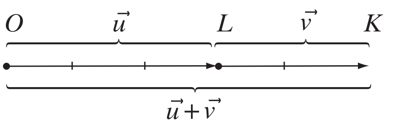
ЗАДАЧА 1 Постройте сбора на два вектора, които са:

а) еднопосочни; б) противопосочни.

Решение:

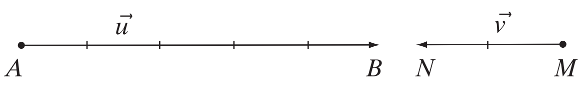
а) **Дадено:**

Построение:

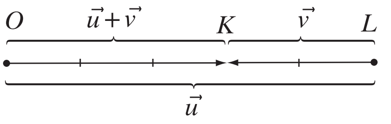


! Сборът на два еднопосочни вектора е вектор, еднопосочен с тях и с дължина, равна на сбора от дължините на двата вектора.

б) **Дадено:**



Построение:

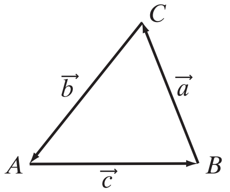


! Сборът на два противопосочни вектора е вектор, еднопосочен с вектора с по-голяма дължина и с дължина, равна на разликата от дължините на двата вектора.

Случаите а) и б) на *Задача 1* показват, че

сборът на колинеарни вектори е вектор, колинеарен с тях.

ЗАДАЧА 2 Даден е произволен $\triangle ABC$. Ако върху страните му са избрани векторите $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, докажете, че $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.



Решение:

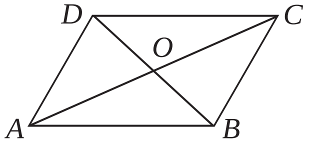
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

$\Rightarrow\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

ЗАДАЧА 3 Диагоналите AC и BD на успоредника $ABCD$ се пресичат в точка O. Намерете:

а) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}$;

г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; д) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$.



Решение:

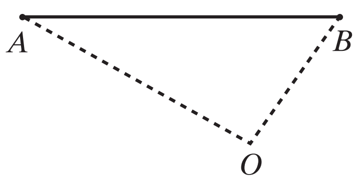
а) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$ б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

в) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$ г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

д) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$ е) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

! При сбор на вектори:
- краят на първото събираемо съвпада с началото на второто събираемо и т.н.;
- сборът на вектори е вектор с начало в началото на първото събираемо и край в края на последното събираемо.

ЗАДАЧА 4 Дадени са отсечка AB и произволна точка O $(O \notin AB)$ в равнината. Изразете векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ като сбор на два вектора, единият край на които е точката O.



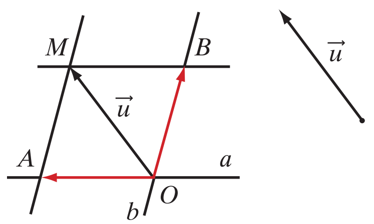
Решение:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$

! Ако изберем друга точка O_1, равенството $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1B}$ изразява $\overrightarrow{AB}$ като сбор на други събираеми, т.е. представянето на един вектор като сбор не е еднозначно.

ЗАДАЧА 5 Дадени са вектор $\vec{u}$ и правите a и b, които се пресичат в точка O. Да се представи векторът $\vec{u}$ като сбор на два вектора, единият от които е успореден на a, а другият – на b.



Решение:

Начертаваме вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
През точката M прекарваме прави, които са успоредни на b и a и ги пресичат съответно в точките A и B.
Тогава $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

О Един вектор е успореден на дадена права, когато този вектор и всеки, който е равен на него, е успореден на правата или лежи на нея.

ЗАДАЧИ

1 Нека A, B, C, D, E са точки в равнината. Намерете сбора на векторите:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$;

г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$.

2 Докажете, че ако в успоредника $ABCD$ диагоналите се пресичат в точка O, то:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$;

б) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$;

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$;

г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$.

14. ИЗВАЖДАНЕ НА ВЕКТОРИ

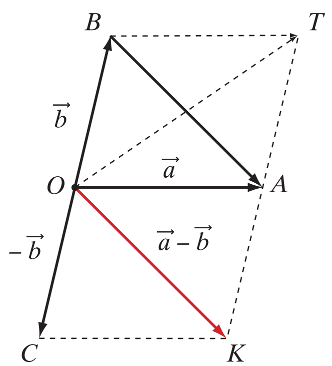
Както при числата, така и при векторите под разлика на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ще разбираме вектор $\vec{u}$, сборът на който с $\vec{b}$ да е равен на $\vec{a}$.
Разликата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ще означаваме с $\vec{a}-\vec{b}$.
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{u}$, като $\vec{u}+\vec{b}=\vec{a}$.

О

Разлика $\vec{a}-\vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича векторът $\vec{a}+(-\vec{b})$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Проверяваме: ако $\vec{a}-\vec{b}=\vec{u}$ и $\vec{u}=\vec{a}+(-\vec{b})$, то $\vec{u}+\vec{b}=\vec{a}$,

т.е. $\underbrace{\vec{a}+}_{\vec{u}}\underbrace{(-\vec{b})+\vec{b}}_{\vec{0}}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.



От равенството $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ се вижда, че построяването на разликата на два вектора се свежда до построяване на сбора на умаляемото и противоположния вектор на умалителя.

Знаем, че диагоналът (векторът $\vec{OT}$) на успоредника $OATB$, построен върху векторите $\vec{OA}=\vec{a}$ и $\vec{OB}=\vec{b}$, е равен на сбора $\vec{a}+\vec{b}$.

Тъй като $OKAB$ е успоредник, то $\vec{BA}=\vec{OK}=\vec{a}-\vec{b}$. Тогава, ако $\vec{OA}=\vec{a}$ и $\vec{OB}=\vec{b}$, то в успоредника $OATB$

$$\begin{cases} \vec{OT}=\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b} \\ \vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{a}-\vec{b}. \end{cases}$$

Когато изваждаме два вектора с общо начало, използваме правилото $\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA}$, т.е. $\overrightarrow{O\underset{\mathrm{II}}{A}}-\overrightarrow{O\underset{\mathrm{I}}{B}}=\overrightarrow{\underset{\mathrm{I}}{B}\underset{\mathrm{II}}{A}}$. Това векторно равенство може да се запише и така: $\overrightarrow{\underset{\mathrm{I}}{B}\underset{\mathrm{II}}{A}}=\overrightarrow{O\underset{\mathrm{II}}{A}}-\overrightarrow{O\underset{\mathrm{I}}{B}}$, т.е. векторът $\vec{BA}$ е представен като разлика на два вектора с **общо начало**.
Тези две векторни равенства често се използват при решаване на задачи.

ЗАДАЧА 1 Намерете разликата на векторите: а) $\vec{ON}-\vec{OM}$; б) $\vec{MA}-\vec{MP}$; в) $\vec{O_1X}-\vec{O_1Y}$.

Решение: а) $\vec{ON}-\vec{OM}=\vec{MN}$ б) $\vec{MA}-\vec{MP}=\vec{PA}$ в) $\vec{O_1X}-\vec{O_1Y}=\vec{YX}$

ЗАДАЧА 2 Представете като разлика на два вектора с общо начало векторите:

а) $\vec{BC}$ (с начало O); б) $\vec{RS}$ (с начало M); в) $\vec{PQ}$ (с начало N).

Решение: а) $\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}$ б) $\vec{RS}=\vec{MS}-\vec{MR}$ в) $\vec{PQ}=\vec{NQ}-\vec{NP}$

ЗАДАЧА 3 Извършете действията:

а) $\vec{AP}-\vec{QP}-\vec{MQ}$; б) $\vec{AB}-\vec{NB}+\vec{DA}-\vec{DC}$.

Решение: а) $\vec{AP}-\vec{QP}-\vec{MQ}=$ б) $\vec{AB}-\vec{NB}+\vec{DA}-\vec{DC}=$

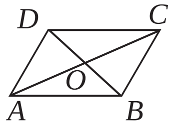
$=\vec{AP}+\vec{PQ}-\vec{MQ}=$ $=\vec{AB}+\vec{BN}+\vec{CD}+\vec{DA}=$

$=\vec{AQ}+\vec{QM}=\vec{AM}$ $=\vec{AN}+\vec{CA}=\vec{CA}+\vec{AN}=\vec{CN}$

ЗАДАЧА 4 Диагоналите AC и BD на успоредника $ABCD$ се пресичат в точка O.

Намерете: а) $\vec{AB}-\vec{OB}-\vec{CO}$; б) $\vec{AD}-\vec{CO}+\vec{BC}-\vec{OD}$.

Решение:



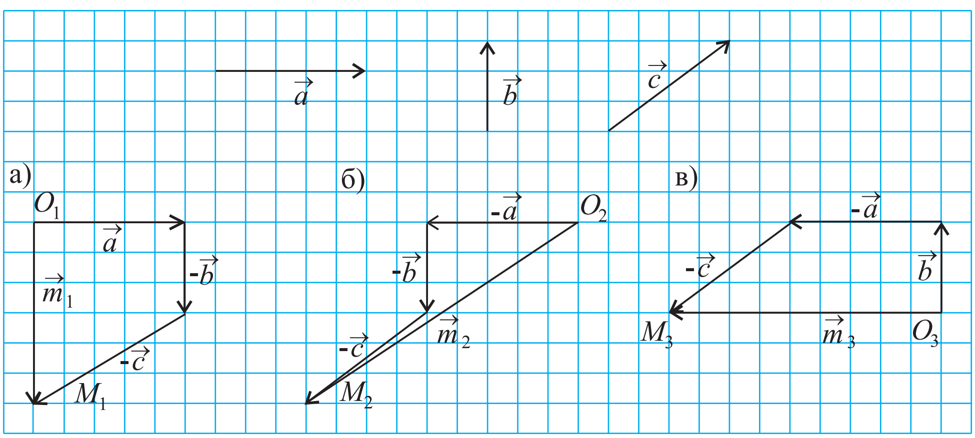
а) $\vec{AB}-\vec{OB}-\vec{CO}=$ б) $\vec{AD}-\vec{CO}+\vec{BC}-\vec{OD}=$

$=\vec{AB}+\vec{BO}+\vec{OC}=\vec{AC}$ $=\vec{AD}+\vec{DO}+\vec{OC}+\vec{CB}=\vec{AB}$

ЗАДАЧА 5 Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Начертайте:

а) $\vec{m}_1=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; б) $\vec{m}_2=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; в) $\vec{m}_3=\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$.

Решение:



$\vec{O_1M_1}=\vec{m}_1$ $\vec{O_2M_2}=\vec{m}_2$ $\vec{O_3M_3}=\vec{m}_3$

$\vec{m}_1=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ $\vec{m}_2=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ $\vec{m}_3=\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$

ЗАДАЧИ

1 Начертайте неколинеарните вектори $\vec{MA}$, $\vec{MB}$ и $\vec{MC}$ и векторите:
а) $\vec{MC}-\vec{MB}$; б) $\vec{MA}-\vec{MC}$; в) $\vec{MB}-\vec{MA}$.

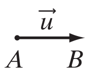
2 Намерете разликата на векторите:
а) $\vec{OY}-\vec{OX}$; б) $\vec{O_1M}-\vec{O_1N}$; в) $\vec{RB}-\vec{RA}$.

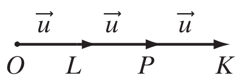
3 Представете като разлика на два вектора с общо начало O векторите:
а) $\vec{CD}$; б) $\vec{AD}$; в) $\vec{DA}$; г) $\vec{RS}$.

4 Даден е успоредник $ABCD$. Изразете векторите $\vec{DC}$, $\vec{BC}$ и $\vec{BD}$ като разлика на вектори с начало A.

5 Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, никои два от които не са колинеарни. Начертайте векторите:
а) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; б) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;
в) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

15. УМНОЖЕНИЕ НА ВЕКТОР С ЧИСЛО. СВОЙСТВА

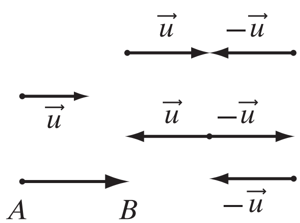




Нека е даден векторът $\vec{AB}=\vec{u}$ и е построен сборът

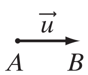
$$\vec{OK}=\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}.$$

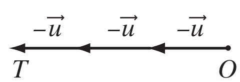
Естествено е вектора $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$ да означим с $3\vec{u}$ и да го наречем произведение на вектора $\vec{u}$ с числото 3. Този вектор е $\vec{OK}$ и $\begin{array}{c}\vec{OK}\uparrow\uparrow\vec{u}\\ |\vec{OK}|=3|\vec{u}|\end{array}\Rightarrow \vec{OK}=3\vec{u}$.



Противоположният вектор на $\vec{u}$ се означава с $-\vec{u}$. Той може да се разглежда като произведение на вектора $\vec{u}$ с числото (–1), т.е.

$$-\vec{u}=(-1).\vec{u}$$
$$\vec{AB}=-\vec{BA}.$$





Нека е даден векторът $\vec{AB}=\vec{u}$ и е построен сборът

$$\vec{OT}=(-\vec{u})+(-\vec{u})+(-\vec{u}).$$

Естествено е векторът $\vec{OT}$ да означим с $-3\vec{u}$ и да го наречем произведение на вектора $\vec{u}$ с числото (–3). Този вектор е $\vec{OT}$ и $\begin{array}{c}\vec{OT}\uparrow\downarrow\vec{u}\\ |\vec{OT}|=3|\vec{u}|\end{array}\Rightarrow \vec{OT}=-3\vec{u}$.

О Произведение $k\vec{u}$ на вектора $\vec{u}$ с числото k се нарича вектор с дължина, равна на произведението от дължината на $\vec{u}$ и абсолютната стойност на k, еднопосочен с $\vec{u}$ при $k > 0$ и противопосочен на $\vec{u}$ при $k < 0$.

$$|k\vec{u}|=|k||\vec{u}| \qquad \begin{cases} k>0, & k\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{u}\\ k<0, & k\vec{u}\uparrow\downarrow\vec{u}\end{cases}$$

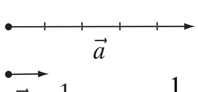
$$0.\vec{u}=\vec{0}$$

Посоките на вектора $\vec{u}$ и вектора $k\vec{u}$ или съвпадат, или са противоположни, т.е. $\vec{u}$ и $k\vec{u}$ са колинеарни.

От $\vec{AB}=k\vec{CD}$ следва, че правите AB и CD са успоредни.

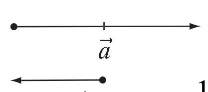
ЗАДАЧА 1 Даден е вектор $\vec{a}$ с дължина 2,5 cm. Начертайте и намерете дължините на векторите: а) $\vec{b}=\frac{1}{5}\vec{a}$; б) $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{a}$.

Решение:

а) 

$\vec{b}=\frac{1}{5}\vec{a}$ $\qquad \frac{1}{5}>0 \Rightarrow \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$

$$|\vec{b}|=\left|\frac{1}{5}\right||\vec{a}|=\frac{1}{5}|\vec{a}|=\frac{1}{5}\cdot 2,5=0,5\text{ cm}$$

б) 

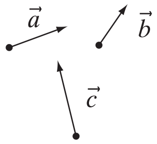
$\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{a}$ $\qquad -\frac{1}{2}<0 \Rightarrow \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$

$$|\vec{b}|=\left|-\frac{1}{2}\right||\vec{a}|=\frac{1}{2}|\vec{a}|=\frac{1}{2}\cdot 2,5=1,25\text{ cm}$$

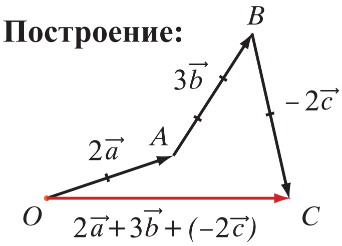
ЗАДАЧА 2 Изберете три неколинеарни вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и постройте сбора $2\vec{a}+3\vec{b}+(-2\vec{c})$.

Решение:

Дадено:



Построение:



Получихме

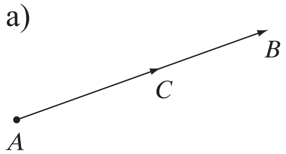
$\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+3\vec{b}+(-2\vec{c})$.

ЗАДАЧА 3 Точките A, C, B, взети в този ред, лежат на една права, като $AB = 5$ cm и $AC = 3$ cm. Намерете коефициента k, така че:

а) $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CA}=k\,\overrightarrow{AB}$.

Решение:

а)



1. $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$

$k=?\quad |\overrightarrow{AC}| = |k|\,|\overrightarrow{AB}|$

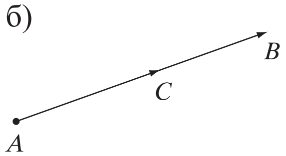
$3=|k|.5$

$|k|=\dfrac{3}{5}$

2. От $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ k>0$.

3. Тогава $k=\dfrac{3}{5}$.

б)



1. $\overrightarrow{CA}=k\,\overrightarrow{AB}$

$k=?\quad |\overrightarrow{CA}|=|k|\,|\overrightarrow{AB}|$

$3=|k|.5$

$|k|=\dfrac{3}{5}$

2. От $\overrightarrow{CA}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ k<0$.

3. Тогава $k=-\dfrac{3}{5}$.

Чрез аналогични разсъждения може да се докаже и следната теорема:

Т За всяка точка C от правата AB съществува такова число k, че $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$.

Вярна е и обратната теорема (признак три точки да лежат на една права):

Т Ако $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$, където k е число, точката C лежи на правата AB.

Ако $\vec{u}\neq\vec{0}$ и $\vec{v}$ са произволни колинеарни вектори, съществува точно едно число k, за което $\vec{v}=k\,\vec{u}$.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ k>0,\ \text{ако}\ \ \vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}\\ \bullet\ k<0,\ \text{ако}\ \ \vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}\\ \bullet\ k=0,\ \text{ако}\ \ \vec{v}=\vec{0}\end{array}\right\}\ |k|=\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

Следователно два вектора $\vec{u}\neq\vec{0}$ и $\vec{v}$ са колинеарни тогава и само тогава, когато съществува число k, за което $\vec{v}=k\,\vec{u}$.

ЗАДАЧИ

1 Дадени са два неколинеарни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Начертайте векторите:

а) $2\vec{a}+2\vec{b}$; б) $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$;

в) $-\vec{a}+3\vec{b}$; г) $\vec{a}+(-2)\vec{b}$.

2 Дадени са колинеарни вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$. Начертайте векторите:

а) $\vec{u}+\vec{v}+(-\vec{w})$;

б) $2\vec{u}+(-\vec{v})+\dfrac{1}{2}\vec{w}$.

3 Дадени са неколинеарните вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$. Начертайте векторите:

а) $2\vec{u}+(-\vec{v})+(-2\vec{w})$;

б) $\dfrac{1}{2}\vec{u}+\dfrac{1}{2}\vec{v}+\left(-\dfrac{1}{2}\vec{w}\right)$.

16. ВЕКТОРИ. ПРИЛОЖЕНИЯ

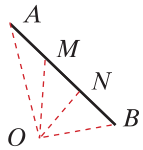
При действия с вектори най-често се използват свойствата

$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ $\qquad \alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ $\qquad \alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$,

където α и β са произволни числа, а $\vec{u}$ и $\vec{v}$ – произволни вектори.

ЗАДАЧА 1 Дадена е отсечката AB. Точките M и N я разделят на три равни части. Точката O е произволна точка, нележаща на AB. Да се докажат равенствата: а) $\vec{OM}=\frac{1}{3}(2\vec{OA}+\vec{OB})$; б) $\vec{ON}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+2\vec{OB})$.

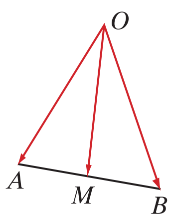
Решение:



а) $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}=\vec{OA}+\frac{1}{3}\vec{AB}=\vec{OA}+\frac{1}{3}(\vec{OB}-\vec{OA})=\frac{1}{3}(2\vec{OA}+\vec{OB})$

б) $\vec{ON}=\vec{OB}+\vec{BN}=\vec{OB}+\frac{1}{3}\vec{BA}=\vec{OB}+\frac{1}{3}(\vec{OA}-\vec{OB})=\frac{1}{3}(\vec{OA}+2\vec{OB})$

Т Ако M е средата на страната AB в $\triangle ABO$, то $\vec{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$.



Доказателство:

$$+\left|\begin{array}{l}\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}\\ \vec{OM}=\vec{OB}+\vec{BM}\end{array}\right.$$

$$2\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\underbrace{\vec{AM}+\vec{BM}}_{\vec{0}}\Rightarrow\vec{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$$

Вярна е и обратната теорема.

Т Ако OAB е триъгълник и $\vec{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$, то точката M е средата на AB.

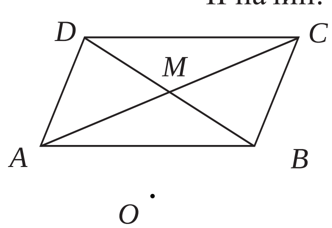
Доказателство:

Ако N е средата на AB, доказахме, че $\vec{ON}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$. По условие $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$. Тогава $\vec{ON}=\vec{OM}\ \Rightarrow\ N\equiv M$, т.е. M е средата на AB.

ЗАДАЧА 2 Нека $ABCD$ е успоредник, а O – произволна точка. Докажете, че $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$.

Решение: I начин: От $\vec{AB}=\vec{DC}\Rightarrow\ \vec{OB}-\vec{OA}=\vec{OC}-\vec{OD}$, т.е. $\vec{OB}+\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OC}$.

II начин: Пресечната точка на AC и BD означаваме с M.



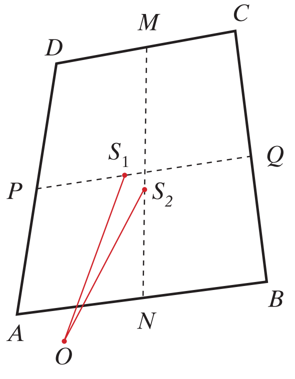
M е средата на $AC\Rightarrow\ \vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OC})$.

M е средата на $BD\Rightarrow\ \vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OD})$.

Тогава $\left|\begin{array}{l}\vec{OA}+\vec{OC}=2\vec{OM}\\ \vec{OB}+\vec{OD}=2\vec{OM}\end{array}\right.\Rightarrow\ \vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$.

ЗАДАЧА 3 Докажете, че средите на отсечките с краища средите на срещуположните страни на произволен четириъгълник съвпадат.

Решение:



Означаваме средите на страните AB, BC, CD и DA съответно с точките N, Q, M и P. Нека S_1 и S_2 са средите съответно на PQ и MN. Избираме произволна точка O в равнината.

$$\vec{OS_1}=\frac{1}{2}(\vec{OP}+\vec{OQ})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OD})+\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC})\right)=$$

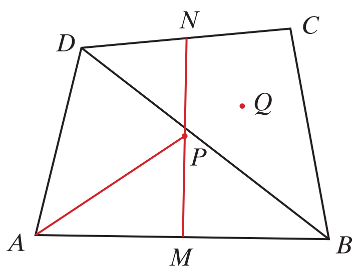
$$=\frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD})$$

Аналогично

$$\vec{OS_2}=\frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD})\ \Rightarrow\ \vec{OS_1}=\vec{OS_2}\ \Rightarrow\ S_1\equiv S_2.$$

ЗАДАЧА 4 В четириъгълник $ABCD$ точките M и N са средите съответно на страните AB и CD, а точката P е средата на MN. За точка Q, вътрешна за $\triangle BCD$, е изпълнено векторното равенство $\vec{AQ}=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC})$. Да се докаже, че точките A, P и Q лежат на една права.

Доказателство:



Точките A, P и Q ще лежат на една права, ако $\vec{AP}=k\,\vec{AQ}$.

$$\vec{AP}=\frac{1}{2}(\vec{AM}+\vec{AN})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AC})\right)$$

$$\vec{AP}=\frac{1}{4}(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC}),\qquad \vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC}=4\,\vec{AP}\qquad (1)$$

$$\vec{AQ}=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC}),\qquad \vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC}=3\,\vec{AQ}\qquad (2)$$

От (1) и (2) получаваме

$4\,\vec{AP}=3\,\vec{AQ}$, т.е. $\vec{AP}=\frac{3}{4}\vec{AQ}\ \Rightarrow$ лежат на една права.

ЗАДАЧИ

1 Начертайте ромб $ABCD$ и постройте вектори $\vec{AM}$ и $\vec{CN}$, равни на вектора $\vec{DB}$. Докажете, че четириъгълникът $AMNC$ е правоъгълник.

2 Дадена е отсечка AB. Точката S разделя AB на две части така, че $AS=12$ cm и $SB=42$ cm. Ако точката O е произволна, нележаща на AB, изразете вектора $\vec{OS}$ чрез векторите $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$.

3 Върху страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ са взети съответно точки L, M и N така, че $BL:LC=1:3$, $CM:MA=2:5$, $AN:NB=3:2$. Да се изразят векторите $\vec{LM}$, $\vec{MN}$ и $\vec{NL}$ чрез $\vec{CA}=\vec{a}$ и $\vec{CB}=\vec{b}$.

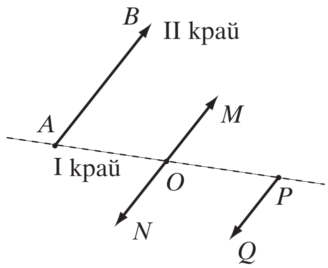
4 Точките M и N са средите съответно на страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$. Ако S е средата на отсечката MN, а O е произволна точка, да се докаже, че

$$\vec{OS}=\frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}).$$

17. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „ВЕКТОРИ“

ЗАПОМНЕТЕ!

Определение: Вектор – отсечка, чиито краища са номерирани: вектор $\overrightarrow{AB}$.



Елементи:

начало A и край B

посока $A \to B$

дължина $|AB|$

Векторите са:

еднопосочни: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OM}$,

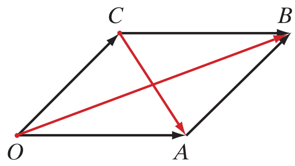
противопосочни: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{ON}$,

равни: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{PQ}$ $\left(\overrightarrow{ON} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PQ},\ |\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{PQ}|\right)$,

противоположни: $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM}$ $\left(\overrightarrow{ON} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OM},\ |\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OM}|\right)$

$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{OM}$.

Сбор на вектори:

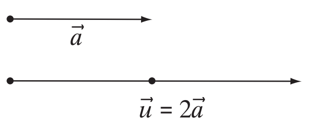


$\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

Когато два вектора имат общо начало, използваме правилото на успоредника: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.

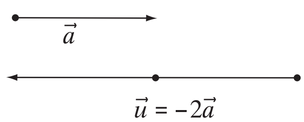
Разлика на вектори. Два вектора **с общо начало** изваждаме по правилото $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$, т.е. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$.

Произведение на вектор с число



$\vec{a}$ и $2\vec{a}$ са колинеарни,

$k > 0$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{u}$, $|\vec{u}| = |2||\vec{a}|$.



$\vec{a}$ и $-2\vec{a}$ са колинеарни,

$k < 0$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{u}$, $|\vec{u}| = |-2||\vec{a}|$.

> $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
>
> $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

> $\overrightarrow{AB}$ (като сбор) $= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$
>
> $\overrightarrow{AB}$ (като разлика) $= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$,
>
> където O е произволна точка в равнината.

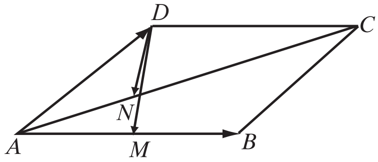
Теорема: $\overrightarrow{OA} = k\,\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$ точките O, A, B лежат на една права.

Теорема: Ако O е произволна точка в равнината и $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$ точката M е средата на AB.

> $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ $\quad$ $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$ $\quad$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\quad$ $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

ЗАДАЧА 1 Точка M е средата на страната AB на успоредника $ABCD$, а точка N е от диагонала AC и $AN = \frac{1}{3}AC$. Докажете, че точките D, M, и N лежат на една права.

Доказателство:



Точките D, M, и N ще лежат на една права, ако $\overrightarrow{DN} = k.\overrightarrow{DM}$.

1. Избираме: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

2. $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} =$
$= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$
$= -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} =$
$= \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b})$
$\Rightarrow \vec{a} - 2\vec{b} = 2\overrightarrow{DM}$

3. $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} =$
$= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} =$
$= -\vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) =$
$= \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b})$
$\Rightarrow \vec{a} - 2\vec{b} = 3\overrightarrow{DN}$

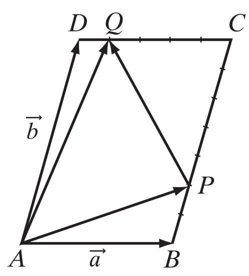
4. $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DM} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DM}$

Точките D, M и N лежат на една права.

ЗАДАЧА 2 Върху страните BC и CD на успоредника $ABCD$ са взети точки P и Q така, че $BP : PC = 2 : 5$, $CQ : QD = 4 : 1$. Ако $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, изразете чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите:

а) $\overrightarrow{AP}$; б) $\overrightarrow{AQ}$; в) $\overrightarrow{PQ}$.

Решение:



а) **1.** $BP : PC = 2 : 5 \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{7}\vec{b}$

2. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{a} + \overrightarrow{BP}$

3. $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$

б) **1.** $CQ : QD = 4 : 1 \Rightarrow \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{5}\vec{a}$.

2. $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \vec{b} + \overrightarrow{DQ}$

3. $\overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \frac{1}{5}\vec{a}$.

в) I начин:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \left(\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{a}\right) - \left(\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}\right) = -\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}$$

II начин:

1. $BP : PC = 2 : 5 \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \frac{5}{7}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{7}\vec{b}$

2. $CQ : QD = 4 : 1 \Rightarrow \overrightarrow{QC} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC} = \frac{4}{5}\vec{a}$

3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{QC} = \frac{5}{7}\vec{b} - \frac{4}{5}\vec{a} = -\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}$

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „ВЕКТОРИ“

1. Даден е вектор $\vec{u}$ с дължина $|\vec{u}| = 1{,}5$ cm. Начертайте векторите $\vec{a} = 3\vec{u}$; $\vec{b} = -\vec{u}$; $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{u}$; $\vec{d} = -\frac{1}{3}\vec{u}$.

2. Даден е вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и O е произволна точка в равнината. Начертайте с начало точката O векторите $2\vec{a}$; $-3\vec{a}$; $-\vec{a}$; $\vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{a}$; $-\frac{1}{4}\vec{a}$.

3. При какви стойности на k векторът $k\vec{u}$ $(\vec{u} \neq 0)$ е:

а) равен на $\vec{u}$;

б) нулев вектор;

в) равен на $-\vec{u}$;

г) еднопосочен с $\vec{u}$;

д) противопосочен на $\vec{u}$;

е) равен на $5\vec{u}$.

4. Точките O, A, B, C, D, взети в този ред, лежат на една права, като $OA = 2$ cm, $AB = 1$ cm, $BC = 2$ cm и $CD = 3$ cm. Изразете векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD}$ чрез вектора $\overrightarrow{OA}$.

5. Диагоналите на успоредника $ABCD$ се пресичат в точка O. Средите на страните AB, BC, CD и DA са съответно M, P, N и Q. Докажете, че:

а) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$;

б) $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$.

6. Диагоналите на успоредника $ABCD$ се пресичат в точка O. Ако $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, изразете чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{ON}$, където M е средата на BC, а N – средата на AM.

7. Дадена е отсечка AB. Точките M, N, P, взети в този ред, я разделят на четири равни части. Точката O е произволна точка, нележаща на AB. Да се докажат равенствата:

а) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

б) $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

в) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB})$.

8. Даден е успоредник $ABCD$. Нека M, P, N и Q са средите съответно на страните му AB, BC, CD и DA, а O е пресечната точка на диагоналите. Представете векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{QN}$ като сбор на две събираеми, успоредни съответно на правите AB и AD.

9. Точките A, B, C и D не лежат на една права и отсечките AC и BD имат обща среда O. Докажете, че $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, т.е. че четириъгълникът $ABCD$ е успоредник.

10. В $\triangle ABC$ точките A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на страните BC, AC и AB. Да се докаже, че отсечките CC_1 и A_1B_1 имат обща среда.

11. Нека ABC е триъгълник. Тогава $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Вярно ли е обратното твърдение, че ако $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, съществува $\triangle ABC$ с $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{w}$?

12. Нека ABC е триъгълник. Да се докаже, че съществува триъгълник, на който страните са равни и успоредни на медианите на $\triangle ABC$.

Упътване: Медианите-вектори на $\triangle ABC$ са $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Сега използвайте зад. 11.

18. ТЕСТ № 1 ВЪРХУ ТЕМАТА „ВЕКТОРИ“

1. Ако дължината на вектора $\overrightarrow{AB}$ е 6 cm, дължината на вектора $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ в сантиметри е:

А) 18; Б) 27; В) 15; Г) 9.

2. Изразът $\frac{1}{4}\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\left(4\vec{a}-3\vec{b}\right)$ е равен на:

А) $\frac{5}{4}\vec{a}-\vec{b}$;

Б) $\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}$;

В) $-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}$;

Г) $-\frac{5}{4}\vec{a}-2\vec{b}$.

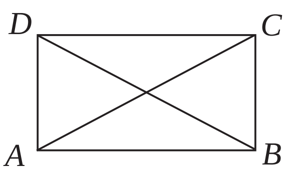
3. $ABCD$ е правоъгълник. Сборът $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ е равен на:

А) $\overrightarrow{AD}$;

Б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

В) $\overrightarrow{BD}$;

Г) $\overrightarrow{AC}$.



4. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ са взети съответно точките M и N така, че $AM:MC=1:2$ и $BN:NC=1:2$. **Не е вярно**, че:

А) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;

Б) $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NB}$;

В) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}$;

Г) $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\right)$.

5. Векторът, равен на израза $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{NM}$, е:

А) $\overrightarrow{MR}$; Б) $\overrightarrow{RM}$; В) $\overrightarrow{PM}$; Г) $\overrightarrow{MP}$.

6. В $\triangle ABC$ BM е медиана и точка O е средата на BM. Ако $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, то **не е вярно**, че:

А) $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;

Б) $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;

В) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}-3\vec{a}\right)$;

Г) $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{4}\left(3\vec{b}-\vec{a}\right)$.

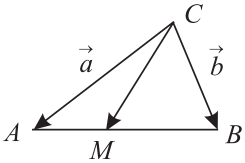
7. На чертежа $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ и $AM:MB=2:3$. Вярно е, че:

А) $\overrightarrow{CM}=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}$;

Б) $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$;

В) $\overrightarrow{CM}=-\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$;

Г) $\overrightarrow{CM}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$.



8. Точка N е от страната BC на $\triangle ABC$ и $BN:NC=2:1$. Ако $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, изразете чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите:

а) $\overrightarrow{CN}$; б) $\overrightarrow{AN}$.

9. В $\triangle ABC$ точката M е средата на AB, а точката N е от страната AC и $AN:NC=3:1$. Ако $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$, изразете чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите:

а) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BN}$; в) $\overrightarrow{CM}$.

10. Точките M и N са средите съответно на страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$. Докажете, че $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

ТЕСТ № 2 ВЪРХУ ТЕМАТА „ВЕКТОРИ“

1. Ако дължината на вектора $\overrightarrow{AB}$ е 3 cm, дължината на вектора $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ в сантиметри е:

А) 1; Б) 17; В) 5; Г) 13.

2. Изразът $\frac{2}{3}\left(3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$ е равен на:

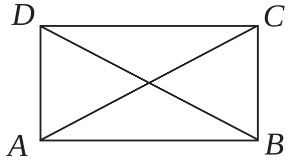
А) $\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$;

Б) $3\vec{a}-\frac{7}{6}\vec{b}$;

В) $3\vec{a}+\frac{7}{6}\vec{b}$;

Г) $\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$.

3. $ABCD$ е правоъгълник. Сборът $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ е равен на:



А) $\overrightarrow{AC}$;

Б) $\overrightarrow{AD}$;

В) $\overrightarrow{AB}$;

Г) $\overrightarrow{CD}$.

4. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ са взети съответно точките M и N така, че $AM : MC = 2 : 1$ и $BN : NC = 2 : 1$. **Не е вярно**, че:

А) $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$;

Б) $\overrightarrow{BN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$;

В) $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)$;

Г) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM}$.

5. Векторът, равен на израза $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{ED}$, е:

А) $\overrightarrow{AD}$; Б) $\overrightarrow{AE}$; В) $\overrightarrow{EA}$; Г) $\overrightarrow{DA}$.

6. В $\triangle ABC$ AM е медиана и точка O е средата на AM. Ако $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, то **не** е вярно, че:

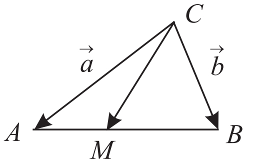
А) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;

Б) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;

В) $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}-3\vec{a}\right)$;

Г) $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{4}\left(3\vec{b}-\vec{a}\right)$.

7. На чертежа $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Ако $AM : MB = 2 : 5$, вярно е, че:



А) $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{5}{7}\vec{b}$;

Б) $\overrightarrow{CM}=\frac{5}{7}\vec{a}-\frac{2}{7}\vec{b}$;

В) $\overrightarrow{CM}=-\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$;

Г) $\overrightarrow{CM}=\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$.

8. Точка N е от страната BC на $\triangle ABC$ и $BN : NC = 1 : 3$. Ако $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, изразете чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите:

а) $\overrightarrow{BN}$; б) $\overrightarrow{AN}$.

9. В $\triangle ABC$ точката N е средата на BC, а точката M е от страната AB и $AM : MB = 2 : 1$. Ако $\overrightarrow{BM}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BN}=\vec{b}$, изразете чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите:

а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AN}$; в) $\overrightarrow{CM}$.

10. Точките M и N са средите съответно на страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$. Докажете, че
$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right).$$

ТЕМА

3

ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ

(Урок № 19 – Урок № 29)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- средна отсечка в триъгълник;
- медицентър на триъгълник;
- трапец, равнобедрен трапец;
- средна отсечка на трапец.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да използват свойствата на средната отсечка в триъгълника;
- да прилагат свойствата на медицентър на триъгълника;
- да прилагат свойствата на равнобедрен трапец;
- да използват свойствата на средна отсечка в трапец.

19. ДЕЛЕНЕ НА ОТСЕЧКА В ДАДЕНО ОТНОШЕНИЕ

Отношение на две отсечки

О **Отношение на две отсечки** се нарича отношението на дължините им, измерени с една и съща мерна единица.

Например $a = 20$ cm и $b = 30$ cm, $\frac{a}{b} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$; $a = 2$ dm и $b = 3$ dm, $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

Отношението на две отсечки не се изменя при промяна на мерната единица за дължина.

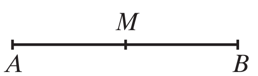
Отношението $k = \frac{a}{b}$ на две отсечки е положително число ($k > 0$), защото числата a и b са техните дължини и са положителни числа.

ЗАДАЧА 1 Намерете отношението на отсечките $AB = 20$ cm и $CD = 0{,}25$ m.

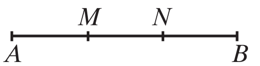
Решение: За да намерим отношението на дадените две отсечки, най-напред записваме дължините им в една и съща мерна единица: $AB = 20$ cm и $CD = 25$ cm, и след това пресмятаме $\frac{AB}{CD} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$, $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{5}$.

Отношението на отсечките AB и CD можем да запишем и така: $AB : CD = 4 : 5$.

Делене на отсечка в дадено отношение



Ако M е средата на отсечката AB, казваме, че M дели отсечката AB в отношение $k = 1$, защото $\frac{MA}{MB} = 1$.

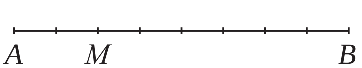


Точките M и N лежат на отсечката AB.
При избрана мерна единица разстоянията от тези точки до краищата A и B на отсечката са съответно $MA = 1$ и $MB = 2$, $NA = 2$ и $NB = 1$.
Тогава $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$; $\frac{NA}{NB} = \frac{2}{1}$.

Казваме, че точките M и N делят **вътрешно** отсечката AB в отношение съответно $1 : 2$ и $2 : 1$.
Казваме, че точките M и N делят **вътрешно** отсечката BA в отношение съответно $2 : 1$ и $1 : 2$.

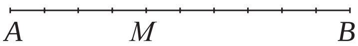
О Точката M **дели** отсечката AB, считано от точка A, **вътрешно** в отношение k ($k > 0$), ако M лежи на отсечката AB и $MA : MB = k$.

ПРИМЕР 1

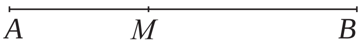


Ако M дели $AB = 8$ м. ед. вътрешно в отношение $k = \frac{1}{3}$, то $M \in AB$ и $AM = \frac{1}{4}AB$.

ПРИМЕР 2



Ако M дели $AB = 10$ м. ед. вътрешно в отношение $k = \frac{2}{3}$, то $M \in AB$ и $AM = \frac{2}{5}AB$.



В общия случай, ако M дели отсечката AB, считано от точка A, вътрешно в отношение k ($k > 0$) $MA : MB = k$, то $AM = \frac{k}{k+1}AB$.

От $\frac{AM}{MB} = k \Rightarrow$

$$AM = k.MB$$
$$AM = k(AB - AM)$$
$$AM = k\,.\,AB - k\,.\,AM$$
$$k\,.\,AM + AM = k\,.\,AB$$
$$(k+1)\,.\,AM = k\,.\,AB$$
$$AM = \frac{k}{k+1}AB.$$

Може да се докаже, че точката M е единствена.

Точката M лежи на правата AB „вън“ от отсечката AB. При избраната мерна единица $MA : MB = 5 : 2$. Казваме, че точката M дели **външно** отсечката AB в отношение $5 : 2$. Случаи на външно деление на отсечка в дадено отношение ще разглеждаме в следващите класове. Ето защо в изложението ще говорим за деление на отсечка в дадено отношение, само ако точките са вътрешни за отсечката, без изрично да подчертаваме това.

ЗАДАЧА 2

Точката M дели отсечката $AB = 20$ cm в отношение $AM : MB = k$.

Намерете дължината на отсечката AM, ако: а) $k = \frac{1}{4}$; б) $k = \frac{2}{3}$.

Решение:

а) $$AM = \frac{k}{k+1}AB = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1}AB = \frac{1}{5}AB = \frac{1}{5}\cdot 20$$
$$AM = 4\,\text{cm}$$

б) $$AM = \frac{k}{k+1}AB = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1}AB = \frac{2}{5}AB = \frac{2}{5}\cdot 20$$
$$AM = 8\,\text{cm}$$

ЗАДАЧИ

1 Намерете дължините на отсечките AM и BM, ако точката M дели отсечката AB в отношение:

а) $3 : 2$ и $AB = 20$ cm;

б) $2 : 3$ и $AB = 9$ cm;

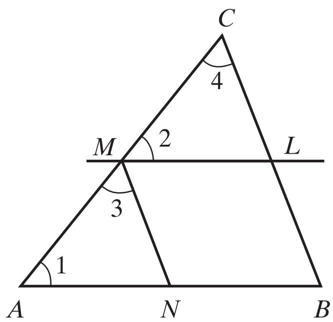
в) $m : n$ и $AB = a$ cm.

2 Точката M дели отсечката AB в отношение $1:2$, а точката P лежи на отсечката AB така, че $MP = \frac{1}{2}AB$. Намерете в какво отношение P дели отсечката AB. Ако $AB = 30$ cm, намерете дължините на отсечките AP, PB, AM, MP.

20. СРЕДНА ОТСЕЧКА В ТРИЪГЪЛНИК

През средата M на страната AC на $\triangle ABC$ са построени прави, успоредни на другите две страни на триъгълника. Ще покажем, че правите пресичат тези страни в средите им.

T₁ Правата, която минава през средата на една от страните на триъгълник и е успоредна на друга негова страна, разполовява третата му страна.



Дадено: $\triangle ABC$, M – средата на AC, $ML \parallel AB$

Да се докаже: L е средата на BC

Доказателство: Построяваме правата $MN \parallel BC$.

Разглеждаме $\triangle ANM$ и $\triangle MLC$ $\left|\begin{array}{l} AM = MC \text{ (по условие)} \\ \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \text{ (съответни)} \\ \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 \text{ (съответни)} \end{array}\right.$

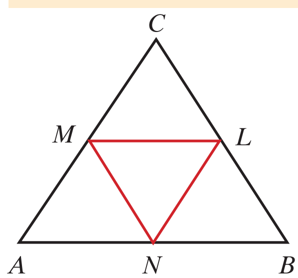
$\Rightarrow \triangle ANM \cong \triangle MLC$ (по II признак) $\Rightarrow CL = MN$. (1)

Четириъгълникът $NBLM$ е успоредник (по построение).

Тогава $MN = LB$. (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow CL = LB \Rightarrow L$ е средата на BC.

O Отсечка, която съединява средите на две от страните на триъгълник, се нарича **средна отсечка в триъгълника**.

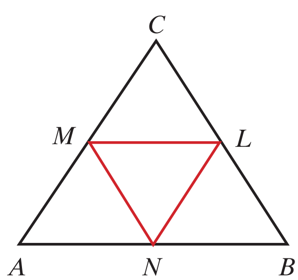


Всеки триъгълник има три средни отсечки.

L, M, N – среди на BC, CA, AB;

MN, NL, LM – средни отсечки

T₂ Всяка средна отсечка в триъгълник е успоредна на срещуположната страна и равна на половината от нея.



Дадено: $\triangle ABC$, M – средата на AC, L – средата на BC

Да се докаже: $ML \parallel AB$, $ML = \frac{1}{2}AB$.

Доказателство: През точката M построяваме права, успоредна на AB. Тази права минава през точката L (Теорема 1) $\Rightarrow$ $ML \parallel AB$.

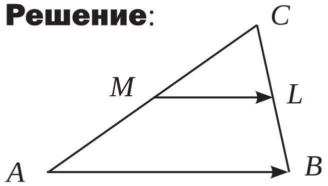
Аналогично доказваме, че ако N е средата на AB, то $MN \parallel BC$.

От успоредника $MNBL$ получаваме, че $ML = NB$.

Но $NB = AN = \frac{1}{2}AB \Rightarrow ML = \frac{1}{2}AB$.

ЗАДАЧА 1 Точките M и L са средите съответно на страните AC и BC на $\triangle ABC$.
Да се докаже, че $\vec{ML} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Решение:



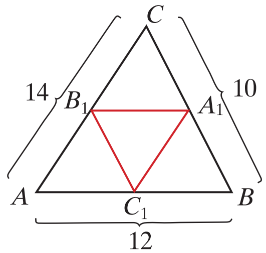
$\vec{ML} = \vec{CL} - \vec{CM}$; $\vec{CL} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ и $\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ (по условие)

Тогава

$$\vec{ML} = \frac{1}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CA} = \frac{1}{2}(\vec{CB} - \vec{CA}) = \frac{1}{2}\vec{AB},\ \vec{ML} = \frac{1}{2}\vec{AB}.$$

От $\vec{ML} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ следва, че $ML \parallel AB$ и $ML = \frac{1}{2}AB$, т.е. решението на *Задача 1* е друго доказателство на теорема 2, което използва вектори.

ЗАДАЧА 2 (Устно) Ако страните на $\triangle ABC$ са 10 cm, 12 cm и 14 cm, намерете страните на $\triangle A_1B_1C_1$ с върхове средите на страните на $\triangle ABC$.



Можете ли да намерите периметъра на $\triangle A_1B_1C_1$, без да намирате страните му?

Отговор: $A_1B_1 = 6$ cm, $B_1C_1 = 5$ cm, $A_1C_1 = 7$ cm

Да, защото $P_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$.

ЗАДАЧИ

1 Точките L, M и N са средите съответно на страните $BC = 14$ cm, $CA = 16$ cm и $AB = 12$ cm на $\triangle ABC$. Намерете страните и периметъра на $\triangle LMN$.

2 Средните отсечки на $\triangle ABC$ са m, n и p. Намерете периметъра на триъгълника.

3 Дължините a, b и c на страните на $\triangle ABC$ се отнасят както 3 : 4 : 6. Триъгълникът с върхове средите на тези страни има периметър 13 cm. Намерете a, b и c.

4 Докажете, че перпендикулярът, издигнат от средата на катета в правоъгълен триъгълник, разполовява хипотенузата.

5 Докажете, че отсечките, съединяващи средите на страните на триъгълника, го разделят на четири еднакви триъгълника.

6 Докажете, че отсечката, съединяваща средите на две от страните на триъгълника, и медианата към третата му страна взаимно се разполовяват.

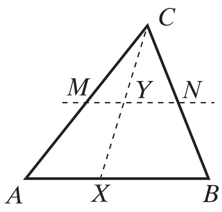
7 Като се използват средните отсечки в правоъгълен триъгълник, да се докаже, че медианата към хипотенузата е равна на половината от хипотенузата.
Упътване: Средните отсечки срещу катетите са страни на правоъгълник, а средната отсечка срещу хипотенузата е диагонал на този правоъгълник.

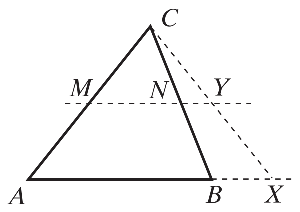
8 Даден е четириъгълникът $ABCD$. Нека M и N са средите на срещуположните му страни AD и BC, L и K – средите на другата двойка срещуположни страни AB и CD, а P и Q са средите на диагоналите AC и BD на четириъгълника. Да се докаже, че отсечките MN, LK и PQ имат обща среда.
Упътване: Означете средите на трите отсечки с S_1, S_2 и S_3. Докажете, че $\vec{OS_1} = \vec{OS_2} = \vec{OS_3}$, като ги представите чрез векторите $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$, където O е произволна точка.

21. СРЕДНА ОТСЕЧКА В ТРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Точките M и N са средите съответно на страните AC и BC на $\triangle ABC$. Ако X е произволна точка от правата AB, докажете, че средата на отсечката CX лежи на правата MN.

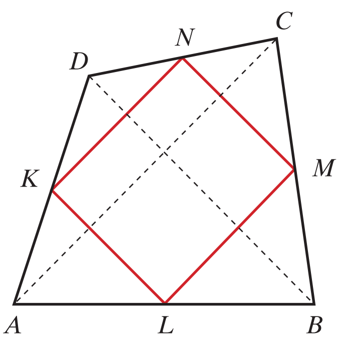
Решение:





По условие M и N са средите на AC и BC
$\Rightarrow MN$ е средна отсечка и $MN \parallel AB$.
В $\triangle AXC$ през M е прекарана права $MN \parallel AX$, която пресича CX в средата ѝ Y
$\Rightarrow Y$ лежи на правата MN.

ЗАДАЧА 2 Да се докаже, че средите на страните на всеки четириъгълник са върхове на успоредник.



Дадено: четириъгълник $ABCD$,
L, M, N, K са средите съответно на AB, BC, CD, DA

Да се докаже: $MNKL$ е успоредник

Доказателство: Построяваме диагонала BD.

1. Разглеждаме $\triangle BDC$. MN е средна отсечка

$$\Rightarrow \ MN \parallel BD; \ MN = \frac{1}{2} BD. \qquad (1)$$

2. Разглеждаме $\triangle BDA$. KL е средна отсечка

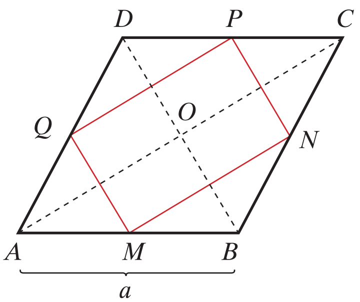
$$\Rightarrow \ KL \parallel BD; \ KL = \frac{1}{2} BD. \qquad (2)$$

3. Тогава от (1) и (2) $\Rightarrow MN \parallel KL$, $MN = KL$
$\Rightarrow MNKL$ е успоредник.

От *Задача 2* следва, че страните на четириъгълника *MNKL* са успоредни и равни на половината на съответните диагонали на четириъгълника *ABCD*. *Задача 2* може да се реши и като се разгледат триъгълниците *ACB* и *ACD*.

ЗАДАЧА 3 Да се докаже, че средите на страните на ромб са върхове на правоъгълник.

Решение:



1. MN и PQ са средни отсечки в триъгълниците ACB и ACD с обща основа AC
$\Rightarrow MN \parallel PQ$ и $MN = PQ$
$\Rightarrow MNPQ$ е успоредник. (1)

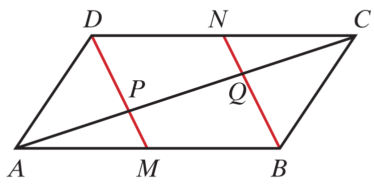
2. Ще докажем, че $MNPQ$ е правоъгълник.

I начин: В ромба диагоналите се пресичат в точка O, $AC \perp BD$ и образуват 4 прави ъгъла.

От $QP \parallel AC$ и $QM \parallel BD \Rightarrow \angle PQM = 90°$. (2)
От (1) и (2) $\Rightarrow MNPQ$ е правоъгълник.

II начин: $AMPD$ е успоредник, защото $AM \parallel DP$ и
$AM = DP = \frac{1}{2}a \;\Rightarrow\; MP = AD = a.$
Аналогично доказваме, че $ABNQ$ е успоредник $\Rightarrow AB = QN = a$.
От $MP = NQ = a \Rightarrow MNPQ$ е правоъгълник (успоредник с равни диагонали).

ЗАДАЧА 4 В успоредника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на страните AB и CD. Докажете, че правите DM и BN разделят диагонала AC на три равни части.



Дадено: успоредник $ABCD$,
M – средата на AB,
N – средата на CD,
AC – диагонал, $DM \times AC = P$, $BN \times AC = Q$
Да се докаже: $AP = PQ = QC$

Доказателство:

1. $\begin{cases} MB \parallel ND & (\text{от } AB \parallel CD \text{ по условие}) \\ MB = ND & \left(MB = \frac{1}{2}AB,\; ND = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB\right) \end{cases}$
$\Rightarrow MBND$ е успоредник
$\Rightarrow MD \parallel BN$.

2. Разглеждаме $\triangle ABQ$:
$\left| \begin{array}{l} M \text{ – средата на } AB \\ MP \parallel BQ \end{array} \right. \Rightarrow AP = PQ.$

3. От $\triangle CDP$ аналогично доказваме, че $PQ = QC$.

4. Тогава от **2.** и **3.** $\Rightarrow AP = PQ = QC$.

ЗАДАЧИ

1 Диагоналите на четириъгълник са 10 cm и 8 cm. Намерете страните на четириъгълника, чиито върхове са средите на страните на дадения четириъгълник.

2 Да се докаже, че средите на страните на всеки успоредник са върхове на успоредник.

3 Да се докаже, че средите на страните на всеки правоъгълник са върхове на ромб.

4 Докажете, че отсечките, които съединяват средите на срещуположните страни на четириъгълника, взаимно се разполовяват.

5 Докажете, че средната отсечка в триъгълника е по-малка от полусбора на страните, които не са успоредни на нея, и по-голяма от тяхната полуразлика.

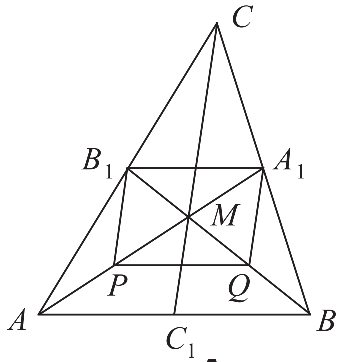
6 Докажете, че средите на диагоналите и средите на две срещулежащи страни в четириъгълника са върхове на успоредник.

7 Докажете, че ако от петата на една височина в равностранния триъгълник е спуснат перпендикуляр към една от другите му височини, то той разполовява височината, към която е спуснат.

22. МЕДИЦЕНТЪР НА ТРИЪГЪЛНИК

Ако начертаем медианите AA_1, BB_1 и CC_1 на $\triangle ABC$, забелязваме, че те се пресичат в една точка.

Т Медианите на триъгълника се пресичат в една точка, която дели всяка от тях в отношение 2 : 1, считано от съответния връх на триъгълника.



Дадено:

$\triangle ABC$, медиани AA_1, BB_1, CC_1

Да се докаже:

AA_1, BB_1, CC_1 се пресичат в една точка M и

$$\frac{MA}{MA_1} = \frac{MB}{MB_1} = \frac{MC}{MC_1} = \frac{2}{1}$$

Доказателство:

1. Означаваме с M пресечната точка на AA_1 и BB_1 и с P и Q средите съответно на AM и BM.

В $\triangle ABM$ PQ е средна отсечка $\Rightarrow PQ \parallel AB,\ PQ = \frac{1}{2}AB$. (1)

В $\triangle ABC$ A_1B_1 е средна отсечка $\Rightarrow A_1B_1 \parallel AB,\ A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$. (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow PQA_1B_1$ е успоредник ($A_1B_1 \parallel PQ$ и $A_1B_1 = PQ = \frac{1}{2}AB$) $\Rightarrow PM = MA_1$ и $QM = MB_1$.

Тогава точките M и P делят AA_1 на три равни части и $\frac{MA}{MA_1} = \frac{2}{1}$.

Аналогично $\frac{MB}{MB_1} = \frac{2}{1}$. Получаваме $\frac{MA}{MA_1} = \frac{MB}{MB_1} = \frac{2}{1}$. (3)

2. Правим същите разсъждения и изводи за пресечната точка N на медианите AA_1 и CC_1 и намираме $\frac{NA}{NA_1} = \frac{NC}{NC_1} = \frac{2}{1}$. (4)

3. От (3) и (4) $\Rightarrow \frac{MA}{MA_1} = \frac{NA}{NA_1} = \frac{2}{1}$, т.е. точките M и N делят отсечката AA_1 в едно и също отношение $k = 2 \Rightarrow M \equiv N$. Тогава и медианата CC_1 минава през пресечната точка на AA_1 и BB_1 и $\frac{MC}{MC_1} = \frac{2}{1}$.

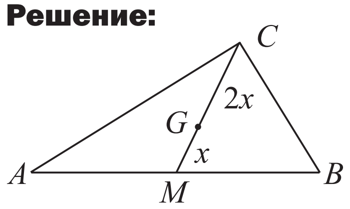
Доказахме, че трите медиани AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка M и точката M дели всяка от тях в отношение $k = 2$.

О Пресечната точка на медианите на триъгълника се нарича **медицентър на триъгълника**.

Медицентъра на триъгълника означаваме с точката M или с точката G и наричаме **център на тежестта**.

ЗАДАЧА 1 Точката G е медицентър на правоъгълния $\triangle ABC$ с хипотенуза $AB = 30$ cm и медиана CM. Намерете CM, CG и GM.

Решение:



$CM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}30 = 15$ cm (медиана към хипотенузата)

$CG : GM = 2 : 1 \Rightarrow CG = 2x,\ GM = x$

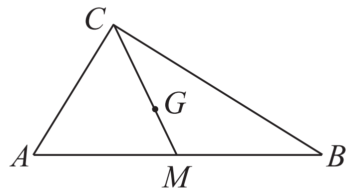
$CG + GM = CM$

$3x = 15$

$x = 5 \quad \Rightarrow CG = 2x = 10$ cm, $GM = x = 5$ cm

ЗАДАЧА 2 В $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) $\sphericalangle BAC = 60°$ и $AC = 6$ cm. Намерете CM, CG и GM.

Решение:



1. $AB = 2AC$ (катет срещу 30°)

$AB = 2\,.\,6 = 12$ cm

2. $CM = \frac{1}{2}AB = 6$ cm (медиана към хипотенузата)

3. $CG = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4$ cm (G – медицентър)

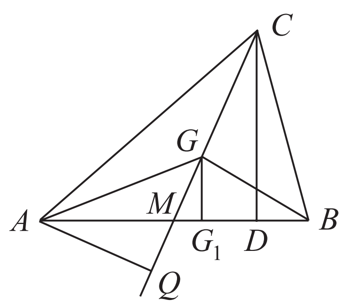
4. $GM = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$ cm

ЗАДАЧА 3 В $\triangle ABC$ CM е медиана, CD е височина и G е медицентър.

а) Ако лицето на $\triangle ABC$ е S, докажете, че $S_{\triangle AMG} = \frac{1}{6}S$ и $S_{\triangle ABG} = \frac{1}{3}S$.

б) Ако GG_1 е разстоянието от G до AB и $CD = h_c$, докажете, че $h_c = 3\,.\,GG_1$

Решение:



а) Построяваме $AQ \perp CM$.

$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}CM.AQ$

$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle AMC} = CM.AQ = S$

$S_{\triangle AMG} = \frac{1}{2}GM.AQ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}CM.AQ = \frac{1}{6}CM.AQ = \frac{1}{6}S$

$S_{\triangle ABG} = 2S_{\triangle AMG} = 2\cdot\frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S$

б) Построяваме $GG_1 \perp AB$ и $CD \perp AB$.

Означаваме $GG_1 = x$, $CD = h_c$ и $AB = c$.

$$\left.\begin{aligned} S_{\triangle AMG} &= \frac{1}{2}AM.GG_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot x = \frac{1}{6}S \Rightarrow S = 3\cdot\frac{c}{2}\cdot x \\ S_{\triangle AMC} &= \frac{1}{2}AM.CD = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot h_c = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = \frac{c}{2}\cdot h_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3\cdot\frac{c}{2}\cdot x = \frac{c}{2}\cdot h_c \Rightarrow h_c = 3x$

Доказахме, че $CD = 3\,.\,GG_1$.

ЗАДАЧИ

1 Медианите на триъгълник имат дължини 6 cm, 9 cm и 12 cm. Намерете разстоянията от медицентъра до върховете на триъгълника.

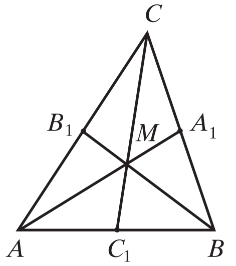
2 Точката G е медицентър на $\triangle ABC$ и $AG = 6{,}2$ cm, $BG = 7$ cm и $CG = 8$ cm. Намерете медианите на $\triangle ABC$.

3 Докажете, че във всеки триъгълник сборът от медианите е по-малък от периметъра на триъгълника.

4 Докажете, че медианите на триъгълника го разделят на шест равнолицеви триъгълника.

23. МЕДИЦЕНТЪР НА ТРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 AA_1, BB_1, CC_1 са медианите в $\triangle ABC$.



Намерете устно:

а) ако $AA_1 = 4{,}5$ cm, $AM = ?$ $MA_1 = ?$

б) ако $MC_1 = 3$ cm, $CC_1 = ?$ $CM = ?$

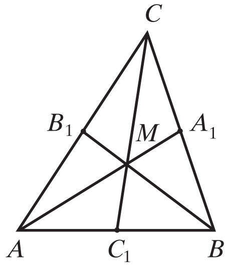
в) ако $BM = 2$ cm, $BB_1 = ?$ $MB_1 = ?$

Решение:

а) $AM = \frac{2}{3} \cdot 4{,}5 = 3$ cm, $MA_1 = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5 = 1{,}5$ cm

За медианата AA_1: отсечката MA_1 се нанася точно 2 пъти върху отсечката MA и точно 3 пъти върху отсечката AA_1. Същото се отнася и за другите две медиани. Тогава $\frac{MA}{AA_1} = \frac{MB}{BB_1} = \frac{MC}{CC_1} = \frac{2}{3}$ и $\frac{MA_1}{AA_1} = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{1}{3}$.

ЗАДАЧА 2 Даден е $\triangle ABC$ с медицентър M. Докажете, че триъгълниците MAB, MBC и MCA са равнолицеви.



Доказателство:

$$-\left.\begin{array}{l} S_{\triangle AC_1C} = S_{\triangle BC_1C} \\ S_{\triangle AC_1M} = S_{\triangle BC_1M} \end{array}\right\}$$ имат равни основи, лежащи на една и съща права, и общ връх, т.е. височините им са равни.

$$S_{\triangle AC_1C} - S_{\triangle AC_1M} = S_{\triangle BC_1C} - S_{\triangle BC_1M}$$

$S_{\triangle ACM} = S_{\triangle BCM}$ (1).

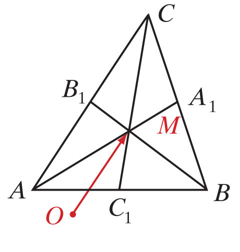
Аналогично се доказва, че $S_{\triangle ACM} = S_{\triangle ABM}$. (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow$ $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BCM} = S_{\triangle CAM}$.

Трите медиани разделят триъгълника на 6 малки триъгълника. От *Задача 2* следва, че и те са равнолицеви.

Векторни равенства

ЗАДАЧА 3 Ако M е медицентърът на $\triangle ABC$ и O е произволна точка в равнината, докажете, че $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.



Доказателство:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AA_1} = \vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{OA_1} - \vec{OA}) =$$

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OA_1} - \frac{2}{3}\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

При доказателството на *Задача 3* използвахме медианата AA_1 и точката $M \in AA_1$, която я дели в отношение 2 : 1.
Ако допуснем, че точките N и P са съответно от медианите BB_1 и CC_1 и ги делят в отношение 2 : 1, считано от върха на триъгълника, аналогично извеждаме равенствата $\vec{ON} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ и $\vec{OP} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, откъдето следва, че $M \equiv N \equiv P$.
Това е друго доказателство на теоремата за медицентъра на триъгълника, в което използваме вектори.

ЗАДАЧА 4 Ако M е медицентърът на $\triangle ABC$ с медиани AA_1, BB_1 и CC_1, докажете, че:

а) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$; б) $\vec{MA_1} + \vec{MB_1} + \vec{MC_1} = \vec{0}$; в) $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

Доказателство:

а) От $\triangle ABM \Rightarrow \vec{MC_1} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB}) \Rightarrow 2\vec{MC_1} = \vec{MA} + \vec{MB}$. Но $2\vec{MC_1} = -\vec{MC}$

$-\vec{MC} = \vec{MA} + \vec{MB}$ (свойство на медицентъра)

$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. (1)

б) От $\begin{cases} \vec{MA} = -2\vec{MA_1} \\ \vec{MB} = -2\vec{MB_1} \\ \vec{MC} = -2\vec{MC_1} \end{cases}$ и от (1) $\Rightarrow$ $-2\vec{MA_1} - 2\vec{MB_1} - 2\vec{MC_1} = \vec{0}$

$-2(\vec{MA_1} + \vec{MB_1} + \vec{MC_1}) = \vec{0}$

$\vec{MA_1} + \vec{MB_1} + \vec{MC_1} = \vec{0}$.

в) От $\begin{cases} \vec{MA} = -\frac{2}{3}\vec{AA_1} \\ \vec{MB} = -\frac{2}{3}\vec{BB_1} \\ \vec{MC} = -\frac{2}{3}\vec{CC_1} \end{cases}$ и от (1) $\Rightarrow$ $-\frac{2}{3}\vec{AA_1} - \frac{2}{3}\vec{BB_1} - \frac{2}{3}\vec{CC_1} = \vec{0}$

$-\frac{2}{3}(\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1}) = \vec{0}$

$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

ЗАДАЧИ

1 Точка M е медицентърът на правоъгълния $\triangle ABC$ с хипотенуза $AB = 12$ cm. Намерете CM.

2 В $\triangle ABC$ с медицентър M продължете медианата CC_1 до точка N така, че $C_1N = MC_1$. Докажете, че:

а) страните на $\triangle AMN$ са равни на $\frac{2}{3}$ части от медианите на $\triangle ABC$;

б) медианите на $\triangle AMN$ са равни на $\frac{1}{2}$ части от страните на $\triangle ABC$;

в) лицето на $\triangle AMN$ е 3 пъти по-малко от лицето на $\triangle ABC$.

3 Докажете, че ако две от медианите в триъгълник са равни, той е равнобедрен.

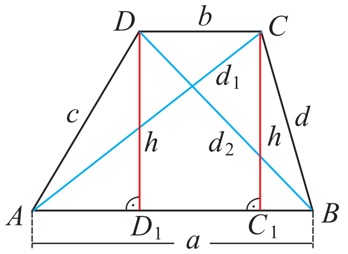
Упътване: Ако M е медицентърът на $\triangle ABC$ и AA_1 и BB_1 са равни медиани, докажете, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

4 В успоредник $ABCD$ точката M е средата на AD, а N – средата на BC. Докажете, че AN и CM делят диагонала BD на три равни части.

Упътване: Пресечните точки P и Q на CM с DB и AN с DB са медицентровете съответно на триъгълниците ACD и ABC.

24. ТРАПЕЦ. РАВНОБЕДРЕН ТРАПЕЦ

О Четириъгълник, на който само една двойка срещуположни страни са успоредни, се нарича **трапец**.



На е начертан трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

Елементи:

AB, CD – основи | $AB = a$ – голяма основа, $CD = b$ – малка основа

$AD = c$, $BC = d$ – бедра

$DD_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$ – височини

$AC = d_1$, $BD = d_2$ – диагонали

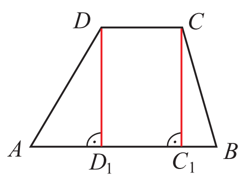
Знаем, че лицето на трапеца е $S = \dfrac{a+b}{2}h$.

Свойства на трапеца

1. $DD_1 = CC_1 = h$ | Знаем, че ако две прави са успоредни ($AB \parallel CD$), точките от едната права са на едно и също разстояние от другата права.

2. $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$ | $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle D$ са вътрешни прилежащи ъгли при ($AB \parallel CD$) $\times$ AD ($\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$) и сборът им е 180°.

ЗАДАЧА 1 ОСНОВНА ЗАДАЧА Даден е трапец $ABCD$. От краищата на малката му основа CD са спуснати към AB двете височини CC_1 и DD_1. Да се докаже, че D_1C_1CD е правоъгълник.



Доказателство:

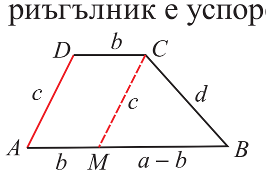
От $DC \parallel AB$ и D_1 и $C_1 \in AB \Rightarrow DC \parallel D_1C_1$. (1)

От $DD_1 \perp AB$ и $CC_1 \perp AB \Rightarrow DD_1 \parallel CC_1$. (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow D_1C_1CD$ е успоредник.

От $DD_1 \perp AB \Rightarrow \sphericalangle D_1 = 90^\circ \Rightarrow D_1C_1CD$ е правоъгълник.

ЗАДАЧА 2 Докажете, че ако през един от върховете на малката основа на трапец се построи права, успоредна на едно от бедрата му, полученият четириъгълник е успоредник.



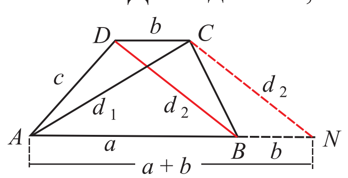
Доказателство:

От $AB \parallel CD$ и $M \in AB \Rightarrow AM \parallel CD$.

По условие $CM \parallel AD$

$\Rightarrow AMCD$ е успоредник.

ЗАДАЧА 3 Даден е трапец $ABCD$. През върха C на малката му основа е построена права, успоредна на диагонала му BD, която пресича правата AB в точка N. Да се докаже, че $BNCD$ е успоредник.



Доказателство:

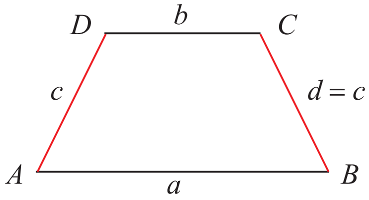
От $AB \parallel CD$ и $N \in AB \Rightarrow BN \parallel CD$.

По условие $CN \parallel DB$

$\Rightarrow BNCD$ е успоредник.

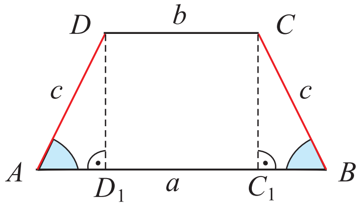
Равнобедрен трапец

О Трапец с равни бедра се нарича **равнобедрен трапец**.



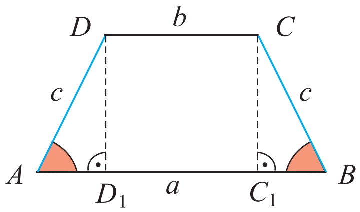
На чертежа трапецът $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е равнобедрен:
$\boldsymbol{AD = BC = c}$.

Т **признак** Ако в един трапец ъглите при основата са равни, той е равнобедрен.



Дадено:
трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $\sphericalangle A = \sphericalangle B$
Да се докаже:
$ABCD$ е равнобедрен трапец ($AD = BC$)
Доказателство:
$DD_1 \perp AB$ и $CC_1 \perp AB \Rightarrow DD_1 = CC_1 = h$
От $\triangle AD_1D \cong \triangle BC_1C$ (по II признак) $\Rightarrow AD = BC$
$\Rightarrow$ трапецът $ABCD$ е равнобедрен.

Т **свойство** Ако един трапец е равнобедрен, то ъглите при основата са равни.



Дадено:
$ABCD$ е равнобедрен трапец ($AB \parallel CD$, $AD = BC$)
Да се докаже:
$\sphericalangle A = \sphericalangle B$
Доказателство:
$DD_1 \perp AB$ и $CC_1 \perp AB \Rightarrow DD_1 = CC_1 = h$
От $\triangle AD_1D \cong \triangle BC_1C$ (по IV признак) $\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B$.

! Теоремата-признак и теоремата-свойство могат да се изкажат като една теорема така: Един трапец е равнобедрен **тогава и само тогава**, когато ъглите при основата му са равни.

ЗАДАЧИ

1 В равнобедрен трапец основите са 24 cm и 10 cm и ъгълът между бедро и височина е 30°. Намерете бедрата на трапеца.

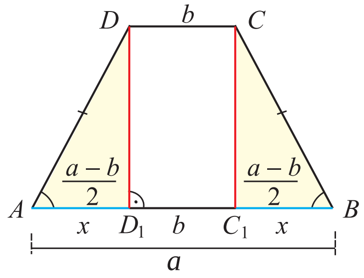
2 В равнобедрен трапец бедрото е 16 cm, а разликата между голямата и малката основа е 16 cm. Намерете ъглите на трапеца.

3 Да се докаже, че ако в равнобедрен трапец бедрото е равно на малката основа, диагоналът е ъглополовяща на ъгъла при голямата основа.

4 Да се докаже, че ако в равнобедрен трапец диагоналът е ъглополовяща на острия ъгъл, то малката му основа е равна на бедрото на трапеца.

25. ТРАПЕЦ. ПРОДЪЛЖЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 В равнобедрен трапец $ABCD$ CC_1 и DD_1 са височини. Да се докаже, че $AD_1 = BC_1 = \frac{1}{2}(a-b)$.



Доказателство:

От $\triangle AD_1D \cong \triangle BC_1C$ (по II или по IV признак) $\Rightarrow AD_1 = BC_1 = x$.

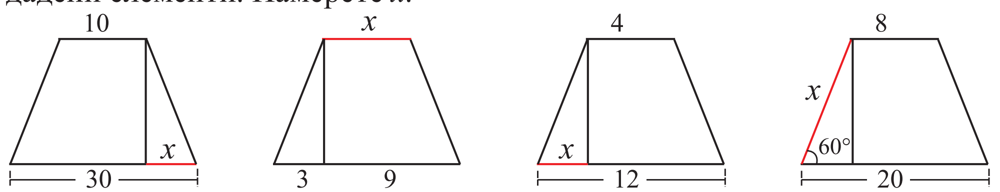
От D_1C_1CD – правоъгълник $\Rightarrow D_1C_1 = b$.

Тогава $AB = x + b + x = 2x + b$, т.е.

$$a = 2x + b$$

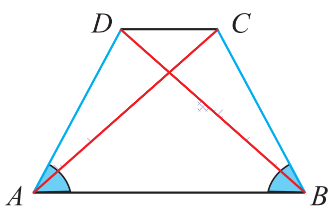
$$x = \frac{a-b}{2},\ \text{т.е.}\ AD_1 = C_1B = \frac{1}{2}(a-b).$$

ЗАДАЧА 2 (Устно) На чертежа са начертани равнобедрени трапеци с означени дадени елементи. Намерете x.



Отговор: а) 10, б) 3, в) 4, г) 12

Т **свойство** В равнобедрения трапец диагоналите са равни.



Дадено: трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AD = BC$

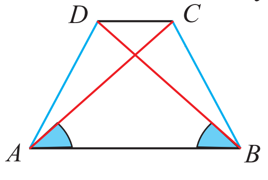
Да се докаже: $AC = BD$

Доказателство:

В равнобедрения трапец $ABCD$ $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

От $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ (по I признак) $\Rightarrow$ $AC = BD$.

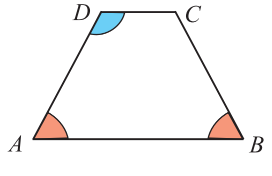
ЗАДАЧА 3 Да се докаже, че в равнобедрения трапец диагоналите сключват равни ъгли с голямата му основа.



Решение:

Доказахме, че $\triangle ABC \cong \triangle BAD \Rightarrow \sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$.

ЗАДАЧА 4 Да се докаже, че в равнобедрения трапец сборът от всеки два срещулежащи ъгъла е 180°.

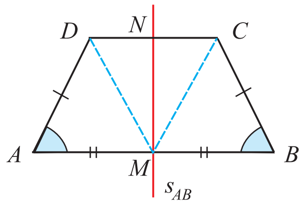


Решение:

От $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle B \Rightarrow \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$.

Аналогично доказваме, че $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$.

ЗАДАЧА 5 Докажете, че в равнобедрения трапец симетралата на голямата основа е симетрала и на малката основа на трапеца.



Доказателство:

1. MN е симетрала на AB
$\Rightarrow AM = MB$ и $MN \perp AB$.

2. $CD \parallel AB$ и $MN \perp AB \Rightarrow MN \perp CD$ (1)

3. $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (по I признак)
$\Rightarrow MD = MC$

4. $\triangle CDM$ е равнобедрен с основа CD и височина MN
$\Rightarrow MN$ е и медиана, т.е. $DN = NC$. (2)

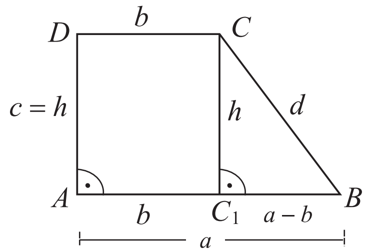
5. От (1) и (2) $\Rightarrow MN$ е симетрала и на CD.

6. $MN \equiv s_{AB} \equiv s_{CD}$

Отсечката MN съединява средите на двете основи на равнобедрения трапец и е перпендикулярна и на AB, и на $CD \Rightarrow MN = h$ на трапеца.

Правоъгълен трапец

О Трапец, на който едното бедро е перпендикулярно на основата, се нарича **правоъгълен трапец**.



Свойства:

1. $AD = CC_1 = h$ (по определение $AD \perp AB$).

2. $AD \perp CD$ (от $AD \perp AB$ и $AB \parallel CD$).

3. AC_1CD е правоъгълник.

4. $\triangle C_1BC$ е правоъгълен с катети h и $a - b$.

ЗАДАЧИ

1 Намерете сбора на вътрешните ъгли на трапец.

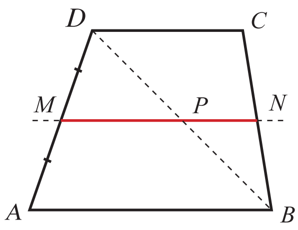
2 Докажете, че ако K е средата на едно от бедрата на трапец, тя е на равни разстояния от основите му.

3 В правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $DA \perp AB$) $\sphericalangle B = 30°$, бедрото $BC = 8$ cm и основата $CD = 2$ cm.
а) Намерете другото бедро на трапеца.
б) Ако CC_1 е височината, спусната от върха C към AB, намерете периметъра на четириъгълника AC_1CD.

4 Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ ($AD \perp AB$) с височина CC_1. Намерете периметъра на четириъгълника AC_1CD, ако периметърът на трапеца е 200 cm и сборът от голямата основа и наклоненото бедро е 130 cm.

5 Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Диагоналите му AC и BD се пресичат в точка O. Да се докаже, че:
а) диагоналите сключват равни ъгли с малката основа DC;
б) триъгълниците ABO и CDO са равнобедрени;
в) триъгълниците ADO и BCO са еднакви.

26. СРЕДНА ОТСЕЧКА (ОСНОВА) НА ТРАПЕЦ



През средата M на бедрото AD на трапеца $ABCD$ е построена права, успоредна на основата AB. От $AB \parallel CD$ ще следва, че построената права ще е успоредна и на CD и ще пресича и другото бедро BC. Ако означим с N пресечната точка на тази права с бедрото BC, ще покажем, че N е средата на BC.

T₁ Правата, която минава през средата на едно от бедрата на трапец и е успоредна на една от основите му, разполовява другото бедро.

Дадено: трапец $ABCD$, M – средата на AD, $MN \parallel AB$

Да се докаже: N е средата на BC

Доказателство:

Построяваме диагонала BD на трапеца $ABCD$, $BD \times MN = P$.

В $\triangle ABD$ $MP \parallel AB$ и M е средата на $AD \Rightarrow DP = PB$

(средна отсечка в триъгълник).

В $\triangle DCB$ $PN \parallel CD$ (от $CD \parallel AB$) и P е средата на $BD \Rightarrow CN = NB$.

От $CN = NB \Rightarrow N$ е средата на BC.

О Отсечката, която съединява средите на бедрата на един трапец, се нарича **средна отсечка (средна основа) на трапеца**.

Например отсечката MN е средна отсечка на трапеца $ABCD$.

T₂ Средната отсечка на един трапец е успоредна на основите му и е равна на полусбора им.

Дадено: трапец $ABCD$, M – средата на AD, N – средата на BC

Да се докаже: $MN \parallel AB\ (CD)$, $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$

Доказателство:

През точката M построяваме права, успоредна на AB. Тя пресича BC в средата ѝ, т.е. в точката N. От Теорема 1 $\Rightarrow MN \parallel AB$, $MN \parallel CD$.

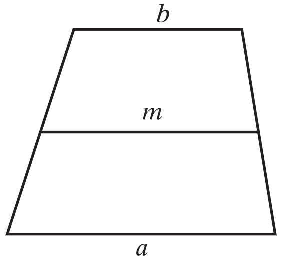
Диагоналът BD разделя трапеца на два триъгълника.

В Теорема 1 доказахме, че ако $MN \parallel AB$, точката P е средата на BD.

Тогава MP и PN са средни отсечки в тези триъгълници.

От $MP = \frac{1}{2}AB$ и $PN = \frac{1}{2}CD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

ЗАДАЧА 1 (Устно) Даден е трапец с основи a и b и средна отсечка m. Намерете:



а) ако $a = 8,\ b = 2,\ m = ?$

б) ако $a = 10,\ m = 6,\ b = ?$

в) ако $b = 3,\ m = 5,\ a = ?$

Решение на а): От $m = \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow m = 5.$

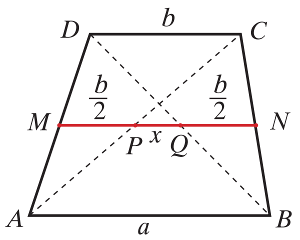
Отг.: б) $b = 2$, в) $a = 7$

ЗАДАЧА 2 Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). Средната отсечка MN пресича диагоналите AC и BD съответно в точките P и Q. Да се докаже, че:

а) че точките P и Q са средите на диагоналите AC и BD;

б) $MP = QN$;

в) $PQ = \dfrac{AB - CD}{2}$.



Доказателство:

а) От MN – средна отсечка, $MN \parallel CD\ (AB)$

$\Rightarrow$ в $\triangle CDA$ MN разполовява AC, т.е. P – среда на AC

$\Rightarrow$ в $\triangle ABD$ MN разполовява BD, т.е. Q – среда на BD.

б) MP е средна отсечка в $\triangle CDA \Rightarrow MP = \dfrac{1}{2}CD.$ (1)

QN е средна отсечка в $\triangle CDB \Rightarrow QN = \dfrac{1}{2}CD.$ (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow MP = QN$.

в) Означаваме $AB = a$, $CD = b$, $MN = m$, $PQ = x$, $m = \dfrac{a+b}{2}$, $MP = QN = \dfrac{b}{2}$ (от условие б)).

За $PQ = x$ получаваме

$$x = m - 2\cdot\frac{b}{2} = m - b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2},\ \text{т.е.}\ x = \frac{a-b}{2}.$$

ЗАДАЧИ

1 Основите на трапец са 15 cm и 9,4 cm. Намерете частите, на които се разделя средната отсечка от единия диагонал.

2 В трапец единият диагонал разделя средната отсечка на части 3 cm и 5 cm. Намерете основите.

3 Основите на трапец са 20 cm и 10 cm. Намерете средната му отсечка и частта от нея, заключена между диагоналите му.

4 Средната отсечка на трапец е 11 cm, а частта от нея, заключена между диагоналите му, е 3 cm. Намерете основите на трапеца.

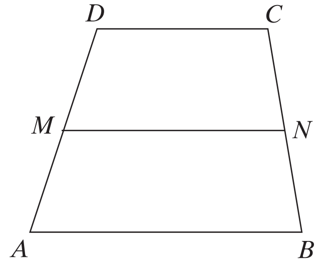
5 Основите на трапец са 22 cm и 8 cm. Намерете частите, на които диагоналите на трапеца разделят средната му отсечка.

6 Докажете, че всяка отсечка, чиито краища лежат на основите на трапеца, се разполовява от средната му отсечка.

7 Диагоналът AC в трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) разполовява ъгъла при върха A. Намерете средната отсечка на трапеца, ако $AB = 10$ cm и $AD = 6$ cm.

27. СРЕДНА ОТСЕЧКА (ОСНОВА) НА ТРАПЕЦ. УПРАЖНЕНИЕ

Ще докажем теоремата за средната отсечка в трапец, като използваме вектори.



Дадено: трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$),
MN – средна отсечка

Да се докаже: $MN \parallel AB$ (CD)

Доказателство:

Нека O е произволна точка в равнината. Тогава

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) - \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{\vec{OB} - \vec{OA}} + \underbrace{\vec{OC} - \vec{OD}}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}).$$

Получихме $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$.

По условие $AB \parallel CD \Rightarrow \vec{AB} = k\,\vec{DC}$.

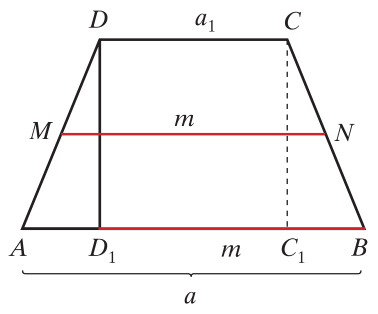
Тогава $\vec{MN} = \frac{1}{2}(k\,\vec{DC} + \vec{DC}) = \frac{k+1}{2}\vec{DC} \Rightarrow \vec{MN} \uparrow\uparrow \vec{DC} \Rightarrow \boldsymbol{MN \parallel DC}$.

От $\vec{MN} \uparrow\uparrow \vec{DC}$, $\vec{MN} \uparrow\uparrow \vec{AB}$ и $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}) \Rightarrow$

$|\vec{MN}| = \frac{1}{2}\left(|\vec{AB}| + |\vec{DC}|\right)$, т.е. $\boldsymbol{MN = \frac{1}{2}(AB + DC)}$.

От векторното равенство $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$ следва твърдението в теоремата само ако $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{DC}$ т.е. само когато $ABCD$ е трапец.

ЗАДАЧА 1 Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). D_1 е петата на височината на трапеца, спусната от върха D към AB. Докажете, че отсечката D_1B е равна на средната отсечка на трапеца.



Доказателство:

Ще направим кратък запис на решението, защото повечето от твърденията вече сме доказвали:

1. $CC_1 \perp AB$;
2. D_1C_1CD – правоъгълник $\Rightarrow D_1C_1 = DC = b$;
3. $\triangle ADD_1 \cong \triangle BCC_1 \Rightarrow AD_1 = C_1B$;
4. $AD_1 = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2}(a - b)$;
5. $D_1B = a - AD_1 = a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}$.

Доказахме, че $D_1B = \frac{a+b}{2}$, т.е. е равна на средната отсечка на трапеца.

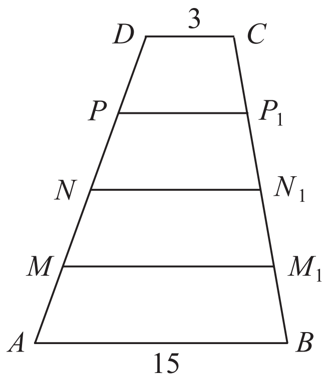
В *Задача 1* може да се докаже, че отсечката $MD_1 \parallel BN$, $MD_1 = BN$, D_1BNM е успоредник.

ЗАДАЧА 2 Даден е равнобедрен трапец с остър ъгъл 30°, бедро 10 cm и средна отсечка 8 cm. Намерете лицето на трапеца.

Решение (чертеж зад. 1): От $\triangle AD_1D$ намираме $DD_1 = h = 5$ cm.

Тогава $S = \dfrac{a+b}{2}h = mh = 8.5 = 40$, $S = 40$ cm^2.

ЗАДАЧА 3 В трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точките M, N, P разделят бедрото AD на четири равни части. През точките M, N, P са построени прави, успоредни на AB. Намерете дължините на отсечките от тези прави, които са във вътрешността на трапеца, ако $AB = 15$ cm и $CD = 3$ cm.



Решение:

Дадените прави, успоредни на AB, пресичат бедрото BC съответно в точките M_1, N_1, P_1.

NN_1 е средна отсечка в трапеца $ABCD$

$$\Rightarrow NN_1 = \frac{AB+CD}{2} = \frac{15+3}{2} = 9$$

MM_1 е средна отсечка в трапеца ABN_1N

$$\Rightarrow MM_1 = \frac{AB+NN_1}{2} = \frac{15+9}{2} = 12$$

PP_1 е средна отсечка в трапеца NN_1CD

$$\Rightarrow PP_1 = \frac{NN_1+CD}{2} = \frac{9+3}{2} = 6$$

Отг. $PP_1 = 6$ cm, $NN_1 = 9$ cm, $MM_1 = 12$ cm

ЗАДАЧИ

1 Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) със средна отсечка MN. През върха C е построена права, успоредна на бедрото AD, която пресича голямата основа AB в точка P. Намерете основите на трапеца, ако $MN = 10$ cm и $BP = 2$ cm.

2 Даден е трапецът $ABCD$ с основи AB и CD ($AB > CD$). Точката P лежи на правата AB така, че $CP \parallel BD$. Намерете средната отсечка на трапеца, ако $AP = 12$ cm.

3 Височината през върха на тъпия ъгъл на равнобедрен трапец дели голямата му основа на отсечки с дължини m и n ($m > n$). Намерете дължините на основите и средната отсечка на трапеца.

4 Голямата основа на трапец има дължина a, а малката основа е равна на отсечката, която съединява средите на диагоналите му. Намерете дължините на малката основа и средната отсечка на трапеца.

5 Едното бедро на трапец е 7 cm, голямата му основа е 11 cm, а ъгълът между тях се разполовява от съответния диагонал на трапеца. Намерете средната основа на трапеца.

6 Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с диагонали AC и BD. Точките P и Q са средите съответно на AC и BD.

а) Да се докаже, че отсечката PQ е успоредна на AB.

б) Да се докаже, че точките P и Q са точки от средната отсечка на трапеца.

в) Ако $AB = 15$ cm и $CD = 5$ cm, намерете PQ.

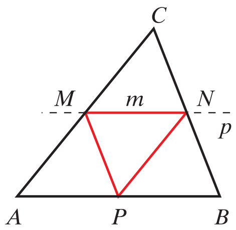
г) Ако $AB = 12$ cm и $CD = PQ$, намерете CD.

д) Ако $AD = BC$ и $DD_1 \perp AB$ ($D_1 \in AB$), докажете, че $AD_1 = PQ$.

28. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ“

ЗАПОМНЕТЕ!

Триъгълник



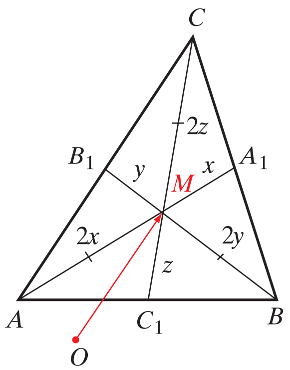
$$S_{\triangle} = \frac{AB.h}{2} \qquad S_{\triangle} = mh$$

Средна отсечка в триъгълник

Всеки триъгълник има **три** средни отсечки.
M, N, P – средите съответно на AC, CB, BA;
MN, NP, PM – средни отсечки.

Теорема 1: Ако $p \parallel AB$ и $M \in p$, то $BN = NC$.

Теорема 2: Ако m е средна отсечка в $\triangle ABC$, то $m \parallel AB$, $m = \frac{1}{2}AB$.



Медицентър в триъгълник

m_a, m_b, m_c се пресичат в една точка M,
M – медицентър на $\triangle ABC$.

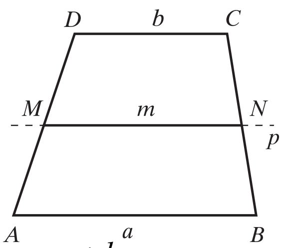
Теорема: $\frac{2x}{x} = \frac{2y}{y} = \frac{2z}{z} = \frac{2}{1}$

Следствия: $\frac{2x}{3x} = \frac{2y}{3y} = \frac{2z}{3z} = \frac{2}{3}$

$\frac{x}{3x} = \frac{y}{3y} = \frac{z}{3z} = \frac{1}{3}$

$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

Трапец



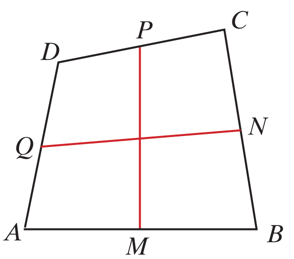
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad S = mh$$

Средна отсечка (основа) в трапец

Всеки трапец има една средна отсечка.
Ако M и N са средите съответно на AD и BC,
то MN е средната отсечка на трапеца $ABCD$.

Теорема 1: Ако $p \parallel AB$ (CD) и $M \in p$, то $BN = CN$.
Теорема 2: Ако m е средната отсечка в $ABCD$, то $m \parallel AB$ (CD), $m = \frac{a+b}{2}$.

Средна отсечка в четириъгълник

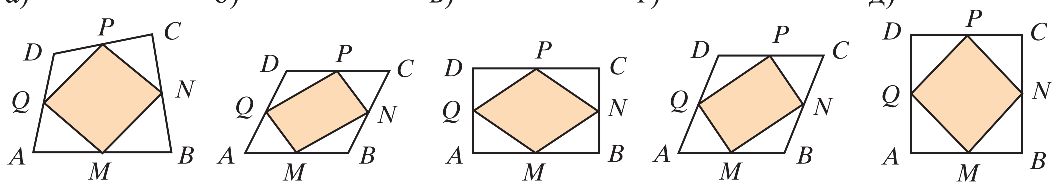


Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, а M, N, P и Q са средите съответно на страните му AB, BC, CD и DA. Отсечките MP и NQ се наричат средни отсечки в четириъгълника $ABCD$.
За всяка от отсечките MP и NQ са изпълнени векторните равенства $\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$ и $\vec{QN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$.

Когато $AB \parallel CD$, четириъгълникът $ABCD$ е трапец ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$) и от $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ следват двете теореми за средната отсечка (основа) на трапеца.

Начертани са четириъгълници *ABCD*.
Средите на страните им са върхове на успоредници.

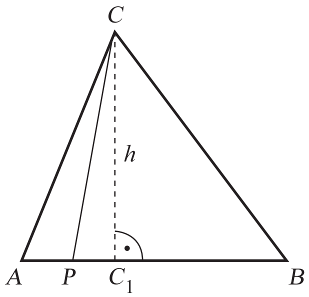
а) б) в) г) д)



а) ако *ABCD* е произволен четириъгълник, *MNPQ* е успоредник;
б) ако *ABCD* е успоредник, *MNPQ* също е успоредник;
в) ако *ABCD* е правоъгълник, *MNPQ* е ромб;
г) ако *ABCD* е ромб, *MNPQ* е правоъгълник;
д) ако *ABCD* е квадрат, *MNPQ* е квадрат.

Лице на триъгълник и трапец

ЗАДАЧА 1 В произволен триъгълник точката *P* дели страната *AB* в отношение $m : n$. Да се докаже, че $S_{\triangle APC} : S_{\triangle PBC} = m : n$.

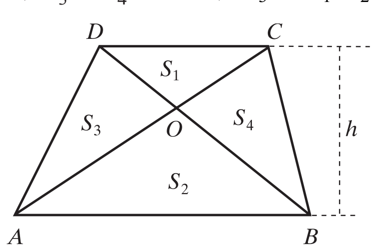


Доказателство:
Триъгълниците *APC* и *PBC* имат равни височини $CC_1 = h$. Тогава

$$S_{\triangle APC} = \frac{AP.h}{2} \text{ и } S_{\triangle PBC} = \frac{PB.h}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{AP.h}{PB.h} = \frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}.$$

ЗАДАЧА 2 В произволен трапец *ABCD* диагоналите *AC* и *BD* се пресичат в точка *O* и образуват четири триъгълника, лицата на които са означени с S_1, S_2, S_3, S_4, както е показано на чертежа. Докажете, че:
а) $S_3 = S_4$; б) $S_3^2 = S_1.S_2$.



Доказателство:

а) $S_{\triangle ABD} = \frac{AB.h}{2}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{AB.h}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC}$

Изваждаме от двете страни на това равенство S_2 и получаваме $S_{\triangle ABD} - S_2 = S_{\triangle ABC} - S_2 \Rightarrow S_3 = S_4$.

б) От $\triangle DBC \Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{OD}{OB}$ и

от $\triangle DBA \Rightarrow \frac{S_3}{S_2} = \frac{OD}{OB}$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{S_3}{S_2} \Rightarrow S_3.S_4 = S_1.S_2 \Rightarrow S_3^2 = S_1.S_2.$$

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ“

1. В равнобедрен трапец бедрото е 5 cm, а периметърът е 20 cm. Намерете средната отсечка на трапеца.

2. Отношението на дължините на основите на трапец е 7 : 3, а разликата им е 3,6 cm. Намерете дължината на средната отсечка.

3. В трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) средната отсечка MN е 10 cm и M е точка от бедрото BC. Диагоналът AC пресича MN в точка P, като $PM - PN = 2$ cm. Намерете основите на трапеца.

4. В равнобедрен трапец основите са 22 cm и 10 cm и острият ъгъл при основата е 60°. Намерете бедрата на трапеца.

5. Докажете, че средните отсечки на всеки четириъгълник са диагонали на успоредник.

6. Докажете, че отсечките, които съединяват последователно средите на страните на равнобедрен триъгълник, са страни на равнобедрен триъгълник.

7. Докажете, че отсечките, които съединяват последователно средите на страните на равнобедрен трапец, образуват ромб.

8. Да се докаже, че средите на страните на делтоид са върхове на правоъгълник.

9. Точка M е медицентър на правоъгълния $\triangle ABC$ с хипотенуза AB и $\sphericalangle BAC = 30°$. Намерете BC, ако $CM = 2$ cm.

10. Докажете, че медианите на триъгълника го разделят на шест равнолицеви триъгълника.

11. В успоредника $ABCD$ с M_1, M_2, M_3 и M_4 са означени медицентровете съответно на триъгълниците BCD, CDA, DAB и ABC. Докажете, че четириъгълникът $M_1M_2M_3M_4$ е успоредник.

12. Докажете, че средите на основите на трапеца и средата на средната му отсечка лежат на една права.

13. Даден е трапец $ABCD$ с основи 20 cm и 8 cm. Точките P и M делят бедрото AD на три равни части, а точките Q и N делят бедрото BC също на три равни части така, че отсечките AB, PQ, MN и DC са успоредни помежду си. Намерете дължините на отсечките PQ и MN.

14. През върха C на трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) успоредно на диагонала му BD е построена права, която пресича продължението на основата AB в точка E. Да се докаже, че лицето на $\triangle AEC$ е равно на лицето на дадения трапец.

15. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$). През средата L на малката основа CD са построени прави, успоредни съответно на бедрата AD и BC. Те пресичат голямата основа AB съответно в точки M и N. Да се докаже, че отсечката, която съединява средите на диагоналите, е средна отсечка в $\triangle LMN$.

16. Бедрото на равнобедрен трапец е 2 пъти по-голямо от отсечката, която съединява средите на диагоналите му. Намерете ъглите на трапеца.
Упътване: Използвайте задача 15.

29. ТЕСТ № 1 ВЪРХУ ТЕМАТА „ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ“

1. В $\triangle ABC$ точката G е медицентър. Ако дължината на медианата AM е 18 cm, дължината на AG в сантиметри е:
А) 6;
Б) 9;
В) 15;
Г) 12.

2. Дължината на средната отсечка на трапец с лице 90 cm^2 и височина 6 cm в сантиметри е:
А) 10;
Б) 12;
В) 15;
Г) 18.

3. Средната отсечка и малката основа на трапеца $ABCD$ са съответно 8 cm и 5 cm. Голямата основа на трапеца в сантиметри е:
А) 12;
Б) 7;
В) 11;
Г) 14.

4. Средната отсечка на трапец има дължина 10 cm, а отсечката, съединяваща средите на диагоналите му, е 4 cm. Дължините на основите на трапеца са:
А) 8 cm, 12 cm;
Б) 7 cm, 13 cm;
В) 6 cm, 14 cm;
Г) 5 cm, 15 cm.

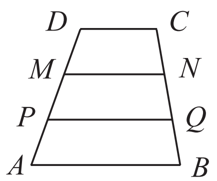
5. Трапецът $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е равнобедрен и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Ако $AB = 20$ cm и $CD = 12$ cm, обиколката на трапеца в сантиметри е:
А) 40;
Б) 48;
В) 64;
Г) 72.

6. Точка G е медицентър на $\triangle ABC$. **Не** е вярно, че:
А) $S_{\triangle ABC} = 3.S_{\triangle ABG}$;
Б) $S_{\triangle ACG} = S_{\triangle BCG}$;
В) $S_{\triangle ACG} = S_{\triangle ABG}$;
Г) $S_{\triangle ACG} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC}$.

7. В ромба $ABCD$ $AC = 18$ cm и $BD = 8$ cm. Ако M, N, P и Q са средите съответно на страните AB, BC, CD и DA, лицето на $MNPQ$ в квадратни сантиметри е:
А) 26;
Б) 36;
В) 52;
Г) 72.

8. Точките M_1, M_2 и M_3 са средите съответно на страните BC, AC и AB на $\triangle ABC$. Ако $P_{\triangle ABC} - P_{\triangle M_1M_2M_3} = 28$ cm, намерете в сантиметри:
а) $P_{\triangle M_1M_2M_3}$;
б) $P_{\triangle ABC}$.

9. В трапеца $ABCD$ $MN \parallel AB$ и $PQ \parallel AB$. Ако $AB = 15$ cm, $CD = 9$ cm и $AP = PM = MD$, намерете в сантиметри големината на:
а) средната основа на трапеца;
б) MN;
в) PQ.



10. Точките M и N са средите съответно на страните BC и AC на $\triangle ABC$ и $AM \times BN = Q$. Ако разстоянието от Q до правата MN е 3 cm, намерете дължината на височината CD в сантиметри.

ТЕСТ № 2 ВЪРХУ ТЕМАТА „ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ“

1. В $\triangle ABC$ точката G е медицентър. Ако $CG = 6$ cm, дължината на медианата CM в сантиметри е:
А) 4;
Б) 12;
В) 9;
Г) 18.

2. Средната отсечка и голямата основа на трапеца $ABCD$ са съответно 16 cm и 18 cm. Дължината на малката основа в сантиметри е:
А) 8;
Б) 10;
В) 14;
Г) 17.

3. Дължината на средната отсечка на трапец е 12 cm, а лицето му е 96 cm^2. Дължината на височината в сантиметри е:
А) 16;
Б) 14;
В) 12;
Г) 8.

4. Точка G е медицентър на $\triangle ABC$. **Не** е вярно, че:
А) $S_{\triangle ABG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$;
Б) $S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ACG}$;
В) $S_{\triangle ABC} = 3.S_{\triangle ACG}$;
Г) $S_{\triangle BCG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACG}$.

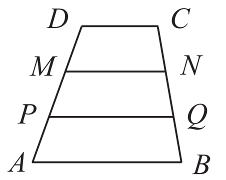
5. Средната отсечка на трапец има дължина 10 cm, а отсечката, съединяваща средите на диагоналите му, е 2 cm. Дължините на основите на трапеца са:
А) 7 cm, 13 cm;
Б) 6 cm, 8 cm;
В) 8 cm, 12 cm;
Г) 10 cm, 14 cm.

6. В четириъгълника $ABCD$ $AC = 20$ cm, $BD = 14$ cm и $AC \perp BD$. Ако M, N, P и Q са средите съответно на страните AB, BC, CD и DA, лицето на $MNPQ$ в квадратни сантиметри е:
А) 70;
Б) 60;
В) 68;
Г) 140.

7. Трапецът $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е равнобедрен и $\sphericalangle BAD = 45°$. Ако $AB = 18$ cm и $CD = 10$ cm, лицето на трапеца в квадратни сантиметри е:
А) 28;
Б) 56;
В) 112;
Г) 90.

8. Точките M_1, M_2 и M_3 са средите съответно на страните BC, AC и AB на $\triangle ABC$. Ако $P_{\triangle M_1M_2M_3} + P_{\triangle ABC} = 84$ cm, намерете в сантиметри:
а) $P_{\triangle M_1M_2M_3}$;
б) $P_{\triangle ABC}$.

9. В трапеца $ABCD$ $MN \,||\, AB$ и $PQ \,||\, AB$. Ако $AB = 12$ cm, $CD = 6$ cm и $AP = PM = MD$, намерете в сантиметри големината на:
а) средната основа на трапеца;
б) MN;
в) PQ.



10. Точките M и N са средите съответно на страните BC и AC на $\triangle ABC$ и $AM \times BN = Q$. Ако дължината на височината CD е 12 cm, намерете разстоянието от точка Q до правата MN в сантиметри.

ТЕМА 4

КВАДРАТЕН КОРЕН
(Урок № 30 – Урок № 39)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:
- ирационални числа;
- квадратен корен;
- свойства на квадратните корени;
- действия с квадратни корени;
- сравняване на ирационални числа;
- преобразуване на изрази, съдържащи корени.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:
- да сравняват квадратни корени;
- да извършват действия с квадратни корени;
- да рационализират дроби.

30. ИРАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

Рационални числа

Всички положителни числа (цели и дробни), отрицателни числа (цели и дробни) и числото нула образуват множеството на **рационалните числа (Q)**.

Всяко рационално число може да се представи във вида $\frac{p}{q}$, където q е естествено число, а p – цяло число (положително, отрицателно или нула).

Примери: $\frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{3}{9}, \frac{8}{4}, \frac{0}{5}$

Всяко рационално число може да се представи по единствен начин като несъкратима дроб $\left(\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\right)$.

Рационалните числа могат да се представят и като десетични дроби, като числителя разделим на знаменателя.

Всяко рационално число може да се представи като **крайна** или **безкрайна периодична десетична дроб.**

Ирационални числа

Във формулата за намиране дължина на окръжност и лице на кръг използваме $2\pi r$, πr^2. π е дължина на окръжност, чийто диаметър е равен на числото 1. π е безкрайна непериодична десетична дроб, т.е. π не е рационално число. Ето първите десетични знаци в този запис:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950 28...$$

Десетичните дроби 0,101001000100001000001..., 0,123456789101112131415...

са **безкрайни непериодични десетични дроби**.

Следователно те **не представят рационални числа**.

Тогава, ако те също представят числа, какви са тези числа?

О Всяка безкрайна непериодична десетична дроб представя число, което наричаме **ирационално число**.

Числото π е ирационално число.

ЗАДАЧА Докажете, че не съществува рационално число, квадратът на което е равен на числото 2.

Доказателство:

Допускаме, че съществува рационално число $\frac{p}{q}$, квадратът на което е равен на 2, т.е. $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Ще предполагаме, че числата p и q са взаимнопрости, т.е. дробта е несъкратима. (Ако числителят и знаменателят на тази дроб имат общ делител, предварително я съкращаваме.)

От $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p\,.\,p$ е четно число, т.е. p е четно число.

Нека $p = 2k$, k – естествено число.

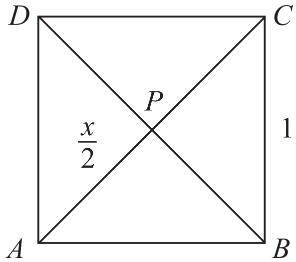
Тогава $(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q$ е четно число.

Получихме, че p и q са четни числа, т.е. $\dfrac{p}{q}$ е съкратима дроб, което противоречи на допускането, че $\dfrac{p}{q}$ е несъкратима.

Следователно не съществува рационално число, чиято втора степен е равна на 2. Ето първите 11 знака след десетичната запетая на ирационалното число α, за което $\alpha^2 = 2$: $\alpha = 1{,}41421356237....$

Изобразяване на ирационалните числа с точки от числовата ос

Всяко рационално число се изобразява с точка от числовата ос.
Възниква въпросът: „Всички точки на числовата ос „рационални точки“ ли са?“.
Ще покажем, че ирационалното число x, за което $x^2 = 2$, се изобразява с точка върху числовата ос.



Разглеждаме квадрат $ABCD$ със страна $AB = 1$.
Нека $AC \cap BD = P$ и $AC = BD = x$.

Тогава $AP = \dfrac{x}{2}\cdot$

За лицето на $\triangle ABD$ получаваме

$S = \dfrac{AB\,.\,AD}{2}$ и $S = \dfrac{BD\,.\,AP}{2}$, т.е. $\dfrac{1}{2}\cdot 1.1 = \dfrac{1}{2}\cdot x\cdot\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2$,

т.е. дължината на диагонала на този квадрат е **ирационалното число x**.

По положителната посока на числовата ос нанасяме от началото 0 отсечката $OK = AC = x$. Точката K е образ на ирационалното число, чийто квадрат е равен на 2, т.е. K е „ирационална точка“.

Може да се докаже, че всяко ирационално число се изобразява с точка от числовата ос.
Ирационалните числа не могат да се представят като частно на две цели числа.

O

Реални числа. Множествата на рационалните и ирационалните числа образуват множеството на реалните числа (R).

До идеята за ирационални числа са достигнали древните вавилонци и гърци. Архимед (287-212 г. пр.н.е.) е показал, че $3\dfrac{10}{71} < \pi < 3\dfrac{1}{7}$.
През 1763 г. немският математик Йохан Ламберт е доказал, че числото π е ирационално.

31. КВАДРАТЕН КОРЕН

При действието степенуване по дадена основа a и степенен показател n намираме степента a^n. Пример: $3^4 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 81$.
Обратното действие на действието степенуване се нарича коренуване.
При коренуването по дадени степенен показател и стойност на степента намираме основата на степента.
Пример: $x^3 = 27$, $x = 3$, защото $3^3 = 27$.
Задачата „от $x^2 = 36$ да се намери x“ няма еднозначно решение:

$$\text{ако}\quad x^2 = 36 \begin{cases} x = 6, \\ x = -6. \end{cases}$$

Когато се въвежда действието коренуване при $x^2 = a$, за да се осигури **еднозначност** на това действие, се поставя изискването $x \geq 0$.

О **Квадратен корен** от неотрицателно число $a \geq 0$ се нарича единственото неотрицателно число, втората степен на което е равна на числото a.

- Означаваме с $\sqrt{a}$.
- $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ се чете **„квадратен корен от *a*“** или **„втори корен от *a*“**.
- Знакът „$\sqrt{}$“ се нарича **корен** или **радикал**.
- Числото 2 се нарича **коренен показател**.
- Числото a в израза $\sqrt{a}$ се нарича **подкоренна величина**.

О Действието, при което търсим квадратен корен от неотрицателно число, се нарича **коренуване**.

$$\sqrt{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a, \quad a \geq 0, \quad x \geq 0$$

Примери: $\sqrt{9} = 3$, защото $3^2 = 9$ и $3 > 0$; $\sqrt{1} = 1$, защото $1^2 = 1$ и $1 > 0$;

Знакът „$\sqrt{}$“ е въведен от Михаел Щифел (1486-1576). Смята се, че знакът е по подобие на малката буква *r*, но няма преки доказателства за това.

ЗАДАЧА 1 Докажете, че $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$ за всяко a.

Решение: При $a \geq 0$ $\sqrt{a^2} = a$, защото $a \geq 0$ и $a^2 = a^2$.
При $a \leq 0$ $\sqrt{a^2} = -a$, защото $-a \geq 0$ и $(-a)^2 = a^2$.

$$\text{Получихме}\quad \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0; \\ -a & \text{при } a \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{По определение}\quad |\,a\,| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a \leq 0. \end{cases}$$

Окончателно получихме, че $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$ за всяко a.

ЗАДАЧА 2 Пресметнете $\sqrt{81}$, $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{16}}$, $\sqrt{6,25}$.

Решение: $\sqrt{81}=9$, $\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\dfrac{5}{6}$, $\sqrt{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{4}$, $\sqrt{6,25}=2,5$

Квадратните корени от числа, които са точни квадрати, са **рационални числа**.

Примери: $\sqrt{81}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$, $\sqrt{6,25}$

Показахме, че числото $x>0$, за което $x^2=2$, е ирационално число. Числото $x>0$, за което $x^2=2$, означихме с $\sqrt{2}$. Следователно $\sqrt{2}$ е ирационално число.

Квадратните корени от числа, които не са точни квадрати, са **ирационални числа.**

Примери: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$

$\sqrt{2}=1,4142136\ldots$
$\sqrt{3}=1,7320508\ldots$
$\sqrt{5}=2,236068\ldots$
$\sqrt{6}=2,4494897\ldots$
$\sqrt{7}=2,6457513\ldots$
$\sqrt{8}=2,8284271\ldots$
$\sqrt{10}=3,1622777\ldots$
$\sqrt{11}=3,3166248\ldots$

Представянето на квадратните корени като десетични дроби се извършва с помощта на калкулатор, компютър или специални таблици. При кореннуване обикновено се изисква определена точност на корена. Закръглянето на резултата от кореннуването до исканата точност става по познатото **правило:**

- последната цифра остава същата, ако следващата цифра е по-малка от 5;
- последната цифра се увеличава с 1, ако следващата цифра е по-голяма или равна на 5.

ЗАДАЧА 3 Намерете $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$ с точност до стотни (до втория десетичен знак).

Решение: $\sqrt{2}\approx 1,41$, $\sqrt{3}\approx 1,73$, $\sqrt{5}\approx 2,24$, $\sqrt{6}\approx 2,45$, $\sqrt{10}\approx 3,16$, $\sqrt{11}\approx 3,32$

ЗАДАЧА 4 Пресметнете $\sqrt{3}+\sqrt{11}$ с точност до 0,001.

Решение: $\sqrt{3}+\sqrt{11}\approx 1,7320+3,3166=5,0486\approx 5,049$

В *Задача 4*, за да получим исканата точност, вземаме стойностите на корените с един десетичен знак повече.

ЗАДАЧИ

Пресметнете квадратните корени:

1 $\sqrt{36}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{225}$; $\sqrt{(-2)^2}$; $\sqrt{(-7)^2}$.

2 $\sqrt{\dfrac{1}{4}}$; $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$; $\sqrt{\dfrac{49}{256}}$; $\sqrt{\left(-\dfrac{3}{8}\right)^2}$; $\sqrt{\left(-\dfrac{5}{9}\right)^2}$.

3 $\sqrt{0,25}$; $\sqrt{0,81}$; $\sqrt{1,96}$; $\sqrt{2,25}$; $\sqrt{0,0324}$.

4 Намерете $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ с точност до 0,0001.

Намерете с калкулатор:

5 $\sqrt{12}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{14}$; $\sqrt{15}$ с точност до 0,0001.

6 $\sqrt{17}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{20}$ с точност до 0,001.

Пресметнете:

7 $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ с точност до 0,001.

8 $\sqrt{10}-\sqrt{6}$ с точност до 0,0001.

9 $\sqrt{11}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$ с точност до 0,001.

32. СВОЙСТВА НА КВАДРАТНИТЕ КОРЕНИ

За действието **степенуване** познаваме правилата:

- степенуване на степен $\rightarrow$ $(a^k)^2 = a^{2k}$, k – естествено число,
- степенуване на произведение $\rightarrow$ $(a.b)^2 = a^2.b^2$,
- степенуване на частно $\rightarrow$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, $b \neq 0$.

Ще изкажем съответни правила за действието **коренуване.**

Квадратен корен от степен

При определението на понятието „квадратен корен“ показахме, че $\sqrt{a^2} = a$ при $a \geq 0$.

Примери: $\sqrt{3^2} = 3$, $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

Изрази от вида $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{(-5)^2}$ също имат смисъл, защото $a^2 \geq 0$ за всяка стойност на a.

Примери: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Квадратен корен от произведение

Да сравним стойностите на изразите $\sqrt{36.49}$ и $\sqrt{36}.\sqrt{49}$.

$\sqrt{36.49} = \sqrt{6^2.\,7^2} = \sqrt{(6.7)^2} = \sqrt{42^2} = 42$

$\sqrt{36}.\sqrt{49} = 6.7 = 42$

Получихме, че $\sqrt{36.49} = \sqrt{36}.\sqrt{49}$.

! **ПРАВИЛО** $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ за всяко $a \geq 0$, $b \geq 0$

Следствие: $\sqrt{25.64.4} = \sqrt{25}.\sqrt{64}.\sqrt{4} = 5.8.2 = 80$

Примери: $\sqrt{4\,.\,9} = \sqrt{4}.\sqrt{9} = 2\,.\,3 = 6$

$\sqrt{8\,.\,18} = \sqrt{2^3.\,2.\,3^2} = \sqrt{2^4.3^2} = \sqrt{(2^2)^2}.\sqrt{3^2} = 2^2.3 = 12$

Пресмятането на $\sqrt{4\,.\,9}$ може да стане и като намерим произведението $4\,.\,9 = 36 = 6^2$ и после коренуваме. Този подход е удобен в частни случаи при максимум трицифрени числа под знака на корена или при пресмятане с калкулатор.

ЗАДАЧА 1 Пресметнете: а) $\sqrt{16.36.25}$; б) $\sqrt{5.125}$.

Решение: а) $\sqrt{16.36.25} = \sqrt{16}.\sqrt{36}.\sqrt{25} = 4.6.5 = 120$

б) $\sqrt{5.125} = \sqrt{5.5^3} = \sqrt{5^4} = \sqrt{25^2} = 25$

ЗАДАЧА 2 Пресметнете корена, като предварително разложите подкоренното число на множители:

а) $\sqrt{4356}$; б) $\sqrt{298\,116}$.

Решение:

а)

4 356	2
2 178	2
1 089	3
363	3
121	11
11	11
1	

$4356=2^2.3^2.11^2$

$\sqrt{4356}=\sqrt{2^2.3^2.11^2}=$

$=\sqrt{2^2}.\sqrt{3^2}.\sqrt{11^2}=$

$=2.3.11=$

$=66$

б) $298\,116=2^2.3^2.7^2.13^2$

$\sqrt{298\,116}=\sqrt{2^2.3^2.7^2.13^2}=$

$=\sqrt{2^2}.\sqrt{3^2}.\sqrt{7^2}.\sqrt{13^2}=$

$=2.3.7.13=$

$=546$

Квадратен корен от частно

Да сравним стойностите на изразите $\sqrt{\dfrac{49}{169}}$ и $\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{169}}$.

$$\sqrt{\frac{49}{169}}=\sqrt{\frac{7^2}{13^2}}=\sqrt{\left(\frac{7}{13}\right)^2}=\frac{7}{13}$$

$$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{169}}=\frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{13^2}}=\frac{7}{13}$$

Получихме, че $\sqrt{\dfrac{49}{169}}=\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{169}}$.

!

ПРАВИЛО $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ за всяко $a\geq 0$, $b\geq 0$

Примери: $\sqrt{\dfrac{25}{64}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}}=\dfrac{5}{8}$, $\sqrt{\dfrac{32}{98}}=\sqrt{\dfrac{16}{49}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}}=\dfrac{4}{7}$.

ЗАДАЧА 3 Пресметнете: а) $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$; б) $\sqrt{\dfrac{50}{72}}$; в) $\sqrt{\dfrac{192}{363}}$.

Решение:

а) $\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\dfrac{3}{4}$ б) $\sqrt{\dfrac{50}{72}}=\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\dfrac{5}{6}$ в) $\sqrt{\dfrac{192}{363}}=\sqrt{\dfrac{64}{121}}=\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{121}}=\dfrac{8}{11}$

ЗАДАЧА 4 Сравнете стойностите на изразите: а) $\sqrt{8^2+6^2}$ и $8+6$; б) $\sqrt{10^2-6^2}$ и $10-6$.

Решение:

а) $\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$, $8+6=14$ От $10<14\Rightarrow\sqrt{8^2+6^2}<8+6$.

б) $\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{(10-6)(10+6)}=\sqrt{4}.\sqrt{16}=2.4=8$, $10-6=4$ От $8>4\Rightarrow\sqrt{10^2+6^2}>10-6$.

!

Няма правило за кореннуване на сбор и разлика. Тези действия се извършват под знака на корена, след което се пристъпва към действието коренуване.

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

1 $\sqrt{25.49}$; $\sqrt{7.63}$; $\sqrt{11.176}$; $\sqrt{8.72}$.

2 $\sqrt{9.49.64}$; $\sqrt{6.14.21}$; $\sqrt{24.33.88}$.

3 $\sqrt{0{,}01.6{,}25}$; $\sqrt{0{,}36.1{,}69}$; $\sqrt{0{,}04.0{,}09.0{,}25}$.

4 $\sqrt{\dfrac{64}{169}}$; $\sqrt{\dfrac{50}{162}}$; $\sqrt{\dfrac{48}{147}}$; $\sqrt{\dfrac{20}{405}}$.

5 $\sqrt{1764}$; $\sqrt{17424}$; $\sqrt{7056}$; $\sqrt{11025}$.

6 $\sqrt{7683984}$; $\sqrt{142884}$; $\sqrt{1002001}$.

7 $\sqrt{\dfrac{3^2.(-2)^2}{(-4)^2}}$; $\sqrt{\dfrac{(-1)^2.5^2}{(-3)^2}}$; $\sqrt{\dfrac{(-4)^2.(-6)^2}{64}}$.

8 $\sqrt{3^2+4^2}$; $\sqrt{5^2+12^2}$; $\sqrt{7^2+24^2}$.

9 $\sqrt{17^2-8^2}$; $\sqrt{15^2-9^2}$; $\sqrt{50^2-14^2}$.

33. ДЕЙСТВИЯ С КВАДРАТНИ КОРЕНИ

Степенуване на корен

От определението за квадратен корен при $a \geq 0$, $x \geq 0$ имаме

$\sqrt{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a$, т.е. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ при $a \geq 0$.

! **ПРАВИЛО** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ при $a \geq 0$

Примери: $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$, $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$.

Умножаване на корени

Правилото за кореннуване на произведение $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, може да се разглежда и като правило за умножаване на корени.

! **ПРАВИЛО** $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$

Пример: $\sqrt{3}.\sqrt{27} = \sqrt{3.27} = \sqrt{81} = 9$

ЗАДАЧА 1 Пресметнете: а) $\sqrt{2}.\sqrt{18}$; б) $\sqrt{\frac{100}{7}}.\sqrt{0,28}$; в) $\sqrt{3}.\sqrt{21}.\sqrt{28}$.

Решение: а) $\sqrt{2}.\sqrt{18} = \sqrt{2.18} = \sqrt{36} = 6$ б) $\sqrt{\frac{100}{7}}.\sqrt{0,28} = \sqrt{\frac{100}{7}.0,28} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$

в) $\sqrt{3}.\sqrt{21}.\sqrt{28} = \sqrt{3.21.28} = \sqrt{3.3.7.7.4} = \sqrt{3^2.7^2.2^2} = \sqrt{(3.7.2)^2} = 3.7.2 = 42$

Деление на корени

Правилото за кореннуване на частно $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$,

може да се разглежда и като правило за деление на корени.

! **ПРАВИЛО** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$

Пример: $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{128}{2}} = \sqrt{64} = 8$

ЗАДАЧА 2 Пресметнете: а) $\frac{\sqrt{50}.\sqrt{7}}{\sqrt{18}.\sqrt{28}}$; б) $\frac{\sqrt{6}.\sqrt{22}.\sqrt{12}}{\sqrt{7}.\sqrt{14}.\sqrt{88}}$.

Решение:

а) $\frac{\sqrt{50}.\sqrt{7}}{\sqrt{18}.\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{50.7}}{\sqrt{18.28}} = \sqrt{\frac{25}{9.4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ б) $\frac{\sqrt{6}.\sqrt{22}.\sqrt{12}}{\sqrt{7}.\sqrt{14}.\sqrt{88}} = \frac{\sqrt{6.22.12}}{\sqrt{7.14.88}} = \sqrt{\frac{3.3}{7.7}} = \frac{3}{7}$

Изнасяне на множител пред квадратния корен

Когато извършваме действия като $\sqrt{75} = \sqrt{25.3} = \sqrt{25}.\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ и $\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{7}$, казваме, че изнасяме множител пред корена.

! **ПРАВИЛО** $\sqrt{a^2.b}=a\sqrt{b},\ a\ge 0,\ b\ge 0 \qquad \sqrt{a^2.b}=-a\sqrt{b},\ a<0,\ b\ge 0$

ЗАДАЧА 3 Изнесете множител пред корена: а) $\sqrt{147}$; б) $\sqrt{(-3)^2.5}$.

Решение: а) $\sqrt{147}=\sqrt{7^2.3}=7\sqrt{3}$ б) $\sqrt{(-3)^2.5}=\sqrt{9.5}=3\sqrt{5}$

Ирационални изрази

О Алгебричен израз, който съдържа корен (радикал), се нарича **ирационален**.

Примери: $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$, ...

О Един радикал е в **нормален вид**, ако подкоренната му величина:
- не съдържа знаменател;
- няма множители, които могат да се изнесат пред радикала.

ЗАДАЧА 4 Приведете в нормален вид радикалите ($a\ge 0$): а) $\sqrt{75}$; б) $\sqrt{8a^3}$.

Решение: а) $\sqrt{75}=\sqrt{25.3}=5\sqrt{3}$ б) $\sqrt{8a^3}=\sqrt{4a^2.2a}=2a\sqrt{2a}$

Коефициент. Множителят пред знака на радикала, приведен в нормален вид, се нарича **коефициент** на корена (радикала).

Например в *Задача 4* 5 и $2a$ са коефициенти.

Подобни радикали. Радикали, които в нормалния си вид имат еднакви подкоренни величини, са подобни.

Например $2a\sqrt{2a}$ и $\dfrac{3a}{5}\sqrt{2a}$ са подобни радикали.

ЗАДАЧА 5 Освободете подкоренната величина от знаменател: а) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$; б) $\sqrt{\dfrac{7}{10}}$.

Решение: а) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}=\sqrt{\dfrac{5.7}{7.7}}=\sqrt{\dfrac{35}{7^2}}=\dfrac{1}{7}\sqrt{35}$ б) $\sqrt{\dfrac{7}{10}}=\sqrt{\dfrac{7.10}{10.10}}=\sqrt{\dfrac{70}{100}}=\dfrac{1}{10}\sqrt{70}$

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

1 а) $\sqrt{3}\sqrt{12}$; б) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{6}$; в) $\sqrt{50}\sqrt{18}$.

2 а) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{\sqrt{20}\sqrt{28}}{\sqrt{35}}$.

3 Изнесете множител пред корените:
а) $\sqrt{150}$; б) $\sqrt{63}$; в) $\sqrt{80}$.

Приведете в нормален вид радикалите ($a\ge 0$):

4 а) $\sqrt{27}$; б) $\sqrt{252}$; в) $\sqrt{294}$.

5 а) $\sqrt{27a^3}$; б) $\sqrt{12a^5}$; в) $\sqrt{18a^2}$.

6 Освободете подкоренната величина от знаменател:
а) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; б) $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$; в) $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$; г) $\sqrt{\dfrac{7}{8}}$.

34. ДЕЙСТВИЯ С КВАДРАТНИ КОРЕНИ. ПРОДЪЛЖЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Приведете в нормален вид:

а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{27}$; в) $\sqrt{12}$; г) $\sqrt{18}$.

Решение:

а) $\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$ б) $\sqrt{27}=\sqrt{9.3}=3\sqrt{3}$

в) $\sqrt{12}=\sqrt{4.3}=2\sqrt{3}$ г) $\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$

Внасяне на множител под квадратния корен

Когато извършваме действия като

$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}.\sqrt{5}=\sqrt{3^2.5}=\sqrt{45}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{7}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}.\sqrt{7}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2.7}=\sqrt{\frac{7}{9}}$,

казваме, че внасяме множител под корена.

! **ПРАВИЛО** $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b},\ a\geq 0,\ b\geq 0$

Примери: $3\sqrt{7}=\sqrt{3^2.7}=\sqrt{63},\ \frac{2}{3}\sqrt{5}=\sqrt{\frac{4}{9}.5}=\sqrt{\frac{20}{9}}$,

$-5\sqrt{3}=-\sqrt{5^2.3}=-\sqrt{25.3}=-\sqrt{75}$.

! Под знака на квадратния корен се внасят само положителни числа.

ЗАДАЧА 2 Внесете множител под знака на корените:

а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{7}$.

Решение: а) $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2.3}=\sqrt{12}$ б) $3\sqrt{7}=\sqrt{3^2.7}=\sqrt{63}$

ЗАДАЧА 3 Внесете множител под знака на корените:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{7}$;

Решение: а) $\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2.3}=\sqrt{\frac{3}{4}}$ б) $\frac{2}{3}\sqrt{7}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2.7}=\sqrt{\frac{28}{9}}$

ЗАДАЧА 4 Внесете множител под знака на корените:

а) $-4\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{6}$.

Решение: а) $-4\sqrt{2}=-\sqrt{4^2.2}=-\sqrt{32}$ б) $-3\sqrt{6}=-\sqrt{3^2.6}=-\sqrt{54}$

ЗАДАЧА 5 Пресметнете по два начина:

а) $2\sqrt{3}.3\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{7}.2\sqrt{2}$.

Решение: а) $2\sqrt{3}.3\sqrt{2} = \sqrt{2^2.3}.\sqrt{3^2.2} = \sqrt{2^2.3^2.3.2} = 6\sqrt{6}$

$2\sqrt{3}.3\sqrt{2} = 2.3\sqrt{3}\sqrt{2} = 6\sqrt{3.2} = 6\sqrt{6}$

б) $3\sqrt{7}.2\sqrt{2} = \sqrt{3^2.7}.\sqrt{2^2.2} = \sqrt{3^2.2^2.7.2} = 6\sqrt{14}$

$3\sqrt{7}.2\sqrt{2} = 3.2\sqrt{7}\sqrt{2} = 6\sqrt{7.2} = 6\sqrt{14}$

ЗАДАЧА 6 Пресметнете: а) $\sqrt{27}.\sqrt{75}$; б) $\sqrt{8}.\sqrt{18}$; в) $\sqrt{45}.\sqrt{80}$.

Решение: а) $\sqrt{27}.\sqrt{75} = 3\sqrt{3}.5\sqrt{3} = 15.3 = 45$

б) $\sqrt{8}.\sqrt{18} = 2\sqrt{2}.3\sqrt{2} = 6.2 = 12$

в) $\sqrt{45}.\sqrt{80} = 3\sqrt{5}.4\sqrt{5} = 12.5 = 60$

ЗАДАЧА 7 В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на числовия израз. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на числовия израз със същата стойност.

(А)	$2\sqrt{5}\ .\ 5\sqrt{2}$	(1)	$\sqrt{1440} - \sqrt{40}$
		(2)	$\sqrt{20} - \sqrt{50}$
(Б)	$3\sqrt{2}\ .\ 2\sqrt{3}$	(3)	$\sqrt{45} + \sqrt{20}$
		(4)	$\sqrt{96} + \sqrt{24}$

Решение:

(А) $2\sqrt{5}\ .\ 5\sqrt{2} = 10\sqrt{10}$

(Б) $3\sqrt{2}\ .\ 2\sqrt{3} = 6\sqrt{6}$

(1) $\sqrt{1440} - \sqrt{40} = 12\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$

(2) $\sqrt{20} + \sqrt{50} = 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{45} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

(4) $\sqrt{96} + \sqrt{24} = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

Отг.

(А)	1
(Б)	4

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете корените, като предварително разложите подкоренното число на множители:

$\sqrt{28\,224}$; $\sqrt{435\,600}$;

$\sqrt{213\,444}$; $\sqrt{405\,769}$.

2 Изнесете множител пред корените:

$\sqrt{98}$; $\sqrt{192}$; $\sqrt{507}$; $\sqrt{1620}$.

3 Внесете множител под знака на корена $3\sqrt{5}$; $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{7}$; $6\sqrt{2}$.

Пресметнете:

4 а) $3\sqrt{6}\ .\ 4\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{6}\ .\ 6\sqrt{2}$;

в) $5\sqrt{3}\ .\ 2\sqrt{6}$; г) $5\sqrt{6}\ .\ 2\sqrt{8}$.

5 а) $\sqrt{12}\ .\ \sqrt{48}$; б) $\sqrt{8}\ .\ \sqrt{72}$;

в) $\sqrt{50}\ .\ \sqrt{32}$; г) $\sqrt{75}\ .\ \sqrt{300}$.

35. СРАВНЯВАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА, ЗАПИСАНИ С КВАДРАТНИ КОРЕНИ

ЗАДАЧА 1 Внесете множител под знака на корените:

а) $2\sqrt{7}$; б) $3\sqrt{11}$; в) $7\sqrt{2}$.

Решение:

а) $2\sqrt{7}=\sqrt{2^2.7}=\sqrt{28}$ б) $3\sqrt{11}=\sqrt{3^2.11}=\sqrt{99}$ в) $7\sqrt{2}=\sqrt{7^2.2}=\sqrt{98}$

ЗАДАЧА 2 Внесете множител под знака на корените:

а) $-3\sqrt{5}$; б) $-4\sqrt{3}$; в) $-5\sqrt{2}$.

Решение:

а) $-3\sqrt{5}=-\sqrt{3^2.5}=-\sqrt{45}$ б) $-4\sqrt{3}=-\sqrt{4^2.3}=-\sqrt{48}$ в) $-5\sqrt{2}=-\sqrt{5^2.2}=-\sqrt{50}$

Сравняване на корени

! **ПРАВИЛО** Ако $a>b\geq 0$, то $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

Примери: $7>2\Rightarrow\sqrt{7}>\sqrt{2}$, $5<7\Rightarrow\sqrt{5}<\sqrt{7}$, $13>0\Rightarrow\sqrt{13}>\sqrt{0}$.

ЗАДАЧА 3 Сравнете числата:

а) $3\sqrt{2}$ и $\sqrt{17}$; б) $2\sqrt{7}$ и 5; в) 9 и $4\sqrt{5}$.

Решение:

а) $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2.2}=\sqrt{18}$

$\sqrt{17}=\sqrt{17}$

От $18>17$

$\Rightarrow\sqrt{18}>\sqrt{17}$

$\Rightarrow 3\sqrt{2}>\sqrt{17}$

б) $2\sqrt{7}=\sqrt{2^2.7}=\sqrt{28}$

$5=\sqrt{5^2}=\sqrt{25}$

От $28>25$

$\Rightarrow\sqrt{28}>\sqrt{25}$

$\Rightarrow 2\sqrt{7}>5$

в) $9=\sqrt{9^2}=\sqrt{81}$

$4\sqrt{5}=\sqrt{4^2.5}=\sqrt{80}$

От $81>80$

$\Rightarrow\sqrt{81}>\sqrt{80}$

$\Rightarrow 9>4\sqrt{5}$

ЗАДАЧА 4 Сравнете числата:

а) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$ и $\sqrt{19}$; б) $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$ и $3\sqrt{5}$.

Решение:

а) $2\sqrt{5}=\sqrt{2^2.5}=\sqrt{20}$

$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2.2}=\sqrt{18}$

$\sqrt{19}=\sqrt{19}$

От $18<19<20$

$\Rightarrow\sqrt{18}<\sqrt{19}<\sqrt{20}$

$\Rightarrow 3\sqrt{2}<\sqrt{19}<2\sqrt{5}$

б) $4\sqrt{3}=\sqrt{4^2.3}=\sqrt{48}$

$5\sqrt{2}=\sqrt{3^2.2}=\sqrt{50}$

$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2.5}=\sqrt{45}$

От $45<48<50$

$\Rightarrow\sqrt{45}<\sqrt{48}<\sqrt{50}$

$\Rightarrow 3\sqrt{5}<4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$

ЗАДАЧА 5 Сравнете числата и ги подредете върху числовата ос:

а) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$; б) $-5\sqrt{7}$ и $-8\sqrt{3}$.

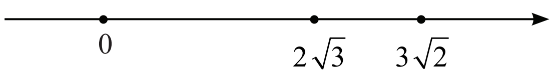
Решение:

а) $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2.3}=\sqrt{12}$

$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2.2}=\sqrt{18}$

От $12<18 \Rightarrow \sqrt{12}<\sqrt{18}$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.



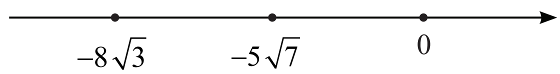
б) $-5\sqrt{7}=-\sqrt{5^2.7}=-\sqrt{175}$

$-8\sqrt{3}=-\sqrt{8^2.3}=-\sqrt{192}$

От $175<192 \Rightarrow \sqrt{175}<\sqrt{192}$

$\Rightarrow -\sqrt{175}>-\sqrt{192}$

$\Rightarrow -5\sqrt{7}>-8\sqrt{3}$.



ЗАДАЧА 6 Докажете, че: а) $2<\sqrt{7}<3$; б) $5<\sqrt{31}<6$.

Решение:

а) $4<7<9$

От $4<7 \Rightarrow \sqrt{4}<\sqrt{7}$.

От $7<9 \Rightarrow \sqrt{7}<\sqrt{9}$.

Тогава $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$,

т.е. $2<\sqrt{7}<3$.

б) $25<31<36$

От $25<31 \Rightarrow \sqrt{25}<\sqrt{31}$.

От $31<36 \Rightarrow \sqrt{31}<\sqrt{36}$.

Тогава $\sqrt{25}<\sqrt{31}<\sqrt{36}$,

т.е. $5<\sqrt{31}<6$.

ЗАДАЧА 7 В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на ирационалното число. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на интервала, на който то принадлежи.

(А)	$2\sqrt{13}$	(1)	(8; 9)
		(2)	(6; 7)
(Б)	$3\sqrt{5}$	(3)	(5; 6)
		(4)	(7; 8)

Решение:

(А) $2\sqrt{13}=\sqrt{4\,.\,13}=\sqrt{52}$

$\sqrt{49}<\sqrt{52}<\sqrt{64} \Rightarrow 7<2\sqrt{13}<8 \Rightarrow 2\sqrt{13}\in(7;\,8)$

(Б) $3\sqrt{5}=\sqrt{9\,.\,5}=\sqrt{45}$

$\sqrt{36}<\sqrt{45}<\sqrt{49} \Rightarrow 6<3\sqrt{5}<7 \Rightarrow 3\sqrt{5}\in(6;\,7)$

Отг.:

(А)	4
(Б)	2

ЗАДАЧИ

Сравнете числата:

1 $2\sqrt{5}$ и $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{10}$;

$5\sqrt{7}$ и $6\sqrt{5}$; $8\sqrt{3}$ и $10\sqrt{2}$.

2 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{7}{3}}$ и $\sqrt{\frac{5}{2}}$;

$\sqrt{\frac{6}{5}}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{11}$; $\frac{2}{\sqrt{7}}$ и $\sqrt{\frac{13}{23}}$.

3 Сравнете и подредете върху числовата ос числата:

$3\sqrt{3}$ и $4\sqrt{2}$; $-2\sqrt{3}$ и $-3\sqrt{2}$;

$5\sqrt{2}$ и $3\sqrt{5}$; $-3\sqrt{5}$ и $\sqrt{46}$.

4 Докажете, че:

а) $6<\sqrt{43}<7$; б) $4<\sqrt{17}<5$;

в) $8<5\sqrt{3}<9$; г) $7<3\sqrt{7}<8$.

36. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИЗРАЗИ, СЪДЪРЖАЩИ КВАДРАТНИ КОРЕНИ

При извършване на действията събиране и изваждане с квадратни корени са в сила правилата за смятане с рационални числа.

Примери: $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$,

$7\sqrt{5}-3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$,

! **ПРАВИЛО** Събираме и изваждаме само подобни радикали.

ЗАДАЧА 1 Извършете действията:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{3}-8\sqrt{2}$; в) $7\sqrt{5}-2\sqrt{7}+3\sqrt{5}-4\sqrt{7}$.

Решение:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

б) $\underline{2\sqrt{3}}+\underline{\underline{5\sqrt{2}}}-\underline{\sqrt{3}}-\underline{\underline{8\sqrt{2}}}=$
$=\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

в) $7\sqrt{5}-2\sqrt{7}+3\sqrt{5}-4\sqrt{7}=$
$=10\sqrt{5}-6\sqrt{7}$

ЗАДАЧА 2 Извършете действията:

а) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$; б) $2\sqrt{75}-5\sqrt{27}$; в) $3\sqrt{28}-7\sqrt{63}+5\sqrt{7}$.

Решение:

а) $\sqrt{8}+\sqrt{18}=$
$=\sqrt{4.2}+\sqrt{9.2}=$
$=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=$
$=5\sqrt{2}$

б) $2\sqrt{75}-5\sqrt{27}=$
$=2\sqrt{25.3}-5\sqrt{9.3}=$
$=10\sqrt{3}-15\sqrt{3}=$
$=-5\sqrt{3}$

в) $3\sqrt{28}-7\sqrt{63}+5\sqrt{7}=$
$=3\sqrt{4.7}-7\sqrt{9.7}+5\sqrt{7}=$
$=6\sqrt{7}-21\sqrt{7}+5\sqrt{7}=$
$=-10\sqrt{7}$

При събиране и изваждане на корени предварително ги привеждаме в нормален вид (*Задача 2*).

ЗАДАЧА 3 Извършете действията:

а) $\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$; б) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$; в) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right):\sqrt{2}$.

Решение:

а) $\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}.\sqrt{5}+\sqrt{2}.\sqrt{2}=\sqrt{2}.\sqrt{5}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{10}+2$

б) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)=\sqrt{3}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)=$
$=\sqrt{3}.\sqrt{7}-\sqrt{3}.\sqrt{5}+\sqrt{2}.\sqrt{7}-\sqrt{2}.\sqrt{5}=\sqrt{21}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{10}$

в) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right):\sqrt{2}=\sqrt{10}:\sqrt{2}-\sqrt{6}:\sqrt{2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

$\sqrt{10}:\sqrt{2}=\sqrt{10:2}=\sqrt{5}$; $\sqrt{10}:\sqrt{2}=\sqrt{\dfrac{10}{2}}=\sqrt{5}$

ЗАДАЧА 4 Извършете действията:

а) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$; б) $(\sqrt{7}+3)^2$; в) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{7})^2$.

Решение:

а) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2$

б) $(\sqrt{7}+3)^2=(\sqrt{7})^2+2.\sqrt{7}.3+3^2=7+6\sqrt{7}+9=16+6\sqrt{7}$

в) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{7})^2=(3\sqrt{2})^2-2.3\sqrt{2}.2\sqrt{7}+(2\sqrt{7})^2=18-12\sqrt{14}+28=46-12\sqrt{14}$

ЗАДАЧА 5 Докажете равенствата:

а) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2=4$; б) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$.

Решение:

а) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2=\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2-2.\sqrt{7+2\sqrt{6}}.\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2=$

$=7+\cancel{2\sqrt{6}}-2\sqrt{(7+2\sqrt{6})(7-2\sqrt{6})}+7-\cancel{2\sqrt{6}}=14-2\sqrt{7^2-(2\sqrt{6})^2}=$

$=14-2\sqrt{49-24}=14-2\sqrt{25}=14-2.5=14-10=4$

б) I начин: $3+\sqrt{2}>0$

$3+\sqrt{2}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=\sqrt{9+6\sqrt{2}+2}=\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

II начин: $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{9+2.3\sqrt{2}+2}=\sqrt{3^2+2.3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=$

$=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=|3+\sqrt{2}|=3+\sqrt{2}$

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

1 $\sqrt{3}.\sqrt{12}$; $\sqrt{2}.\sqrt{8}$; $\sqrt{5}.\sqrt{20}$; $\sqrt{7}.\sqrt{63}$.

2 $\sqrt{0,3}.\sqrt{1,2}$; $\sqrt{0,2}.\sqrt{3,2}$;
$\sqrt{0,3}.\sqrt{4,8}$; $\sqrt{0,07}.\sqrt{0.28}$.

3 $\sqrt{\frac{2}{5}}.\sqrt{\frac{18}{5}}$; $\sqrt{\frac{25}{3}}.\sqrt{0,12}$;
$\sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{0,06}$; $\sqrt{0,2}.\sqrt{\frac{0,36}{5}}$.

4 $\sqrt{2}.\sqrt{5}.\sqrt{10}$; $\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{12}.\sqrt{18}$;
$\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{10}.\sqrt{15}$; $\sqrt{42}.\sqrt{18}.\sqrt{27}.\sqrt{7}$.

5 $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{343}}$; $\frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{11}}$.

6 $\frac{\sqrt{22}.\sqrt{48}}{\sqrt{11}.\sqrt{54}}$; $\frac{\sqrt{7}.\sqrt{63}}{\sqrt{5}.\sqrt{20}}$;
$\frac{\sqrt{2}.\sqrt{50}}{\sqrt{3}.\sqrt{147}}$; $\frac{\sqrt{5}.\sqrt{45}}{\sqrt{7}.\sqrt{28}}$.

Извършете действията:

7 $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}$; $5\sqrt{2}-2\sqrt{2}$;
$2\sqrt{5}+4\sqrt{5}-6\sqrt{5}$.

8 $\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; $\sqrt{3}(1-\sqrt{2})$;
$\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-5)$.

9 $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$; $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$.

10 $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{7}-1)$.

11 $(\sqrt{7}+3)^2$; $(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2$; $(\sqrt{6}-\sqrt{11})^2$.

12 $(3\sqrt{2}+1)^2$; $(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})^2$; $(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$.

37. РАЦИОНАЛИЗИРАНЕ НА ИЗРАЗИ, СЪДЪРЖАЩИ КВАДРАТНИ КОРЕНИ

ЗАДАЧА 1 Извършете действията:

а) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$; б) $(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$; в) $(x\sqrt{3}+\sqrt{5})(x\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

Решение:

а) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=x^2-(\sqrt{2})^2=x^2-2$

б) $(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})=x^2-(2\sqrt{3})^2=x^2-12$

в) $(x\sqrt{3}+\sqrt{5})(x\sqrt{3}-\sqrt{5})=(x\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2=3x^2-5$

ЗАДАЧА 2 Освободете знаменателя от корените:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; г) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$.

Решение:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

в) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2.\sqrt{3}.\sqrt{7}}{\sqrt{7}.\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$ г) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}}=\frac{3.\sqrt{5}.\sqrt{2}}{\sqrt{8}.\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{16}}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$

При освобождаване знаменателя на една дроб от корени знаменателят става рационално число – **рационализиране знаменателя на дробта**.

ЗАДАЧА 3 Рационализирайте знаменателя на дробите:

а) $\frac{5}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{14}{\sqrt{11}+2}$; в) $\frac{15}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$; г) $\frac{21}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Решение:

а) $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

б) $\frac{14}{\sqrt{11}+2}=\frac{14(\sqrt{11}-2)}{(\sqrt{11}+2)(\sqrt{11}-2)}=\frac{14(\sqrt{11}-2)}{11-4}=\frac{14(\sqrt{11}-2)}{7}=2(\sqrt{11}-2)$

в) $\frac{15}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{15(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\frac{15(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=$

$=\frac{15(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2}=\frac{15(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}=3(\sqrt{7}+\sqrt{2})$

г) $\frac{21}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{21(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{21(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=$

$=\frac{21(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{12-5}=\frac{21(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{7}=3(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$

ЗАДАЧА 4 Рационализирайте числителя на дробите:

а) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{12}}{5}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}$.

Решение:

а) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}.\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{7}{2\sqrt{7}}$ б) $\dfrac{\sqrt{12}}{5}=\dfrac{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}{5.\sqrt{3}}=\dfrac{6}{5\sqrt{3}}$

в) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{1}{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

ЗАДАЧА 5 Извършете действията:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Решение:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{6}$

б) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=$

$=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}.\sqrt{5}+\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\cancel{\sqrt{10}}-\cancel{\sqrt{10}}+\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

ЗАДАЧА 6 Пресметнете: а) $\dfrac{\sqrt{63}+\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{\sqrt{147}-\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$.

Решение:

а) $\dfrac{\sqrt{63}+\sqrt{112}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{63}{7}}+\sqrt{\dfrac{112}{7}}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

б) $\dfrac{\sqrt{147}-\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{147}{3}}-\sqrt{\dfrac{27}{3}}=\sqrt{49}-\sqrt{9}=7-3=4$

ЗАДАЧИ

1 Извършете действията:

а) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$;

б) $(x\sqrt{2}-2\sqrt{3})(x\sqrt{2}+2\sqrt{3})$.

2 Освободете знаменателя от корените:

а) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$; в) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; г) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

3 Рационализирайте знаменателя на дробите:

а) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{9}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{12}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

4 Рационализирайте числителя на дробите:

а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; в) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$; г) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{14}$.

5 Извършете действията:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$; г) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

6 Пресметнете:

а) $\dfrac{\sqrt{27}-\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{8}}{3\sqrt{2}}$.

38. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „КВАДРАТЕН КОРЕН“

ЗАПОМНЕТЕ!

Рационални числа – множеството от целите и дробните числа.
Всяко рационално число може да се представи като крайна или безкрайна периодична десетична дроб.

Ирационално число – представя се с безкрайна непериодична десетична дроб.

Множеството на рационалните числа и множеството на ирационалните числа образуват множеството на **реалните числа**.

Рационалните и ирационалните числа се изобразяват с точки на числовата ос.

Квадратен корен от неотрицателно число $a \geq 0$ се нарича **единственото неотрицателно число**, втората степен на което е равна на числото a.

$\sqrt{a}$ съществува, ако $a \geq 0$.

$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$, ако $a \geq 0$ и $x \geq 0$.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$, ... са ирационални числа, т.е. квадратните корени от числа, които не са точни квадрати, са ирационални числа.

От $\sqrt{7} = 2{,}6457513\ldots$ следва:

- с точност до 0,1 $\rightarrow$ $\sqrt{7} \approx 2{,}6$;
- с точност до 0,01 $\rightarrow$ $\sqrt{7} \approx 2{,}65$;
- с точност до 0,001 $\rightarrow$ $\sqrt{2} \approx 2{,}646$.

Квадратен корен от степен: $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{7^4} = \sqrt{(7^2)^2} = 7^2$

Степенуване на корен: $(\sqrt{5})^2 = 5$

Квадратен корен от произведение: $\sqrt{5.7} = \sqrt{5}.\sqrt{7}$

Произведение от корени: $\sqrt{5}.\sqrt{7} = \sqrt{5.7}$

Квадратен корен от частно: $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

Деление на корени: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$

Изнасяне на множител пред квадратния корен: $\sqrt{27} = \sqrt{9.3} = 3\sqrt{3}$

Внасяне на множител под квадратния корен: $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2.\,3} = \sqrt{27}$

Сравняване на числа, които съдържат квадратен корен: $\sqrt{10} > \sqrt{7}$, защото $10 > 7$,
$\sqrt{2} < \sqrt{3}$, защото $2 < 3$.

Няма правило за коренуване на сбор и разлика.

ЗАДАЧА 1 Намерете допустимите стойности на x в корените:

а) $\sqrt{x-2}$; б) $\sqrt{x-7}$; в) $\sqrt{5-x}$; г) $\sqrt{10-x}$.

Решение:

а) $x-2\geq 0,\quad x\geq 2\quad \Rightarrow\quad DC_x:\ x\in[2;+\infty)$

б) $x-7\geq 0,\quad x\geq 7\quad \Rightarrow\quad DC_x:\ x\in[7;+\infty)$

в) $5-x\geq 0,\quad x\leq 5\quad \Rightarrow\quad DC_x:\ x\in(-\infty;5]$

г) $10-x\geq 0,\quad x\leq 10\quad \Rightarrow\quad DC_x:\ x\in(-\infty;10]$

ЗАДАЧА 2 Разложете на множители:

а) x^2-2; б) $9x^2-5$; в) $3x^2-4$; г) $5x^2-7$.

Решение:

а) $x^2-2=x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

б) $9x^2-5=(3x)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(3x-\sqrt{5}\right)\left(3x+\sqrt{5}\right)$

в) $3x^2-4=\left(\sqrt{3}x\right)^2-2^2=\left(\sqrt{3}x-2\right)\left(\sqrt{3}x+2\right)$

г) $5x^2-7=\left(\sqrt{5}x\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{5}x-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}x+\sqrt{7}\right)$

ЗАДАЧА 3 Разложете на множители:

а) $\sqrt{15}-\sqrt{6}$; б) $\sqrt{33}+\sqrt{21}$; в) $2\sqrt{21}-\sqrt{42}$.

Решение:

а) $\sqrt{15}-\sqrt{6}=\sqrt{5.3}-\sqrt{2.3}=\sqrt{5}.\sqrt{3}-\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

б) $\sqrt{33}+\sqrt{21}=\sqrt{3.11}+\sqrt{3.7}=\sqrt{3}.\sqrt{11}+\sqrt{3}.\sqrt{7}=\sqrt{3}\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

в) $2\sqrt{21}-\sqrt{42}=2\sqrt{21}-\sqrt{2.21}=2\sqrt{21}-\sqrt{2}.\sqrt{21}=\sqrt{21}\left(2-\sqrt{2}\right)=$

$=\sqrt{21}\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\right)=\sqrt{21}.\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{42}\left(\sqrt{2}-1\right)$

ЗАДАЧА 4 Съкратете дробите: а) $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{12}-\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$.

Решение:

а) $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=$

$=\dfrac{\sqrt{5.15}+\sqrt{5.4}}{\sqrt{5}}=$

$=\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{15}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{5}}=$

$=\sqrt{15}+2$

б) $\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{12}-\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3.7}+\sqrt{3.4}-\sqrt{3.8}}{\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{7}+\sqrt{4}-\sqrt{4.2}\right)}{\sqrt{3}}=$

$=\sqrt{7}+2-2\sqrt{2}$

ЗАДАЧА 5 При какви стойности на a са изпълнени равенствата:

а) $\sqrt{a^2}=a$; б) $\sqrt{a^2}=-a$?

Решение:

а) Равенството $\sqrt{a^2}=a$ е изпълнено, ако $a\geq 0$ и $a^2=a^2$.
Търсените стойности на a са $a\geq 0$.

б) Равенството $\sqrt{a^2}=-a$ е изпълнено, ако $-a\geq 0$ и $(-a)^2=a^2$.
Търсените стойности на a са $a\leq 0$.

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „КВАДРАТЕН КОРЕН“

Пресметнете квадратните корени:

1. $\sqrt{1\,024}$; $\sqrt{1\,156}$; $\sqrt{5\,184}$.

2. $\sqrt{7{,}84}$; $\sqrt{0{,}0841}$; $\sqrt{0{,}1089}$.

3. Изнесете множител пред корените:

$\sqrt{1\,922}$; $\sqrt{2\,187}$; $\sqrt{3\,380}$.

Намерете допустимите стойности на x в корените:

4. $\sqrt{x-3}$; $\sqrt{x-8}$; $\sqrt{9-x}$.

5. $\sqrt{x+6}$; $\sqrt{3x+4}$; $\sqrt{5-2x}$.

6. Пресметнете:

а) $\dfrac{\sqrt{72}+3\sqrt{32}-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{112}+\sqrt{28}-3\sqrt{175}}{\sqrt{7}}$.

Разложете на множители изразите:

7. а) $\sqrt{21}-\sqrt{15}$; б) $\sqrt{12}-\sqrt{22}$;

в) $\sqrt{30}+\sqrt{35}$; г) $\sqrt{54}-\sqrt{42}$.

8. а) x^2-3; б) $4x^2-7$;

в) $2x^2-9$; г) $3x^2-11$.

9. Съкратете дробите:

а) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{\sqrt{60}-\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{42}-\sqrt{108}}{\sqrt{6}}$; г) $\dfrac{\sqrt{55}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$.

Освободете подкоренната величина от знаменател:

10. $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$; $\sqrt{2\dfrac{1}{3}}$; $\sqrt{\dfrac{7}{8}}$.

11. $\sqrt{3\dfrac{1}{5}}$; $\sqrt{\dfrac{11}{27}}$; $\sqrt{3\dfrac{1}{8}}$; $\sqrt{2\dfrac{5}{18}}$.

12. Освободете знаменателя от корените:

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$; $\dfrac{3}{7\sqrt{12}}$.

Сравнете числата:

13. а) $2\sqrt{30}$ и $3\sqrt{14}$; б) $5\sqrt{21}$ и $7\sqrt{10}$;

в) $3\sqrt{30}$ и $4\sqrt{15}$; г) $4\sqrt{21}$ и $3\sqrt{39}$.

14. а) $\sqrt{1\dfrac{1}{5}}$ и $2\sqrt{\dfrac{2}{7}}$; б) $2\sqrt{2\dfrac{5}{6}}$ и $\sqrt{11\dfrac{1}{2}}$;

в) $-\sqrt{3\dfrac{2}{5}}$ и $-\sqrt{\dfrac{10}{3}}$; г) $-3\sqrt{\dfrac{11}{2}}$ и $-2\sqrt{12\dfrac{1}{3}}$.

15. Рационализирайте знаменателя на дробите:

а) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{30}{2\sqrt{7}-\sqrt{13}}$.

16. Рационализирайте числителя на дробите:

а) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{3}$.

Извършете действията:

17. а) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)-\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$;

б) $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+2)$;

в) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

г) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$.

18. а) $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$;

б) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$;

в) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$;

г) $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})$.

19. а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}}+\dfrac{5}{\sqrt{12}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

20. Докажете:

а) $\sqrt{27-10\sqrt{2}}=5-\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{15-4\sqrt{14}}=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$;

в) $\sqrt{29-12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3$;

г) $\sqrt{11+2\sqrt{10}}-\sqrt{11-2\sqrt{10}}=2$.

39. ТЕСТ № 1 ВЪРХУ ТЕМАТА „КВАДРАТЕН КОРЕН“

1. Всяко ирационално число се представя със:

А) правилна дроб;

Б) безкрайна десетична периодична дроб;

В) безкрайна десетична непериодична дроб;

Г) неправилна дроб.

2. Всички стойности на a, за които $\sqrt{a^2} = a$, са:

А) $a > 0$;

Б) $a = 0$;

В) $a \geq 0$;

Г) $a < 0$.

3. От дадените числа най-малкото е:

А) $6\sqrt{2}$;

Б) $5\sqrt{3}$;

В) $4\sqrt{6}$;

Г) $3\sqrt{7}$.

4. $\sqrt{5.125.(-4)^2}$ е равен на:

А) 125;

Б) 100;

В) 80;

Г) –125.

5. Ако освободим знаменателя на дробта $\frac{5}{\sqrt{12}}$ от корен, ще получим:

А) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$;

Б) $\frac{5\sqrt{12}}{2}$;

В) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$;

Г) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

6. Допустимите стойности на x в израза $\sqrt{1-2x}$ са:

А) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$;

Б) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$;

В) $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

Г) $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

7. Ако пресметнем $\sqrt{\frac{588}{36.75}}$, ще получим:

А) $\frac{7}{25}$; Б) $\frac{8}{25}$; В) $\frac{7}{15}$; Г) $\frac{8}{15}$.

8. Пресметнете:

а) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(\sqrt{6}-2\right)$;

б) $\sqrt{9+\sqrt{17}}.\sqrt{9-\sqrt{17}} + \left(2\sqrt{3}\right)^2$.

9. В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на числовия израз. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на числовия израз със същата стойност.

(А)	$\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$
(Б)	$\left(2+\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)$
(В)	$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

(1)	$\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$
(2)	$\sqrt{6}\left(1-\sqrt{2}\right)$
(3)	$\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)$
(4)	$\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)$

10. Намерете стойността на израза

$$A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$

ТЕСТ № 2 ВЪРХУ ТЕМАТА „КВАДРАТЕН КОРЕН“

1. Всички стойности на a, за които $\sqrt{a^2} = -a$, са:

А) $a > 0$;

Б) $a \geq 0$;

В) $a < 0$;

Г) $a \leq 0$.

2. Допустимите стойности на x в израза $\sqrt{2-3x}$ са:

А) $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

Б) $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$;

В) $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$;

Г) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

3. $\sqrt{8.32.(-3)^2}$ е равен на:

А) 16;

Б) –48;

В) 48;

Г) 64.

4. Ако пресметнем $\sqrt{\frac{867.75}{12.3}}$, ще получим:

А) $\frac{17}{9}$;

Б) 32,5;

В) 42,5;

Г) 85.

5. От дадените числа най-голямото е:

А) $2\sqrt{7}$;

Б) $3\sqrt{2}$;

В) $\sqrt{29}$;

Г) $3\sqrt{3}$.

6. Ако извършим действията

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}-1},$$

ще получим:

А) $\sqrt{5}+1$;

Б) $\sqrt{5}+2\sqrt{3}-1$;

В) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$;

Г) $\sqrt{5}-1$.

7. **Не** е вярно, че:

А) $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$;

Б) $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$;

В) $2\sqrt{7} < 3\sqrt{6}$;

Г) $7\sqrt{2} > 6\sqrt{3}$.

8. Пресметнете:

а) $\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-2\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$;

б) $\sqrt{11-\sqrt{57}}.\sqrt{11+\sqrt{57}}+\left(2\sqrt{2}\right)^2$.

9. В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на числовия израз. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на числовия израз със същата стойност.

(А)	$\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4\left(\sqrt{3}-2\right)$
(Б)	$\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{10}-2\right)$
(В)	$2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{2}.\sqrt{6}$

(1)	$\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$
(2)	$\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$
(3)	$\left(\sqrt{10}+2\right)\left(\sqrt{10}-2\right)$
(4)	$\left(\sqrt{17}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{17}-\sqrt{2}\right)$

10. Пресметнете

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}+3-\sqrt{5}.$$

ТЕМА 5

КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ
(Урок № 40 – Урок № 51)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- квадратни уравнения;
- биквадратни уравнения;
- уравнения от по-висока степен, свеждащи се до квадратни;
- формули на Виет.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да решават квадратни уравнения по формулата за намиране на корените им;
- да разлагат на множители квадратен тричлен;
- да прилагат формулите на Виет;
- да моделират уравнения, свеждащи се до квадратни.

40. КВАДРАТНО УРАВНЕНИЕ. НЕПЪЛНИ КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

Определения

ЗАДАЧА 1 Разликата на две числа е 6, а произведението им е 16. Намерете числата.

Решение:

Означаваме по-малкото от двете числа с x. Тогава другото число е $x+6$.

Уравнението е $x(x+6)=16$, т.е.

(1) $x^2+6x-16=0$.

Решаваме уравнението, като разлагаме лявата страна на множители.

I начин:

$$x^2+6x-16=0$$
$$x^2+8x-2x-16=0$$
$$x(x+8)-2(x+8)=0$$
$$(x-2)(x+8)=0$$

II начин:

$$x^2+6x-16=0$$
$$x^2+6x+9-25=0$$
$$(x+3)^2-5^2=0$$
$$(x+3-5)(x+3+5)=0$$
$$(x-2)(x+8)=0$$

(2) $(x-2)(x+8)=0$

$x-2=0$ или $x+8=0$

$x_1=2$ $\qquad$ $x_2=-8$

Уравнението има две решения. Тогава и задачата има две решения.

Търсените две числа са 2 и $2+6=8$ или -8 и $-8+6=-2$, т.е.

2 и 8 или -8 и -2.

В уравнението (1) най-високата степен на неизвестното x е втора.

О Уравнение от вида $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, където x е неизвестно число, а $a\neq 0$, b, c са дадени числа, се нарича **уравнение от втора степен с едно неизвестно или квадратно уравнение.**

Примери:

1. $3x^2-4x+8=0$ $(a=3,\ b=-4,\ c=8)$,

2. $x^2+5x-3=0$ $(a=1,\ b=5,\ c=-3)$,

3. $-x^2+x-\frac{1}{2}=0$ $\left(a=-1,\ b=1,\ c=-\frac{1}{2}\right)$,

4. $x^2-4x=0$ $(a=1,\ b=-4,\ c=0)$,

5. $2x^2-9=0$ $(a=2,\ b=0,\ c=-9)$,

6. $3x^2=0$ $(a=3,\ b=0,\ c=0)$.

Уравнения, които след тъждествени преобразувания приемат вида $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, също се наричат квадратни уравнения.

Пример: $3(x-2)^2+(2x+1)(x+1)=2 \Leftrightarrow 5x^2-9x+11=0$.

! **Да решим едно квадратно уравнение** означава да намерим корените му или да установим, че няма корени.

Уравнения от вида (**4**), (**5**) и (**6**), в които поне един от коефициентите b и c е равен на нула, се наричат **непълни квадратни уравнения.**

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

а) $2x^2-5x=0$; б) $x^2-2=0$; в) $x^2+7=0$; г) $3x^2=0$.

Решение:

а) $2x^2-5x=0$

$x(2x-5)=0$

$x_1=0;\ x_2=2,5$

б) $x^2-2=0$

$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0$

$x_1=\sqrt{2};\ x_2=-\sqrt{2}$

в) $x^2+7=0$

$x^2+7>0$

за всяко x

Уравнението няма корен.

г) $3x^2=0$

$x^2=0$

$x_1=x_2=0$

Уравненията в *Задача 2* са непълни квадратни уравнения, които в общия случай се решават както следва:

<table>
<tr><th>$ax^2+bx=0,\ a\neq 0$</th><th colspan="2">$ax^2+c=0,\ a\neq 0$</th><th>$ax^2=0,\ a\neq 0$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$x(ax+b)=0$
$x=0$ или
$ax+b=0$
$x_1=0;\ \ x_2=-\dfrac{b}{a}$

Уравнението има два корена, единият от които е 0.</td><td colspan="2">$x^2+\dfrac{c}{a}=0$</td><td rowspan="3">$x^2=0$
$x.x=0$
$x_1=0;\ x_2=0$
Уравнението има два корена, равни на 0. Казваме, че то има **двоен корен**, равен на 0.</td></tr>
<tr><td>при $\dfrac{c}{a}<0$</td><td>при $\dfrac{c}{a}>0$</td></tr>
<tr><td>$x^2-\left(-\dfrac{c}{a}\right)=0$
$x^2-\left(\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right)^2=0$
$\left(x-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right)\left(x+\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right)=0$
$x_1=\sqrt{-\dfrac{c}{a}};\ \ x_2=-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$
Уравнението има два корена, които са противоположни числа.</td><td>$x^2+\dfrac{c}{a}>0$
за всяко x.

Уравнението няма корен.</td></tr>
</table>

ЗАДАЧА 3 Решете уравнението $4(x-3)^2-3(x+4)(x+2)=12$.

Решение: $4(x-3)^2-3(x+4)(x+2)=12$

$4\left(x^2-6x+9\right)-3\left(x^2+6x+8\right)-12=0$

$4x^2-24x+36-3x^2-18x-24-12=0$

$x^2-42x=0$

$x(x-42)=0 \qquad x_1=0;\ x_2=42$

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $x^2-8x=0$.

2 $x^2+7x=0$.

3 $3x^2-5x=0$.

4 $2x^2+5x=0$.

5 $x^2-16=0$.

6 $4x^2-9=0$.

7 $9x^2-7=0$.

8 $3x^2-4=0$.

9 $5x^2-7=0$.

10 $x^2+3=0$.

11 $3x^2+5=0$.

12 $2x^2=0$.

13 $\dfrac{x+10}{2}-\dfrac{x(x-2)}{3}=5$.

14 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=x^2$.

15 $(x+2)(x-3)-(x-1)^2=x(x+1)$.

16 $(3x+2)^2-(x+1)(x-1)=12(x+2)$.

17 $(3x-2)(x+5)-2(x-1)(2-x)+6=0$.

41. ФОРМУЛА ЗА КОРЕНИТЕ НА КВАДРАТНОТО УРАВНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Решете уравнението $3x^2+4x-4=0$.

Решение: $3x^2+4x-4=0$

1. Разделяме с коефициента пред x^2:

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=0.$$

2. Отделяме точен квадрат:

$$x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=0.$$

3. Разлагаме лявата страна на множители:

$$\left(x+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)=0.$$

$x-\frac{2}{3}=0$ или $x+2=0$

$x_1=\frac{2}{3}$ $\quad$ $x_2=-2.$

Ще използваме метода за решаване на *Задача 1*, за да изведем формула за корените на квадратното уравнение.

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$$

Разделяме с коефициента пред x^2: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$

Отделяме точен квадрат: $x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$

(1) $\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$

Решаването на това уравнение зависи от стойността на израза b^2-4ac. Изразът се нарича **дискриминанта** на квадратното уравнение и се означава с D.

$$D=b^2-4ac$$

Да потърсим алгоритъм за намиране на корените на квадратното уравнение при произволни стойности на $a\neq 0$, b и c. Възможни са три случая:

I случай: $D=b^2-4ac>0$

Уравнението (1) може да се запише във вида $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=0.$

Разлагаме лявата страна на множители: $\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0$

$$\left(x+\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right)=0.$$

$x+\frac{b-\sqrt{D}}{2a}=0$ или $x+\frac{b+\sqrt{D}}{2a}=0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Получените два корена могат да се запишат така:

(2) $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

Записът (2) се нарича **формула за корените на квадратното уравнение.**

II случай: $D = b^2 - 4ac = 0$

Уравнението (1) може да се запише във вида $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ и следователно има два равни корена, т.е. един двоен корен $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Полученият резултат следва и от формулата (2) при $b^2 - 4ac = 0$.

III случай: $D = b^2 - 4ac < 0$

Уравнението (1) може да се запише във вида $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}\right)^2 = 0$.

Лявата страна на това уравнение е положителна за всяко x и следователно уравнението няма корен.

Полученият резултат следва и от формулата (2), тъй като $\sqrt{b^2-4ac}$ няма смисъл при $b^2 - 4ac < 0$.

Формулата (2) за корените на квадратното уравнение може да се използва и за непълните квадратни уравнения, но тяхното решаване е по-рационално чрез подходите, дадени в таблицата след *Задача 2* в урок 40.

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; б) $-4x^2 + 12x - 9 = 0$; в) $8x^2 - 5x + 7 = 0$.

Решение:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = (-5)^2 - 4.2.(-3) =$

$= 25 + 24 = 49$

$x_{1,2} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2.2}$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 7}{4}$

$x_1 = 3$; $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

б) $-4x^2 + 12x - 9 = 0$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$D = (-12)^2 - 4.4.9 =$

$= 144 - 144 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2.4}$

$x_{1,2} = \dfrac{12}{8}$; $x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$

в) $8x^2 2 - 5x + 7 = 0$

$D = (-5)^2 - 4.8.7 =$

$= 25 - 224 < 0$

Уравнението няма реални корени.

Във формулата за корените на квадратното уравнение знаменателят е 2*a*. Тъй като обикновено за знаменатели на дробите използваме положителни числа, удобно е коефициентът *a* да е положително число. Затова, ако *a*<0 (*Задача 2-б)*), предварително умножаваме двете страни на уравнението с (−1) .

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $x^2 - 2x - 15 = 0$.
2 $x^2 + 4x - 5 = 0$.
3 $x^2 + 3x - 10 = 0$.
4 $x^2 - 2x - 63 = 0$.
5 $x^2 - 14x + 13 = 0$.
6 $4x^2 - 4x + 5 = 0$.
7 $x^2 - 4x - 1 = 0$.
8 $4x^2 + 12x + 9 = 0$.
9 $3x^2 + 11x - 4 = 0$.
10 $5x^2 - 13x - 6 = 0$.
11 $3x^2 - 20x - 7 = 0$.
12 $4x^2 + 21x - 18 = 0$.
13 $9x^2 - 30x + 26 = 0$.
14 $9x^2 - 30x + 25 = 0$.
15 $3x^2 + 11x + 10 = 0$.
16 $6x^2 + x - 2 = 0$.
17 $-2x^2 + x + 3 = 0$.
18 $-5x^2 + 18x + 8 = 0$.

42. СЪКРАТЕНА ФОРМУЛА ЗА КОРЕНИТЕ НА КВАДРАТНОТО УРАВНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Решете уравненията:

а) $(2x+1)^2-(x-3)(x+4)=19$;

б) $(x+1)(x^2-x+1)-(x+2)^3+25=0$.

Решение:

а) $(2x+1)^2-(x-3)(x+4)=19$

$4x^2+4x+1-(x^2+4x-3x-12)=19$

$4x^2+4x+1-x^2-x+12=19$

$3x^2+3x-6=0 \quad |:3$

$x^2+x-2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2.1}$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{-1\pm3}{2}$

$x_1=\dfrac{-1+3}{2}$; $\quad x_2=\dfrac{-1-3}{2}$

$x_1=1$; $\quad x_2=-2$

б) $(x+1)(x^2-x+1)-(x+2)^3+25=0$

$x^3+1-(x^3+6x^2+12x+8)+25=0$

$\cancel{x^3}+1-\cancel{x^3}-6x^2-12x-8+25=0$

$-6x^2-12x+18=0 \quad |:(-6)$

$x^2+2x-3=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2.1}$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\dfrac{-2\pm4}{2}$

$x_1=\dfrac{-2+4}{2}$; $\quad x_2=\dfrac{-2-4}{2}$

$x_1=1$; $\quad x_2=-3$

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

а) $x^2-4x+2=0$;

б) $3x^2+2x-2=0$.

Решение:

а) $x^2-4x+2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}$

$x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{4\pm2\sqrt{2}}{2}$

$x_{1,2}=\dfrac{\cancel{2}(2\pm\sqrt{2})}{\cancel{2}}=2\pm\sqrt{2}$

$x_1=2+\sqrt{2}$; $\quad x_2=2-\sqrt{2}$

б) $3x^2+2x-2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+24}}{2.3}$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{28}}{6}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{7}}{6}$

$x_{1,2}=\dfrac{2(-1\pm\sqrt{7})}{6}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$; $\quad x_2=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$

ЗАДАЧА 3 Решете уравнението $\dfrac{(y+2)^2}{5}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3y-2}{5}=5,1$.

Решение:

$\dfrac{(y+2)^2}{5}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3y-2}{5}=\dfrac{51}{10}$

$2(y+2)^2+5y-2(3y-2)=51$

. . . .

$2y^2+7y-39=0$

$y_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+8.39}}{4}=\dfrac{-7\pm19}{4}$

$y_1=3$; $\quad y_2=-\dfrac{13}{2}=-6\dfrac{1}{2}$

Съкратена формула за корените на квадратното уравнение

При решаване на *Задача 2* числителя и знаменателя в израза за x_1 и x_2 съкратихме на 2, защото коефициентът b пред x е четно число.

Ако в квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$ b е четно число, формулата за корените може да се опрости.

Ако $b=2k$, където k е цяло число, то

$$ax^2+2kx+c=0 \quad \left(k=\frac{b}{2}\right)$$

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Формулата $x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$ се нарича **съкратена формула за решаване на квадратно уравнение** и е удобно да се използва, когато коефициентът b пред x е четно число.

Изразът k^2-ac също се нарича дискриминанта.

ЗАДАЧА 4 Решете уравненията:

а) $3x^2-2x-33=0$; б) $x^2+4x-16=0$; в) $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

Решение:

а) $3x^2-2x-33=0$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+3.33}}{3}$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm10}{3}$

$x_1=\dfrac{11}{3}$

$x_2=-3$

б) $x^2+4x-16=0$

$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+16}$

$x_{1,2}=-2\pm2\sqrt{5}$

$x_1=-2+2\sqrt{5}$

$x_2=-2-2\sqrt{5}$

в) $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

$x_{1,2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{3-1}$

$x_{1,2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$

$x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$x_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $15x^2-2x-1=0$.

2 $8x^2-10x-3=0$.

3 $16x^2-8x+3=0$.

4 $9x^2-6x-2=0$.

5 $8x^2-2x-3=0$.

6 $21x^2+17x+2=0$.

7 $15x^2-29x-14=0$.

8 $12x^2-13x-4=0$.

9 $x^2-8x+15=0$.

10 $3x^2-4x+1=0$.

11 $5x^2+6x+1=0$.

12 $2x^2-3x+1=0$.

13 $5x^2-2x-3=0$.

14 $9x^2-2x-7=0$.

15 $2x^2+5x-7=0$.

16 $5x^2-8x+3=0$.

17 $x^2-2x+6=0$.

18 $6x^2+x-1=0$.

19 $(x-1)^2-(2x+1)(2x-1)+3=0$.

20 $(x+1)(x-2)+(x+2)^2=4$.

21 $(2x-1)(x+3)-(x+1)^2=6$.

22 $(x+1)^3-(x-2)^3+x=66$.

23 $(2x-5)(x+3)+(x+1)(x-1)=8$.

24 $(x+3)^3-x(x+1)^2=5x+13$.

25 $\dfrac{13x-4}{5}+\dfrac{18-4x}{-3}=x+2$.

26 $\dfrac{0,5x-3}{0,8}-\dfrac{1,5x-3}{0,4}=5$.

43. РАЗЛАГАНЕ НА КВАДРАТНИЯ ТРИЧЛЕН НА МНОЖИТЕЛИ

О Многочлен от вида $ax^2 + bx + c$, в който $a \neq 0$, се нарича **квадратен тричлен**.
Примери: $x^2 - 5x + 7$; $9x^2 + 7x$, $x^2 - 4$.

Многочлените $9x^2 + 7x$, $x^2 - 4$ също се наричат квадратни тричлени, въпреки че не съдържат три събираеми.

При решаване на квадратното уравнение

(1) $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$

за квадратния тричлен $ax^2 + bx + c$ намерихме представянето

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{(2a)^2}\right),$$

където $D = b^2 - 4ac$ се нарича дискриминанта и на квадратния тричлен.

1. При $\boldsymbol{D \geq 0}$ получаваме

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

където $x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$ са корените на квадратното уравнение (1).

2. При $\boldsymbol{D = 0}$ $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ и $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_1)^2$.

3. При $\boldsymbol{D < 0}$ получаваме

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{-D}{(2a)^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-D}}{2a}\right)^2\right).$$

Изразът в скобите е сбор от квадрати, т.е. винаги е положителен и не може да се напише като произведение от линейни множители.

! Квадратният тричлен $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$,

- когато $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac > 0}$ и x_1 и x_2 са корени на уравнението $ax^2 + bx + c$, се разлага по формулата $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- когато $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac = 0}$ и $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ е двойният корен на уравнението $ax^2 + bx + c$, се разлага по формулата $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;
- когато $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac < 0}$, не е разложим.

ЗАДАЧА 1 Решете уравненията:

а) $A = 3x^2 - 13x + 4$; б) $B = -8x^2 + 24x - 18$; в) $C = x^2 + 4x + 11$.

Решение:

а) $A = 3x^2 - 13x + 4$

$3x^2 - 13x + 4 = 0$

$D = 169 - 48 = 121 = 11^2$

$x_1 = \dfrac{13+11}{6} = 4$

$x_2 = \dfrac{13-11}{6} = \dfrac{1}{3}$

$A = 3(x-4)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

$A = (x-4)(3x-1)$.

б) $B = -8x^2 + 24x - 18$

$-8x^2 + 24x - 18 = 0 / : (-2)$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$D = 12^2 - 144 = 0$

$x_1 = x_2 = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

$B = -8\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$

$B = -2(2x-3)^2$.

в) $C = x^2 + 4x + 11$

$x^2 + 4x + 11 = 0$

$D = 4^2 - 44 < 0$

Квадратният тричлен е неразложим.

ЗАДАЧА 2 Съкратете дробите:

а) $A = \dfrac{4x^2 - 9}{6x^2 + x - 15}$; б) $B = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12}$.

Решение:

а) $A = \dfrac{4x^2 - 9}{6x^2 + x - 15}$

$4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$

$6x^2 + x - 15 = 6\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{5}{3}\right) = (2x-3)(3x+5)$

$A = \dfrac{(2x+3)(2x-3)}{(2x-3)(3x+5)} = \dfrac{2x+3}{3x+5},\ x \neq \dfrac{3}{2},\ x \neq -\dfrac{5}{3}$.

б) $B = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12}$

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$

$B = \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+4)(x-3)} = \dfrac{x+2}{x+4}$

$x \neq 3,\quad x \neq -4$

ЗАДАЧИ

Разложете на множители квадратните тричлени:

1 $3x^2 + 2x$.

2 $-5x^2 + 3x$.

3 $x^2 - 9$.

4 $16 - 7x^2$.

5 $9x^2 + 5$.

6 $x^2 + 4x - 12$.

7 $x^2 - 4x - 21$.

8 $2x^2 - 7x + 3$.

9 $2x^2 + 3x - 9$.

10 $x^2 + 2x + 1$.

11 $4x^2 + 4x + 1$.

12 $x^2 + 5x - 24$.

13 $3x^2 + 7x - 20$.

14 $2x^2 + 7x - 15$.

15 $5x^2 - 2x - 7$.

16 $2x^2 + 5x - 3$.

17 $4x^2 - 7x - 15$.

18 $2 - x - 3x^2$.

19 $6 + 11x - 10x^2$.

20 $3x^2 + 4\sqrt{2}x + 2$.

21 $6 - 2\sqrt{2}x - x^2$.

22 $4x^2 - 12x + 10$.

23 $9x^2 - 6x + 4$.

24 $5 - 13x - 6x^2$.

Съкратете дробите:

25 $\dfrac{2x^2 - x - 15}{x^2 - 9}$.

26 $\dfrac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x - 3}$.

27 $\dfrac{2x^2 - 3x - 14}{x^2 + x - 2}$.

44. БИКВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

ЗАДАЧА 1 Решете уравнението $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение:

Даденото уравнение е от четвърта степен. Ако положим $x^2 = y$, то добива вида $y^2 - 13y + 36 = 0$.

Получихме квадратно уравнение относно y. То има корени $y_1 = 4$ и $y_2 = 9$ при:

- $x^2 = 4$ получаваме $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$;
- $x^2 = 9$ получаваме $x^2 - 9 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$.

Даденото уравнение има четири корена: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$.

Методът, с който решихме *Задача 1*, се нарича **метод на полагане**.
Уравнението в *Задача 1* е от вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$, което се нарича **биквадратно уравнение**.

О Уравнение от вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$, където x е неизвестно число и a, b и c са дадени числа, се нарича **биквадратно уравнение**.

Примери:

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $(a = 1, b = -5, c = 4)$

2. $3x^4 - 7x^2 + 3 = 0$ $(a = 3, b = -7, c = 3)$

3. $-x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ $(a = -1, b = -5, c = 6)$

4. $x^4 - 9x^2 = 0$ $(a = 1, b = -9, c = 0)$

5. $x^4 - 25 = 0$ $(a = 1, b = 0, c = -25)$

6. $5x^4 = 0$ $(a = 5, b = 0, c = 0)$

Уравнения, които след тъждествени преобразувания приемат вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$, също се наричат биквадратни уравнения.

Пример: $(2x^2 - 1)^2 - (x^2 + 3)(x^2 - 3) = 5 + (x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Да решим едно биквадратно уравнение означава да намерим корените му или да установим, че няма корени.
Уравнения от вида (**4.**), (**5.**) и (**6.**), в които поне един от коефициентите b и c е равен на нула, се наричат **непълни биквадратни уравнения**.

ЗАДАЧА 2 Решете биквадратните уравнения:

а) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$; б) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$.

Решение:

а) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

$x^2 = y$

$y^2 - 26y + 25 = 0$

$y_1 = 1$ $\quad y_2 = 25$

$x^2 = 1$ $\quad x^2 = 25$

$x_{1,2} = \pm 1$ $\quad x_{3,4} = \pm 5$

Уравнението има корени
$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$ и $x_4 = -5$.

б) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

$x^2 = y$

$y^2 - 8y + 15 = 0$

$y_1 = 3$ $\quad y_2 = 5$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ $\quad x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$

Уравнението има корени
$x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{5}$ и $x_4 = -\sqrt{5}$.

ЗАДАЧА 3 Решете биквадратните уравнения:

а) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; б) $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$.

Решение:

а) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = y$

$y^2 - 3y - 4 = 0$

$y_1 = 4, \quad y_2 = -1$

$x^2 = 4, \quad x^2 = -1$

$x_{1,2} = \pm 2$ няма корени

Уравнението има корени

$x_1 = 2, \quad x_2 = -2$.

б) $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$

$x^2 = y$

$y_2 + 8y + 15 = 0$

$y_1 = -5, \quad y_2 = -3$

$x^2 = -5, \quad x^2 = -3$

няма корени няма корени

Уравнението няма корени.

> **!** Биквадратното уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$, се решава чрез въвеждане на помощното неизвестно $y = x^2$.

Когато се въвежда помощно неизвестно, се казва, че уравнението се решава **чрез полагане** или *чрез субституция*.

ЗАДАЧА 4 Решете уравненията:

а) $9x^4 - 4x^2 = 0$; б) $x^4 - 16 = 0$.

Решение:

а) $9x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2 = y$

$9y^2 - 4y = 0$

$y(9y - 4) = 0$

$y_1 = 0 \qquad y_2 = \frac{4}{9}$

$x^2 = 0 \qquad x^2 = \frac{4}{9}$

$x_{1,2} = 0 \qquad x_{3,4} = \pm\frac{2}{3}$

Уравнението има корени

$x_{1,2} = 0$, $x_3 = \frac{2}{3}$ и $x_4 = -\frac{2}{3}$.

б) $x^4 - 16 = 0$

$x^2 = y$

$y^2 - 16 = 0$

$(y - 4)(y + 4) = 0$

$y_1 = 4 \qquad y_2 = -4$

$x^2 = 4 \qquad x^2 = -4$

$x_{1,2} = \pm 2$ няма корени

Уравнението има корени

$x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

ЗАДАЧА 5 Решете уравнението $(x^2 - 3)^2 - (x + 2)(x - 2) = 1$.

Решение:

$(x^2 - 3)^2 - (x + 2)(x - 2) = 1$

$x^4 - 6x^2 + 9 - x^2 + 4 = 1$

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

$x^2 = y$

$y^2 - 7y + 12 = 0$

$y_1 = 3 \qquad y_2 = 4$

$x^2 = 3 \qquad x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \qquad x_{3,4} = \pm 2$

Уравнението има корени

$x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = 2$ и $x_4 = -2$.

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

2 $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

3 $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$.

4 $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

5 $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

6 $5x^4 - x^2 - 4 = 0$.

7 $x^4 + 3x^2 + 7 = 0$.

8 $x^4 + 8x^2 + 7 = 0$.

9 $4x^4 - 25x^2 = 0$.

10 $4x^4 - 9 = 0$.

11 $(x^2 - 4)^2 = 7 - (x + 3)(3 - x)$.

12 $(x^2 - 3)(x^2 + 1) = 4(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

45. УРАВНЕНИЯ ОТ ПО-ВИСОКА СТЕПЕН, СВЕЖДАЩИ СЕ ДО КВАДРАТНИ

ЗАДАЧА 1 Решете уравнението $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Решение:

Даденото уравнение е от трета степен и за да го решим, разлагаме лявата му страна на множители:

$x^2(x + 2) - (x + 2) = 0,$

$(x + 2)(x^2 - 1) = 0.$

Корени на уравнението са числата, които анулират множителя $(x + 2)$, и числата, които анулират множителя $(x^2 - 1)$. Решаването на даденото уравнение се свежда до решаване на двете уравнения

$x + 2 = 0$ или $x^2 - 1 = 0$.

Първото уравнение има един корен – числото –2.

Второто уравнение има два корена – числата 1 и –1.

Получихме, че даденото уравнение има три корена:

$x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = -1.$

ЗАДАЧА 2 Решете уравнението $(x^2 + 4)^2 - 25x^2 = 0$.

Решение:

Даденото уравнение е от четвърта степен. За да го решим, разлагаме лявата му страна на множители:

$(x^2 + 4)^2 - 25x^2 = 0,$

$(x^2 + 4 + 5x)(x^2 + 4 - 5x) = 0.$

Решаването на даденото уравнение се свежда до решаване на двете квадратни уравнения

$x^2 + 5x + 4 = 0$ или $x^2 - 5x + 4 = 0$.

. . . .

$x_1 = -1,\quad x_2 = -4 \qquad x_3 = 1,\quad x_4 = 4$

Получихме, че даденото уравнение има четири корена

$x_1 = -1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$ и $x_4 = 4$.

ЗАДАЧА 3 Решете уравненията:

а) $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$;   б) $x^3 - 8 = 0$

Решение:

а) $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$

$x(x^2 + 3x - 4) = 0$

$x = 0$ или $x^2 + 3x - 4 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$ и $x_3 = -4$

Уравнението има корени

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -4$.

б) $x^3 - 8 = 0$

$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$x - 2 = 0$ или $x^2 + 2x + 4 = 0$

$D < 0$

$x_1 = 2 \qquad$ няма корени

Уравнението има корен $x_1 = 2$.

Методът, с който решихме *Задачи 1*, *2* и *3* се нарича **метод на разлагане**.

ЗАДАЧА 4 Решете уравнението $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$.

Решение:

$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$

Полагаме $x^2+x=y$.

$y^2-18y+72=0$

$y_1=6$	$y_2=12$
$x^2+x=6$	$x^2+x=12$
$x^2+x-6=0$	$x^2+x-12=0$
$x_1=2, x_2=-3$	$x_3=3, x_4=-4$

Уравнението има корени

$x_1=2,\ \ x_2=-3,\ \ x_3=3$ и $x_4=-4$.

ЗАДАЧА 5 Решете уравнението $(x^2-6x+4)^2+5(x^2-6x+4)+4=0$.

Решение:

$(x^2-6x+4)^2+5(x^2-6x+4)+4=0$

Полагаме $x^2+6x+4=y$.

$y^2+5y+4=0$

$y_1=-1$	$y_2=-4$
$x^2-6x+4=-1$	$x^2-6x+4=-4$
$x^2-6x+5=0$	$x^2-6x+8=0$
$x_1=1, x_2=5$	$x_3=2, x_4=4$

Уравнението има корени

$x_1=1,\ \ x_2=5,\ \ x_3=2$ и $x_4=4$.

Ако едно уравнение е от трета или по-висока степен, можем да го решим само в някои специални случаи. Решаването е възможно, ако:

- можем да разложим съответния многочлен на линейни и квадратни множители (*Задачи 1, 2* и *3*);
- неизвестното x участва в уравнението чрез един и същи израз, след заместването на който с ново неизвестно уравнението се свежда до уравнение, което можем да решим (*Задачи 4* и *5*).

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $x^3-1=0$.

2 $x^3+27=0$.

3 $x^3+x^2-12x=0$.

4 $4x^3-4x^2+x=0$.

5 $x^3+6x^2+10x=0$.

6 $x^3+x^2-x-1=0$.

7 $x^3+x^2-9x-9=0$.

8 $x^3+2x^2+x+2=0$.

9 $x^4-81=0$.

10 $x^4-25x^2=0$.

11 $x^4-10x^2+9=0$.

12 $x^4-9x^2+20=0$.

13 $x^4+8x^2-153=0$.

14 $2x^4+11x^2+5=0$.

15 $x^6-7x^3-8=0$.

16 $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0$.

46. УРАВНЕНИЯ ОТ ПО-ВИСОКА СТЕПЕН, СВЕЖДАЩИ СЕ ДО КВАДРАТНИ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Решете чрез разлагане уравненията:

а) $(x^2 + 4x)^2 = 5(x^2 + 4x)$;

б) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 6(x^2 + 3x + 2)$.

Решение:

а) $(x^2 + 4x)^2 = 5(x^2 + 4x)$

$(x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 5) = 0$

$x^2 + 4x = 0$ или $x^2 + 4x - 5 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -4$ $\quad x_3 = 1, x_4 = -5$

Корените на даденото уравнение са $x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 1$ и $x_4 = -5$.

б) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 6(x^2 + 3x + 2)$

$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 4) = 0$

$x^2 + 3x + 2 = 0$ или $x^2 + 3x - 4 = 0$

$x_1 = -1, x_2 = -2$ $\quad x_3 = 1, x_4 = -4$

Корените на даденото уравнение са $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 1$ и $x_4 = -4$.

ЗАДАЧА 2 Решете чрез разлагане уравненията:

а) $(x^2 + 5x)^2 - (x^2 + 5x)(x - 3) = 0$;

б) $(x^2 + 7)^2 - 64x^2 = 0$.

Решение:

а) $(x^2 + 5x)^2 - (x^2 + 5x)(x - 3) = 0$

$(x^2 + 5x)(x^2 + 4x + 3) = 0$

$x^2 + 5x = 0$ или $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -5$ $\quad x_3 = -1, x_4 = -3$

Корените на даденото уравнение са $x_1 = 0, x_2 = -5, x_3 = -1$ и $x_4 = -3$.

б) $(x^2 + 7)^2 - 64x^2 = 0$

$(x^2 + 8x + 7)(x^2 - 8x + 7) = 0$

$x^2 + 8x + 7 = 0$ или $x^2 - 8x + 7 = 0$

$x_1 = -1, x_2 = -7$ $\quad x_3 = 1, x_4 = 7$

Корените на даденото уравнение са $x_1 = -1, x_2 = -7, x_3 = 1$ и $x_4 = 7$.

ЗАДАЧА 3 Решете чрез разлагане уравненията:

а) $x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 25 = 0$;

б) $x^6 - 64 = 0$.

Решение:

а) $x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 25 = 0$

$(x^2 - 6x)^2 - 5^2 = 0$

$(x^2 - 6x)^2 - 5^2 = 0$

$(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x - 5) = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$ или $x^2 - 6x - 5 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = 5$ $\quad x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{14}$

Корените на даденото уравнение са $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 3 + \sqrt{14}$ и $x_4 = 3 - \sqrt{14}$.

б) $x^6 - 64 = 0$

$(x^3)^2 - 8^2 = 0$

$(x^3 + 8)(x^3 - 8) = 0$

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$x + 2 = 0, x_1 = -2$

$x^2 - 2x + 4 = 0$, няма реални корени

$x - 2 = 0, x_2 = 2$

$x^2 + 2x + 4 = 0$, няма реални корени

Корените на даденото уравнение са $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

ЗАДАЧА 4 Решете чрез подходящо полагане уравненията:

а) $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=0$;

б) $(x^2+4x+2)^2-6(x^2+4x+2)-7=0$.

Решение:

а) $(x^2+x)-14(x^2+x)+24=0$

Полагаме $x^2+x=y$.

$y^2-14y+24=0$

$y_1=2,\ y_2=12$

$x^2+x=2$	$x^2+x=12$
$x^2+x-2=0$	$x^2+x-12=0$
$x_1=1,\ x_2=-2$	$x_3=3,\ x_4=-4$

Корените на даденото уравнение са $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=3$ и $x_4=-4$.

б) $(x^2+4x+2)^2-6(x^2+4x+2)-7=0$

Полагаме $x^2+4x+2=y$.

$y^2-6y-7=0$

$y_1=7,\ y_2=-1$

$x^2+4x+2=7$	$x^2+4x+2=-1$
$x^2+4x-5=0$	$x^2+4x+3=0$
$x_1=1,\ x_2=-5$	$x_3=-1,\ x_4=-3$

Корените на даденото уравнение са $x_1=1,\ x_2=-5,\ x_3=-1$ и $x_4=-3$.

ЗАДАЧА 5 Решете уравненията:

а) $(x^2-3x+1)(x^2-3x-3)=5$;

б) $(x^2-6x+4)^2+5(x-4)(x-2)=16$.

Решение:

а) $(x^2-3x+1)(x^2-3x-3)=5$

$(x^2-3x+1)(x^2-3x-3)=5$

Полагаме $x^2-3x=y$.

$(y+1)(y-3)=5$

$y^2-2y-8=0$

$y_1=4,\ y_2=-2$

$x^2-3x=4$	$x^2-3x=-2$
$x^2-3x-4=0$	$x^2-3x+2=0$
$x_1=-1,\ x_2=4$	$x_3=1,\ x_4=2$

Корените на даденото уравнение са $x_1=-1,\ x_2=4,\ x_3=1$ и $x_4=2$.

б) $(x^2-6x+4)^2+5(x-4)(x-2)=16$

$(x^2-6x+4)^2+5(x^2-6x+8)=16$

Полагаме $x^2-6x+4=y$.

$y^2+5(y+4)=16$

$y^2+5y+4=0$

$y_1=-1,\ y_2=-4$

$x^2-6x+4=-1$	$x^2-6x+4=-4$
$x^2-6x+5=0$	$x^2-6x+8=6$
$x_1=1,\ x_2=5$	$x_3=2,\ x_4=4$

Корените на даденото уравнение са $x_1=1,\ x_2=5,\ x_3=2$ и $x_4=4$.

ЗАДАЧИ

Решете чрез разлагане уравненията:

1 $(x^2-5x)^2=6(x^2-5x)$.

2 $(3x^2+7x)^2=10(3x^2+7x)$.

3 $(x^2-7)^2=6x(x^2-7)$.

4 $(x^2-9)^2=8x(x^2-9)$.

5 $(x^2+6x+5)^2=12(x^2+6x+5)$.

6 $(x^2+4x+3)^2=8x(x^2+4x+3)$.

7 $(x^2+3)^2=16x^2$.

8 $(x^2+4x+3)^2=(x^2+4x+3)(7x+1)$.

Решете чрез полагане уравненията:

9 $(x^2-3x+1)^2-4(x^2-3x+1)=5$.

10 $(2x^2+3x+2)^2-8(2x^2+3x+2)+7=0$.

11 $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$.

12 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=-15$.

13 $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24=0$.

47. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ КОРЕНИТЕ И КОЕФИЦИЕНТИТЕ НА КВАДРАТНОТО УРАВНЕНИЕ. ФОРМУЛИ НА ВИЕТ

Общият вид на квадратното уравнение е $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Корените на квадратното уравнение $6x^2 - 5x + 1 = 0$ са $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{1}{3}$.

Ако запишем уравнението във вида $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$, можем да проверим, че

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = -\frac{b}{a}; \quad x_1x_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{c}{a}.$$

Т

Теорема на Виет. Ако квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ има корени x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Доказателство:

При $D = b^2 - 4ac \geq 0$ корените на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, са

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

От тях следва, че

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = 2\cdot\frac{-b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Доказаните равенства се наричат **формули на Виет** в чест на френския математик Франсоа Виет (1540 – 1603), който ги е установил.

ЗАДАЧА 1 Проверете, че уравнението $2x^2 - 3x + 1 = 0$ има реални корени и пресметнете:

а) $x_1 + x_2 + x_1x_2$, б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$.

Решение:

$D = (-3)^2 - 4 . 2 . 1 = 1 > 0 \Rightarrow$ уравнението има реални корени.

От теоремата на Виет следва, че $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ и $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

а) $x_1 + x_2 + x_1x_2 =$
$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) =$
$= \frac{3}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

!

За квадратното уравнение $x^2 + px + q = 0$, ако има корени, формулите на Виет са $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

ЗАДАЧА 2 Проверете, че уравнението $x^2 - 3\sqrt{5}x - 1 = 0$ има реални корени и пресметнете:

а) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$.

Решение:

$D = (-3\sqrt{5})^2 - 4\,.\,1\,.\,(-1) = 45 + 4 = 49 > 0 \Rightarrow$ уравнението има реални корени.

От Теоремата на Виет $x_1 + x_2 = -p = 3\sqrt{5}$ и $x_1x_2 = q = -1$:

а) $\dfrac{2}{x_1} + \dfrac{2}{x_2} = \dfrac{2(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \dfrac{2.3\sqrt{5}}{-1} = -6\sqrt{5}$

б) $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = x_1^{\,2} + 2x_1x_2 + x_2^{\,2} - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3\sqrt{5})^2 - 2.(-1) = 45 + 2 = 47.$

Вярна е и **обратната теорема** на Виет:

Т Ако за числата x_1 и x_2 са в сила равенствата $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 + px + q = 0$.

Доказателство:

Заместваме в квадратния тричлен $x^2 + px + q$ коефициентите p и q с техните равни $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1x_2$ и преобразуваме:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2 =$$
$$= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Следователно от $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$, което показва, че x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 + px + q = 0$.

ЗАДАЧА 3 Съставете квадратно уравнение с корени $x_1 = \dfrac{2}{3}$ и $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Решение:

От обратната теорема на Виет следва, че числата $\dfrac{2}{3}$ и $-\dfrac{1}{2}$ са корени на квадратното уравнение $x^2 + px + q = 0$, където

$$-p = x_1 + x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6},\ \ p = -\frac{1}{6}\ \text{ и }\ q = x_1x_2 = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Получаваме уравнението $x^2 - \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{3} = 0$ или $6x^2 - x - 2 = 0$.

ЗАДАЧИ

Проверете чрез формулите на Виет дали дадените числа са корени на уравнението:

1 $x^2 + 3x - 10 = 0$, 2 и –5.

2 $3x^2 - x - 12 = 0$, 4 и –3.

3 $x^2 - 4x + 1 = 0$, $2 \pm \sqrt{3}$.

4 $x^2 - 27x + 140 = 0$, –7 и –20.

Проверете дали дадените уравнения имат корени и чрез формулите на Виет намерете сбора и произведението им:

5 $4x^2 + 12x - 11 = 0$.

6 $9x^2 - 42x + 31 = 0$.

7 $25x^2 + 20x + 1 = 0$.

8 $x^2 - 6x + 16 = 0$.

Даденото число е корен на уравнението. Намерете другия корен на това уравнение:

9 $x^2 + 7x - 18 = 0$, $x_1 = 2$.

10 $x^2 + 28x - 93 = 0$, $x_1 = 3$.

11 $6x^2 + 37x - 13 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{3}$.

12 $6x^2 + 19x - 7 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{3}$.

Без да решавате даденото уравнение, проверете дали има корени и намерете сбора от квадратите им:

13 $x^2 - 6x + 7 = 0$.

14 $x^2 + 4x - 1 = 0$.

15 $4x^2 - 4x - 5 = 0$.

16 $9x^2 - 12x + 7 = 0$.

48. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ФОРМУЛИТЕ НА ВИЕТ

Определяне знаците на корените на квадратното уравнение

Квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ има реални корени.
Определянето на знаците на корените, без да решаваме уравнението, става в следния ред:

1. Определяме знака на $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Ако $x_1x_2 > 0$, то x_1 и x_2 са с еднакви знаци.
- Ако $x_1x_2 < 0$, то x_1 и x_2 са с различни знаци.

2. Определяме знака на $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.
- Ако $x_1 + x_2 > 0$, | двата корена са положителни (при $x_1x_2 > 0$) или двата корена са с различни знаци, като положителният има по-голяма абсолютна стойност (при $x_1x_2 < 0$).
- Ако $x_1 + x_2 < 0$, | двата корена са отрицателни (при $x_1x_2 > 0$) или двата корена са с различни знаци, като отрицателният има по-голяма абсолютна стойност (при $x_1x_2 < 0$).

ЗАДАЧА 1 Без да решавате дадените квадратни уравнения, проверете дали имат корени и определете знаците им.

а) $x^2 + 5x - 16 = 0$; б) $x^2 - 6x + 6 = 0$;
в) $2x^2 + 13x + 19 = 0$; г) $x^2 - 7x - 11 = 0$.

Решение:

а) $D = 5^2 - 4(-16) = 25 + 64 > 0$, т.е. уравнението има корени и $x_1x_2 = -16 < 0$, $x_1 + x_2 = -5 < 0$. Следователно двата корена са с различни знаци, като отрицателният има по-голяма абсолютна стойност.

б) $D = 36 - 24 > 0$, т.е. уравнението има корени и $x_1x_2 = 6 > 0$ и $x_1 + x_2 = 6 > 0$. Следователно уравнението има два положителни корена.

в) $D = 169 - 152 > 0$, т.е. уравнението има корени и $x_1x_2 = \dfrac{19}{2} > 0$, $x_1 + x_2 = -\dfrac{13}{12} < 0$. Следователно уравнението има два отрицателни корена.

г) $D = 49 + 44 > 0$, т.е. уравнението има корени и $x_1x_2 = -11 < 0$, $x_1 + x_2 = 7 > 0$. Следователно двата корена са с различни знаци, като положителният има по-голяма абсолютна стойност.

Съставяне на квадратни уравнения по дадени корени

Всяко квадратно уравнение може да се запише във вида $x^2 + px + q = 0$.
В задачи, при които се иска да се състави квадратно уравнение, ако са дадени корените му, всъщност се търсят стойностите на p и q.
При решаване на такива задачи може да се използва
- разлагането $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$,
- формулите на Виет: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

ЗАДАЧА 2 Съставете квадратно уравнение, корените на което да са числата $\frac{13}{3}$ и $-\frac{5}{2}$.

Решение:

I начин:

Търсеното уравнение е

$$\left(x-\frac{13}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=0$$

$(3x-13)(2x+5)=0$

$6x^2-11x-65=0.$

II начин:

$$x_1+x_2=\frac{13}{3}-\frac{5}{2}=\frac{11}{6},\quad x_1x_2=\frac{13}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{65}{6}$$

Тогава $p=-\frac{11}{6}$, $q=-\frac{65}{6}$ и уравнението е

$$x^2-\frac{11}{6}x-\frac{65}{6}=0,\ 6x^2-11x-65=0.$$

ЗАДАЧА 3 Без да намирате корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $x^2-6x+7=0$, съставете квадратно уравнение $y^2+py+q=0$, корените на което са:

а) $y_1=3x_1$, $y_2=3x_2$,   б) $y_1=x_1+2$, $y_2=x_2+2$.

Решение: $x^2-6x+7=0 \Rightarrow x_1+x_2=6,\ x_1x_2=7$

а) Тогава
$y_1+y_2=3x_1+3x_2=3(x_1+x_2)=3\,.\,6=18,$
$y_1y_2=3x_1\,.\,3x_2=9x_1x_2=9\,.\,7=63,$
$p=-(y_1+y_2)=-18,$
$q=y_1y_2=63.$

Търсеното квадратно уравнение е $y^2-18y+63=0.$

б) Тогава
$y_1+y_2=x_1+2+x_2+2=x_1+x_2+4=6+4=10,$
$y_1y_2=(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=7+2\,.\,6+4=23,$
$p=-10,\ q=23.$

Търсеното квадратно уравнение е $y^2-10y+23=0.$

ЗАДАЧИ

Без да решавате дадените квадратни уравнения, проверете дали имат корени и определете знаците им:

1 $x^2-18x+7=0.$

2 $3x^2-4x-20=0.$

3 $x^2+19x+34=0.$

4 $3x^2+16x+21=0.$

5 $3x^2-x+17=0.$

6 $x^2-4x-3=0.$

Съставете квадратно уравнение, корените на което да са числата:

7 5 и -7.

8 -3 и -5.

9 1 и -10

10 $\frac{3}{2}$ и -4.

11 $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.

12 $-\frac{3}{2}$ и $-\frac{2}{5}$.

13 $\frac{7}{3}$ и 5.

14 $2\sqrt{3}$ и $-5\sqrt{3}$.

15 $3-\sqrt{5}$ и $3+\sqrt{5}$.

16 Без да намирате корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $2x^2+x-16=0$, съставете квадратно уравнение, корените на което са:
а) с 3 по-малки от x_1 и x_2;
б) два пъти по-големи от x_1 и x_2;
в) равни на $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

17 Без да решавате съответното квадратно уравнение, съставете друго, което да има корени:
а) с 3 по-малки от корените на уравнението $3x^2-4x-1=0$;
б) с 1 по-големи от корените на уравнението $2x^2+11x-3=0$;
в) два пъти по-малки от корените на уравнението $7x^2+x-7=0$.

49. МОДЕЛИРАНЕ С КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

ЗАДАЧА 1 Намислих едно естествено число. От квадрата на удвоеното намислено число извадих квадрата на увеличеното с 5 намислено число и получих 52. Намерете кое число съм намислил.

Решение: Означаваме с x намисленото число.
$x \in N$ (x е естествено число).
Уравнението е $(2x)^2 - (x+5)^2 = 52$.
Решаваме уравнението $3x^2 - 10x - 77 = 0$.

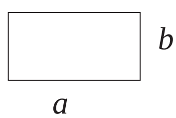
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 3.77}}{3}$$

$$x_1 = 7 \in N \qquad x_2 = -\frac{11}{3} \notin N$$

Отг. Намисленото число е 7.

ЗАДАЧА 2 Едната страна на правоъгълно дворно място е с 8 m по-дълга от другата. Колко метра мрежа са необходими за неговото заграждане, ако площта му е 384 m^2?

Решение: Означаваме ширината b с x, $x > 0$.



Дължината a е $x + 8$.
От $S = a\,.\,b$ получаваме уравнението $x(x+8) = 384$.
Решаваме уравнението $x^2 + 8x - 384 = 0$.
$x_1 = 16 > 0$, $\quad x_2 = -24 < 0 \Rightarrow b = 16$ m, $a = 24$ m
Обиколката на дворното място е $P = 2(a+b) = 2(24+16) = 80$ m.

Отг. Необходими са 80 m мрежа.

ЗАДАЧА 3 На един шахматен турнир били изиграни 66 партии, като всеки от участниците е играл с всеки от останалите по една партия. Намерете броя на участващите в турнира шахматисти.

Решение: Означаваме с x броя на участниците в турнира.
$x > 1$, $x \in N$
Всеки от участниците е изиграл $x - 1$ партии.
Общият брой на партиите е $\frac{x(x-1)}{2}$, тъй като всяка партия се брои два пъти (от всеки от двамата участници в нея).
Уравнението е $\frac{x(x-1)}{2} = 66$.
Решаваме уравнението
$x^2 - x - 132 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4.132}}{2}$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -11$$

$$x_1 = 12 \in N, \quad x_2 = -11 \notin N$$

Отг. В турнира са участвали 12 шахматисти.

ЗАДАЧА 4 Цифрата на единиците на едно двуцифрено число е с 2 по-голяма от цифрата на десетиците. Произведението на това число с числото, записано със същите цифри, но в обратен ред, е 1 855. Намерете числото.

Решение:

Означаваме цифрата на десетиците с x. Тогава цифрата на единиците е $x + 2$.

Числото е $10x+(x+2)$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Числото, записано със същите цифри, но в обратен ред, е $10(x+2)+x$.

Уравнението е $(10x+x+2)(10x+20+x)=1\,855$.

Решаваме уравнението $121x^2+242x-1\,815=0 \quad |:121$

$$x^2+2x-15=0.$$

$x_1=3$ да, $x_2=-5$ не

Отг. Числото е 35.

ЗАДАЧА 5 Тяло е хвърлено от повърхността на Земята вертикално нагоре с начална скорост $V_0=100$ m/s. Намерете след колко секунди тялото ще се намира на височина 480 m, ако земното ускорение е $g=10$ m/s^2.

Решение:

От физиката е известно, че тяло, хвърлено вертикално нагоре с начална скорост V_0, след време t се намира на височина h, определена от формулата $h=V_0 t-\frac{1}{2}gt^2$.

При $V_0=100$, $h=480$ и $g=10$ получаваме уравнението за t: $480=100.t-\frac{1}{2}\cdot 10t^2$.

$$t^2-20t+96=0 \Rightarrow t_1=12;\ t_2=8.$$

Тялото се намира на височина 480 m в 8-ма секунда (при издигането нагоре) и в 12-та секунда (при падането надолу).

ЗАДАЧИ

1 Намислих едно естествено число. Към него прибавих квадрата му и получих 72. Кое число съм намислил?

2 Към произведението на две последователни естествени числа прибавих квадрата на по-малкото и получих 105. Намерете числата.

3 Сборът от квадратите на три последователни естествени числа е 110. Намерете числата.

4 Цифрата на десетиците на едно двуцифрено число е с 1 по-малка от цифрата на единиците. Произведението на това число с числото, записано със същите цифри, но в обратен ред, е 736. Намерете числото.

5 Един от катетите на правоъгълен триъгълник е с 3 cm по-голям от другия. Намерете дължините на катетите на триъгълника, ако лицето му е 35 cm^2.

6 Учениците от един клас си разменили снимки, като всеки дал по една своя снимка на всичките си съученици. Колко са били учениците от този клас, ако броят на раздадените снимки е 552?

7 Сборът на две числа е 19, а произведението им е 84. Намерете числата.

8 Произведението на две последователни положителни четни числа е 168. Намерете числата.

9 Лицето на правоъгълник е 130 cm^2. Намерете страните му, ако едната е с 3 cm по-дълга от другата.

10 След две последователни повишения на цените на тока с един и същ процент тя се увеличила от 200 на 242 лв. Намерете този процент.

50. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ“

ЗАПОМНЕТЕ!

Квадратно уравнение: $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Решаване: $D = b^2 - 4ac$ – дискриминанта

I случай: $D > 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

II случай: $D = 0$, $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

III случай: $D < 0$, уравнението няма реални корени.

Съкратена формула: $ax^2 + 2kx + c = 0$

$b = 2k$, $D = k^2 - ac$

I случай: $D > 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$

II случай: $D = 0$, $x_1 = x_2 = -\dfrac{k}{a}$ – двоен корен

III случай: $D < 0$, уравнението няма реални корени.

Разлагане на квадратния тричлен на множители

- Ако квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, има реални корени x_1 и x_2, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Ако квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, няма реални корени, то квадратният тричлен $ax^2 + bx + c$ не се разлага.

Формули на Виет

- **Теорема на Виет.** Ако квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, има корени x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- **Обратна теорема.** Ако за числата x_1 и x_2 са изпълнени равенствата $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2 + px + q = 0$.

ЗАДАЧА 1 Решете уравненията:

а) $x^2 + 5x - 6 = 0$; б) $x^2 - 14x + 45 = 0$; в) $3x^2 - 2x + 7 = 0$.

Решение:

а) $x^2 + 5x - 6 = 0$

$D = 5^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-6) =$

$= 25 + 24 = 49$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 7}{2}$

$x_1 = 1$, $x_2 = -6$

б) $x^2 - 14x + 45 = 0$

$D = (-7)^2 - 1 \,.\, 45 =$

$= 49 - 45 = 4$

$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{4}$

$x_{1,2} = 7 \pm 2$

$x_1 = 9$, $x_2 = 5$

в) $3x^2 - 2x + 7 = 0$

$D = (-1)^2 - 3 \,.\, 7 =$

$= 1 - 21 = -20 < 0$

Уравнението няма реални корени.

ЗАДАЧА 2 Разложете на множители квадратните тричлени:

а) $A = 2x^2 + 9x - 5$; б) $B = -6x^2 - 7x + 3$; в) $C = 5x^2 - 2x + 11$.

Решение:

а) $A = 2x^2 + 9x - 5$

Квадратното уравнение

$2x^2 + 9x - 5 = 0$

има корени

$x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -5$.

$$A = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5) =$$
$$= (2x-1)(x+5)$$

б) $B = -6x^2 - 7x + 3$

Квадратното уравнение

$-6x^2 - 7x + 3 = 0$

има корени

$x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = -\frac{3}{2}$.

$$B = -6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) =$$
$$= -(3x-1)(2x+3) =$$
$$= (1-3x)(2x+3)$$

в) $C = 5x^2 - 2x + 11$

Квадратното уравнение

$5x^2 - 2x + 11 = 0$

няма реални корени.

Квадратният тричлен

$C = 5x^2 - 2x + 11$

е неразложим.

ЗАДАЧА 3 Без да намирате корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $x^2 - 3x - 5 = 0$, съставете квадратно уравнение $y^2 + py + q = 0$, корените y_1 и y_2 на което са:

а) $y_1 = 2x_1, y_2 = 2x_2$; б) $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 3$.

Решение: $x_1 + x_2 = 3, \quad x_1x_2 = -5$

а) $y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 =$

$= 2(x_1 + x_2) = 2\,.\,3 = 6$

$p = -(y_1 + y_2) = -6$

$y_1y_2 = 2x_1\,.\,2x_2 = 4x_1x_2 =$

$= 4.(-5) = -20$

$q = y_1y_2 = -20$

Търсеното квадратно уравнение е

$y^2 - 6y - 20 = 0$.

б) $y_1 + y_2 = x_1 - 3 + x_2 - 3 =$

$= x_1 + x_2 - 6 = 3 - 6 = -3$

$p = -(y_1 + y_2) = 3$

$y_1y_2 = (x_1 - 3)(x_2 - 3) =$

$= x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9 =$

$= x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 =$

$= -5 - 3\,.\,3 + 9 = -5$

$q = y_1y_2 = -5$

Търсеното квадратно уравнение е

$y^2 + 3y - 5 = 0$.

ЗАДАЧА 4 Намерете параметъра m и решете уравненията:

а) $x^2 - 5x + m = 0$, ако числото 3 е корен;

б) $x^2 - mx + 10 = 0$, ако числото 5 е корен;

в) $x^2 - mx + m + 2 = 0$, ако числото 2 е корен.

Решение:

а) $x^2 - 5x + m = 0$

$3^2 - 5.3 + m = 0$

$m = 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x_1 = 3; \quad x_2 = 2$

б) $x^2 - mx + 10 = 0$

$5^2 - m.5 + 10 = 0$

$-5m + 35 = 0$

$m = 7$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$x_1 = 5; \quad x_2 = 2$

в) $x^2 - mx + m + 2 = 0$

$2^2 - m.2 + m + 2 = 0$

$6 - m = 0$

$m = 6$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$

$x_{1,2} = 3 \pm 1$

$x_1 = 4; \quad x_2 = 2$

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ“

Решете уравненията:

1. $x^2-12x+32=0$, $x^2+6x-16=0$.

2. $x^2-x-6=0$, $7x^2-x-6=0$.

3. $5x^2+x-6=0$, $-x^2+4x-3=0$.

4. $-2x^2-3x+5=0$, $-3x^2+4x-1=0$.

5. $4(x+2)(x+3)=35$.

6. $(x+3)^2+(x+2)^2=\dfrac{37}{2}$.

7. $(x+3)^3-(x+2)^3=\dfrac{109}{4}$.

8. $(x-1)(2x+3)-(x+2)(x-3)=18$.

9. $(3x-1)(x-7)-3(x-2)(2x-5)+45=0$.

10. $(x+2)^3-(x+1)(x^2-x+1)-25=0$.

11. $(x+1)^3-(x-2)(x^2+2x+4)=15$.

12. $(2x+1)^3-2x(2x+3)(2x-3)=37$.

13. $(2x-1)^3-2x(2x+3)(2x-3)=11$.

14. $(x+2)^3-(x+1)(x^2-x+1)=25$.

15. $(2x+1)^3-(2x-1)(4x^2+2x+1)=20$.

16. $(2x-3)^3-8x(x-2)^2=2(x-5,5)$.

17. $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{3x-10}{4}=\dfrac{2x}{3}$.

18. $\dfrac{x(x+4)}{2}-\dfrac{7x}{4}=3-\dfrac{5x-4}{6}$.

19. $\dfrac{x(x-2)}{2}-\dfrac{x(x+3)}{3}=\dfrac{5-8x}{6}$.

20. $\dfrac{(x-2)(x+2)}{2}-\dfrac{x^2-3}{3}=\dfrac{5x-10}{6}$.

21. $\dfrac{2x+3}{6}-\dfrac{(x-\sqrt{11})(x+\sqrt{11})}{12}=\dfrac{3-x}{4}$.

22. $\dfrac{x(2x-1)}{3}-\dfrac{0,5(x^2-9)}{3}=\dfrac{2x^2+5x+3}{6}$.

23. $\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{2x+5}{-6}\right)^2$.

24. $x^4-2x^2-15=0$, $x^4-7x^2+6=0$.

25. $x^4+4x^2-12=0$, $x^4+8x^2+7=0$.

26. $(2x^2+5x)^2-4(2x^2+5x)-21=0$.

27. $(3x^2-2x-1)^2-11(3x^2-2x-1)+28=0$.

28. Намерете m и решете уравненията:

а) $x^2-mx+6=0$, ако има корен 2;

б) $2x^2+mx-10=0$, ако има корен (-1);

в) $mx^2-3x-5=0$, ако има корен 1;

г) $mx^2-5x+m+1=0$, ако има корен 1,5.

29. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2-5x-4=0$, пресметнете стойността на израза:

а) $A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; б) $B=3x_1x_2^2+3x_1^2x_2$.

30. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2+7x-5=0$, пресметнете стойността на израза:

а) $A=x_1^2+x_2^2$; б) $B=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

31. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $2x^2+x-4=0$, съставете квадратно уравнение $y^2+py+q=0$, корените на което са:

а) $y_1=2x_1$, $y_2=2x_2$;

б) $y_1=x_1+3$, $y_2=x_2+3$.

32. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2-2x-4=0$, съставете квадратно уравнение $y^2+py+q=0$, корените на което са:

а) $y_1=2x_1+3$, $y_2=2x_2+3$;

б) $y_1=3x_1-2$, $y_2=3x_2-2$.

51. ТЕСТ № 1 ВЪРХУ ТЕМАТА „КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ“

1. Корените на уравнението $3x^2 + 2x - 5 = 0$ са:

А) $-1\frac{2}{3}$; -1;

Б) $-1\frac{2}{3}$; 1;

В) $1\frac{2}{3}$; -1;

Г) $1\frac{2}{3}$; 1.

2. Корените на уравнението $\left(\frac{x+2}{-\sqrt{2}}\right)^2 = 2x+3$ са:

А) 0; 2;

Б) – 2; 0;

В) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$;

Г) 0; $\sqrt{2}$.

3. Числото –2 **не** е корен на уравнението:

А) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

Б) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;

В) $2x^2 + 7x + 6 = 0$;

Г) $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

4. Тричленът $3x^2 - 5x - 2$ се разлага на линейни множители така:

А) $(x + 2)(3x - 1)$;

Б) $(x - 2)(3x + 1)$;

В) $(x - 2)(3x - 1)$;

Г) $(x + 2)(3x + 1)$.

5. Корените на уравнението $(x^2 + \sqrt{7})(x^2 - \sqrt{7}) = 6x^2$ са:

А) –1; 7;

Б) –7; 1;

В) ±1;

Г) $\pm\sqrt{7}$.

6. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението
$$\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{3x-10}{4} = \frac{2x}{3},$$
стойността на израза $A = 3x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$ е:

А) 77;

Б) –77;

В) 11;

Г) –11.

7. Корените на уравнението $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = 0$ са:

А) –4; –1; 1 и 2;

Б) –4; –2; –1 и 1;

В) –2; –1; 1 и 4;

Г) –1; 1; 2 и 4.

8. Сборът от квадратите на две последователни естествени числа е 61. Намерете:

а) сбора им;

б) произведението им.

9. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 2x - 5 = 0$, пресметнете стойността на израза:

а) $A = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$;

б) $B = \frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}$;

в) $C = x_1^2 + x_2^2$.

10. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 - 5x + 1 = 0$, съставете квадратно уравнение с корени $y_1 = x_1 - 3$ и $y_2 = x_2 - 3$.

ТЕСТ № 2 ВЪРХУ ТЕМАТА „КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ“

1. Корените на уравнението $2x^2 + 5x - 7 = 0$ са:

А) $-3\frac{1}{2}$; -1;

Б) $-3\frac{1}{2}$; 1;

В) $3\frac{1}{2}$; -1;

Г) $3\frac{1}{2}$; 1.

2. Корените на уравнението $\left(\frac{x+1}{-\sqrt{2}}\right)^2 = x+2$ са:

А) 0; 3;

Б) –3; 0;

В) 0; $\sqrt{3}$;

Г) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

3. Числото –3 **не** е корен на уравнението:

А) $2x^2 + 5x - 3 = 0$;

Б) $3x^2 + 7x - 6 = 0$;

В) $4x^2 + 11x - 3 = 0$;

Г) $4x^2 - 9x - 9 = 0$.

4. Тричленът $5x^2 + 2x - 7$ се разлага на линейни множители така:

А) $(5x - 7)(x + 1)$;

Б) $(5x + 7)(x - 1)$;

В) $(x - 7)(5x + 1)$;

Г) $(x + 7)(5x - 1)$.

5. Корените на уравнението $(x^2 - 3)^2 = (x + 1)(x - 1)$ са:

а) 2; 5;

б) $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$;

в) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{5}$;

г) $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$.

6. Триъгълник има лице 35 cm^2, а височината му към основата е с 3 cm по-малка от нея. Дължината на основата в сантиметри е:

А) 5;

Б) 10;

В) 15;

Г) 12.

7. Корените на уравнението $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$ са:

А) –5; –1; 1 и 3;

Б) –3; –1; 1 и 5;

В) –1; 1; 3; и 5;

Г) –5; –3; –1 и 1.

8. Сборът от квадратите на две последователни естествени числа е 85. Намерете:

а) сбора на числата;

б) произведението на числата.

9. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + 2x - 7 = 0$, пресметнете стойността на израза:

а) $A = 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2$;

б) $B = \frac{7}{x_1} + \frac{7}{x_2}$;

в) $C = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$.

10. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 - x - 4 = 0$, съставете квадратно уравнение с корени

$y_1 = 2x_1 + 3$ и $y_2 = 2x_2 + 3$.

ТЕМА 6

ОКРЪЖНОСТ
(Урок № 52 – Урок № 64)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

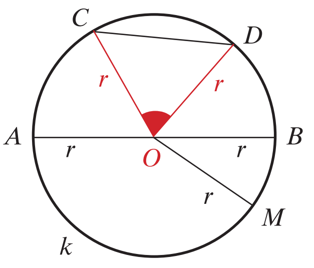
- окръжност;
- окръжност и ъгли;
- допирателни към окръжност;
- взаимно положение на точка и окръжност, права и окръжност;
- взаимно положение на две окръжности.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да прилагат свойствата на хорди в окръжност;
- да прилагат свойствата на видовете ъгли, свързани с окръжност.

ОКРЪЖНОСТ. ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ТОЧКА И ОКРЪЖНОСТ

О Геометрична фигура, състояща се от всички точки в равнината, които са на едно и също разстояние от дадена точка, се нарича **окръжност**.



Елементи, означения:

окръжност $k\ (O; r)$

O – център

$OM = r$ – радиус $(M \in k)$

CD – хорда $(C \in k;\ D \in k)$

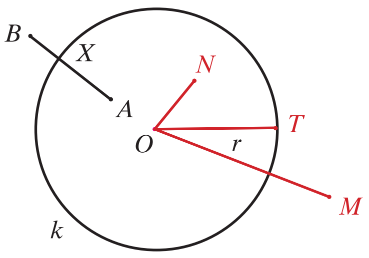
$AB = 2r$ – диаметър $(A \in k;\ B \in k;\ O \in AB)$

$\overset{\frown}{CD}$ – дъга, принадлежаща на хордата CD

$\sphericalangle COD$ – централен ъгъл, съответен на хордата CD

$\triangle CDO$ е равнобедрен $(CO = DO = r)$ с основа хордата CD и ъгъл при върха O централния ъгъл, съответен на хордата CD.

Окръжност и точка



За всяка точка на окръжността казваме, че **лежи на окръжността**, т.е.

$\boldsymbol{T}$ лежи на $k \Leftrightarrow OT = r$.

Ако една точка не лежи на окръжността, тя се нарича:

- **вътрешна за окръжността**, ако разстоянието ѝ до центъра е по-малко от радиуса, т.е.

  $\boldsymbol{N}$ е вътрешна за $k \Leftrightarrow ON < r$;
- **външна за окръжността**, ако разстоянието ѝ до центъра е по-голямо от радиуса, т.е.

  M е външна за $k \Leftrightarrow OM > r$.

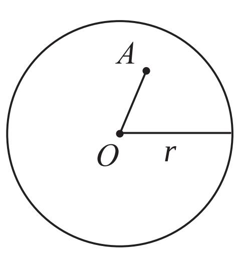
! Ако точките A и B са съответно вътрешна и външна за една окръжност k, отсечката AB има точно една обща точка X с k.

ЗАДАЧА 1 Определете взаимното положение на точката A и окръжността $k\ (O; r)$, ако:

а) $r = 3$, $OA = 2$;   б) $r = 2$, $OA = 4$;   в) $r = 4$, $OA = 4$.

Решение:

а)

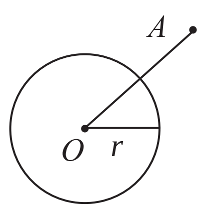


$2 < 3$

$OA < r$

$\Rightarrow A$ е вътрешна за k

б)

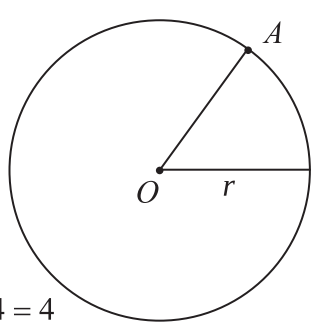


$4 > 2$

$OA > r$

$\Rightarrow A$ е външна за k

в)

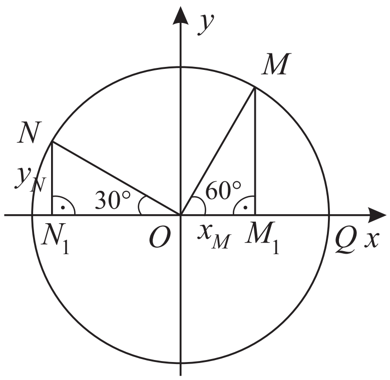


$4 = 4$

$OA = r$

$\Rightarrow A \in k$

ЗАДАЧА 2 В правоъгълна координатна система Oxy е построена окръжност k (O; $r = 6$ м. ед.), която пресича $\overrightarrow{Ox}$ в точка Q. Точките M (x_M; y_M) и N (x_N; y_N) лежат на k и $\sphericalangle QOM = 60°$, $\sphericalangle QON = 150°$.
Намерете: а) x_M; б) y_N.



Решение:

а) $\triangle OMM_1$ – правоъгълен ($MM_1 \perp \overrightarrow{Ox}$)

$OM = r = 6$ м. ед., $\sphericalangle OMM_1 = 30°$

$x_M = OM_1$ – катет срещу 30°

$OM_1 = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ м. ед., $x_M = 3$ м. ед.

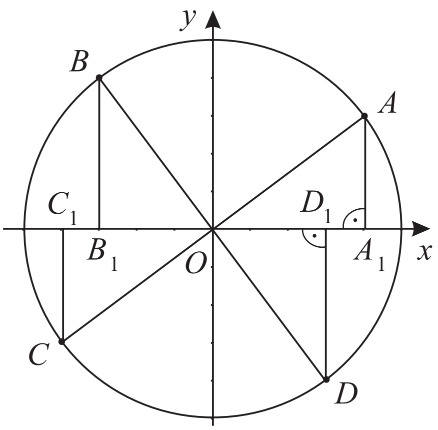
б) $\triangle ONN_1$ – правоъгълен ($NN_1 \perp \overrightarrow{Ox}$)

$ON = r = 6$ м. ед., $\sphericalangle NON_1 = 180° - 150° = 30°$

$y_M = NN_1$ – катет срещу 30°

$NN_1 = \frac{1}{2}ON = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ м. ед., $y_N = 3$ м. ед.

ЗАДАЧА 3 Дадена е правоъгълна координатна система Oxy и точките $A(4; 3)$, $B(-3; 4)$, $C(-4; -3)$ и $D(3; -4)$. Докажете, че те лежат на окръжност k (O; $r = 5$).



Решение:

$AA_1 \perp \overrightarrow{Ox}$

$AA_1 = y_A = 3$

$OA_1 = x_A = 4$

$\triangle OAA_1$ – правоъгълен

По питагоровата теорема намираме

$OA^2 = OA_1^2 + AA_1^2$

$OA^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$OA = 5.$

$OA = r \Rightarrow A \in k$

Аналогично доказваме, че $B \in k$, $C \in k$ и $D \in k$.

ЗАДАЧИ

1 Определете взаимното положение на точката A и окръжността k (O; r), ако:
а) $r = 3{,}2$, $OA = 4$;
б) $r = 5$, $OA = 4{,}7$;
в) $r = \sqrt{5}$, $OA = 4$;
г) $r = 2{,}3$, $OA = 2{,}3$.

2 В правоъгълна координатна система Oxy е дадена окръжност $k(O, r = 13)$. Определете взаимното положение на окръжността k и точките:
а) $A(-13; 0)$; б) $B(5; -12)$;
в) $C(-6; -8)$; г) $D(9; 12)$.

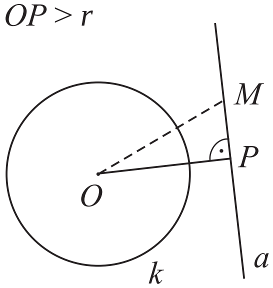
3 В правоъгълна координатна система Oxy е построена окръжност $k(O, r = 4$ м. ед.), която пресича $\overrightarrow{Ox}$ в точка Q. Точките $M(x_M, y_M)$ и $N(x_N, y_N)$ лежат на k и $\sphericalangle QOM = 30°$, $\sphericalangle QON = 120°$. Намерете:
а) y_M; б) x_N.

4 В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(8; 0)$ и $B(0; 6)$. Точката M е среда на AB. Определете взаимното положение на окръжността $k(O; OM)$ и точките:
а) $N(-5; 0)$; б) $L(-4; -3)$;
в) $C(0; 4)$; г) $D(6; 0)$.

53. ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ПРАВА И ОКРЪЖНОСТ

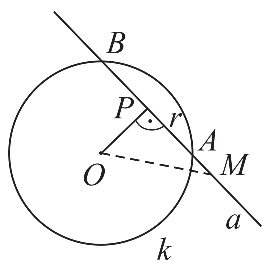
Дадени са окръжност $k(O, r)$ и права a. Ще определим взаимното им положение.
Ако P е петата на перпендикуляра, спуснат от центъра O към правата a, то OP е разстоянието от точката O до правата a.
Възможни са три случая:

I случай:
$OP > r$



1. $OP > r \Rightarrow P$ е външна точка за k.
2. Нека M е произволна точка от правата a, различна от P.
3. $\triangle OPM$ – правоъгълен ($\sphericalangle OPM = 90°$)
   $\Rightarrow OM > OP > r$, т.е. M е външна точка за окръжността k.
4. Следователно k и a **нямат общи точки**.

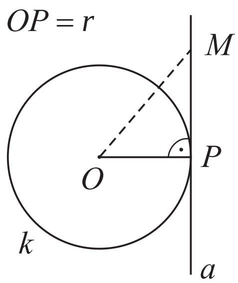
II случай:
$OP < r$



1. $OP < r \Rightarrow P$ е вътрешна точка за k.
2. Нека M е точка от правата a, такава, че $PM = r$.
3. $\triangle OPM$ – правоъгълен ($\sphericalangle OPM = 90°$)
   $\Rightarrow OM > PM = r$, т.е. M е външна точка за окръжността k.
4. Следователно отсечката PM има точно една обща точка с k, т.е. лъчът $PM^{\rightarrow}$ има една обща точка A с окръжността k.
5. Аналогично противоположният лъч с начало P има една обща точка B с k.
6. Следователно k и a **имат две общи точки**.

О Права, която има две общи точки с окръжност, се нарича **секуща** на окръжността.

III случай:
$OP = r$

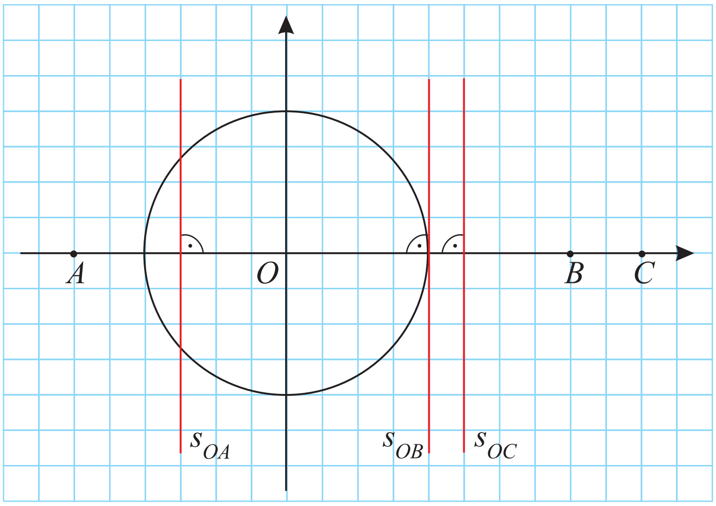


1. $OP = r \Rightarrow P$ лежи на окръжността k.
2. Нека M е произволна точка от правата a, различна от P.
3. $\triangle OPM$ – правоъгълен ($\sphericalangle OPM = 90°$)
   $\Rightarrow OM > OP = r$, т.е. M е външна точка за окръжността k.
4. Следователно k и a **имат само една обща точка**.

О Права, която има само една обща точка с окръжност, се нарича **допирателна** (**тангента**) на окръжността. Общата точка се нарича **допирна точка**.

ЗАДАЧА 1 В правоъгълна координатна система Oxy са дадени окръжност $k(O, r = 4$ м. ед.$)$ и точките $A(–6; 0)$, $B(8; 0)$ и $C(10; 0)$. Намерете броя на общите точки на окръжността k и симетралата на отсечката: а) OA; б) OB; в) OC.

Решение:



а) $\frac{1}{2} OA < r$

2 общи точки

б) $\frac{1}{2} OB = r$

1 обща точка

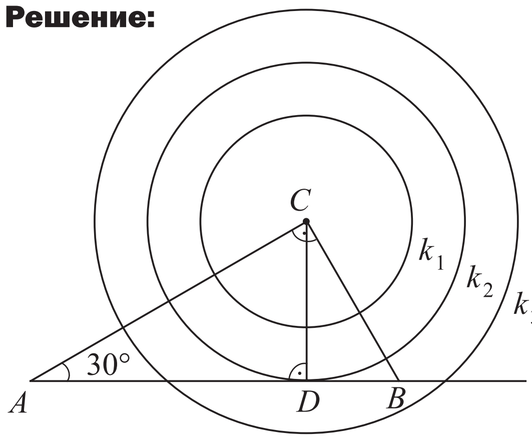
в) $\frac{1}{2} OC > r$

0 общи точки

ЗАДАЧА 2 В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$ и $AC = 6$. Намерете броя на общите точки на правата AB и окръжността:

а) $k_1(C, r_1 = 2)$; б) $k_2(C, r_2 = 3)$; в) $k_3(C, r_3 = 4)$.

Решение:



$\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$

$\triangle ADC$ – правоъгълен ($CD \perp AB$)

CD – катет срещу ъгъл 30°

$\Rightarrow CD = \frac{1}{2} AC = 3$

а) $CD > r_1$

$\Rightarrow AB$ и k_1 нямат общи точки.

б) $CD = r_2$

$\Rightarrow AB$ и k_2 имат 1 обща точка.

в) $CD < r_3$

$\Rightarrow AB$ и k_3 имат 2 общи точки.

ЗАДАЧИ

1 В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) $\sphericalangle ABC = 30°$ и $BC = 8$. Намерете броя на общите точки на правата AB и окръжността:

а) $k_1(C, r_1 = 5)$; б) $k_2(C, r_2 = 3)$.

2 В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) $\sphericalangle BAC = 15°$ и $AB = 12$. Намерете броя на общите точки на правата AB и окръжността:

а) $k_1(C, r_1 = 2)$; б) $k_2(C, r_2 = 3)$.

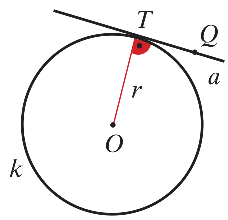
3 В равнобедрен $\triangle ABC$ $CA = CB = 5$ и $AB = 8$. Намерете броя на общите точки на правата AB и окръжността:

а) $k_1(C, r_1 = 1)$; б) $k_2(C, r_2 = 3)$.

4 В ромба $ABCD$ $AC \times BD = O$, $\sphericalangle BAC = 60°$ и $AC = 12$. Намерете броя на общите точки на правата CD и окръжността:

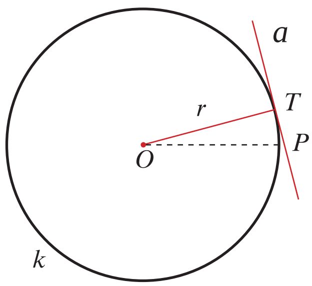
а) $k_1(O, r_1 = 4)$; б) $k_2(O, r_2 = 2)$.

54. ДОПИРАТЕЛНИ КЪМ ОКРЪЖНОСТ



Ако правата a и окръжността k имат само една обща точка T, правата a се нарича допирателна на k в точка T.
Допирателната няма друга обща точка с окръжността.

Т Ако една права е допирателна на дадена окръжност, тя е перпендикулярна на радиуса в допирната точка.

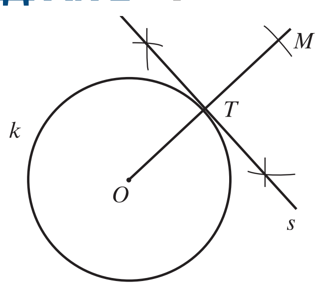


Дадено: окръжност $k\,(O;\,r)$,
права a – допирателна на k,
T – допирна точка

Да се докаже:
$a \perp OT$

Доказателство:
За a и OT има две възможности: $a \perp OT$ и a не е перпендикулярна на OT. Допускаме, че a не е перпендикулярна на OT. Нека P е петата на перпендикуляра, спуснат от O към a. От правоъгълния $\triangle OPT$ следва, че $OP < OT = r$, т.е. P е вътрешна за k, т.е. a е секуща на k. Това противоречи на условието, че a е допирателна на k.
Остава вярно твърдението, че $a \perp OT$.

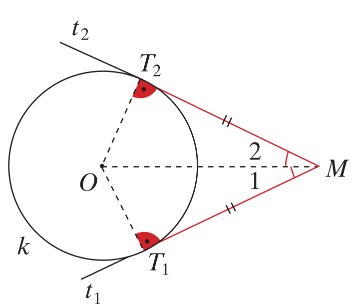
ЗАДАЧА 1 През дадена точка T на окръжност $k\,(O;\,r)$ да се построи допирателна на k.



Построение:
Построяваме:
1. продължението на радиуса OT;
2. точка M, външна за k, $TM = OT$;
3. симетрала s на отсечката OM.

Правата s е търсената допирателна, защото $OT \perp s$ и $OT = r$.

Т Дължините на допирателните към дадена окръжност, прекарани през точка вън от окръжността, са равни.



Дадено: окръжност $k\,(O;\,r)$,
M – външна точка за k $(OM > r)$,
MT_1 и MT_2 – допирателни на k

Да се докаже:
$MT_1 = MT_2$

Доказателство:
Разглеждаме $\triangle OMT_1$ и $\triangle OMT_2$
$\left| \begin{array}{l} \sphericalangle T_1 = \sphericalangle T_2 = 90^\circ \\ OM - \text{ обща} \\ OT_1 = OT_2 = r \end{array} \right.$

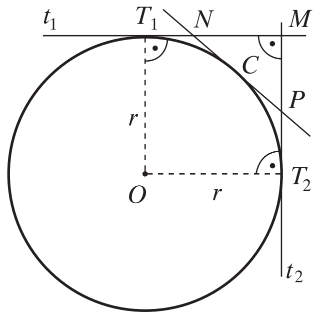
$\triangle OMT_1 \cong \triangle OMT_2$ (по IV признак) $\Rightarrow MT_1 = MT_2$.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ като съответни ъгли в еднаквите $\triangle OMT_1$ и $\triangle OMT_2$.

! Ако през точка M, вън от окръжността, са прекарани двете допирателни t_1 и t_2, правата, която минава през точката M и центъра O на окръжността, е ъглополовяща на ъгъла, образуван от допирателните.

Прието е, когато се говори за допирателна към окръжност през точка, вън от окръжността, под „допирателна“ да се разбира както правата MT_1, така и правата MT_2.

ЗАДАЧА 2 През точка M, която е външна за окръжността k (O; $r = 7$ cm), са построени две взаимноперпендикулярни допирателни.



а) Намерете дължината на всяка от допирателните.

б) Между допирните точки T_1 и T_2 на тези допирателни върху дъгата $\overset{\frown}{T_1T_2}$ е взета произволна точка C и през нея е построена допирателна PN, която образува с MT_1 и MT_2 $\triangle MNP$. Намерете периметъра на този триъгълник.

Решение:

а) OT_1MT_2 има три прави ъгъла $\Rightarrow$ правоъгълник, но $MT_1 = MT_2$ (или $OT_1 = OT_2 = r$) $\Rightarrow$ квадрат. Тогава $MT_1 = MT_2 = r = 7$ cm.

б) От $NC = NT_1$ и $PC = PT_2$ получаваме

$$\begin{aligned} P_{\triangle NPM} &= MN + NC + CP + PM = \\ &= MN + NT_1 + T_2P + PM = \\ &= MT_1 + T_2M = \\ &= 7 + 7 = 14 \text{ cm}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1 През точка A от окръжността k са построени диаметър AB, допирателна t през A и хорди $AC = AD = r$ ($D \neq C$). Намерете $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle DBC$ и острия ъгъл, образуван от хордата AC и допирателната t.

2 Хордата AB в окръжността k е равна на радиуса. Допирателните към окръжността в точките A и B се пресичат в точка C. Намерете ъгъла между допирателните.

3 Права t се допира до окръжността k (O; r) в точка T. Точката M лежи на правата t така, че $\sphericalangle OMT = 30^\circ$. Отсечката OM пресича k в точка N. Намерете: а) OM; б) MN; в) разстоянието от N до t.

4 Даден е ромб $ABCD$ със страна $AB = a$ и $\sphericalangle A = 60^\circ$.

а) Намерете радиуса на окръжността k (D; r), така че правата AC да е допирателна на k.

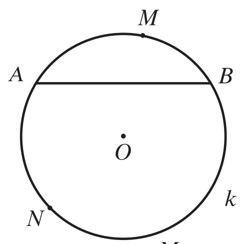
б) Намерете ъгъла между допирателните, прекарани от върха B към тази окръжност.

5 Дадена е окръжност k (O). През точка C, външна за k, са построени правата CO, която пресича окръжността в точка D (O е между C и D), и права, пресичаща k в точки A и B (B е между A и C) така, че $BC = OA$. Докажете, че $\sphericalangle AOD = 3\sphericalangle ACD$.

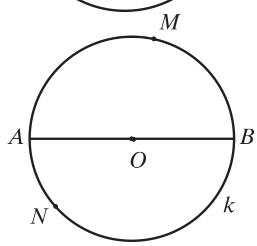
6 В окръжност с център O са построени две взаимноперпендикулярни хорди AB и CD, които се пресичат в точка M. Да се докаже, че $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

55. ЦЕНТРАЛНИ ЪГЛИ, ДЪГИ И ХОРДИ

О Всяка хорда разделя окръжността на две части, които се наричат **дъги на окръжността**.

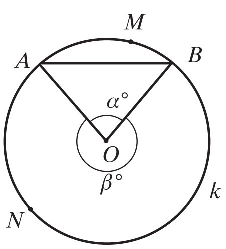


Например хордата AB разделя окръжността k на две дъги, всяка от които има за краища точките A и B.
Прието е с $\overset{\frown}{AB}$ да се означава по-малката от двете дъги $\overset{\frown}{AB}$.
За по-голямата дъга, а понякога и за по-малката, използваме допълнителна точка: $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{ANB}$.

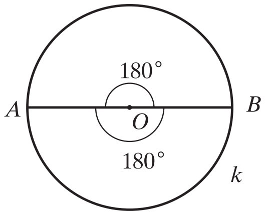


Две дъги, отсечени от една хорда AB, са равни само когато AB е диаметър на окръжността $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{ANB}$).
Всяка от тези дъги наричаме **полуокръжност**.

О Два лъча с общо начало центърът на окръжност разделят равнината на две части, всяка от които се нарича **централен ъгъл**.



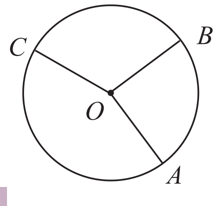
Мярка на дъга от окръжност
Мярката на централния ъгъл , който съдържа малката дъга, е $\alpha°$. Казваме, че и мярката на дъгата $\overset{\frown}{AMB} = \alpha°$.
Мярката на голямата дъга $\overset{\frown}{AB}$ (както и на централния ъгъл, който я съдържа) е $\beta = 360° - \alpha$.



Всяка от дъгите $\overset{\frown}{AB}$ има мярка 180°.
Тогава **цялата окръжност има мярка 360°.**

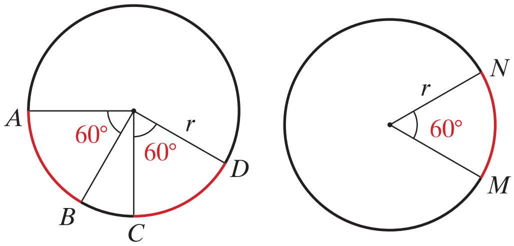
О Две окръжности с равни радиуси се наричат **еднакви окръжности**.

ЗАДАЧА 1 Точките A,B,C са от окръжността k и $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = 5:7:8$.
Намерете мерките на тези дъги, както и на съответните им централни ъгли.

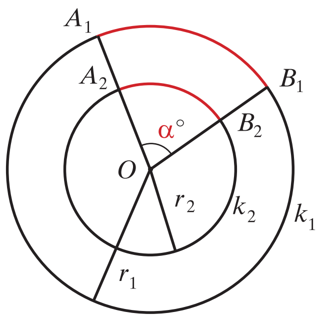


Решение:
От $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 360°$ и $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = 5:7:8$
намираме $\overset{\frown}{AB} = 90°$, $\overset{\frown}{BC} = 126°$, $\overset{\frown}{CA} = 144°$,
$\sphericalangle AOB = 90°$, $\sphericalangle BOC = 126°$, $\sphericalangle AOC = 144°$.

О Две дъги от една и съща окръжност или от еднакви окръжности се наричат равни, когато имат равни мерки.



Двете окръжности са с равни радиуси, т.е. те са еднакви.
Тогава $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{MN} = 60°$.

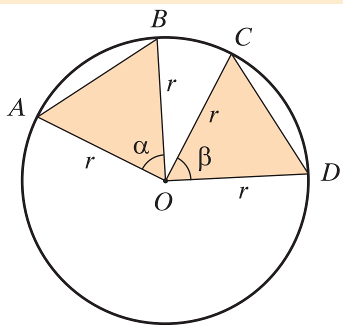


Начертани са две концентрични окръжности с различни радиуси. На централния ъгъл с мярка $\alpha°$ отговарят две дъги $\overset{\frown}{A_1B_1}$ и $\overset{\frown}{A_2B_2}$, всяка от които е $\alpha°$, но $\overset{\frown}{A_1B_1} \neq \overset{\frown}{A_2B_2}$, защото не са дъги от една окръжност или от еднакви окръжности.

Съществува следната зависимост между равните хорди, съответните им дъги и централни ъгли в една окръжност:

Т

Ако $AB = CD$	$\Rightarrow \alpha = \beta$	и $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.	(1)
Ако $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$	$\Rightarrow \alpha = \beta$	и $AB = CD$.	(2)
Ако $\alpha = \beta$	$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$	и $AB = CD$.	(3)



Доказателството на теоремата следва от

$$\triangle ABO \cong \triangle CDO \begin{cases} \text{в (1) (по III признак)} \\ \text{в (2) и (3) (по I признак)} \end{cases}$$

и от $\overset{\frown}{AB} = \alpha°$ $\quad \overset{\frown}{CD} = \beta°$

$\sphericalangle AOB = \alpha°$, $\sphericalangle COD = \beta°$.

ЗАДАЧИ

1 Докажете, че ако една хорда е равна на радиуса на окръжността, то принадлежащата ѝ дъга е 60°.

2 Намерете колко градуса е дъгата, равна на $\frac{1}{n}$ от окръжността, ако:

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$;
г) $n = 8$; д) $n = 9$; е) $n = 10$.

3 Три точки A, B и C от окръжност я разделят на дъги, които се отнасят както 3 : 2 : 7. Намерете мерките на тези дъги.

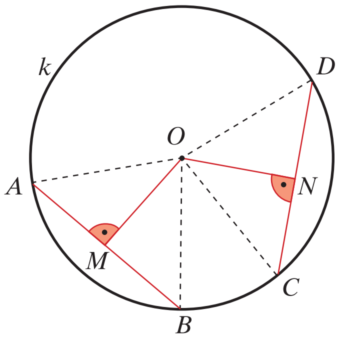
4 Точките A, B, C и D от окръжност я разделят на дъги, за които е изпълнено $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 1:2:3:4$. Намерете мерките на тези дъги.

5 Дъгата $\overset{\frown}{AB}$ от окръжност $k(O)$ е 120°. Точката M е от дъгата $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AM}$ = 45% от $\overset{\frown}{AB}$. Намерете големините на $\sphericalangle AOM$ и $\sphericalangle BOM$.

6 В окръжност k (O; 3 cm) AB е диаметър. Хордата CD = 3 cm. Ако точките M и N са среди съответно на дъгите $\overset{\frown}{DA}$ и $\overset{\frown}{BC}$, намерете ъглите на $\triangle MON$.

56. ДИАМЕТЪР, ПЕРПЕНДИКУЛЯРЕН НА ХОРДА

ОСНОВНА ЗАДАЧА 1 Да се докаже, че ако две хорди в една окръжност са равни, разстоянията от центъра на окръжността до хордите са равни.



Дадено: окръжност $k(O;r)$, $AB = CD$ – хорди, $OM \perp AB$, $M \in AB$, $ON \perp CD$, $N \in CD$

Да се докаже: $OM = ON$

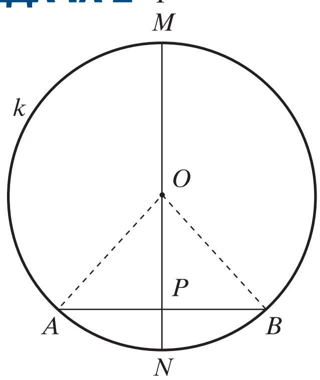
Доказателство:

Разглеждаме $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ $\left|\begin{array}{l} AO = CO = r \\ BO = DO = r \\ AB = CD \end{array}\right.$

$\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD$ (по III признак)

$\Rightarrow OM = ON$ като съответни височини в еднакви триъгълници.

ОСНОВНА ЗАДАЧА 2 Да се докаже, че в окръжност диаметър, перпендикулярен на хорда, разполовява съответната ѝ дъга.



Дадено: окръжност $k(O;r)$, AB – хорда, MN – диаметър, $MN \perp AB$

Да се докаже: $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$, $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$

Доказателство:

Нека $MN \times AB = P$. В равнобедрения $\triangle ABO$ $(OA = OB)$ височината OP е и ъглополовяща на $\sphericalangle AOB$, т.е. $\sphericalangle AON = \sphericalangle BON$.

От равенството на двата централни ъгъла $\Rightarrow \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$.

От $\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AM} = 180^\circ - \overset{\frown}{AN} \\ \overset{\frown}{BM} = 180^\circ - \overset{\frown}{BN} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$.

! В окръжност диаметърът, перпендикулярен на дадена хорда, разполовява хордата.

ОСНОВНА ЗАДАЧА 3 Да се докаже, че диаметър, който минава през средата на дъга в окръжност, е перпендикулярен на съответната ѝ хорда.

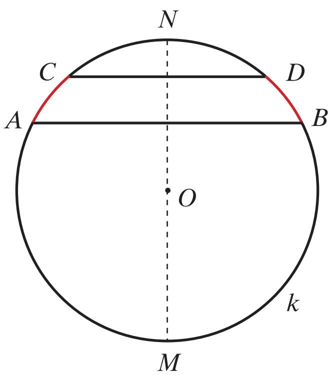
Доказателство:

От $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$ (по условие) $\Rightarrow \sphericalangle AON = \sphericalangle BON$, $ON \times AB = P$.
В $\triangle ABO$ $(AO = BO)$ OP е ъглополовяща $\Rightarrow OP$ е и височина.
Тогава $OP \perp AB$, т.е. $MN \perp AB$.

ОСНОВНА ЗАДАЧА 4 Да се докаже, че дъгите, заключени между две успоредни хорди в една окръжност, са равни.

Дадено: окръжност $k(O;r)$, $AB \parallel CD$ – хорди

Да се докаже: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.



Доказателство:

Построяваме диаметър $MN \perp AB$. Тогава $MN \perp CD$.

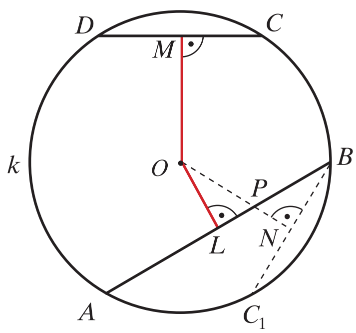
От *Задача 2* $\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} \overset{\frown}{ACN} = \overset{\frown}{BDN} \\ \overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{DN} \end{array} \right.$ – изваждаме почленно и

получаваме $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

От $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow$ хордите AC и BD са равни. В условието на *Задача 4* е дадено, че $AB \parallel CD$. Тогава четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец.

ОСНОВНА ЗАДАЧА 5

Ако две хорди в една окръжност не са равни, по-голямата от тях е по-близо до центъра.



Дадено: окръжност $k\,(O)$,
$AB > CD$ – хорди,
$OL \perp AB$, $OM \perp CD$

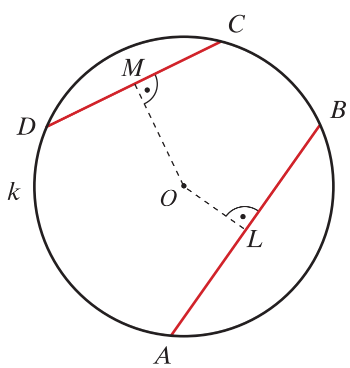
Да се докаже:
$OL < OM$

Доказателство:

Построяваме хордата $BC_1 = CD$ в полуравнината, определена от AB, която не съдържа O.
$ON \perp BC_1$, $ON \cap AB = P$
В $\triangle OLP$ катетът OL е по-малък от хипотенузата OP, т.е. $OL < OP$.
Но $OP < ON$. Тогава $OL < ON$, $ON = OM$ (разстоянията от O до равните хорди CD и BC_1 са равни) .
Тогава $OL < OM$.

ОСНОВНА ЗАДАЧА 6

Ако разстоянията от центъра на една окръжност до две нейни хорди са неравни, то хордата, по-близка до центъра, е по-голяма.



Дадено: окръжност $k\,(O)$,
AB, CD – хорди,
$OL \perp AB$, $OM \perp CD$, $OL < OM$

Да се докаже:
$AB > CD$

Доказателство:

За хордите AB и CD има три възможности:
$AB < CD$, $AB = CD$, $AB > CD$.
Ако допуснем, че $AB < CD$, от *Задача 5*
$\Rightarrow OL > OM$, което противоречи на условието.
Ако допуснем, че $AB = CD$, от *Задача 1*
$\Rightarrow OL = OM$, което противоречи на условието.
Остава вярно твърдението $AB > CD$.

ЗАДАЧИ

1 Докажете, че ако през краищата на един диаметър прекараме успоредни хорди, тези хорди са равни.

2 Докажете, че ако разстоянията от центъра на една окръжност до две нейни хорди са равни, то тези хорди са равни.

3 Дадени са окръжност $k\,(O;\,r)$ и отсечка d $(d < r)$. Постройте хорда на k, която да е на разстояние d от O.

4 Продълженията на две равни хорди AB и CD на една окръжност се пресичат в точка P (B е между A и P, D е между C и P). Докажете, че $BP = DP$.

57. ВПИСАН ЪГЪЛ

О Ъгъл, чийто връх лежи на дадена окръжност, а рамената му пресичат тази окръжност, се нарича **вписан ъгъл**.

Дъгата $\overset{\frown}{AC}$, заключена между раменете на ъгъла, се нарича съответна (принадлежаща) на ъгъла. Казваме, че $\sphericalangle ABC$ се опира на дъгата $\overset{\frown}{AC}$.

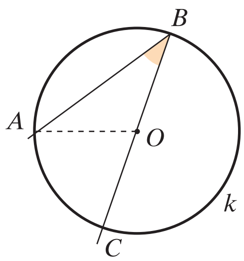
Т Вписаният ъгъл се измерва с половината от принадлежащата му дъга.

Дадено: окръжност $k(O)$, $\sphericalangle ABC$ – вписан ъгъл

Да се докаже: $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

Доказателство:

Ще разгледаме три случая.

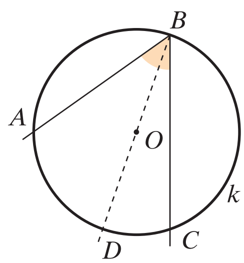


1. ***O* лежи на едното рамо на вписания ъгъл.**

От $OA = OB = r \Rightarrow \triangle AOB$ е равнобедрен и $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

Централният $\sphericalangle AOC$ е външен за $\triangle AOC \Rightarrow \sphericalangle AOC = 2\sphericalangle ABO$.

Тогава $\sphericalangle ABO = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC$. Но $\sphericalangle AOC = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \boldsymbol{\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}}$.

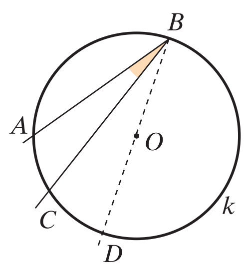


2. ***O* лежи вътре във вписания ъгъл.**

Построяваме права BO, която пресича k в точка D.

От а) $\Rightarrow \sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ и $\sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$.

$\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} \Rightarrow \boldsymbol{\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}}$.



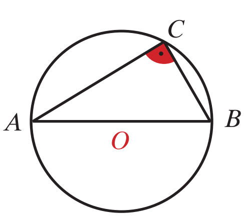
3. ***O* лежи вън от вписания ъгъл.**

Построяваме права BO, която пресича k в точка D.

От а) $\Rightarrow \sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ и $\sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$.

$\sphericalangle ABD - \sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} \Rightarrow \boldsymbol{\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}}$.

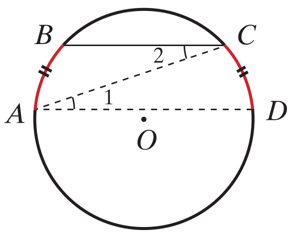
! Вписан в окръжност ъгъл, чиито рамене минават през краищата на диаметъра на окръжността, е прав.



AB е диаметър на k.

$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90° \Rightarrow \sphericalangle ACB$ е прав ъгъл.

ОСНОВНА ЗАДАЧА 1 Четири точки A, B, C и D от окръжност (взети в този ред) я разделят на четири дъги така, че $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Да се докаже, че правите AB и CD са успоредни.

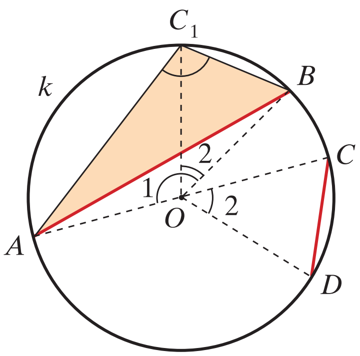


Доказателство:
Построяваме хордата AC.
$\sphericalangle 1$ е вписан $\Rightarrow$ $\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$, $\sphericalangle 2$ е вписан $\Rightarrow$ $\sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.
Но $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (по условие)
$\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (кръстни ъгли)
$\Rightarrow AD \parallel BC$.

ОСНОВНА ЗАДАЧА 2 Ако две дъги на една окръжност са неравни, то на по-голямата от тях съответства по-голяма хорда.

Дадено: окръжност k, $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$

Да се докаже: $AB > CD$



Доказателство:
От $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle 1 > \sphericalangle 2$.
Пренасяме $\sphericalangle 2$ в полуравнината, определена от OB и съдържаща A, така, че $\sphericalangle BOC_1 = \sphericalangle 2$.
Лъчът OC_1 ще е вътрешен за $\sphericalangle AOB$.
$\triangle ODC \cong \triangle OBC_1$ (по I признак) $\Rightarrow C_1B = CD$.
Разглеждаме $\triangle ABC_1$. $\sphericalangle C_1$ е тъп ъгъл, защото е вписан и се измерва с дъга, по-голяма от $180°$.
Тогава $AB > C_1B$ $\Rightarrow$ $AB > CD$.

ОСНОВНА ЗАДАЧА 3 Ако две хорди на една окръжност са неравни, то на по-голямата от тях съответства по-голяма дъга.

Дадено: окръжност k, $AB > CD$ **Да се докаже:** $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$

Доказателство:
За дъгите $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$ има три възможности:
$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$.
Ако допуснем, че $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$, от *Задача 2* $\Rightarrow AB < CD$, което противоречи на условието.
Ако допуснем, че $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ $\Rightarrow AB = CD$ (противоречие с условието).
Остава вярно твърдението $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$.

ЗАДАЧИ

1 От точка M, лежаща на окръжност, са отмерени дъгите $\overset{\frown}{MA} = 82°$ и $\overset{\frown}{MB} = 183°$. Намерете $\sphericalangle AMB$.

2 Точките A, B и C от окръжността $k(O; r)$ са върхове на триъгълник. Ако $AB = r$, намерете ъгъла на триъгълника при върха C.

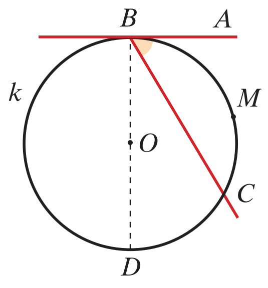
3 Трите точки A, B и C делят окръжност в отношение 5 : 7 : 12. Намерете ъглите на $\triangle ABC$.

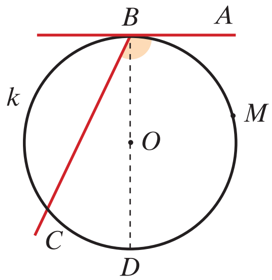
4 От краищата на диаметъра AB на окръжност са построени две успоредни хорди AM и BN. Докажете, че MN е диаметър.

58. ПЕРИФЕРЕН ЪГЪЛ

О Ъгъл, чийто връх лежи на дадена окръжност, едното му рамо пресича тази окръжност, а другото е допирателна към нея, се нарича **периферен ъгъл**.

Т Периферният ъгъл се измерва с половината от принадлежащата му дъга.





Дадено: окръжност k, $\sphericalangle ABC$ – периферен ъгъл

Да се докаже: $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

Доказателство:

Построяваме диаметъра BD. $\sphericalangle ABD = 90°$ (свойство на допирателната)

1. Центърът O е външна точка за периферния ъгъл.

Тогава $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD - \sphericalangle CBD =$

$$= 90° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD} - \overset{\frown}{CD}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}.$$

2. Центърът O е вътрешна точка за периферния ъгъл.

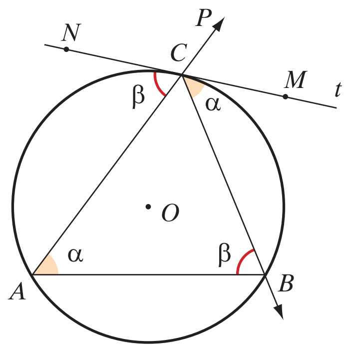
Тогава $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC =$

$$= 90° + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BMD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BMD} + \overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BMC}.$$

$\sphericalangle ABD$ е периферен. Принадлежащата му дъга е $180°$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle ABD = 90°$.

ЗАДАЧА 1 Върховете на $\triangle ABC$ лежат на окръжност k. Ъглите при върховете A и B са съответно α и β. В точка C е построена допирателната t на k.
а) Докажете, че острите ъгли, образувани от допирателната и страните CA и CB, са съответно равни на β и α.
б) Намерете ъглите, които лъчите $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AC}$ образуват с допирателната.



Решение:

а) $\sphericalangle CAB$ е вписан в k $\Rightarrow$ $\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$;

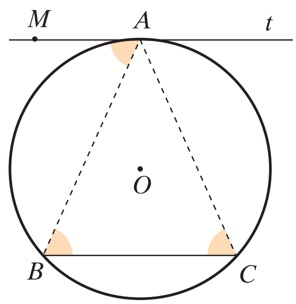
$\sphericalangle BCM$ е периферен $\Rightarrow$ $\sphericalangle BCM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$.

Тогава $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BCM = \alpha$.

Аналогично доказваме, че $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACN = \beta$.

б) $\overrightarrow{CB}$ образува с t два съседни ъгъла:
$\sphericalangle BCM = \alpha$ (от а)) $\Rightarrow$ $\sphericalangle BCN = 180° - \alpha$.
$\overrightarrow{AC}$ образува с t два съседни ъгъла:
$\sphericalangle MCP = \sphericalangle ACN = \beta$ (връхни) $\Rightarrow$ $\sphericalangle NCP = 180° - \beta$.

ЗАДАЧА 2 В точка A от окръжност k е построена допирателна t. Хордата BC е успоредна на t.
а) Докажете, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.
б) Намерете ъглите на $\triangle ABC$, ако $\overset{\frown}{AC} = 110°$.



Решение:

а) Разглеждаме $(BC \parallel t) \times BA$:

$\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAM$ (кръстни ъгли). (1)

От $\sphericalangle CBA$ – вписан $\Rightarrow$ $\sphericalangle CBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$. (2)

От $\sphericalangle BAM$ – периферен $\Rightarrow$ $\sphericalangle BAM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BA}$. (3)

От (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BA}$ $\Rightarrow$ $AC = AB$, т.е. $\triangle ABC$ е равнобедрен.

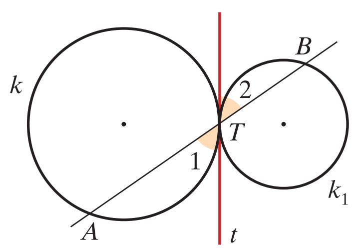
б) От $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BA}$ (от условие а)) и $\overset{\frown}{AC} = 110°$ (по условие)

$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 360° - 2.110° = 140°$.

Ъглите на $\triangle ABC$ са вписани в k.

$\sphericalangle B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\cdot 110° = 55°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 55°$, $\sphericalangle A = \frac{1}{2}\cdot 140° = 70°$.

ЗАДАЧА 3 Всяка права, която минава през допирната точка на две външно допирателни окръжности, отсича от окръжностите дъги с равни мерки.



Решение:

Начертаваме общата допирателна t на двете окръжности.

$t \times AB = T$

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (връхни ъгли)

$\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$, $\sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BT}$ (периферни),

т.е. $\overset{\frown}{AT} = 2\sphericalangle 1$, $\overset{\frown}{BT} = 2\sphericalangle 2$

$\Rightarrow$ мерките на дъгите $\overset{\frown}{AT}$ и $\overset{\frown}{BT}$ са равни.

$\overset{\frown}{AT}$ и $\overset{\frown}{BT}$ са дъги в окръжности с различни радиуси. Тогава можем да говорим само за равенство на мерките им, но не можем да поставяме знак за равенство между дъгите.

ЗАДАЧИ

1 Дъгата $\overset{\frown}{MN}$ в окръжност k е 75°. През точка M е построена допирателна t към k. Намерете периферните ъгли, които допирателната образува с хордата MN.

2 Допирателната в точка T към окръжността k $(T \in k)$ сключва с хордата TA ъгъл $38°12'$. Ако TM е диаметър в k, намерете мярката на $\sphericalangle ATM$.

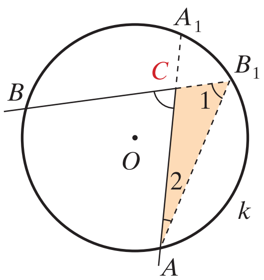
3 Хорда разделя окръжност на дъги, едната от които е с 50° по-голяма от другата. Изчислете големините на периферните ъгли, образувани от хордата и допирателната, прекарана през единия ѝ край.

4 Върховете на $\triangle ABC$ са точки от окръжност и я разделят на дъги така, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = 2:3:4$. През върха B е построена допирателна към окръжността. Намерете ъглите, които допирателната сключва със страните BA и BC на триъгълника.

59. ЪГЪЛ, ЧИЙТО ВРЪХ Е ВЪТРЕШНА ТОЧКА ЗА ОКРЪЖНОСТ

Ще приложим теоремите за вписан и периферен ъгъл за намиране мерките на ъгли, върховете на които не лежат на окръжност, а раменете им имат общи точки с тази окръжност.

Т **Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за една окръжност**, се измерва с полусбора на дъгите, заключени между раменете му и техните продължения.



Дадено: окръжност k, $\sphericalangle ACB$, връх C – вътрешен за k

Да се докаже: $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A_1B_1}\right)$.

Доказателство:

Правите AC и BC пресичат k съответно в точките A_1 и B_1.

Построяваме хордата AB_1.

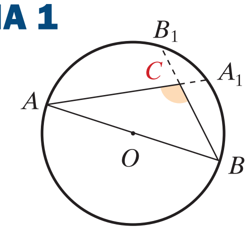
$\sphericalangle ACB$ е външен за $\triangle AB_1C \Rightarrow \sphericalangle ACB = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$,

$\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$, $\sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1B_1}$ (вписани ъгли в k).

Тогава $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1B_1} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A_1B_1}\right)$.

Теоремата можем да докажем и като използваме хордата A_1B.

ЗАДАЧА 1



Върхът C на един ъгъл е вътрешна точка за окръжност, а раменете му минават през краищата на диаметъра AB. Да се докаже, че ъгълът е тъп.

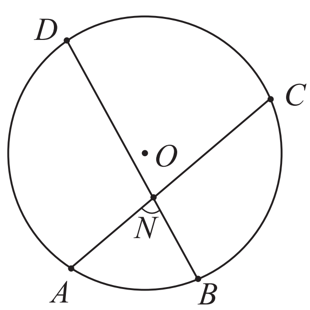
Решение:

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A_1B_1}\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ + \overset{\frown}{A_1B_1}\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1B_1} > 90^\circ.$$

$\Rightarrow \sphericalangle ACB$ е тъп ъгъл.

ЗАДАЧА 2

Точките A, B, C и D от окръжност k са такива, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 3:4:5:6$.
Хордите AC и BD се пресичат в точка N.
Намерете големината на $\sphericalangle ANB$ и на $\sphericalangle AND$.



Решение:

1. От $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 3:4:5:6 \Rightarrow$

$\overset{\frown}{AB} = 3x$, $\overset{\frown}{BC} = 4x$, $\overset{\frown}{CD} = 5x$, $\overset{\frown}{DA} = 6x$ $(x > 0)$

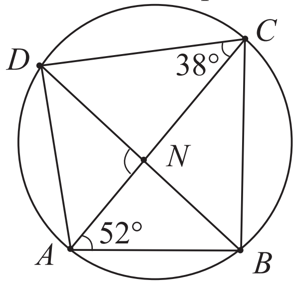
$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = 360^\circ$, $\quad x = 20^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, $\overset{\frown}{BC} = 80^\circ$, $\overset{\frown}{CD} = 100^\circ$, $\overset{\frown}{DA} = 120^\circ$

2. $\sphericalangle ANB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(60^\circ + 100^\circ\right) = 80^\circ$

3. $\sphericalangle AND = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(120^\circ + 80^\circ\right) = 100^\circ$

ЗАДАЧА 3 Точките A, B, C и D от окръжността k. Хордите AC и BD се пресичат в точка N. Ако $\sphericalangle BAC = 52°$ и $\sphericalangle ACD = 38°$, докажете, че $AC \perp BD$. Намерете големината на $\sphericalangle ANB$ и на $\sphericalangle AND$.



Решение:

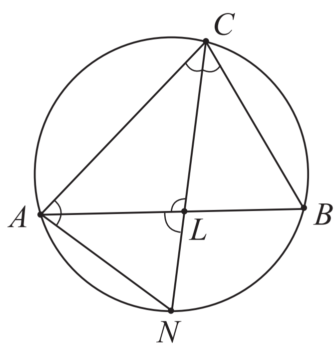
1. $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (вписан) $\quad 52° = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 104°$

2. $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ (вписан) $\quad 38° = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = 76°$

3. $\sphericalangle AND = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}(104° + 76°) = 90°$

$\Rightarrow AC \perp BD$

ЗАДАЧА 4 Върховете на $\triangle ABC$ лежат на окръжност k. Ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича AB в точка L и окръжността k в точка N. Ако $\sphericalangle NAC = 82°$, намерете големината на $\sphericalangle ALC$.



Решение:

1. CL – ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \sphericalangle ACN = \sphericalangle BCN \\ &\sphericalangle ACN = \frac{1}{2}\sphericalangle \overset{\frown}{AN} \\ &\sphericalangle BCN = \frac{1}{2}\sphericalangle \overset{\frown}{BN} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$$

2. $\sphericalangle NAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{NBC}$

$82° = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{NB} + \overset{\frown}{BC}\right)$

3. $\sphericalangle ALN = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{BC}\right)$

$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN} \Rightarrow \sphericalangle ALN = 82°$

4. $\sphericalangle ALC = 180° - \sphericalangle ALN = 180° - 82° = 98°$

ЗАДАЧИ

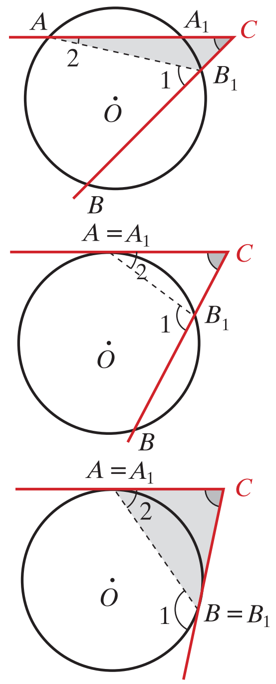
1 Дъгата, заключена между раменете на ъгъла, чийто връх е вътрешна точка за окръжността, е 78°, а дъгата, заключена между продълженията на раменете му, е 42°. Намерете ъгъла.

2 Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност, е 67°30′. Дъгата, заключена между раменете му, е 96°15′. Намерете дъгата, заключена между продълженията на раменете му.

3 Точките A, B, C и D от окръжност k са такива, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 2:3:4:6$. Хордите AC и BD се пресичат в точка N. Намерете големината на $\sphericalangle ANB$.

4 Две равни хорди в една окръжност се пресичат. Намерете ъгъла между двете хорди, ако едната от тях разделя по-малката дъга, принадлежаща на другата хорда, на части, равни на 55° и 30°.

60. ЪГЪЛ, ЧИЙТО ВРЪХ Е ВЪНШНА ТОЧКА ЗА ОКРЪЖНОСТ



Т

Ъгъл, чийто връх е външен за една окръжност, а раменете му имат общи точки с тази окръжност, се измерва с полуразликата от дъгите, заключени между раменете му.

Дадено: окръжност k, $\sphericalangle ACB$, връх C – външен за k

Да се докаже: $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A_1B_1}\right)$.

Доказателство: Възможни са три случая:

1. двете рамена на ъгъла пресичат k;

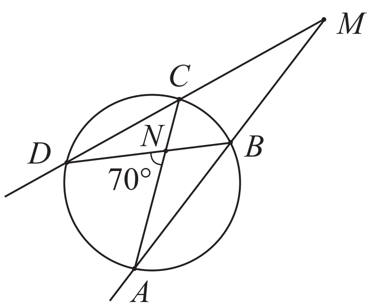
2. едното рамо на ъгъла пресича k, а другото е допирателна: $A = A_1$;

3. двете рамена на ъгъла са допирателни на k: $A = A_1$, $B = B_1$.

И в трите случая начертаваме хордата AB_1. За $\triangle AB_1C$ търсеният ъгъл е вътрешен, а $\sphericalangle 1$ е външен, т.е. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle 1 - \sphericalangle 2$. Всеки от ъглите $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$ е или вписан, или периферен и се измерва с половината от принадлежащата му дъга.

Получаваме $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1B_1} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A_1B_1}\right)$.

ЗАДАЧА 1 На чертежа хордите AC и BD се пресичат в точка N, а правите AB и CD – в точка M. Ако $\overset{\frown}{AD} : \overset{\frown}{BC} = 7:3$ и $\sphericalangle AND = 70°$, намерете големината на $\sphericalangle AMD$.



Решение:

1. $\overset{\frown}{AD} = 7x,\ \overset{\frown}{BC} = 3x\ \ (x > 0)$

$\sphericalangle AND = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}\right)$

$70° = \frac{1}{2}(7x + 3x) \to x = 14°$

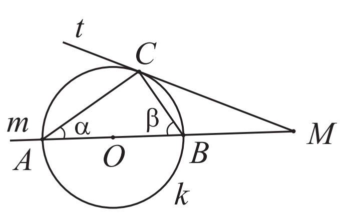
$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = 7.14° = 98°$

$\overset{\frown}{BC} = 3.14° = 42°$

2. $\sphericalangle AMD = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}\right) =$

$= \frac{1}{2}(98° - 42°) = 28°$

ЗАДАЧА 2 През точка M, външна за окръжността $k(O;\, r)$, са построени прави m и t. Правата m минава през O и пресича k в точки A и B (B е между A и M), а правата t се допира до k в точка C. Ако $\sphericalangle BAC : \sphericalangle ABC = 2:7$, намерете големината на $\sphericalangle AMC$ и $\sphericalangle BCM$.



Решение:

1. $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$

2. $\sphericalangle BAC = \alpha = 2x,\ \sphericalangle ABC = \beta = 7x\ \ (x>0)$

$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow x = 10°$

$\sphericalangle BAC = 20°,\ \sphericalangle ABC = 70°$

3. $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$20° = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$\overset{\frown}{BC} = 40°$

4. $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

$70° = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

$\overset{\frown}{AC} = 140°$

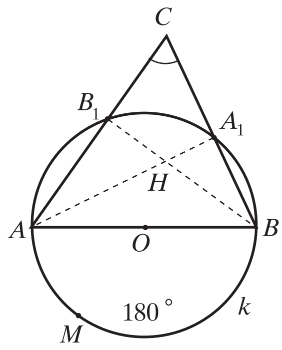
5. $\sphericalangle AMC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}(140° - 40°) = 50°$

6. $\sphericalangle BCM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}40° = 20°$

ЗАДАЧА 3 Върху страната AB на остроъгълен $\triangle ABC$, взета като диаметър, е построена окръжност k, която пресича BC и AC съответно в точките A_1 и B_1.

а) Докажете, че AA_1 и BB_1 са височини в $\triangle ABC$.

б) Ако $\sphericalangle ACB = 70°$ и $AA_1 \times BB_1 = H$, намерете $\sphericalangle AHB$, $\sphericalangle BHA_1$ и $\sphericalangle A_1AB_1$.



Решение:

а) $\sphericalangle AA_1B$ – вписан $\Rightarrow \sphericalangle AA_1B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMB} = \frac{1}{2}180° = 90°$ (1)

Аналогично намираме, че $\sphericalangle AB_1B = 90°$. (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, т.е. са височини в $\triangle ABC$.

б) От $\sphericalangle C = 70°$ и $\sphericalangle C = \frac{1}{2}\left(180° - \overset{\frown}{A_1B_1}\right)$

$\Rightarrow 90° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1B_1} = 70°, \quad \overset{\frown}{A_1B_1} = 40°.$

$\sphericalangle AHB = \frac{1}{2}\left(180° + \overset{\frown}{A_1B_1}\right) = \frac{1}{2}(180° + 40°) = 110°$

$\sphericalangle A_1AB_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1B_1} = \frac{1}{2}40° = 20°$

$\sphericalangle BHA_1 = 180° - \sphericalangle AHB = 180° - 110° = 70°$

ЗАДАЧИ

1 Точките A, B, C и D от окръжността k са такива, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 4:1:2:5$. Правите AB и CD се пресичат в точка M, а правите AD и BC – в точка Q. Намерете големините на $\sphericalangle AMD$ и $\sphericalangle AQB$.

2 През точка M, външна за окръжността $k(O; r)$, са построени прави m и t. Правата m минава през O и пресича k в точки A и B (B е между A и M), а правата t се допира до k в точка C. Ако $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} = 13:5$, намерете големината на $\sphericalangle AMC$ и ъглите на $\triangle ABC$.

3 От точка, вън от окръжност k, са начертани две секущи на k, които образуват ъгъл, равен на 53°. Намерете едната от дъгите, заключени между раменете на ъгъла, ако другата дъга е 150°.

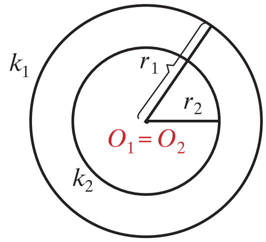
4 През точка M, външна за окръжността k, са построени прави m и n, които пресичат k съответно в точки A и B (B е между A и M) и C и D (C е между D и M). Намерете $\sphericalangle AMD$, ако $\sphericalangle ABD = 52°$ и $\sphericalangle BDC = 25°$.

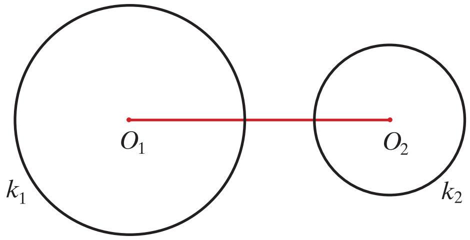
5 Дъга от окръжност е $47°20'$. Намерете големината на ъгъла, заключен между допирателните към окръжността, построени през краищата на тази дъга.

6 Три точки върху окръжност я разделят на дъги, които се отнасят както 8 : 11 : 17. Намерете ъглите на триъгълника, образуван от допирателните на окръжността, построени в тези три точки.

7 Върху окръжност са взети точките A, B и C така, че $\sphericalangle ABC = \alpha$. Намерете ъгъла между допирателните на окръжността, построени в точките A и C.

61. ВЗАИМНО ПОЛОЖЕНИЕ НА ДВЕ ОКРЪЖНОСТИ





Дадени са двете окръжности
$k_1\,(O_1; r_1)$ и $k_2\,(O_2; r_2)$, като $r_1 \geq r_2$.

I случай: Ако $O_1 \equiv O_2$, окръжностите k_1 и k_2 се наричат **концентрични**, като:

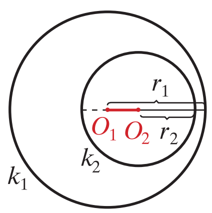
при $r_1 = r_2$ те съвпадат,
при $r_1 \neq r_2$ те нямат общи точки.

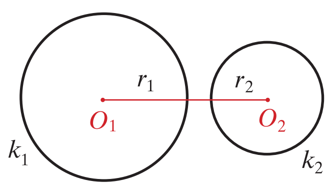
II случай: Ако $O_1 \neq O_2$, окръжностите k_1 и k_2 се наричат **ексцентрични**.
Правата O_1O_2 се нарича **централа** на окръжностите k_1 и k_2.
Дължината d на отсечката O_1O_2 се нарича **дължина на централата**,

$$d = O_1O_2 .$$

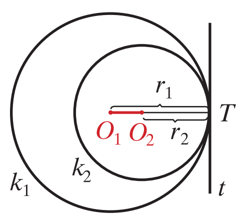
Взаимно положение на две ексцентрични окръжности според зависимостите между d, r_1 и r_2

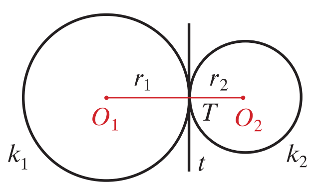
1. k_1 и k_2 нямат общи точки, когато $0 < d < r_1 - r_2$ или $d > r_1 + r_2$ $(r_1 > r_2)$.



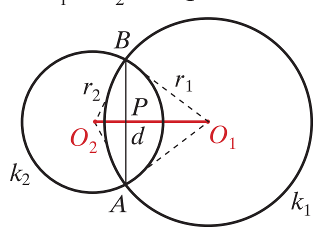


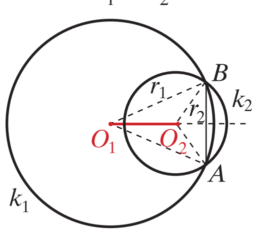
2. k_1 и k_2 са допирателни, когато $d = r_1 - r_2$ или $d = r_1 + r_2$ $(r_1 > r_2)$.





3. k_1 и k_2 са пресекателни, когато $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ $(r_1 > r_2)$.





Т Общата хорда на две пресекателни окръжности е перпендикулярна на централата им и се дели от нея на две равни части.

Дадено: $k_1\ (O_1; r_1)$ и $k_2\ (O_2; r_2)$ – пресекателни окръжности,
AB – обща хорда, $AB \times O_1O_2 = P$

Да се докаже: $AB \perp O_1O_2$, $PA = PB$

Доказателство:

$$\left.\begin{aligned} O_1A = O_1B = r_1 \ &\Rightarrow\ O_1 \in s_{AB} \\ O_2A = O_2B = r_2 \ &\Rightarrow\ O_2 \in s_{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ O_1O_2 \equiv s_{AB} \ \Rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{O_1O_2 \perp AB} \\ \boldsymbol{PA = PB} \end{matrix}$$

ЗАДАЧА 1 Дадени са окръжностите $k_1(O_1; r_1 = 2\text{ cm})$ и $k_2(O_2; r_2 = 1\text{ cm})$. Определете взаимното им положение, ако:

а) $O_1O_2 = 5\text{ cm}$; б) $O_1O_2 = 3\text{ cm}$; в) $O_1O_2 = 1\text{ cm}$; г) $O_1O_2 = 2\text{ cm}$.

Решение:

а) $\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 3\text{ cm} \\ O_1O_2 &= 5\text{ cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow O_1O_2 > r_1 + r_2 \Rightarrow k_1$ и k_2 нямат общи точки

б) $\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 3\text{ cm} \\ O_1O_2 &= 3\text{ cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow O_1O_2 = r_1 + r_2 \Rightarrow$ k_1 и k_2 се допират външно

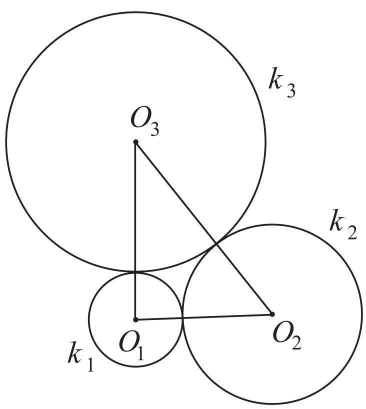
в) $\left.\begin{aligned} r_1 - r_2 &= 1\text{ cm} \\ O_1O_2 &= 1\text{ cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow O_1O_2 > r_1 - r_2 \Rightarrow$ k_1 и k_2 се допират вътрешно

г) $\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 3\text{ cm} \\ r_1 - r_2 &= 1\text{ cm} \\ O_1O_2 &= 2\text{ cm} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2 \\ &\Rightarrow k_1 \text{ и } k_2 \text{ са пресека-} \\ &\text{телни} \end{aligned}$

ЗАДАЧА 2 Дадени са три окръжности $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$ и $k_3(O_3; r_3)$, всеки две от които се допират външно. Ако $r_1 = 1\text{ cm}$, $r_2 = 2\text{ cm}$, $r_3 = 3\text{ cm}$, намерете:

а) $P_{\triangle O_1O_2O_3}$; б) $\sphericalangle O_2O_1O_3$; в) $S_{\triangle O_1O_2O_3}$.

Решение:



а) $O_1O_2 = r_1 + r_2 = 1 + 2 = 3\text{ cm}$

$O_2O_3 = r_2 + r_3 = 2 + 3 = 5\text{ cm}$

$O_1O_3 = r_1 + r_3 = 1 + 3 = 4\text{ cm}$

$P_{\triangle O_1O_2O_3} = O_1O_2 + O_2O_3 + O_1O_3 = 12\text{ cm}.$

б) Забелязваме, че $O_1O_2^{\,2} + O_1O_3^{\,2} = O_2O_3^{\,2}$

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$\Rightarrow \triangle O_1O_2O_3$ е правоъгълен $\Rightarrow \sphericalangle O_2O_1O_3 = 90^\circ$.

в) $S_{\triangle O_1O_2O_3} = \dfrac{O_1O_2 . O_1O_3}{2} = \dfrac{3.4}{2} = 6\text{ cm}^2$

ЗАДАЧИ

1 Дадени са две пресичащи се окръжности. Докажете, че централата на двете окръжности е симетрала на общата им хорда.

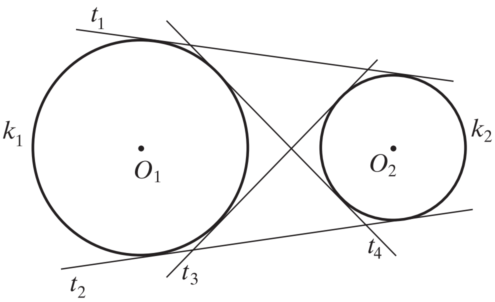
2 Да се докаже, че ако пресечем две концентрични окръжности (с различни радиуси) с права, отсечките от тази права, заключени между двете окръжности, са равни.

3 Радиусите на две вътрешно допирателни окръжности се отнасят както 5 : 3, а дължината на централата им е 14 cm. Намерете радиусите.

4 Дадени са три окръжности $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$ и $k_3\ (O_3; r_3)$, всеки две от които се допират външно. Ако $r_1 = 4\text{ cm}$, $r_2 = 6\text{ cm}$, $r_3 = 2\text{ cm}$, намерете обиколката и лицето на $\triangle O_1O_2O_3$.

62. ОБЩИ ДОПИРАТЕЛНИ НА ДВЕ ОКРЪЖНОСТИ

О Права, която се допира едновременно до две окръжности, се нарича **обща допирателна** на двете окръжности.



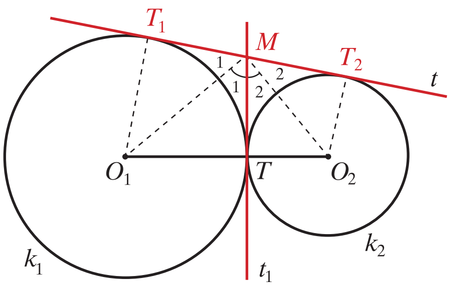
Дадени са две окръжности k_1 и k_2, външни една за друга.

Правите t_1 и t_2, t_3 и t_4 се допират и до k_1, и до k_2, като

t_1 и t_2 се наричат **външни допирателни**,
t_3 и t_4 се наричат **вътрешни допирателни**

за двете окръжности.

ЗАДАЧА 1 Две окръжности $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$ се допират външно в точка T. Едната обща външна допирателна t се допира до k_1 и k_2 съответно в точките T_1 и T_2. Общата вътрешна допирателна на k_1 и k_2 пресича t в точка M. Да се докаже, че:
а) точката M е средата на T_1T_2;   б) $\triangle O_1MO_2$ е правоъгълен.



Доказателство:

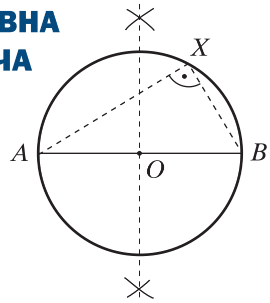
а) $\left.\begin{aligned} MT_1 &= MT \\ MT_2 &= MT \end{aligned}\right\} \Rightarrow MT_1 = MT_2$

б) $\left.\begin{aligned} \sphericalangle T_1MO_1 &= \sphericalangle TMO_1 = \sphericalangle 1 \\ \sphericalangle T_2MO_2 &= \sphericalangle TMO_2 = \sphericalangle 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\sphericalangle 1 + 2\sphericalangle 2 = 180^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 90^\circ$, т.е. $\sphericalangle O_1MO_2 = 90^\circ$ и $\triangle O_1MO_2$ е правоъгълен.

ЗАДАЧА 2 Дадена е отсечка AB. Да се построят точки, за които $\sphericalangle AXB = 90^\circ$.

ОСНОВНА ЗАДАЧА

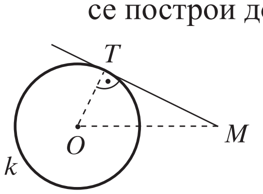


Построяваме: **1.** s_{AB};
2. $s_{AB} \times AB = O$ – средата на AB;
3. $k\,(O;\ r = OA = OB)$.

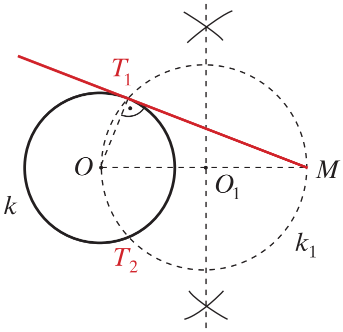
Всяка точка X от k, $X \neq A$ и B, отговаря на условието на задачата, защото $\sphericalangle AXB$ е вписан, AB – диаметър, и

$\sphericalangle AXB = \frac{1}{2}180^\circ = 90^\circ$.

ЗАДАЧА 3 Дадена е окръжност $k\,(O;\ r)$ и точка M, външна за k. През точка M да се построи допирателна към k.



Търсим точка T от k, за която $\sphericalangle OTM = 90^\circ$. Тогава T е точка от окръжността с диаметър OM.

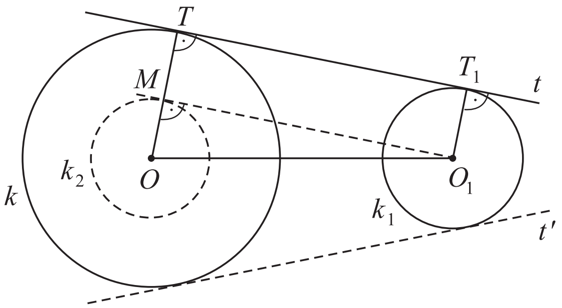


Построяваме: **1.** отсечка OM;
2. s_{OM}, $s_{OM} \times AB = O_1$;
3. $k_1\,(O;\, r_1 = O_1O = O_1M)$;
4. $k_1 \times k = T_1\,(T_2)$;
5. правата MT_1 – допирателна.

Окръжностите k и k_1 се пресичат в две точки T_1 и T_2.
Има две прави MT_1 и MT_2, които са допирателни.

ЗАДАЧА 4 Да се построят общите външни допирателни на две непресичащи се окръжности.

Дадени са две окръжности $k\,(O;\, r)$ и $k_1\,(O_1;\, r_1)$. Ако t е обща допирателна на k и k_1 съответно в точките T и T_1, $OT \perp t$, $O_1T_1 \perp t \Rightarrow OT \parallel O_1T_1$.



Нека $r > r_1$ и $k_2(O;\, r - r_1)$.
Можем да начертаем (виж *Задача 3*) допирателна от точка O_1 към k_2 – правата O_1M $(M \in k_2)$.

Построяваме: **1.** окръжност $k_2(O;\, r - r_1)$;
2. допирателна O_1M към k_2;
3. точка $T = OM \times k$;
4. t през T, $t \parallel O_1M$.

Правата t е допирателна на окръжностите k и k_1, защото:

- от $OT \perp O_1M$ и $t \parallel O_1M \Rightarrow OT \perp T\,T_1$, т.е. $OT \perp t$ и t е допирателна към k;
- от $O_1T_1 = MT = r \Rightarrow t$ е допирателна и към k_1.

При $r > r_1$ задачата има две решения: t и t'.
При $r = r_1$ $M \equiv O$, $O_1M \equiv O_1O$ и $t \parallel t'$.

Може да се реши и следната задача: Да се построят общите вътрешни допирателни на две окръжности k и k_1, които не се пресичат. В този случай се построява окръжност $k_2(O;\, r + r_1)$ и отново се използва построението на допирателна от точка към окръжност.

ЗАДАЧИ

1 Дадени са окръжностите $k_1(O_1;\, r_1)$ и $k_2(O_2;\, r_2)$. Постройте общите им допирателни, ако:
а) $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $O_1O_2 = 2$;
б) $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $O_1O_2 = 6$;
в) $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $O_1O_2 = 8$;
г) $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $O_1O_2 = 5$.

2 Две окръжности $k_1(O_1;\, 3)$ и $k_2(O_2;\, 1)$ се допират външно. Намерете ъгъла между общата вътрешна и общата им външна допирателна.

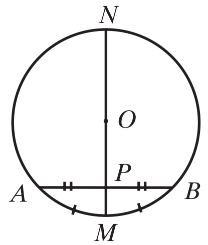
3 Две окръжности $k_1(O_1;\, 9)$ и $k_2(O_2;\, 4)$ се допират външно. Едната обща външна допирателна се допира до k_1 и k_2 съответно в точките T_1 и T_2. Ако $O_1O_2 = 2$, намерете дължината на T_1T_2.

4 Дадени са окръжности $k_1(O_1;\, 7)$ и $k_2(O_2;\, 1)$. Едната обща външна допирателна се допира до k_1 и k_2 съответно в точките T_1 и T_2. Ако $O_1O_2 = 2$, намерете дължината на T_1T_2.

63. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „ОКРЪЖНОСТ“

ЗАПОМНЕТЕ!

Диаметър, хорда, дъга

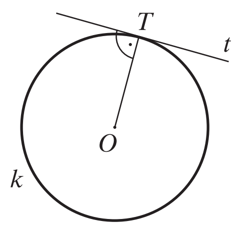


Ако $MN \perp AB$, то $AP = PB$ и $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

Ако MN минава през P – средата на AB, то $MN \perp AB$ и $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

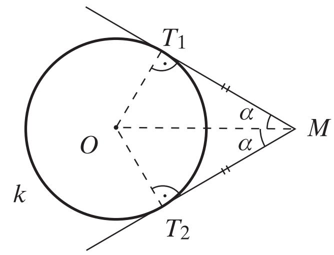
Ако MN минава през M – средата на $\overset{\frown}{AB}$, то $MN \perp AB$ и $AP = PB$.

Допирателна към окръжност



$T \in k$

$OT \perp t$

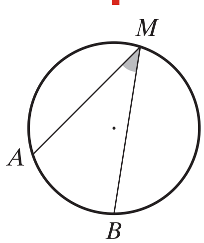


$M \in k$

$MT_1 = MT_2$

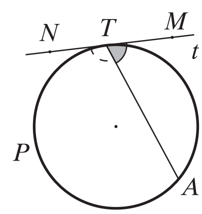
$\sphericalangle OMT_1 = \sphericalangle OMT_2 = \alpha$

Окръжност и ъгъл



Вписан ъгъл

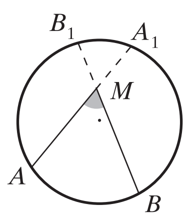
$\sphericalangle AMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$



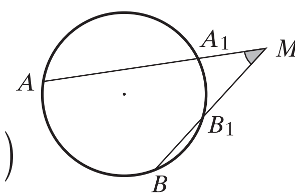
Периферен ъгъл

$\sphericalangle ATM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$

$\sphericalangle ATN = \frac{1}{2}\overset{\frown}{APT}$

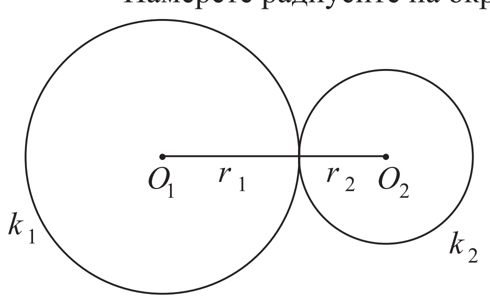


$\sphericalangle AMB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A_1B_1}\right)$



$\sphericalangle AMB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A_1B_1}\right)$

ЗАДАЧА 1 Окръжностите $k_1(O_1; r_1)$ и $k_2(O_2; r_2)$ се допират външно. Намерете радиусите на окръжността, ако $O_1O_2 = 16$ cm и $r_1 : r_2 = 5 : 3$.



Решение:

От $r_1 : r_2 = 5 : 3 \Rightarrow r_1 = 5x, r_2 = 3x \ (x > 0)$

$r_1 + r_2 = O_1O_2$

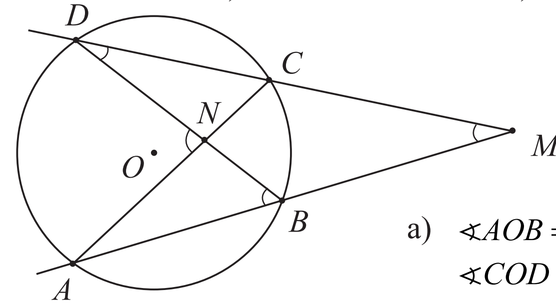
$5x + 3x = 16$

$x = 2$ cm

$\Rightarrow r_1 = 5 . 2 = 10$ cm

$r_2 = 3 . 2 = 6$ cm

ЗАДАЧА 2 Върху окръжност $k(O)$ са взети точките A, B, C и D така, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 5:2:4:7$. Ако $AB \times CD = M$ и $AC \times BD = N$, намерете големината на:
а) $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$; б) $\sphericalangle ABD$ и $\sphericalangle BDC$; в) $\sphericalangle AMD$ и $\sphericalangle AND$.



Решение:

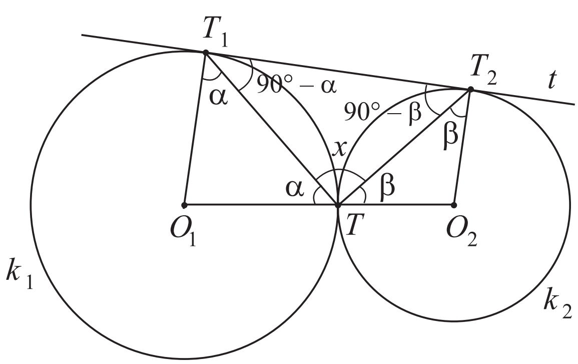
От $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 5:2:4:7$
и $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = 360°$
$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 100°,\ \overset{\frown}{BC} = 40°,\ \overset{\frown}{CD} = 80°,\ \overset{\frown}{DA} = 140°$.

а) $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB} = 100°$ (централен ъгъл)
$\sphericalangle COD = \overset{\frown}{CD} = 80°$ (централен ъгъл)

б) $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} = \frac{1}{2}\cdot 140° = 70°$ (вписан ъгъл)
$\sphericalangle BDC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\cdot 40° = 20°$ (вписан ъгъл)

в) $\sphericalangle AMD = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}\cdot(140° - 40°) = 50°$ (т. M е външна за k)
$\sphericalangle AND = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}\cdot(140° + 40°) = 90°$ (т. N е вътрешна за k)

ЗАДАЧА 3 Две окръжности $k_1\ (O_1)$ и $k_2\ (O_2)$ се допират външно в точка T. Едната обща външна допирателна t се допира до k_1 и k_2 съответно в точките T_1 и T_2. Да се докаже, че $\triangle T_1TT_2$ е правоъгълен.



Решение:

1. $\triangle O_1T_1T$ – равнобедрен
$\Rightarrow \sphericalangle O_1T_1T = \sphericalangle O_1TT_1 = \alpha$
$\sphericalangle O_1T_1T_2 = 90° \Rightarrow \sphericalangle TT_1T_2 = 90° - \alpha$

2. $\triangle O_2T_2T$ – равнобедрен
$\Rightarrow \sphericalangle O_2T_2T = \sphericalangle O_2TT_2 = \beta$
$\sphericalangle O_2T_2T_1 = 90° \Rightarrow \sphericalangle T_1TT_2 = 90° - \beta$

3. $\triangle TT_1T_2 \rightarrow \sphericalangle TT_1T_2 = x$
$90° - \alpha + x + 90° - \beta = 180°$
$x = \alpha + \beta$

4. $\sphericalangle O_1TO_2 = 180°$ – изправен ъгъл
$\alpha + x + \beta = 180°$
$2x = 180°$
$x = 180° : 2$
$x = 90°$
$\Rightarrow \sphericalangle T_1TT_2 = 90°$

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „ОКРЪЖНОСТ“

1. Ако две хорди в една окръжност са успоредни и равни, докажете, че отсечките, които съединяват противоположните им краища, са диаметри.

2. Дъгите $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ABC}$ и $\overset{\frown}{BCD}$ на една окръжност $k\ (O)$ са съответно $40°$, $70°$ и $100°$. Намерете ъглите между правите:

а) AB и BD; б) AC и BD;

в) AB и CD; г) OA и OD.

3. Точките A, B, C и D, взети в този ред, са върху окръжност. Дъгите $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{DA}$ се отнасят както $2 : 6 : 3 : 7$. Пресечните точки на двойките прави AC и BD, AB и CD, AD и BC са съответно L, M и N. Да се намерят ъглите CLD, ALD, BMC, ANB, BCM, ABN.

4. Ако върху страната AB на равностранен $\triangle ABC$, взета като диаметър, се построи окръжност k, която пресича AC и BC съответно в точките M и N, докажете, че:

а) точките M и N са средите на страните на триъгълника;

б) дъгите $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{MN}$ и $\overset{\frown}{NB}$ са равни.

5. Точките A, B, C и D, взети в този ред, са точки от окръжността k. Точките M, N, P и Q са средите съответно на дъгите $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{DA}$. Да се докаже, че хордите MP и NQ са перпендикулярни.

6. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха C. Катетът AC е диаметър на окръжност $k(O;\ r = \frac{1}{2}AC)$, която пресича хипотенузата в точка M. Допирателната на k в точката M пресича катета BC в точка N. Докажете, че N е средата на BC.

7. Точките A, B и C от окръжност k са върхове на триъгълник. Ъглополовящата на ъгъла при върха C пресича k в точка K. Докажете, че:

а) K е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$;

б) K лежи на симетралата AB.

8. В точка M от окръжност k е построена допирателна t. Хордите MB и MA образуват ъгъл γ. Изразете чрез γ периферните ъгли, които допирателната t образува с хордите MA и MB, ако те се отнасят както $1 : 2$.

9. Права минава през допирната точка на две окръжности и отсича от едната от тях дъга с мярка $88°$. Намерете градусните мерки на дъгите, на които правата разделя всяка от двете окръжности.

10. Точките A, B, C лежат на окръжност. Средите на дъгите $\overset{\frown}{AB}$ (несъдържаща C), $\overset{\frown}{BC}$ (несъдържаща A), $\overset{\frown}{AC}$ (несъдържаща B) са съответно точките L, M, N. Докажете, че двойките прави CL и MN, BN и ML, AM и NL са взаимноперпендикулярни.

11. Точка M лежи на продължението на диаметъра AB на окръжност $k\ (O;\ r)$ на разстояние $BM = r$. Допирателните на k, построени от точка M, са MC и MD. Намерете $\sphericalangle CMD$ и дъгата $\overset{\frown}{CAD}$.

12. В краищата на хорда AB на окръжност k са построени допирателните на k, които се пресичат в точка C. Намерете $\sphericalangle ACB$, ако хордата AB дели k на две дъги, които се отнасят както $5 : 13$.

13. MT и MT_1 са допирателни към окръжност $k\ (O;\ r)$ от точка M, външна за k. Да се докаже:

а) $\sphericalangle TOM = \sphericalangle T_1OM$;

б) OM е симетрала на отсечката TT_1.

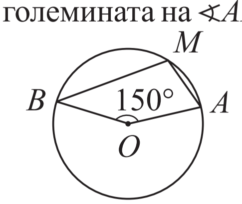
64. ТЕСТ № 1 ВЪРХУ ТЕМАТА „ОКРЪЖНОСТ“

1. Дъгата, равна на $\frac{1}{6}$ от окръжността, е:
А) 50°;
Б) 60°;
В) 100°;
Г) 120°.

2. В окръжност $k(O)$ AB е диаметър. Ако $\overset{\frown}{AM} : \overset{\frown}{MN} : \overset{\frown}{NB} = 3:2:4$, големината на $\sphericalangle MON$ е:
А) 80°;
Б) 60°;
В) 40°;
Г) 20°.

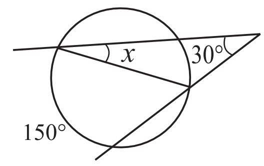
3. Дадени са окръжностите $k_1(O_1;\ 4)$ и $k_2(O_2;\ 10)$. Ако централата им $O_1O_2 = 8$, определете взаимното положение на двете окръжности:
А) нямат общи точки;
Б) вътрешно допирателни;
В) външно допирателни;
Г) пресекателни.

4. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на $\sphericalangle AMB$.
А) 105°;
Б) 150°;
В) 115°;
Г) 120°.



5. Дъга от окръжност е 53°52′. Големината на ъгъла, заключен между допирателните към окръжността, построени през краищата на тази дъга, е:
А) 126°8′;
Б) 126°48′;
В) 107°4′;
Г) 53°52′.

6. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на ъгъл x.
А) 30°;
Б) 45°;
В) 50°;
Г) 60°.



7. Три окръжности с радиуси 2 cm, 3 cm и 4 cm са две по две външно допирателни. Периметърът на триъгълника с върхове центровете на трите окръжности в сантиметри е:
А) 10;
Б) 11;
В) 12;
Г) 18.

8. В окръжност $k(O)$ хордите AB и BC са перпендикулярни. Ако $AB : BC = 7 : 5$ и $AB + BC = 24$ cm, намерете (в cm):
а) разстоянието от O до AB;
б) разстоянието от O до BC.

9. В окръжност $k(O)$ хордата AB сключва с допирателната към окръжността в точка A ъгъл 60°. Хордата BC е успоредна на допирателната и има дължина 6 см. Намерете:
а) големината на $\sphericalangle AOB$;
б) големината на ъглите на $\triangle ABC$;
в) периметъра на $\triangle ABC$.

10. Точките A, B, C и D от окръжност k са такива, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 5:2:6:7$. Правите AB и CD се пресичат в точка N. Правите AC и BD се пресичат в точка M. Намерете големините на $\sphericalangle AMB$ и $\sphericalangle AND$.

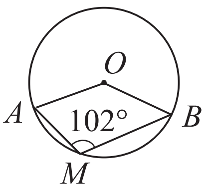
ТЕСТ № 2 ВЪРХУ ТЕМАТА „ОКРЪЖНОСТ“

1. Дъгата, равна на $\frac{2}{15}$ от окръжността, е:
А) 24°;
Б) 40°;
В) 46°;
Г) 48°.

2. В окръжност $k(O)$ AB е диаметър. Ако $\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DB} = 4 : 7 : 9$, големината на $\sphericalangle COD$ е:
А) 63°;
Б) 81°;
В) 36°;
Г) 18°.

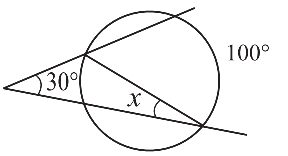
3. Дадени са окръжностите $k_1(O_1; 4)$ и $k_2(O_2; 6)$. Ако централата им $O_1O_2 = 12$, определете взаимното положение на двете окръжности:
А) нямат общи точки;
Б) вътрешно допирателни;
В) външно допирателни;
Г) пресекателни.

4. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на $\sphericalangle AOB$.
А) 78°;
Б) 129°;
В) 156°;
Г) 178°.



5. Дъга от окръжност е 48°54′. Големината на ъгъла, заключен между допирателните към окръжността, построени през краищата на тази дъга, е:
А) 48°54′;
Б) 131°6′;
В) 131°46′;
Г) 97°48′.

6. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на ъгъл x.
А) 20°;
Б) 30°;
В) 50°;
Г) 70°.



7. Три окръжности с радиуси 4 cm, 5 cm и 6 cm са две по две външно допирателни. Периметърът на триъгълника с върхове центровете на трите окръжности в сантиметри е:
А) 24;
Б) 25;
В) 28;
Г) 30.

8. В окръжност $k(O)$ хордите MN и NP са перпендикулярни. Ако $MN : NP = 2 : 3$ и $MN + NP = 20$ cm, намерете в сантиметри:
а) разстоянието от O до MN;
б) разстоянието от O до NP.

9. В окръжност $k(O)$ хордата AB сключва с допирателната към окръжността в точка B ъгъл 60°. Хордата AC е успоредна на допирателната и има дължина 8 см. Намерете:
а) големината на $\sphericalangle AOB$;
б) големината на ъглите на $\triangle ABC$;
в) периметъра на $\triangle ABC$.

10. Точките A, B, C и D от окръжност k са такива, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 9 : 2 : 3 : 6$. Правите AD и BC се пресичат в точка N. Правите AC и BD се пресичат в точка M. Намерете големините на $\sphericalangle ANB$ и $\sphericalangle BMC$.

ТЕМА 7

РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

(Урок № 65 – Урок № 75)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- действия с рационални дроби;
- преобразуване на рационални изрази;
- дробни уравнения;
- моделиране с дробни уравнения.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да извършват тъждествени преобразувания на рационални изрази;
- да пресмятат числена стойност на рационален израз;
- да доказват тъждества;
- да решават дробни уравнения;
- да моделират различни ситуации с уравнения, свеждащи се до дробни.

65. РАЦИОНАЛНИ ДРОБИ. ДЕФИНИЦИОННО МНОЖЕСТВО

Определения

Алгебричен израз: Запис, в който участват с определени означения алгебричните действия и редът на тяхното прилагане над величини и числа, означени съответно с букви и цифри. Алгебрични действия са събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване и коренуване.

Примери: $A = 3x^2 - 4mx + n$; $B = 5$; $C = ay^4$; $D = b$;

$$E = \frac{x^2 - 5a + 1}{x - 1};\ F = \frac{(x^3 - m)x}{2};\ M = \left(5\sqrt{x} + 1\right)^2 - a.$$

Рационален израз: Алгебричен израз, в който са използвани само знаците за действията събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване.

Примери: Изразите A, B, C, D, E, F.

Цял рационален израз: Рационален израз, който няма деление с променлива.

Примери: Изразите A, B, C, D, F.

Едночлен: Цял рационален израз, който е произведение от числа, записани с букви и цифри.

Примери: Изразите B, C, D.

Многочлен (полином): Цял рационален израз, който е сбор от едночлени. Едночленът също е многочлен.

Примери: Изразите A, B, C, D.

О Два рационални израза се наричат **тъждествено равни**, ако получават равни числени стойности за произволни стойности на променливите, допустими и за двата израза.

Примери: Рационалните изрази $A = (x + 1)^2$ и $B = x^2 + 2x + 1$ са тъждествено равни.

О Равенство, двете страни на което са тъждествено равни изрази, се нарича **тъждество**.

Основни тъждества:

Комуникативен закон: $u + v = v + u$, $uv = vu$
Асоциативен закон: $(u + v) + w = u + (v + w)$, $(uv)w = u(vw)$
Дистрибутивен закон: $u(v + w) = uv + uw$

О Множеството от стойности, които приема дадена променлива при определени условия, се нарича **дефиниционно множество** (ДМ).

ЗАДАЧА 1 Изразете времето, за което моторна лодка изминава 20 km по течението на една река, ако собствената скорост на лодката е x km/h ($x > 0$), а скоростта на течението е 3 km/h.

Решение: Скоростта на лодката по течението е ($x + 3$) km/h.

От формулата $t = \frac{s}{v}$ за времето в часове получаваме $\frac{20}{x+3}$.

Рационалният израз $\frac{20}{x+3}$ не е цял, защото знаменателят е израз, който съдържа променлива величина.

В *Задача 1* изразът $\frac{20}{x+3}$ има смисъл за всяко $x > 0$ (ДМ: $x > 0$), защото тогава $x + 3 > 0$, т.е. $x + 3 \neq 0$.

Ако разгледаме израза $\frac{20}{x+3}$ независимо от *Задача 1*, той има смисъл за всяка стойност на $x \neq -3$.

О Рационален израз, който е частно на два цели рационални израза, се нарича **рационална дроб**.

Рационалната дроб е израз от вида $\frac{u}{v}$, където u и v са цели рационални изрази и v не приема стойност 0.
Целите рационални изрази могат да се разглеждат като рационални дроби със знаменател 1.

О Стойностите, които могат да приемат означените с букви величини в един рационален израз, се наричат **допустими стойности** (ДС) на този израз.

- ДС на един цял рационален израз са всички числа;
- ДС на една рационална дроб са всички числа, при които знаменателят е различен от 0;
- ДС на рационален израз, свързан с конкретна задача, са всички числа, за които той има смисъл и които са съобразени с условието на задачата.

ЗАДАЧА 2 Намерете допустимите стойности на рационалните дроби

а) $A = \frac{x-5}{x+3}$; б) $B = \frac{2x+3}{x^2-1}$; в) $C = \frac{2x}{x^2+1}$.

Решение: а) $A = \frac{x-5}{x+3}$. Трябва $x + 3 \neq 0$, т.е. $x \neq -3$. Тогава ДС: $x \neq -3$.

б) $B = \frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}$.
Трябва $(x-1)(x+1) \neq 0$, т.е. $x \neq +1$, $x \neq -1$. Тогава ДС: $x \neq \pm 1$.

в) $C = \frac{2x}{x^2+1}$. Знаменателят $x^2 + 1 > 0$ за всяко x. Тогава ДС: всяко x.

ЗАДАЧИ

Намерете допустимите стойности на рационалните дроби:

1 $\frac{3x-1}{x+7}$; **3** $\frac{x+5}{x^2-4x}$; **5** $\frac{x+4}{x^2-3x+2}$; **7** $\frac{x-2}{x^3-27}$;

2 $\frac{2x-1}{x^2-9}$; **4** $\frac{x-2}{x^2+9}$; **6** $\frac{x+7}{x^3-x}$; **8** $\frac{x+2}{x^4-81}$.

66. ОСНОВНО СВОЙСТВО НА РАЦИОНАЛНИТЕ ДРОБИ. СЪКРАЩАВАНЕ И РАЗШИРЯВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ДРОБИ

Основно свойство на обикновените дроби

Ако числителя и знаменателя на една обикновена дроб умножим или разделим с едно и също число, различно от нула, получената дроб е равна на дадената.

Пример: $\underbrace{\frac{2}{3}=\left(\frac{2.2}{3.2}\right)=\frac{4}{6};}_{\text{разширяване на дробта}}$ $\underbrace{\frac{4}{6}=\left(\frac{4:2}{6:2}\right)=\frac{2}{3}.}_{\text{съкращаване на дробта}}$

При рационалните дроби буквите (променливи и параметри) означават числа и е вярно следното

!

Основно свойство на рационалните дроби

Ако числителя и знаменателя на една рационална дроб умножим или разделим с един и същ израз, различен от нула, получената дроб е тъждествено равна на дадената.

Пример: $\underbrace{\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-1)x}{(x-2)x}}_{\text{разширяване на дробта}}$, $x\neq 0,\ x\neq 2$; $\underbrace{\frac{(x-1)x}{(x-2)x}=\frac{x-1}{x-2}}_{\text{съкращаване на дробта}}$, $x\neq 0,\ x\neq 2$.

Ако рационалната дроб е $\frac{u}{v}$, $v\neq 0$, и изразът, с който умножаваме или делим, е $w\neq 0$, то $\frac{u}{v}=\frac{u.w}{v.w}$, $v\neq 0$, $w\neq 0$.

$\frac{u}{v}=\frac{u.w}{v.w}$ разширяване на дробта с w

$\frac{u.w}{v.w}=\frac{u}{v}$ съкращаване на дробта с w

!

Когато прилагаме основното свойство на рационалните дроби, получаваме два тъждествено равни израза, което означава, че те са равни за тези стойности на буквите в тях, за които и двата израза имат смисъл.

ЗАДАЧА 1 Съкратете дробите:

а) $\frac{10a^2(1-x)^2}{4a(1-x)}$; б) $\frac{(x-1)^2-1}{(2-x)^2}$; в) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

Решение: а) $\frac{10a^2(1-x)^2}{4a(1-x)}=\frac{5a(1-x)}{2}$, ДС: $a\neq 0, x\neq 1$

б) $\frac{(x-1)^2-1}{(2-x)^2}=\frac{x^2-2x+1-1}{(2-x)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{x}{x-2}$, ДС: $x\neq 2$

в) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{x-y}{x+y}$, ДС: $x\neq -y$

ЗАДАЧА 2 Съкратете дробта $\dfrac{x^2+6x+9}{2x+6}$ и намерете числената ѝ стойност при:

а) $x = -2{,}8$; б) $x = -4{,}12$,

Решение: $\dfrac{x^2+6x+9}{2x+6} = \dfrac{(x+3)^2}{2(x+3)} = \dfrac{x+3}{2}$

а) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{-2{,}8+3}{2} = 0{,}1$ б) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{-4{,}12+3}{2} = \dfrac{-1{,}12}{2} = -0{,}56$

ЗАДАЧА 3 Приведете дробта $\dfrac{3}{x}$ към знаменател:

а) $2xy$; б) $x^2 - 2x$; в) $3xy - 5x$.

Решение:

а) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{6y}{2xy}$ б) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{3(x-2)}{x^2-2x}$ в) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{3(3y-5)}{3xy-5x}$

ЗАДАЧА 4 Докажете тъждеството $\dfrac{ax^2+a^2(2x+a)}{ax^2-a^3} = \dfrac{ab+bx}{bx-ab}$.

Решение: $u = \dfrac{ax^2+a^2(2x+a)}{ax^2-a^3} = \dfrac{a(x^2+2ax+a^2)}{a(x+a)(x-a)} = \dfrac{x+a}{x-a}$ при $a \neq 0,\ x \neq \pm a$

$v = \dfrac{ab+bx}{bx-ab} = \dfrac{b(a+x)}{b(x-a)} = \dfrac{x+a}{x-a}$ при $b \neq 0,\ x \neq a$

$u = v \Rightarrow$ равенството е тъждество при ДС: $a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq \pm a$.

ЗАДАЧИ

Съкратете дробите:

1 $\dfrac{a^3}{a^2}$;

2 $\dfrac{ax^2}{x}$;

3 $\dfrac{x-2}{2-x}$;

4 $\dfrac{4m-4n}{8m-8n}$;

5 $\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$;

6 $\dfrac{a^2}{a^2+a^2b^2}$;

7 $\dfrac{a(x-y)}{b(y-x)}$;

8 $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$;

9 $\dfrac{x^2-4}{x+2}$;

10 $\dfrac{m^2-4}{2-m}$;

11 $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$;

12 $\dfrac{a+1}{a^2+2a+1}$;

13 $\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2-1}$;

14 $\dfrac{x-x^2}{x^2-1}$;

15 $\dfrac{(x-2)^2-4}{x^2-4}$;

16 $\dfrac{4m^2-4}{(m+1)^2}$;

17 $\dfrac{a-3}{(a-1)^2-a-1}$.

Опростете дробите и намерете числените им стойности:

18 $\dfrac{mn-m+n-1}{m^2+m}$ при $m = 0{,}5$; $n = 1$;

19 $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$ при $a = 5$; $b = -3$;

20 $\dfrac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2}$ при $x = 3$; $y = -2$.

Докажете тъждествата:

21 $\dfrac{x-a}{1-x} = \dfrac{a-x}{x-1}$;

22 $\dfrac{2}{x-1} = -\dfrac{2}{1-x}$;

23 $\dfrac{a^4-b^4}{a^2+b^2} = \dfrac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^2-b^2}$;

24 $\dfrac{ax+a^2+x+a}{a^2+2ax+x^2} = \dfrac{1+a}{a+x}$.

67. ПРИВЕЖДАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ДРОБИ КЪМ ОБЩ ЗНАМЕНАТЕЛ

При записването на дроби с един и същ знаменател казваме, че ги **привеждаме към общ (еднакъв) знаменател**. От всички кратни на знаменателите за общ знаменател вземаме това кратно, което е от най-ниска степен. То се нарича най-малък общ знаменател.

ЗАДАЧА 1 Приведете към общ знаменател дробите:

а) $\dfrac{5}{x}$ и $\dfrac{3}{y}$; б) $\dfrac{7}{2(x+3)}$ и $\dfrac{x}{3(x-2)}$; в) $\dfrac{4}{2x+3}$ и $\dfrac{x+5}{3x}$.

Решение:

а) $$\underbrace{\dfrac{\overbrace{5}^{y}}{x} \text{ и } \dfrac{\overbrace{3}^{x}}{y}}_{x.y} \to \dfrac{5y}{xy} \text{ и } \dfrac{3x}{xy}$$

б) $$\underbrace{\dfrac{\overbrace{7}^{3(x-2)}}{2(x+3)} \text{ и } \dfrac{\overbrace{x}^{2(x+3)}}{3(x-2)}}_{6(x+3)(x-2)} \to \dfrac{21(x-2)}{6(x+3)(x-2)} \text{ и } \dfrac{2x(x+3)}{6(x+3)(x-2)}$$

в) $$\underbrace{\dfrac{\overbrace{4}^{3x}}{2x+3} \text{ и } \dfrac{\overbrace{x+5}^{2x+3}}{3x}}_{3x(2x+3)} \to \dfrac{12x}{3x(2x+3)} \text{ и } \dfrac{(2x+3)(x+5)}{3x(2x+3)}$$

НОК на взаимнопрости числа е тяхното произведение.
НОК на числата 2 и 3, които са взаимнопрости, е 2 . 3 = 6.
НОК на неразложимите рационални изрази е тяхното произведение.
НОК на неразложимите изрази $(x + 3)$ и $(x - 2)$ е тяхното произведение $(x + 3)(x - 2)$.

ЗАДАЧА 2 Приведете към най-малък общ знаменател дробите:

а) $\dfrac{5}{2x^2y}$ и $\dfrac{4}{3x^3y^3}$; б) $\dfrac{x+7}{x^2-4}$ и $\dfrac{3x}{4x+8}$; в) $\dfrac{4}{x^2-3x}$ и $\dfrac{5}{x^2+3x}$.

Решение:

а) $$\underbrace{\dfrac{\overbrace{5}^{3xy^2}}{2x^2y} \text{ и } \dfrac{\overbrace{4}^{2}}{3x^3y^3}}_{6x^3y^3} \to \dfrac{15xy^2}{6x^3y^3} \text{ и } \dfrac{8}{6x^3y^3}$$

б) $$\dfrac{x+7}{x^2-4} \text{ и } \dfrac{3x}{4x+8} \Rightarrow \underbrace{\dfrac{\overbrace{x+7}^{4}}{x^2-4} \text{ и } \dfrac{\overbrace{3x}^{x-2}}{4x+8}}_{4(x+2)(x-2)} \to \dfrac{4(x+7)}{4(x+2)(x-2)} \text{ и } \dfrac{3x(x-2)}{4(x+2)(x-2)}$$

в) $\dfrac{4}{x^2-3x}$ и $\dfrac{5}{x^2+3x}$ $\rightarrow$ $\underbrace{\dfrac{\overset{x+3}{\smile}\,4}{x(x-3)} \text{ и } \dfrac{\overset{x-3}{\smile}\,5}{x(x+3)}}_{x(x-3)(x+3)}$ $\rightarrow$ $\dfrac{4(x+3)}{x(x-3)(x+3)}$ и $\dfrac{5(x-3)}{x(x-3)(x+3)}$

Правило за намиране на най-малък общ знаменател на рационални дроби

!

- Разлагаме знаменателите на дадените дроби на множители.
- Образуваме произведението от НОК на числовите множители и от най-високите степени на получените при разлагането на знаменателите множители.

Ако знаменателите на дробите нямат общ множител, най-малкият им общ знаменател е равен на тяхното произведение

ЗАДАЧА 3 Приведете към най-малък общ знаменател дробите:

$$\frac{5}{x^2+2x},\ \frac{3}{10-2x} \text{ и } \frac{7}{x^2-3x-10}.$$

Решение:

$$\frac{5}{x^2+2x}, \qquad \frac{3}{10-2x} \quad \text{и} \quad \frac{7}{x^2-3x-10}$$

$$\frac{5}{x(x+2)}, \qquad \frac{3}{2(5-x)} \quad \text{и} \quad \frac{7}{(x+2)(x-5)}$$

$$\underbrace{\frac{\overset{2(x-5)}{\smile}\,5}{x(x+2)}, \qquad \frac{\overset{x(x+2)}{\smile}\,-3}{2(x-5)} \quad \text{и} \quad \frac{\overset{2x}{\smile}\,7}{(x+2)(x-5)}}_{2x(x+3)(x-5)}$$

$$\frac{10(x-5)}{2x(x+2)(x-5)}, \quad \frac{-3x(x+2)}{2x(x+2)(x-5)} \quad \text{и} \quad \frac{14x}{2x(x+2)(x-5)}$$

ЗАДАЧИ

Приведете към най-малък общ знаменател дробите:

1 $\dfrac{3}{x^2}$ и $\dfrac{5}{x}$;

2 $\dfrac{x}{x-2}$ и $\dfrac{3}{x+2}$;

3 $\dfrac{2}{x-3}$ и $\dfrac{5}{x-1}$;

4 $\dfrac{3}{x^2-2x}$ и $\dfrac{1}{x^2-4}$;

5 $\dfrac{x}{x^2-9}$ и $\dfrac{2}{3x+9}$;

6 $\dfrac{2}{x-4}$; $\dfrac{x}{x+4}$ и $\dfrac{5}{x^2-16}$;

7 $\dfrac{3}{x-2}$; $\dfrac{4}{x+3}$ и $\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$;

8 $\dfrac{2}{x^2-3x}$; $\dfrac{x+7}{x^2-9}$ и $\dfrac{4}{x^2+3x}$;

9 $\dfrac{5}{4x^2-9}$; $\dfrac{2}{2x+3}$ и $\dfrac{4}{2x^2-3x}$;

10 $\dfrac{5}{x-2}$; $\dfrac{x+7}{x^3-8}$ и $\dfrac{3}{x^2+2x+4}$.

68. СЪБИРАНЕ И ИЗВАЖДАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ДРОБИ

В рационалните дроби буквите (променливи и параметри) означават числа. Следователно правилата за действия с обикновени дроби са приложими и за рационалните дроби.

Тъждествата

$$\frac{u}{v}+\frac{u_1}{v}=\frac{u+u_1}{v},\ \frac{u}{v}-\frac{u_1}{v}=\frac{u-u_1}{v},\ v\neq 0,$$

изразяват правилата за събиране и изваждане на рационални дроби с еднакви знаменатели

ЗАДАЧА 1 Извършете действията:

а) $\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{x}{x-3}$; б) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}$; в) $\dfrac{3x+5}{2x-3}-\dfrac{x+4}{2x-3}$.

Решение:

а) $\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{x+1+x}{x-3}=\dfrac{2x+1}{x-3},\ x\neq 3$

б) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+2-1}{x-1}=\dfrac{x+1}{x-1},\ x\neq 1$

в) $\dfrac{3x+5}{2x-3}-\dfrac{x+4}{2x-3}=\dfrac{3x+5-(x+4)}{2x-3}=\dfrac{3x+5-x-4}{2x-3}=\dfrac{2x+1}{2x-3},\ x\neq\dfrac{3}{2}$

!

Сборът (**разликата**) на рационални дроби с различни знаменатели свеждаме до сбор (разлика) на рационални дроби с еднакви знаменатели, като разширяваме дробите с подходящо избран допълнителен множител, за да ги приведем към един и същ знаменател.

I случай: Знаменателите на рационалните дроби са неразложими многочлени.

ЗАДАЧА 2 Извършете действията: а) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}$; б) $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{2}{x-2}$.

Решение: а) $\underbrace{\overset{y}{\frac{2}{x}}+\overset{x}{\frac{3}{y}}}_{x.y}=\dfrac{2y}{x.y}+\dfrac{3x}{xy}=\dfrac{2y+3x}{xy},\ x\neq 0,\ y\neq 0$

б) $\underbrace{\overset{x-2}{\frac{x}{x+2}}-\overset{x+2}{\frac{2}{x-2}}}_{(x-2)(x+2)=x^2-4}=\dfrac{x(x-2)}{x^2-4}-\dfrac{2(x+2)}{x^2-4}=\dfrac{x(x-2)-2(x+2)}{x^2-4}=$

$$=\frac{x^2-2x-2x-4}{x^2-4}=\frac{x^2-4x-4}{x^2-4},x\neq\pm 2$$

! Правилата за намиране на общо кратно на знаменателите, допълнителните множители и извършването на действията събиране и изваждане на рационални дроби са същите като при дробните числа.

II случай: Знаменателите на рационалните дроби са разложими многочлени.

ЗАДАЧА 3

Извършете действието $\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^2-x}$.

Решение:

$$\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^2-x}=\underbrace{\frac{\overset{x-1}{2}}{x^2}+\frac{\overset{x}{1}}{x(x-1)}}_{x^2(x-1)}=\frac{2(x-1)}{x^2(x-1)}+\frac{x}{x^2(x-1)}=$$

$$=\frac{2(x-1)+x}{x^2(x-1)}=\frac{3x-2}{x^2(x-1)},\quad x\neq 0,\ x\neq 1$$

ЗАДАЧА 4

Извършете действията: а) $2+\frac{1}{x^2-9}-\frac{3}{x+3}$; б) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{1-x}-x$.

Решение:

а) $2+\frac{1}{x^2-9}-\frac{3}{x+3}=$

$$=\underbrace{\frac{2}{1}+\frac{1}{(x-3)(x+3)}-\frac{3}{x+3}}_{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{2(x^2-9)+1-3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{2x^2-18+1-3x+9}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{2x^2-3x-8}{x^2-9},\quad x\neq\pm 3$$

б) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{1-x}-x=$

$$=\underbrace{\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x-1}-\frac{x}{1}}_{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{1-(x+1)-x(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{1-x-1-x^3+x}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{-x^3}{x^2-1},\quad x\neq\pm 1$$

В *Задача 4б)* направихме преобразуванията $1-x=-(x-1)$ и $x^2-1=-(1-x^2)$, което доведе до смяна на знака пред дробната черта.

ЗАДАЧИ

Извършете действията:

1 $\frac{3a+1}{x+1}+\frac{1-3a}{x+1}$;

2 $\frac{a}{x-1}+\frac{1}{1-x}$;

3 $\frac{2a}{a-b}-\frac{x}{b-a}$;

4 $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-2}{1-a}$;

5 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}-\frac{4}{c}$;

6 $\frac{5}{a}+\frac{7}{ab}$;

7 $\frac{8}{a}-\frac{6}{a^2}$;

8 $\frac{2x}{y^2}+\frac{1}{xy^3}$;

9 $\frac{x}{x+a}+\frac{a}{3x+3a}$;

10 $m+\frac{1}{n}$;

11 $2-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$;

12 $\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x^2-4}$;

13 $\frac{a}{(x-a)^2}+\frac{1}{x-a}-\frac{4}{a-x}$;

14 $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{2x-2y}+1$;

15 $\frac{x-2}{1-x^2}+\frac{x+2}{x^2+2x+1}$.

69. УМНОЖЕНИЕ, ДЕЛЕНИЕ И СТЕПЕНУВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ДРОБИ

Рационалните дроби умножаваме, делим и степенуваме така, както умножаваме, делим и степенуваме обикновени дроби.

Умножение на рационални дроби

Тъждеството

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{u_1}{v_1}=\frac{u.u_1}{v.v_1}\quad (v\neq 0,\ v_1\neq 0)$$

изразява правилото за умножение на две рационални дроби.

ЗАДАЧА 1 Извършете умножението:

а) $\frac{x}{y}\cdot\frac{x-y}{2y}$; б) $\frac{x^2-9}{x^2-2x}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-3x}$.

Решение:

а) $\frac{x}{y}\cdot\frac{x-y}{2y}=\frac{x(x-y)}{y.2y}=\frac{x(x-y)}{2y^2},\ y\neq 0$

б) $\frac{x^2-9}{x^2-2x}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-3x}=\frac{(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)}{x.(x-2).x.(x-3)}=$

$=\frac{(x+3)(x+2)}{x^2},\ x\neq 0,\ x\neq 2,\ x\neq 3$

Това правило може да се разшири и за повече от две рационални дроби.

Пример: $\frac{5x}{x+2}\cdot\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x+2}{x-1}=\frac{5x.(x^2-1)(x+2)}{(x+2).x.(x-1)}=5(x+1),\ x\neq -2,\ x\neq 0,\ x\neq 1$

Деление на рационални дроби

Тъждеството

$$\frac{u}{v}:\frac{u_1}{v_1}=\frac{u}{v}\cdot\frac{v_1}{u_1},\ v\neq 0,\ u_1\neq 0,\ v_1\neq 0,$$

изразява правилото за деление на две рационални дроби.

ЗАДАЧА 2 Извършете делението:

а) $\frac{x-1}{3y}:\frac{x^2-1}{y^3}$; б) $\frac{x^2-a^2}{a}:(x-a)$.

Решение:

а) $\frac{x-1}{3y}:\frac{x^2-1}{y^3}=\frac{x-1}{3y}\cdot\frac{y^3}{x^2-1}=\frac{(x-1).y^3}{3y.(x-1)(x+1)}=\frac{y^2}{3(x+1)},\ x\neq \pm 1,\ y\neq 0$

б) $\frac{x^2-a^2}{a}:(x-a)=\frac{x^2-a^2}{a}:\frac{x-a}{1}=\frac{x^2-a^2}{a}\cdot\frac{1}{x-a}=$

$=\frac{(x-a)(x+a).1}{a(x-a)}=\frac{x+a}{a},\ a\neq 0,\ x\neq a$

Степенуване на рационални дроби

Тъждеството

$$\left(\frac{u}{v}\right)^n = \frac{u^n}{v^n},\ v \neq 0,\ n \text{ – естествено число,}$$

изразява правилото за степенуване на рационална дроб.

ЗАДАЧА 3 Извършете степенуването:

а) $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3$; б) $\left(\frac{2x^2-2x}{3x-3}\right)^2$.

Решение:

а) $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{(2y)^3} = \frac{x^6}{8y^3},\ y \neq 0$

б) $\left(\frac{2x^2-2x}{3x-3}\right)^2 = \left(\frac{2x(x-1)}{3(x-1)}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{(2x)^2}{3^2} = \frac{4x^2}{9},\ x \neq 1$

При решаване на *Задача 3б)*, преди да извършим степенуването, опростихме рационалната дроб, която е основа на степента.

ЗАДАЧА 4 Извършете действията:

а) $\frac{8x^3}{3y^3}\cdot\left(\frac{3y^2}{2x}\right)^2$; б) $\left(\frac{2xy}{z}\right)^3 : \left(\frac{2x}{3z^2}\right)^2$.

Решение:

а) $\frac{8x^3}{3y^3}\cdot\left(\frac{3y^2}{2x}\right)^2 = \frac{8x^3}{3y^3}\cdot\frac{9y^4}{4x^2} = 6xy,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

б) $\left(\frac{2xy}{z}\right)^3 : \left(\frac{2x}{3z^2}\right)^2 = \frac{8x^3y^3}{z^3} : \frac{4x^2}{9z^4} = \frac{8x^3y^3}{z^3}\cdot\frac{9z^4}{4x^2} = 18xy^3z,\ x \neq 0,\ z \neq 0$

ЗАДАЧИ

Извършете действията (при $x \neq 0$, $y \neq 0$, $b \neq 0$):

1 $\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{ay}$;

2 $\frac{3ab}{x}\cdot\frac{x^2}{2a^2}$;

3 $\frac{x^2}{y^3}\cdot\frac{y^4}{x^3}$;

4 $\frac{2x}{5a}\cdot\frac{10ab}{xy}\cdot\frac{5y}{b}$;

5 $2a\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{xy}{ab}$;

6 $\frac{a^2}{b^3}\cdot\frac{ax^2}{5}\cdot b^2$;

7 $\frac{a}{b}:\frac{x}{y}$;

8 $\frac{2a}{x^2}:\frac{4ab}{x}$;

9 $a^2x^2:\frac{xy^2}{a^2b}$;

10 $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2$;

11 $\left(\frac{-x}{2b^2}\right)^3$;

12 $\left(\frac{-a}{x^2y}\right)^2$.

Извършете действията:

13 $\frac{x(x-1)}{y^2}\cdot\frac{y^3}{x-1}$;

14 $\frac{x^2-xy}{y^3}\cdot\frac{y^2}{x}$;

15 $\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^2}$;

16 $\frac{x^2-1}{y}:\frac{x-1}{y^2}$;

17 $\frac{x^2+2x}{y}:\frac{(x+2)^2}{y}$;

18 $\frac{xy-x}{y^3}:\frac{y^2-2y+1^2}{xy}$.

70. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

О Рационален израз, при който има деление с променлива величина, се нарича **дробен рационален израз**.

Примери: $\frac{x}{x+1}+5$; $\frac{3}{2x}+\frac{5}{x-y}\left(\frac{x-y}{2x}-x\right)$; $\left(\frac{a}{x+a}\right)^2+\frac{x-y}{x}$

Всеки дробен рационален израз може да се преобразува в рационална дроб, като се използват правилата за действията с рационални дроби. Правилата за реда на действията и разкриването на скоби при числов израз се прилагат и при преобразуване на дробен израз в рационална дроб.

ЗАДАЧА 1 Преобразувайте дробните изрази в рационални дроби:

а) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{b}-\frac{a^2}{b}$; б) $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x+2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{2}$; в) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right):\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right)$.

Решение:

а) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{b}-\frac{a^2}{b}=$

$=\frac{a(a-b)(a+b)}{(a+b)b}-\frac{a^2}{b}=$

$=\frac{a(a-b)}{b}-\frac{a^2}{b}=$

$=\frac{a^2-ab-a^2}{b}=$

$=-a,\ b\neq 0,\ a\neq -b$

б) $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x+2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{2}=$

$=\frac{x(x+2)-2(x-2)}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-4}{2}=$

$=\frac{x^2+2x-2x+4}{2}=$

$=\frac{x^2+4}{2},\quad x\neq\pm 2$

в) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right):\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right)=$

$=\frac{x+x+1}{x+1}:\frac{1-x^2-3x^2}{1-x^2}=$

$=\frac{2x+1}{x+1}:\frac{1-4x^2}{(1-x)(1+x)}=$

$=\frac{2x+1}{x+1}\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{(1-2x)(1+2x)}=$

$=\frac{1-x}{1-2x},\ x\neq\pm 1,\ x\neq\pm\frac{1}{2}$

ЗАДАЧА 2 Докажете тъждеството $\frac{x^3-x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2-1}\right)=1+\frac{1}{x-1}$.

Решение:

$u=\frac{x(x^2-1)}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)=$

$=\frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1}\cdot\frac{x(x+1)-(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}=$

$=\frac{x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2(x+1)}=$

$=\frac{x}{x-1},\ x\neq\pm 1$

$v=1+\frac{x}{x-1}=$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{x-1}=$

$=\frac{x-1+1}{x-1}=$

$=\frac{x}{x-1},\quad x\neq 1$

$u = v \Rightarrow$ равенството е тъждество за допустимите стойности на изразите u и v, т.е. ДС: $x\neq\pm 1$.

ЗАДАЧА 3 Намерете числената стойност на израза $A=\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{1-x}-\frac{4x}{x^2-1}$ за:

а) $x=5$; б) $x=-\frac{2}{3}$; в) $x=\sqrt{3}$; г) $x=-1{,}1$.

Решение:

$$A=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{4x}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{(x-1)^2+(x+1)^2-4x}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{x^2-2x+1+x^2+2x+1-4x}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{2x^2-4x+2}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{2(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{2(x-1)}{x+1}$$

а) При $x=5$

$$A=\frac{2(5-1)}{5+1}=\frac{2.4}{6}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};$$

б) при $x=-\frac{2}{3}$

$$A=\frac{2\left(-\frac{2}{3}-1\right)}{-\frac{2}{3}+1}=\frac{2.\left(-\frac{5}{3}\right)}{\frac{1}{3}}=-10;$$

в) при $x=\sqrt{3}$

$$A=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}+1}=\frac{2.\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$A=\left(\sqrt{3}-1\right)^2;$$

г) при $x=-1{,}1$

$$A=\frac{2(-1{,}1-1)}{-1{,}1+1}=\frac{2(-2{,}1)}{-0{,}1}=\frac{-4{,}2}{-0{,}1}=42.$$

ЗАДАЧИ

Опростете изразите:

1 $1+(x-1):\left(x+\frac{1}{x-2}\right);$

2 $\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}-2\right):\left(\frac{x}{2}-\frac{4}{x}-\frac{x}{4}\right);$

3 $\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(x-\frac{1-2x^2}{1-x}+1\right);$

4 $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x+2}\right):\left(\frac{x+2}{2}-\frac{x-2}{x}\right).$

Докажете тъждествата:

5 $\left(x-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+1\right)=x-1;$

6 $\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b-a}{b+a};$

7 $\left(1-\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right):(x-y)=\frac{x-y}{x^2};$

8 $\left(x+1-\frac{1}{1-x}\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}\right)=-x.$

Намерете числената стойност на изразите:

9 $A=\left(\frac{x-2}{1-x^2}+\frac{x+2}{x^2+2x+1}\right)\cdot(3-x)$ за $x=2$;

10 $B=\left(\frac{x}{x-6}-\frac{3}{x+6}-\frac{x^2}{x^2-36}\right):\frac{x}{2x-3}$ за $x=3$;

11 $C=\left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right):\frac{x-1}{x}$ за $x=0{,}5$.

71. ДРОБНИ УРАВНЕНИЯ

О Уравнение, което съдържа дробни рационални изрази относно неизвестното, се нарича **дробно уравнение**.

Ще разгледаме някои дробни уравнения, които след преобразувания се свеждат до линейни или квадратни уравнения.

ЗАДАЧА 1 Решете уравнението $\dfrac{2x}{x-1}=2-\dfrac{1}{x}$.

Решение:

$\dfrac{2x}{x-1}=2-\dfrac{1}{x}$, ДС: $x\neq 0$, $x\neq 1$

Знаменателите на дробите в уравнението се анулират при $x=0$ и $x=1$. Тогава допустимите стойности на x в уравнението са ДС: $x\neq 0$, $x\neq 1$.

$$\underbrace{\overset{x}{\frac{2x}{x-1}}=\overset{x(x-1)}{\frac{2}{1}}-\overset{x-1}{\frac{1}{x}}}_{x(x-1)}$$

Намираме общо кратно $x(x-1)$ на знаменателите и привеждаме двете страни на уравнението в дроби с един и същ знаменател.

$$\boxed{\frac{2x^2}{x(x-1)}=\frac{2x(x-1)-(x-1)}{x(x-1)}}$$

При решаване на дробни уравнения приемаме да не записваме този ред.

$2x^2=2x(x-1)-(x-1)$

При $x(x-1)\neq 0$, т.е. при $x\in$ ДС, двете дроби са равни, когато числителите им са равни – казваме, че **освобождаваме от знаменател**.

$2x^2=2x^2-2x-x+1$

$3x-1=0$

Задачата се свежда до решаване на цяло уравнение. Получихме линейно уравнение.

$x_1=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3}\in$ ДС

Коренът $x_1=\dfrac{1}{3}$ на линейното уравнение е корен и на даденото дробно уравнение, тъй като $\dfrac{1}{3}\in$ ДС.

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

а) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{4}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{x+2}{x+3}$;

б) $\dfrac{x+7}{24x-12}=\dfrac{3-x}{8x-4}+\dfrac{1}{6}$.

Решение:

а) ДС: $x\neq -3$, $x\neq -1$

$$\underbrace{\overset{x+3}{\frac{x+1}{x-1}}+\overset{1}{\frac{4}{(x-1)(x+3)}}=\overset{x-1}{\frac{x+2}{x+3}}}_{(x-1)(x+3)}$$

$(x+3)(x+1)+4=(x-1)(x+2)$

$x^2+4x+3+4=x^2+x-2$

$3x=-9$, $x=-3\notin$ ДС

Уравнението няма корен.

б) ДС: $x\neq\dfrac{1}{2}$

$$\underbrace{\overset{1}{\frac{x+7}{12(2x-1)}}=\overset{3}{\frac{3-x}{4(2x-1)}}+\overset{2(2x-1)}{\frac{1}{6}}}_{12(2x-1)}$$

$x+7=3(3-x)+2(2x-1)$

$0.x=0$

Всяко число $x\neq\dfrac{1}{2}$ е корен на уравнението.

В *Задача 2а)* числото –3 е корен на цялото уравнение, но не е корен на даденото дробно уравнение, защото не принадлежи на ДС.
В *Задача 2б)* цялото уравнение е $0.x = 0$ и има за корен всяко число. Даденото дробно уравнение не допуска корен $\frac{1}{2}$. Тогава корените на дробното уравнение са всички числа без числото $\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 3 Решете уравненията:

а) $\frac{x^2+7}{x^2+3}-2=0$;

б) $\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{x+1}{x-1}$.

Решение:

а) ДС: всяко x

$x^2 + 7 - 2(x^2 + 3) = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x_1 = 1 \in$ ДС, $x_2 = -1 \in$ ДС

Уравнението има два корена: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

б) ДС: $x \neq 1$, $x \neq -1$

$6 + 3(x - 1) = (x + 1)^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = 2 \in$ ДС, $x_2 = -1 \notin$ ДС

Уравнението има един корен: $x_1 = 2$.

При решаване на дробни уравнения след освобождаване от знаменателите полученото цяло уравнение невинаги е еквивалентно на даденото дробно уравнение. Затова трябва да се проверява дали корените на цялото уравнение са от множеството на допустимите стойности за неизвестното на даденото дробно уравнение.

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $\frac{x^2}{x-7}=x+1$;

2 $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$;

3 $\frac{x-2}{x-3}=\frac{3}{2}$;

4 $\frac{x}{2-x}=\frac{1}{x}$;

5 $\frac{4}{2x-1}=\frac{5}{3x+1}$;

6 $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}-3$;

7 $\frac{x(1-x)}{1+x}=6$;

8 $\frac{2x-8}{8x-6}=\frac{2}{3}$;

9 $\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=0$;

10 $\frac{1}{2x}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{3x}-1=0$;

11 $8-\frac{5-x}{x-4}=\frac{1}{4-x}$;

12 $\frac{x-3}{x-4}-3=\frac{1-2x}{x+2}$;

13 $\frac{4}{x}+\frac{3}{x-4}=\frac{15}{x+4}$;

14 $\frac{3}{(x-1)(x+3)}+\frac{x}{x+3}=\frac{2x+1}{x-1}$;

15 $\frac{7}{x+3}-\frac{5x^2}{x^2-9}=-5$;

16 $\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x+2}=\frac{x^2+9x-6}{x^2-4}$;

17 $\frac{1+x}{x-1}-\frac{x-1}{1+x}=\frac{12}{1-x^2}$;

18 $\frac{x}{2}-\frac{3-x^2}{\sqrt{3}-x}=0$;

19 $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2-x}=\frac{3}{x^2-4}$;

20 $\frac{x+1}{x^2+8x+7}=1$;

21 $\frac{6x^2+13x+6}{3x+2}+x+1=0$.

72. ДРОБНИ УРАВНЕНИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Решете уравненията:

а) $\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{x+2}{3-x}=\dfrac{2x-3}{x^2-5x+6}$;

б) $\dfrac{x^2-2}{x^2+1}-\dfrac{2}{x^2+2}=\dfrac{3x^2-10}{x^4+3x^2+2}$.

Решение:

а) $\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{2x-3}{(x-2)(x-3)}$

ДС: $x\neq 2$, $x\neq 3$

$2x(x-3)-(x+2)(x-2)=2x-3$

$2x^2-6x-x^2+4-2x+3=0$

$x^2-8x+7=0$

$x_1=1\in$ ДС

$x_2=7\in$ ДС

Уравнението има два корена: $x_1=1$, $x_2=7$.

б) $\dfrac{x^2-2}{x^2+1}-\dfrac{2}{x^2+2}=\dfrac{3x^2-10}{(x^2+1)(x^2+2)}$

ДС: всяко x

$(x^2-2)(x^2+2)-2(x^2+1)=3x^2-10$

$x^4-5x^2+4=0$ Полагаме $x^2=y$.

$y^2-5y+4=0$

$y_1=1$ $\quad y_2=4$

$x^2=1$ $\quad x^2=4$

$x_{1,2}=\pm 1$ $\quad x_{3,4}=\pm 2$

Уравнението има четири корена: $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$.

ЗАДАЧА 2 Решете с подходящо полагане уравненията:

а) $\dfrac{7}{x^2+2x+4}+\dfrac{9}{x^2+2x+6}=2$;

б) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

Решение:

а) ДС: всяко x

Полагаме $x^2+2x+4=y$.

$x^2+2x+6=y+2$

$\dfrac{7}{y}+\dfrac{9}{y+2}=2$

$7(y+2)+9y=2y(y+2)$

$7y+14+9y=2y^2+4y$

$2y^2-12y-14=0$

$y^2-6y-7=0$

$y_1=7$ $\quad y_2=-1$

$x^2+2x+4=7$ $\quad x^2+2x+4=-1$

$x^2+2x-3=0$ $\quad x^2+2x+5=0$

$x_1=1$, $x_2=-3$ $\quad$ няма реални корени.

Уравнението има два корена: $x_1=1$, $x_2=-3$.

б) ДС: $x\neq -1$, $x\neq -2$, $x\neq 1$, $x\neq -4$

$\dfrac{6}{x^2+3x+2}+\dfrac{8}{x^2+3x-4}=1$

Полагаме $x^2+3x=y$.

$\dfrac{6}{y+2}+\dfrac{8}{y-4}=1$

$6(y-4)+8(y+2)=(y+2)(y-4)$

$6y-24+8y+16=y^2-2y-8$

$y^2-16y=0$

$y(y-16)=0$

$y_1=0$ $\quad y_2=16$

$x^2+3x=0$ $\quad x^2+3x-16=0$

$x(x+3)=0$ $\quad x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$

$x_1=0\in$ ДС $\quad x_{3,4}\in$ ДС

$x_2=-3\in$ ДС

Уравнението има четири корена:

$x_1=0$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$.

ЗАДАЧА 3 Решете с подходящо полагане уравненията:

а) $\dfrac{x^2+3}{x}+\dfrac{4x}{x^2+3}=5;$ б) $2x^2+\dfrac{2}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}=6.$

Решение:

а) $\dfrac{x^2+3}{x}+\dfrac{4x}{x^2+3}=5$

ДС: $x \neq 0$

Полагаме

$\dfrac{x^2+3}{x}=y.$

Получаваме

$y+\dfrac{4}{y}=5.$

$y^2-5y+4=0$

$y_1=1$	$y_2=4$
$\dfrac{x^2+3}{x}=1$	$\dfrac{x^2+3}{x}=4$
$x^2-x+3=0$	$x^2-4x+3=0$
няма реални	$x_1=1\in$ ДС
корени.	$x_2=3\in$ ДС

Уравнението има два корена: $x_1=1, x_2=3.$

б) $2x^2+\dfrac{2}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}=6$

ДС: $x \neq 0$

$2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=6$

Полагаме $x+\dfrac{1}{x}=y.$

Получаваме $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=y^2.$

$x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=y^2$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

$2(y^2-2)-y=6$

$2y^2-y-10=0$

$y_1=\dfrac{5}{2}$	$y_2=-2$
$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$	$x+\dfrac{1}{x}=-2$
$2x^2-5x+2=0$	$x^2+2x+1=0$
$x_1=2\in$ ДС	$x_{3,4}=-1\in$ ДС
$x_2=\dfrac{1}{2}\in$ ДС	

Уравнението има четири корена:

$x_1=2, x_2=\dfrac{1}{2}, x_{3,4}=-1.$

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $\dfrac{3x+2}{x+5}-\dfrac{x-5}{x-1}=\dfrac{x^2-7x+18}{x^2+4x-5};$

2 $\dfrac{3x-1}{2x-3}-\dfrac{2x+3}{2x^2+x-6}=\dfrac{x-2}{x+2};$

3 $\dfrac{4}{x^2+4}+\dfrac{5}{x^2+5}=2;$

4 $\dfrac{7}{x^2+2x+4}+\dfrac{9}{x^2+2x+6}=2;$

5 $\dfrac{3}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-1)(x-4)}=1;$

6 $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0;$

7 $7x+\dfrac{7}{x}-2x^2-\dfrac{2}{x^2}=9;$

8 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=5;$

9 $\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}-\dfrac{20x-20}{x^2-2x+5}=1;$

10 $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}.$

73. МОДЕЛИРАНЕ С ДРОБНИ УРАВНЕНИЯ

ЗАДАЧА 1 Намислих едно положително число. Намалих го с 8. Получената разлика разделих с 9 и получих реципрочното на намисленото число. Намерете кое число съм намислил.

Решение: x – намисленото число, ДМ: $x > 0$

Уравнението е $\dfrac{x-8}{9} = \dfrac{1}{x}$.

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$x_1 = 9 \in$ ДМ, $x_2 = -1 \notin$ ДМ

Отг. Намисленото число е 9.

ЗАДАЧА 2 Иван планувал да прочете книга от 480 страници за определен срок, като ежедневно чете по еднакъв брой страници. Той прочитал дневно по 20 страници повече и успял да прочете книгата 4 дни по-рано. Намерете по колко страници дневно е четял Иван и за колко дни е прочел цялата книга.

Решение: x – брой планувани страници за прочит дневно, ДМ: $x > 0$

Съставяме таблица:

	Q, брой страници	n, норма дневно	t, дни
по план	480	x	$\dfrac{480}{x}$
в действителност	480	$x + 20$	$\dfrac{480}{x+20}$

$t_{\text{план}} = t_{\text{действ.}} + 4$

$\dfrac{480}{x} = \dfrac{480}{x+20} + 4 \quad | : 4$

$\dfrac{120}{x} = \dfrac{120}{x+20} + 1$

. . . .

$x^2 + 20x - 2400 = 0$

$x_1 = 40 \in$ ДМ $\quad x_2 = -60 \notin$ ДМ

$n_{\text{действ.}} = x + 20 = 40 + 20 = 60$ страници

$t_{\text{действ.}} = \dfrac{480}{x+20} = \dfrac{480}{60} = 8$ дни

Отг. 60 страници, 8 дни

ЗАДАЧА 3 Един работник може да извърши определена работа за 4 дни повече, отколкото втори работник. Ако първият работник започне да работи 2 дни по-рано от втория, работата ще е завършена за 7 дни. Намерете за колко дни всеки работник може сам да извърши работата.

Решение: x – времето, за което вторият работник може сам да извърши работата, ДМ: $x > 0$

	сам свършва работата, дни	работа за един ден	t, дни	свършена работа (A)
I раб.	$x + 4$	$\dfrac{1}{x+4}$	7	$\dfrac{7}{x+4}$
II раб.	x	$\dfrac{1}{x}$	5	$\dfrac{5}{x}$

$A_{\text{I}} + A_{\text{II}} = 1$

$\dfrac{7}{x+4} + \dfrac{5}{x} = 1$

. . . .

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$x_1 = 10 \in$ ДМ, $x_2 = -2 \notin$ ДМ

Отг. 14 дни; 10 дни.

ЗАДАЧА 4 Двама туристи – Ангел и Иван, изминали съответно 24 km и 28 km. Ангел вървял 3 часа по-малко от Иван и се движил с 2 km/h по-бързо от него. Намерете с каква скорост се е движил всеки от туристите.

Решение: $V_{\text{Иван}} = x$ km/h, ДМ: $x > 0$

	S (km)	V (km/h)	t (h)
Ангел	24	$x+2$	$\frac{24}{x+2}$
Иван	28	x	$\frac{28}{x}$

$t_{\text{Ангел}} + 3 = t_{\text{Иван}}$

$\frac{24}{x+2} + 3 = \frac{28}{x}$

. . . .

$3x^2 + 2x - 56 = 0$

$x_1 = 4 \in$ ДМ, $x_2 = -\frac{14}{3} \notin$ ДМ

Отг. $V_{\text{Иван}} = 4$ km/h; $V_{\text{Ангел}} = 6$ km/h

ЗАДАЧА 5 Лодка изминава 64 km по течението на една река и 56 km срещу течението за 4 часа. Намерете скоростта на лодката в спокойна вода, ако скоростта на течението е 2 km/h.

Решение: $V_{\text{сп. вода}} = x$ km/h, ДМ: $x > 2$

	S (km)	V (km/h)	t (h)
по течението	64	$x+2$	$\frac{64}{x+2}$
срещу течението	56	$x-2$	$\frac{56}{x-2}$

$t_{\text{по теч.}} + t_{\text{ср. теч.}} = 4$

$\frac{64}{x+2} + \frac{56}{x-2} = 4 \mid :4$

$\frac{16}{x+2} + \frac{14}{x-2} = 1$

. . . .

$x^2 - 30x = 0$

$x_1 = 0 \notin$ ДМ, $x_2 = 30 \in$ ДМ

Отг. $V_{\text{сп. вода}} = 30$ km/h

ЗАДАЧИ

1 Един моторист изминал 150 km. На връщане увеличил средната си скорост с 15 km/h и се върнал половин час по-рано. Намерете средната скорост, с която се е движил мотористът на отиване.

2 Разстоянието между две железопътни гари е 117 km. Пътнически влак, който се движи с 13 km/h по-бързо от товарен влак, изминава това разстояние за 45 минути по-малко от него. Намерете скоростите на влаковете.

3 Моторна лодка се спуска по течението на река на 28 km и се връща обратно. Тя изминава пътя на отиване и връщане за 7 часа. Намерете скоростта на лодката в спокойна вода, ако е известно, че скоростта на течението на реката е 3 km/h.

4 Двама работници трябва да свършат определена работа. Първият може да извърши сам работата за 2 дни по-малко, отколкото вторият. След като първият работил 4 дни, а вторият – 5 дни, работата била свършена. Намерете за колко дни всеки работник може сам да свърши работата.

5 Един ученик трябвало да прочете книга от 200 страници за определен брой дни. Той четял за 1 ден по 10 страници повече от заплануваните и затова прочел книгата 1 ден предсрочно. За колко дни ученикът е прочел книгата?

74. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ“

ЗАПОМНЕТЕ!

Рационален израз:

Алгебричен израз, в който са използвани само знаците за действията събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване.

Цял рационален израз:

Рационален израз, при който няма деление с променлива.

Дробен рационален израз:

Рационален израз, който съдържа променлива в знаменател.

Рационална дроб:

Частното на два цели рационални израза.

Основно свойство на рационалните дроби:

$$\frac{u}{v},\ v \uparrow 0,\ \text{рационална дроб},\ w \neq 0 \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{u.w}{v.w}$$

Действия с рационални дроби:

$$\frac{u}{v} \pm \frac{u_1}{v} = \frac{u \pm u_1}{v}\ (v \neq 0) \qquad \frac{u}{v} \cdot \frac{u_1}{v_1} = \frac{u.u_1}{v.v_1}\ (v \neq 0, v_1 \neq 0)$$

$$\frac{u}{v} : \frac{u_1}{v_1} = \frac{u}{v} \cdot \frac{v_1}{u_1} = \frac{u.v_1}{v.u_1}\ (v \neq 0, v_1 \neq 0, u_1 \neq 0) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)^n = \frac{u^n}{v^n}\ (v \neq 0),\ n - \text{ест. число}$$

ЗАДАЧА 1 Дадени са рационалните дроби $u = \dfrac{x-1}{x^2-25}$ и $v = \dfrac{x-5}{x+5}$.
При $x \neq \pm 5$, пресметнете:
а) $u + v$; б) $u - v$; в) $u\ .\ v$; г) $u : v$.

Решение:

а) $u + v = \dfrac{x-1}{x^2-25} + \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{x-1+(x-5)^2}{x^2-25} = \dfrac{x-1+x^2-10x+25}{x^2-25} = \dfrac{x^2-9x+24}{x^2-25}$

б) $u - v = \dfrac{x-1}{x^2-25} - \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{x-1-(x-5)^2}{x^2-25} = \dfrac{x-1-x^2+10x-25}{x^2-25} =$

$= \dfrac{-x^2+11x-26}{x^2-25} = \dfrac{x^2-11x+26}{25-x^2}$

в) $u.v = \dfrac{x-1}{x^2-25} \cdot \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{x-1}{(\cancel{x-5})(x+5)} \cdot \dfrac{\cancel{x-5}}{x+5} = \dfrac{x-1}{(x+5)^2} = \dfrac{x-1}{x^2+10x+25}$

г) $u : v = \dfrac{x-1}{x^2-25} : \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{x-1}{(\cancel{x+5})(x-5)} \cdot \dfrac{\cancel{x+5}}{x-5} = \dfrac{x-1}{(x-5)^2} = \dfrac{x-1}{x^2-10x+25}$

ЗАДАЧА 2 Докажете, че стойността на израза $A = 3x + \dfrac{3}{7-x} : \left(\dfrac{1}{x^2-8x+15} - \dfrac{2}{x^2-10x+21}\right)$ не зависи от стойностите на x.

Решение: $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$ $\quad x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$

$$A = 3x + \frac{3}{x-7} : \left(\frac{1}{(x-3)(x-5)} - \frac{2}{(x-3)(x-7)}\right) =$$

$$= 3x + \frac{3}{x-7} : \frac{x-7-2x+10}{(x-3)(x-5)(x-7)} =$$

$$= 3x + \frac{3}{\cancel{x-7}} \cdot \frac{\cancel{(x-3)}(x-5)\cancel{(x-7)}}{-\cancel{(x-3)}} =$$

$$= 3x - 3(x-5) = 3x - 3x + 15 = 15$$

Отг. $A = 15$

ЗАДАЧА 3 Решете уравненията:

а) $\dfrac{2x+1}{x-3} - \dfrac{7-x}{x^2-2x-3} = \dfrac{x+3}{x+1}$; $\quad$ б) $\dfrac{3}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{2}{(x-1)(x-4)} = 1$.

Решение:

а) $\dfrac{2x+1}{x-3} + \dfrac{x-7}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{x+3}{x+1}$

ДС: $x \neq 3, x \neq -1$

$(2x+1)(x+1) + x - 7 = x^2 - 9$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x_1 = -1 \notin$ ДС

$x_2 = -3 \in$ ДС

б) ДС: $x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3, x \neq 4$

$\dfrac{3}{x^2-5x+6} + \dfrac{2}{x^2-5x+4} = 1$

Полагаме $x^2 - 5x + 4 = y$.

$\dfrac{3}{y+2} + \dfrac{2}{y} = 1$

$y^2 - 3y - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 4, y_2 = -1$

$x^2 - 5x + 4 = 4 \qquad x^2 - 5x + 4 = -1$

$x^2 - 5x = 0 \qquad x^2 - 5x + 5 = 0$

$x_1 = 0 \in$ ДС

$x_2 = 5 \in$ ДС $\qquad x_{3,4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \in$ ДС

ЗАДАЧА 4 Разстоянието между две гари е 360 km. Пътнически влак изминава това разстояние за 2 часа по-малко от товарен влак. Определете скоростите на двата влака, ако скоростта на пътническия влак е с 30 km/h по-висока от тази на товарния влак.

Решение: $V_{\text{тов. вл.}} = x$ (km/h), $V_{\text{пътн. вл.}} = x + 30$ (km/h) $\qquad$ ДМ: $x > 0$

	S (km)	V (km/h)	t (h)
тов. влак	360	x	$\dfrac{360}{x}$
пътн. влак	360	$x + 30$	$\dfrac{360}{x+30}$

$t_{\text{тов. вл.}} = t_{\text{пътн. вл.}} + 2$

$\dfrac{360}{x} = \dfrac{360}{x+30} + 2 \;\; | :2$

$\dfrac{180}{x} = \dfrac{180}{x+30} + 1$

$x^2 + 30x - 5400 = 0$

$x_1 = 60 \in$ ДМ, $\; x_2 = -90 \notin$ ДМ

$V_{\text{тов. вл.}} = x = 60$ km/h

$V_{\text{пътн. вл.}} = x + 30 = 90$ km/h

Отг. $V_{\text{тов. вл.}} = 60$ km/h
$V_{\text{пътн. вл.}} = 90$ km/h

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ“

1. Намерете допустимите стойности на рационалните дроби:

а) $\dfrac{2x+3}{x-3}$; б) $\dfrac{-x+3}{x^2+4x}$;

в) $\dfrac{3x-5}{x^2-4}$; г) $\dfrac{2x+7}{4x^2+1}$.

2. Съкратете дробите:

а) $\dfrac{x^2-9}{2x+6}$; б) $\dfrac{x^2-3x}{9-x^2}$;

в) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+2x}$; г) $\dfrac{x^3-1}{x-x^2}$.

3. Приведете към най-малък общ знаменател дробите:

а) $\dfrac{3}{x+2}$, $\dfrac{x}{x-2}$ и $\dfrac{12}{x^2-4}$;

б) $\dfrac{5}{x+4}$, $\dfrac{3}{x-2}$ и $\dfrac{3x-7}{x^2+2x-8}$;

в) $\dfrac{3}{x^2-5x}$, $\dfrac{2-x}{x^2-25}$ и $\dfrac{5}{x^2+5x}$;

г) $\dfrac{3}{x+1}$, $\dfrac{2x-3}{x^3+1}$ и $\dfrac{-2}{x^2-x+1}$.

4. Извършете действията:

а) $3-\dfrac{2x+1}{x-5}$; б) $\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x+3}$;

в) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}$; г) $\dfrac{5}{x^2-3x}+\dfrac{2}{x-3}$.

5. Извършете действията:

а) $\dfrac{x^2-4}{y^2}\cdot\dfrac{y^3}{x+2}$;

б) $\dfrac{x^2+3x}{y^3}\cdot\dfrac{y^3}{(x+3)^2}$;

в) $\dfrac{x^2-2x}{y^3}:\dfrac{x-2}{y^4}$;

г) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2}:\dfrac{(x+y)^2}{x^3}$.

Преобразувайте дробните изрази в рационални дроби и намерете допустимите им стойности:

6.

$$\left(\frac{x^2-9}{(x-2)(x^2+3x)}-\frac{x+3}{x^2+2x}\right):\frac{2}{x^2-3x-10}$$

7.

$$\left(\frac{x^2-16}{(x-5)(x^2+4x)}-\frac{x+4}{x^2+5x}\right):\frac{2}{x^2-7x+10}$$

8.

$$\left(\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{3}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2}\right):\frac{x^2+2x-8}{x^3-4x}$$

9.

$$\left(\frac{4}{x^2-9}-\frac{3}{x^2+3x}-\frac{1}{x^2}\right):\frac{x^2+4x+3}{x^3+6x^2+9x}$$

Решете уравненията:

10. $\dfrac{6}{x+4}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x+3}$.

11. $\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{x^2-3}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$.

12. $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

13. $\dfrac{3}{x-7}-\dfrac{10}{x^2-8x+7}=\dfrac{2-x}{1-x}$.

14. $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{1-x^2-4x}{x^2+3x+2}=\dfrac{4}{-x-1}$.

15. $\dfrac{3}{x^2+1}-\dfrac{2}{x^2+3}=\dfrac{5x+3}{x^4+4x^2+3}$.

16. $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x+3}{x^2+2x+4}=\dfrac{8x+10}{x^3-8}$.

17. $\dfrac{6}{x^2-3x+5}-\dfrac{2}{x^2-3x+4}=\dfrac{1}{x^2-3x+3}$.

18. $x^2+\dfrac{4}{x^2}=23-6x-\dfrac{12}{x}$.

19. $2x^2+\dfrac{18}{x^2}=15x+\dfrac{45}{x}-40$.

20. $x^3+\dfrac{1}{x^3}+x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=6$.

21. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}=x^2-4x+6$.

75. ТЕСТ № 1 ВЪРХУ ТЕМАТА „РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ“

1. Колко на брой от изразите $\frac{x+3}{2}$, $\frac{x-1}{x+5}$ и $\frac{x+3}{x^2+1}$ са дроби?

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3.

2. От рационалните изрази цял е:

А) $\frac{2x+7}{3}$;

Б) $\frac{x+4}{x-1}$;

В) $\frac{3x-1}{x^2+1}$;

Г) $\frac{x^2-4}{2x+3}$.

3. Допустимите стойности на рационалната дроб $\frac{2x-4}{x^2-9}$ са:

А) $x \neq 2$;

Б) $x \neq 0$;

В) $x \neq \pm 3$;

Г) $x \neq 3$.

4. Ако $x \neq y$ и $y \neq 0$, то изразът

$$\frac{x}{y^2-xy} - \frac{1}{y-x}$$

е тъждествено равен на:

А) $\frac{1}{y}$;

Б) $\frac{x+y}{y(x-y)}$;

В) $\frac{x+1}{x-y}$;

Г) $-\frac{1}{y}$.

5. Числената стойност на израза $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x}$ при $x = -\frac{1}{2}$ е:

А) –3; Б) 3; В) 1 Г) –1.

6. Сборът на две числа е 9. Сборът от реципрочните им числа е $\frac{1}{2}$. Числата са:

А) 1 и 8;

Б) 2 и 7;

В) 3 и 6;

Г) 4 и 5.

7. При $x \neq \pm 3$ изразът

$$\frac{x^4-1}{x^2-9} : \frac{x^2+1}{x+3} + \frac{8}{3-x}$$

е тъждествено равен на:

А) $x - 3$;

Б) $x + 3$;

В) $3 - x$;

Г) $-x - 3$.

8. Антон трябвало да реши 40 задачи в определен срок, като решава ежедневно по еднакъв брой. Той решавал по 2 задачи повече на ден и решил всичките 1 ден преди срока. Намерете:

а) по колко задачи дневно е решавал Антон;

б) за колко дни той е решил задачите.

9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на еквивалентното му уравнение.

(А)	$\frac{5}{x} + \frac{3}{x-2} = 2$	(1)	$(x+\sqrt{15})(x-\sqrt{15}) = 8x$
(Б)	$\frac{4x+1}{x^2+4} = 1$	(2)	$x - 7 = \frac{5}{7-x}$
		(3)	$(x-3)^2 = 4$
(В)	$\frac{1}{x^2+2} = \frac{5}{x^2+9}$	(4)	$\frac{3}{x} = 4 - x$

10. Решете уравнението

$$\frac{x}{3-x} - \frac{x+3}{1-3x} = \frac{x^2-4x-7}{3x^2-10x+3}.$$

ТЕСТ № 2 ВЪРХУ ТЕМАТА „РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ“

1. Колко на брой от изразите $\dfrac{5}{x-3}$, $\dfrac{2x+5}{x}$ и $\dfrac{x^2-5}{3}$ са дробни?

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3.

2. От рационалните изрази цял е:

А) $\dfrac{3x^2-1}{x+5}$;

Б) $\dfrac{7-2x+x^3}{2}$;

В) $\dfrac{5}{2x+3}$;

Г) $\dfrac{2x-5}{x^2+9}$.

3. Допустимите стойности на рационалната дроб $\dfrac{2x-5}{x^2-9}$ са:

А) $x \neq 2{,}5$;

Б) $x \neq 3$;

В) $x \neq -3$;

Г) $x \neq \pm 3$.

4. Изразът $\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3} - \dfrac{1}{x+3}$ при $x \neq 1$ и $x \neq -3$ е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{1}{x-1}$;

Б) $\dfrac{1}{x+3}$;

В) $\dfrac{2}{x-1}$;

Г) $\dfrac{1}{x+1}$.

5. Числената стойност на израза $\dfrac{x+3}{x^2-9} - \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{4-x}{x+3}$ при $x = \dfrac{1}{2}$ е:

А) 1; Б) –1; В) 2; Г) –2.

6. Произведението на две числа е 24. Сборът от реципрочните им числа е $\dfrac{5}{12}$. Числата са:

А) 2 и 12;

Б) 3 и 8;

В) 1 и 24;

Г) 4 и 6.

7. При $x \neq \pm 2$ изразът

$$\frac{2x^3+2x}{x^4-16} : \frac{x^2+1}{x^2+4} - \frac{1}{x-2}$$

е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{1}{x-2}$;

Б) $\dfrac{1}{x+2}$;

В) $\dfrac{3x-2}{x^2-4}$;

Г) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}$.

8. Петя купила банани за 12 лв. Ани купила за същата сума 2 kg повече банани, чиято цена за 1 kg била с 1 лв. по-ниска. Намерете:

а) колко килограма банани е купила Петя и на каква цена за 1 kg;

б) колко килограма банани е купила Ани и на каква цена за 1 kg.

9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на еквивалентното му уравнение.

(А)	$\dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x-4} = 3$	(1)	$(x+2)(x-2) = 3x$
(Б)	$\dfrac{3}{x^2+5} = \dfrac{2}{x^2+4}$	(2)	$\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right) = 7x-24$
		(3)	$\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x}$
(В)	$\dfrac{3x+5}{x^2+1} = 1$	(4)	$(3x-8)(3-x) = 0$

10. Решете уравнението

$$\frac{3x-1}{2x-3} - \frac{x-2}{2+x} = \frac{2x+3}{2x^2+x-6}.$$

ТЕМА 8

ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ
(Урок № 76 – Урок № 88)

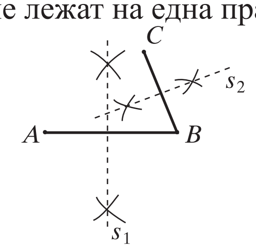
В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:
- *окръжност и триъгълник;*
- *забележителни точки в триъгълника;*
- *окръжност и четириъгълник.*

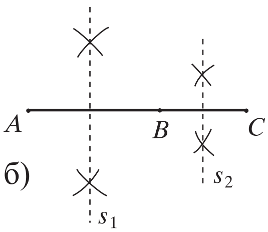
УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:
- *да прилагат свойствата на вписан и описан триъгълник;*
- *да използват необходимите и достатъчни условия за вписани и описани четириъгълници;*
- *да построяват вътрешно и външновписани окръжности.*

76. ОКРЪЖНОСТ, ОПИСАНА ОКОЛО ТРИЪГЪЛНИК

ЗАДАЧА 1 Дадени са трите точки A, B и C. Постройте симетралите на отсечките AB и BC, ако точките A, B и C:

а) не лежат на една права; б) лежат на една права.

а) 

б) 

Построение:

а) черт. а);

б) черт. б).

ЗАДАЧА 2
ОСНОВНА ЗАДАЧА

Точките A, B и C не лежат на една права.

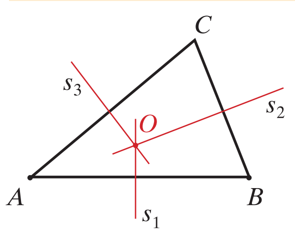
Докажете, че симетралите на AB и BC се пресичат.

Доказателство:

За симетралите s_1 и s_2 има три възможности: $s_1 \parallel s_2$, $s_1 \equiv s_2$, $s_1 \not\parallel s_2$. Ако допуснем, че $s_1 \parallel s_2$ или $s_1 \equiv s_2$, от $BC \perp s_2$ следва, че $BC \perp s_1$. От $BC \perp s_1$ и $BA \perp s_1$ (по условие) следва, че от точката B са спуснати два перпендикуляра BC и BA към правата s_1, което противоречи на теоремата за единственост на перпендикулярната права през B към s_1. Остава вярно твърдението, че $s_1 \not\parallel s_2$.

На черт. а) в *Задача 1* трите точки A, B и C не лежат на една права. Можем да ги разгледаме като върхове на $\triangle ABC$. Доказахме, че симетралите на две от страните на този триъгълник се пресичат в една точка. Възниква въпросът: „Симетралата s_3 на третата страна AC къде ще пресече s_1 и s_2?“.

Т Симетралите на трите страни на всеки триъгълник се пресичат в една точка.



Дадено: s_1, s_2, s_3 – симетрали съответно на AB, BC, CA

Да се докаже: s_1, s_2, s_3 се пресичат в една точка

Доказателство: Нека $s_1 \not\parallel s_2 = O$.

$$\left.\begin{array}{l} O \in s_1 \;\Rightarrow\; OA = OB \\ O \in s_2 \;\Rightarrow\; OB = OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB = OC,$$

т.е. $OA = OC$. Тогава $O \in s_3$.

Доказахме, че s_1, s_2, s_3 се пресичат в точка O.

От теоремата следва, че точките A, B и C са на равни разстояния от точката O ($OA = OB = OC$). Тогава **съществува окръжност** k (O; $r = OA = OB = OC$), която минава през върховете на $\triangle ABC$.

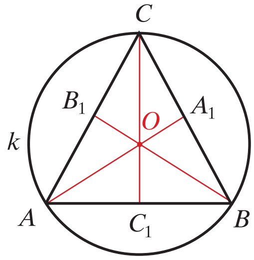
Ще докажем, че k е единствена. Ако допуснем, че има и друга окръжност $k' \neq k$, която минава през точките A, B и C, нейният център O' трябва да лежи и на трите симетрали s_1, s_2, s_3. Тогава $O' \equiv O$ и следователно $k' \equiv k$, т.е. окръжността k е единствена.

О Окръжността, която минава през трите върха на един триъгълник, се нарича **описана** около триъгълника, а **триъгълникът се нарича вписан** в окръжността.

Центърът на описаната около триъгълника окръжност е пресечната точка на симетралите на страните на триъгълника.

ЗАДАЧА 3 ОСНОВНА ЗАДАЧА

Докажете, че в равностранния триъгълник центърът на описаната окръжност съвпада с медицентъра на триъгълника.



Дадено: $\triangle ABC$ $(AB = BC = CA)$

Да се докаже: центърът O на описаната окръжност k съвпада с медицентъра на $\triangle ABC$

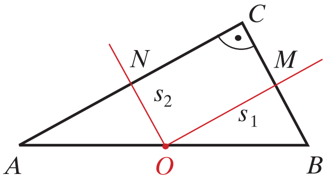
Доказателство: От равностранния $\triangle ABC$ $\Rightarrow AA_1 = BB_1 = CC_1$. Тогава и $\frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}CC_1$.

Ако M е медицентърът на $\triangle ABC \Rightarrow MA = MB = MC$, т.е. M е центърът на описаната окръжност, или $M \equiv O$.

За да построим центъра на описаната около равностранен триъгълник окръжност, достатъчно е да построим пресечната точка на две от медианите му.

ЗАДАЧА 4

Да се докаже, че центърът на описаната около правоъгълен триъгълник окръжност е средата на хипотенузата.



Дадено: $\triangle ABC$ – правоъгълен, s_1, s_2 – симетрали на BC и AC, $s_1 \times BC = M$, $s_2 \times AC = N$

Да се докаже: s_1 и s_2 се пресичат в средата на AB

Доказателство: От s_1 – симетрала на BC $\Rightarrow M$ – средата на $BC \Rightarrow s_1 \perp BC$. Но $AC \perp BC \Rightarrow s_1 \parallel AC$. Тогава в $\triangle ABC$ по [Т1] за средна отсечка s_1 минава през средата на AB.

Аналогично доказваме, че и s_2 минава през средата на AB. Така получаваме, че $OA = OB = OC$, където O е средата на AB.

За да намерим центъра на описаната около правоъгълен триъгълник окръжност, достатъчно е да построим симетралата само на една страна. Твърдението в задачата следва и от познатото ни свойство: „Медианата към хипотенузата е равна на половината хипотенуза“.

ЗАДАЧИ

1 Постройте описаната около даден триъгълник окръжност, ако той е:
а) остроъгълен; б) правоъгълен; в) тъпоъгълен.

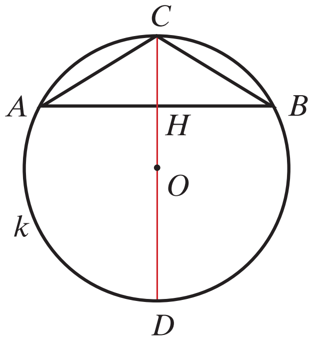
2 В $\triangle ABC$ ъгълът при върха A е 82°. Ако O е центърът на описаната около триъгълника окръжност, намерете $\sphericalangle BOC$.

3 Височината на равностранен триъгълник е 30 cm. Намерете диаметъра на описаната около триъгълника окръжност.

4 Около $\triangle ABC$ е описана окръжност k. Намерете ъглите на $\triangle ADC$, където CD е диаметър $(D \in k)$, ако $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

77. ОКРЪЖНОСТ, ОПИСАНА ОКОЛО ТРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Бедрото на равнобедрен триъгълник е a cm, а ъгълът между бедрата му е 120°. Намерете диаметъра на описаната окръжност.



Дадено: $\triangle ABC$, $AC = BC = a$, $\sphericalangle C = 120°$,
k – описана окръжност

Да се намери: $d = 2r$ на описаната окръжност k

Решение: От $AC = BC = a$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$. Тогава диаметърът $CD \perp AB$, т.е. CH е височина към основата в равнобедрения $\triangle ABC$

$\Rightarrow CH$ е ъглополовяща при върха C, т.е. $\sphericalangle HCB = 60°$.

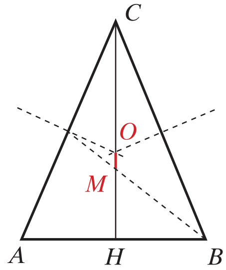
Разглеждаме $\triangle OCB$. От $OC = OB = r$ и $\sphericalangle C = 60°$

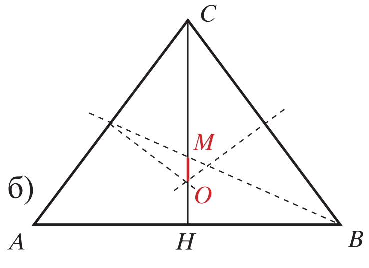
$\Rightarrow$ триъгълникът е равностранен, т.е. $OC = CB = a$.

Тогава $CD = 2a$.

Триъгълникът е тъпоъгълен – центърът на описаната около него окръжност е външна точка за триъгълника.

ЗАДАЧА 2 В равнобедрен $\triangle ABC$ $(AC = BC)$ височината $CH = 12$ cm, а разстоянието между медицентъра M и центъра O на описаната окръжност е 1 cm. Намерете радиуса на описаната окръжност.

а) 

б) 

Дадено: $\triangle ABC$ $(AC = BC)$, M – медицентър,
O – център на описаната окръжност k,
$OM = 1$ cm, $CH = 12$ cm

Да се намери: r на k

Решение:

От $\triangle ABC$ – равнобедрен $\Rightarrow h_c = m_c = s_{AB}$,
т.е. точките O и M лежат на CH.

От свойството на медицентъра MC

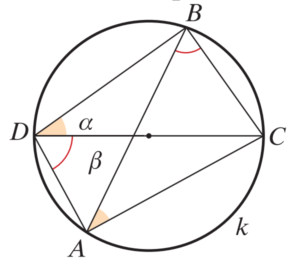
$\Rightarrow MH = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ cm, $MC = 8$ cm.

На черт. а) $M \in OH \Rightarrow CO = CM - MO = 8 - 1 = 7$,
$CO = r = 7$ cm.

На черт. б) $M \in OC \Rightarrow CO = CM + MO = 8 + 1 = 9$,
$CO = r = 9$ cm.

В равнобедрения $\triangle ABC$ от *Задача 2* са дадени само височината и отсечки върху нея. Това не определя разположението на точките O и M върху CH. Точка O лежи на отсечката CH. Тя не може да бъде на продължението на CH, защото $MO < MH$ ($MO = 1$ cm, $MH = 4$ cm). Ето защо разглеждаме само двата случая.

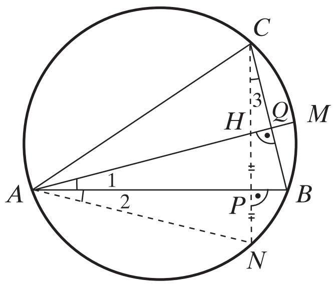
ЗАДАЧА 3 В дадена окръжност да се впише триъгълник, на който са дадени два ъгла.



Решение:
Начертаваме DC – произволен диаметър на дадената окръжност.
В двете полуравнини на правата DC нанасяме с общо рамо $\overrightarrow{DC}$ двата дадени ъгла: $\sphericalangle CDB = \alpha$ и $\sphericalangle CDA = \beta$.
Тогава търсеният триъгълник е ABC, защото $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \beta$ (вписани в k).

> Когато е даден радиусът на описаната около триъгълник окръжност, двете условия: – дадена страна на триъгълник и
> – даден ъгъл срещу тази страна,
> са еквивалентни.

ЗАДАЧА 4 Точките M и N лежат на окръжност, описана около остроъгълния $\triangle ABC$, така, че $AM \perp BC$ и $CN \perp AB$. Ако CN пресича AM и AB съответно в точките H и P, докажете, че: а) $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAN$; б) $PH = PN$.



Доказателство:
а) В $\triangle ABQ$ $\sphericalangle 1 = 90° - \sphericalangle B$, в $\triangle CBP$ $\sphericalangle 3 = 90° - \sphericalangle B$
$\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 \Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{NB}$ (вписани ъгли). (1)

Тогава от (1) $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ $\left\{\begin{array}{l}\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MB} \\ \sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{NB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}\end{array}\right.$,

т.е. $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAN$.

б) Разглеждаме $\triangle APH$ и $\triangle APN$ $\left\{\begin{array}{l}AP \text{ – обща} \\ \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \\ \sphericalangle P = 90°\end{array}\right.$

$\Rightarrow \triangle APH \cong \triangle APN$ (по II признак) $\Rightarrow PH = PN$.

ЗАДАЧИ

1 Докажете, че ако центърът на описаната около триъгълник окръжност лежи на една от страните му, срещулежащият на тази страна ъгъл е прав.

2 Точката O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Намерете ъглите на $\triangle ABC$, ако:
а) $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = 5:6:7$;
б) $\sphericalangle AOB : \sphericalangle BOC : \sphericalangle COA = 4:5:9$.

3 Един от ъглите на равнобедрен триъгълник е 120°, а бедрото му е 6 cm. Намерете радиуса на описаната около него окръжност.

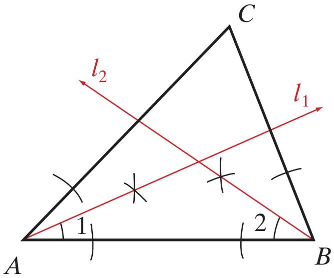
4 Около $\triangle ABC$ с ъгли α, β, γ е описана окръжност. Симетралите на страните BC, CA, AB пресичат принадлежащите на тези страни дъги съответно в точките A_1, B_1, C_1. Намерете ъглите на $\triangle A_1B_1C_1$.

5 Един от ъглите на равнобедрен триъгълник е 150°, а основата му има дължина 8 cm. Намерете радиуса на описаната около него окръжност.

6 Даден е правоъгълен триъгълник с катети 6 cm и 8 cm. Намерете радиуса на описаната около триъгълника окръжност.

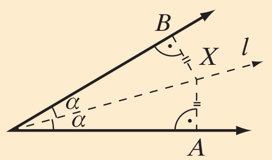
78. ОКРЪЖНОСТ, ВПИСАНА В ТРИЪГЪЛНИК

ЗАДАЧА 1 Даден е $\triangle ABC$. Постройте ъглополовящите l_1 и l_2 съответно на ъглите при върховете A и B и докажете, че те се пресичат.



Решение:

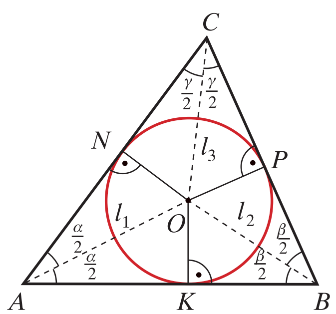
Построени са ъглополовящите l_1 и l_2. Ще докажем, че $l_1 \times l_2$.
За l_1 и l_2 има 3 възможности: $l_1 \equiv l_2$, $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \times l_2$.
Ако допуснем, че $l_1 \equiv l_2$, тогава $A \equiv B$, което противоречи на условието на задачата.
Ако допуснем, че $l_1 \parallel l_2$, тогава $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$ ще са вътрешно прилежащи ъгли при $(l_1 \parallel l_2) \times AB$ и $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 360°$.
Това противоречи на теоремата за сбора на ъглите в триъгълник. Остава вярно твърдението $l_1 \times l_2$.



Ще припомним, че X е точка от ъглополовящата на даден ъгъл тогава и само тогава, когато е на равни разстояния от раменете му, т.е. когато $XA = XB$.

Т Ъглополовящите на трите ъгла на всеки триъгълник се пресичат в една точка.

Дадено: $\triangle ABC$, l_1, l_2, l_3 – ъглополовящи на α, β, γ – ъгли при върховете A, B, C



Да се докаже: l_1, l_2, l_3 се пресичат в една точка

Доказателство:

Нека $l_1 \times l_2 = O$. Означаваме петите на перпендикулярите, спуснати от O към страните AB, BC, CA на $\triangle ABC$, съответно с K, P, N.

$$\left.\begin{array}{l} \text{От } O \in l_1 \Rightarrow OK = ON \\ \text{От } O \in l_2 \Rightarrow OK = OP \end{array}\right\} \Rightarrow ON = OP \Rightarrow O \in l_3.$$

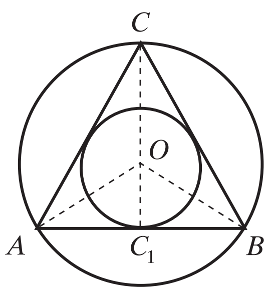
Тогава трите ъглополовящи минават през точката O.
От теоремата следва, че пресечната точка O на ъглополовящите на трите ъгла на триъгълника е на равни разстояния от трите му страни. Ако начертаем окръжност k с център O и радиус $OK = OP = ON$, страните AB, BC и CA ще са допирателни към k съответно в точките K, P и N.

Ще докажем, че k е единствена.
Ако допуснем, че има и друга окръжност $k' \neq k$, която се допира до трите страни на триъгълника, нейният център O' ще е на равни разстояния от тях и трябва да лежи и на трите ъглополовящи l_1, l_2, l_3.
Тогава $O' = O$ и $k' = k$, т.е. окръжността k е единствена.

О Окръжност, която се допира до трите страни на един триъгълник, се нарича **вписана окръжност** за триъгълника, а триъгълникът се нарича **описан около окръжността**.

Център на вписаната в триъгълник окръжност е пресечната точка на ъглополовящите на триъгълника.

ЗАДАЧА 2 (Устно) В равностранния $\triangle ABC$ е вписана и описана окръжност.



а) Докажете, че центровете им съвпадат (O).
б) Докажете, че O е медицентър на $\triangle ABC$.
в) Намерете $\sphericalangle AOB$.
г) Намерете r на вписаната окръжност, ако R на описаната окръжност е 6 cm.
д) Намерете R на описаната окръжност, ако височината на $\triangle ABC$ е 18 cm.

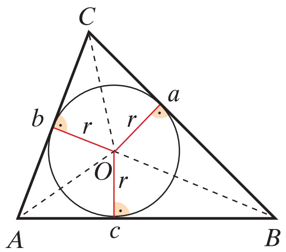
Решение на г):

CC_1 е медиана. $O \in CC_1$ – медицентър.

Тогава $OC_1 = \frac{1}{2}OC$. От $OC = R = 6$ cm $\Rightarrow$ $OC_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$, $r = 3$ cm.

Отг. в) 120°; д) 12 cm

ЗАДАЧА 3 Да се намери лицето на триъгълник, ако са дадени страните му и радиусът на вписаната окръжност.



Решение:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCO} + S_{\triangle CAO} + S_{\triangle ABO} =$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}r = pr$$

$$\boldsymbol{S_{\triangle} = pr},$$

където p е полупериметърът на $\triangle ABC$.

ЗАДАЧИ

1 Даден е равностранен триъгълник с височина h. Намерете радиуса на вписаната окръжност.

2 В равнобедрен $\triangle ABC$ с основа AB и център O на вписаната окръжност $\sphericalangle AOB = 130°$. Намерете ъглите на $\triangle ABC$.

3 В $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB = 80°$ и точка O е център на вписаната окръжност. Намерете $\sphericalangle AOB$.

4 Докажете, че ако центърът на вписаната в триъгълник окръжност лежи на една от височините, триъгълникът е равнобедрен.

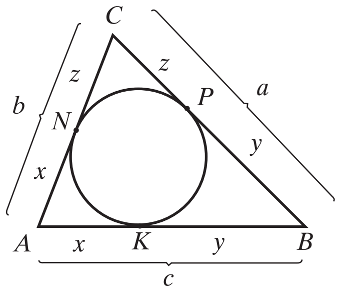
5 Единият остър ъгъл на правоъгълен триъгълник е α. Намерете ъглите, под които центърът на вписаната окръжност „вижда“ катетите.

6 Да се намери лицето на триъгълник, ако полупериметърът му е 12 cm и радиусът на вписаната окръжност е 2 cm.

7 Докажете, че в равностранен триъгълник за радиуса R на описаната окръжност и за радиуса r на вписаната окръжност е изпълнено равенството $R = 2r$.

79. ОКРЪЖНОСТ, ВПИСАНА В ТРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Страните на $\triangle ABC$ са $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Вписаната в този триъгълник окръжност k допира тези страни съответно в точките P, N и K. Намерете допирателните към k от върховете на триъгълника.



Решение:

Знаем, че допирателните от точка вън от окръжност към окръжността са равни. Означаваме $AK = AN = x$, $BK = BP = y$, $CP = CN = z$ и получаваме

$$\begin{array}{l} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \\ \hline 2(x + y + z) = a + b + c \end{array}$$

Събираме почленно тези равенства.

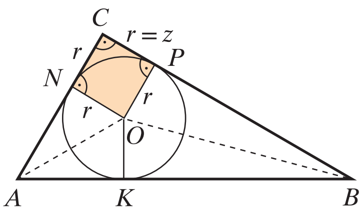
Получаваме $x + y + z = \dfrac{a+b+c}{2} = p$,

където с p сме означили полупериметъра на триъгълника.

От $x + y + z = p$ последователно намираме

$x = p - (y + z)$	$y = p - (x + z)$	$z = p - (x + y)$
$x = p - a$	$y = p - b$	$z = p - c$

ЗАДАЧА 2 Да се докаже, че в правоъгълния триъгълник с катети a, b, хипотенуза c и радиус на вписаната окръжност r е изпълнено равенството $a + b = c + 2r$.



Решение:

Четириъгълникът $NOPC$ е квадрат, защото има три прави ъгъла и равни съседни страни $ON = OP = r$.

Тогава $CN = CP = r$.

От *Задача 1* $z = p - c$, т.е. $\boxed{r = p - c}$, където $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Получаваме $r = \dfrac{a+b+c}{2} - c \Rightarrow r = \dfrac{a+b-c}{2}$

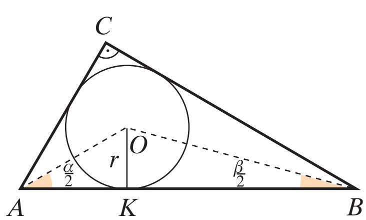
$\Rightarrow a + b = c + 2r$.

ЗАДАЧА 3 Даден е правоъгълен $\triangle ABC$. Намерете:

а) r, ако $a + b = 14$ cm, $c = 10$ cm;

б) p, ако $r = 5$ cm, $c = 25$ cm;

в) $\sphericalangle AOB$.



Решение:

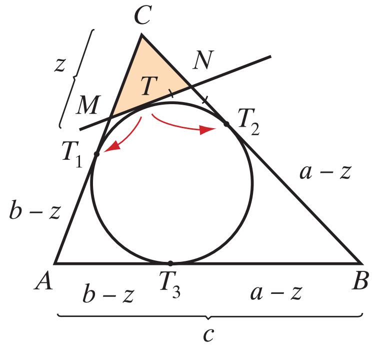
а) $r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{14-10}{2} = 2$

б) $r = p - c \Rightarrow p = r + c = 5 + 25 = 30$

в) $\sphericalangle AOB = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$

$\sphericalangle AOB = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180° - \frac{90°}{2} = 135°.$

ЗАДАЧА 4 В триъгълник със страни $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$ е вписана окръжност. Допирателна към окръжността пресича страните AC и BC съответно в точките M и N. Намерете периметъра на $\triangle MNC$.



Решение:

$P_{\triangle MNC} = CM + MN + NC = CM + MT + TN + NC$

$\left.\begin{array}{l} MT = MT_1 \\ TN = NT_2 \end{array}\right\}$ свойство на допирателните

Получаваме

$P_{\triangle MNC} = \underbrace{CM + MT_1}_{CT_1} + \underbrace{T_2N + NC}_{CT_2}$

$P_{\triangle MNC} = CT_1 + CT_2$

$P_{\triangle MNC} = p - c + p - c$ (от *Задача 1*)

Тогава $P_{\triangle MNC} = 2(p - c)$, $p = \frac{a + b + c}{2}$

$\Rightarrow P_{\triangle MNC} = a + b - c$

Задача 4 може да се реши без прилагане на *Задача 1* така:
Означаваме $CT_1 = CT_2 = z$. Тогава $AT_1 = AT_3 = b - z$, $BT_1 = BT_3 = a - z$.
За $AB = c$ получаваме $AB = AT_3 + T_3B = b - z + a - z = a + b - 2z$.
Тогава $c = a + b - 2z$, $z = \frac{a + b + c}{2}$ и $P_{\triangle MNC} = 2z = a + b - c$.

ЗАДАЧИ

1 В правоъгълен триъгълник с катети a, b, хипотенуза c и радиус на вписаната окръжност r намерете:

а) c, ако $P_{\triangle} = 36$ cm и $r = 3$ cm;
б) p, ако $ab = 68$ cm^2 и $r = 2$ cm;
в) a, ако $c - b = 5$ cm и $r = 1{,}5$ cm.

2 Допирателните от върховете на триъгълник до вписаната окръжност са 6 cm, 7 cm и 8 cm. Намерете страните на триъгълника.

3 Да се докаже, че сборът от диаметрите на вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност и описаната около същия триъгълник окръжност е равен на сбора от катетите му.

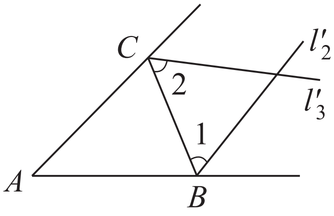
4 Разликата от катетите на правоъгълен триъгълник е равна на диаметъра на вписаната в него окръжност. Хипотенузата му е 8 cm. Намерете по-малкия катет и ъглите на триъгълника.

5 Даден е $\triangle ABC$ със страни $AB = 7$ cm, $CA = 6$ cm и $CB = 5$ cm. В триъгълника е вписана окръжност k. Допирателна към k пресича страните CA и CB съответно в точките M и N. Намерете периметъра на $\triangle MNC$.

80. ВЪНШНОВПИСАНИ ОКРЪЖНОСТИ

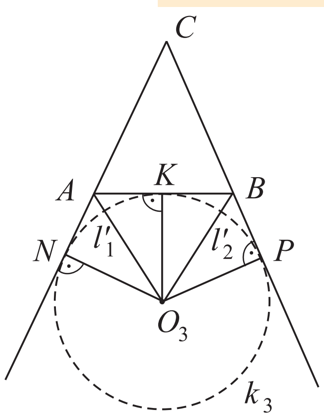
ЗАДАЧА 1 Даден е $\triangle ABC$. Постройте ъглополовящите l'_2 и l'_3 съответно на външните ъгли при върховете B и C и докажете, че те се пресичат.

Решение: На чертежа са построени ъглополовящите l'_2 и l'_3 на външните ъгли при върховете B и C.



За l'_2 и l'_3 има 3 възможности: $l'_2 \equiv l'_3$, $l'_2 \,||\, l'_3$, $l'_2 \equiv l'_3$.
Ако допуснем, че $l'_2 \equiv l'_3$, тогава $B \equiv C$, което противоречи на условието на задачата.
Ако допуснем, че $l'_2 \,||\, l'_3$, тогава $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$ ще са вътрешно прилежащи ъгли при $(l'_2 \,||\, l'_3) \times BC$ и $\dfrac{\beta_1}{2} + \dfrac{\gamma_1}{2} = 180° \Rightarrow \beta_1 + \gamma_1 = 360°$. Това противоречи на теоремата за сбора на външните ъгли на триъгълник.
Остава вярно твърдението $l'_2 \times l'_3$.

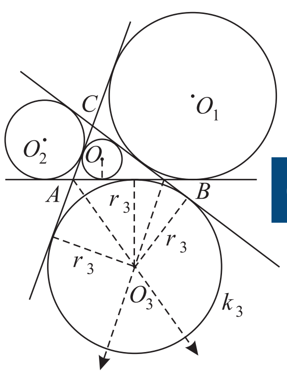
Т Ъглополовящите на външните ъгли при два върха на триъгълник и ъглополовящата през третия му връх се пресичат в една точка.



Дадено: $\triangle ABC$ l'_1, l'_2, l_3 – ъглополовящи на α_1, β_1 и γ
Да се докаже: l'_1, l'_2, l_3 се пресичат в една точка
Доказателство:
Нека $l'_1 \times l'_2 = O_3$. Означаваме петите на перпендикулярите, спуснати от O_3 към правите AB, BC и CA, съответно с K, P и N.

$$\left.\begin{array}{l} \text{От } O_3 \in l'_1 \Rightarrow O_3N = O_3K \\ \text{От } O_3 \in l'_2 \Rightarrow O_3N = O_3P \end{array}\right\} \Rightarrow O_3K = O_3P \Rightarrow O_3 \in l_3.$$

Доказахме, че трите ъглополовящи l'_1, l'_2, l_3 се пресичат в точката O_3.
Точката O_3 е на равни разстояния от страната AB и от продълженията на страните CA и CB.
Ако начертаем окръжност k_3 с център O_3 и радиус $r_3 = O_3K = O_3P = O_3N$, страната AB и правите CA и CB ще са допирателни към k_3 съответно в точките K, N и P.
Може да се докаже, че окръжността k_3 е единствена.

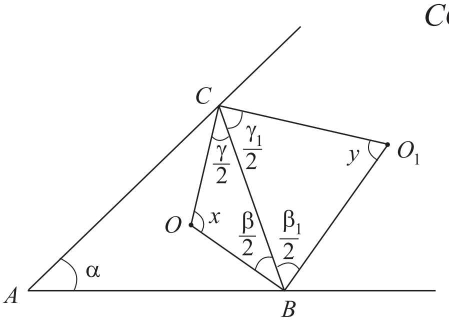


О Окръжност, която се допира до една страна на триъгълник и до продълженията на другите две страни, се нарича **външновписана окръжност** за триъгълника.

Всеки триъгълник има три външновписани окръжности.

ЗАДАЧА 2 В $\triangle ABC$ точка O е център на вписаната окръжност, а точка O_1 е център на външновписаната окръжност, която се допира до страната BC. Намерете ъглите на четириъгълника OBO_1C, ако:
а) $\sphericalangle BAC = \alpha$; б) $\sphericalangle BAC = 70°$; в) $\sphericalangle BOC = 120°$.

Решение: а) **1.** $\triangle BOC$, $\sphericalangle BOC = x$, BO и CO – ъглополовящи на β и γ



$$x + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180$$
$$2x + \beta + \gamma = 360^\circ$$
$$2x + 180^\circ - \alpha = 360^\circ$$
$$x = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

2. $\triangle BO_1C$, $\sphericalangle BO_1C = y$, BO_1 и CO_1 – ъглополовящи на β_1 и γ_1

$$y + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\gamma_1}{2} = 180$$
$$2y + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$$
$$2y + 360^\circ - \alpha_1 = 360^\circ$$
$$2y = \alpha_1 = 180^\circ - \alpha$$
$$y = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

3. $\sphericalangle OBO_1 = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta_1}{2} = \frac{\beta + \beta_1}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\sphericalangle OCO_1 = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma_1}{2} = \frac{\gamma + \gamma_1}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\Rightarrow OBO_1C \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2};\ 90^\circ;\ 90^\circ - \frac{\alpha}{2};\ 90^\circ\right)$

б) $\alpha = 70^\circ$

OBO_1C (125°; 90°; 55°; 90°)

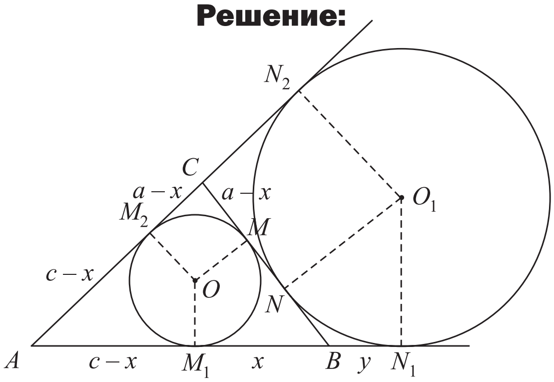
в) $\sphericalangle BOC = 120^\circ$

$$90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 120^\circ$$
$$\alpha = 60^\circ$$
$\Rightarrow OBO_1C$ (120°; 90°; 60°; 90°)

ЗАДАЧА 3

В $\triangle ABC$ ($AB > AC$) вписаната и външновписаната окръжности се допират до страната BC съответно в точките M и N. Намерете дължината на отсечката MN, ако: а) $AB = c$, $AC = b$; б) $AB = 7$ cm, $AC = 3$ cm.

Решение:



а) **1.** Означаваме

$BM = BM_1 = x.$
$AM_1 = AM_2 = c - x$
$CM = CM_2 = a - x$
$AM_2 + M_2C = b$
$c - x + a - x = b$
$2x = a + c - b$
$$x = \frac{a + c - b}{2}$$

2. Означаваме

$BN = BN_1 = y$
$CN = CN_2 = a - y$
$AN_1 = AN_2$
$\Rightarrow c + y = b + a - y$
$2y = a + b - c$
$$y = \frac{a + b - c}{2}$$

3. $MN = BM - BN = x - y =$
$$= \frac{a + c - b}{2} - \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + c - b - a - b + c}{2} = c - b$$
$\Rightarrow MN = c - b$

б) $MN = c - b = 7 - 3 = 4$ cm

ЗАДАЧИ

1 Начертайте $\triangle ABC$ със страни $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm и $AC = 5$ cm. Постройте външновписаните окръжности за $\triangle ABC$.

2 За $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$. Ако O_1, O_2 и O_3 са центровете на външновписаните окръжности, които се допират съответно до BC, CA и AB, намерете ъглите на:

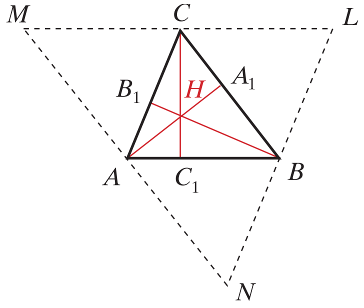
а) $\triangle BCO_1$; б) $\triangle ACO_2$;
в) $\triangle ABO_3$; г) $\triangle O_1O_2O_3$.

3 В $\triangle ABC$ ($AB > BC$) вписаната и външновписаната окръжности се допират до страната AC съответно в точките M и N. Намерете дължината на отсечката MN, ако:
а) $AB = c$, $BC = a$;
б) $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm.

81. ОРТОЦЕНТЪР НА ТРИЪГЪЛНИК

Ортоцентър на триъгълник

О Във всеки триъгълник трите прави, върху които лежат височините му, се пресичат в една точка, която се нарича **ортоцентър** на триъгълника.



Дадено: $\triangle ABC$; AA_1, BB_1, CC_1 – височини

Да се докаже: правите AA_1, BB_1, CC_1 се пресичат в една точка

Доказателство: През всеки връх на $\triangle ABC$ построяваме права, успоредна на срещуположната му страна. Получаваме $\triangle LMN$.
По построение $ABLC$, $BCMA$ и $CANB$ са успоредници. Тогава

от $ABLC \Rightarrow AB = LC,\ AB \parallel LC,$ (1)

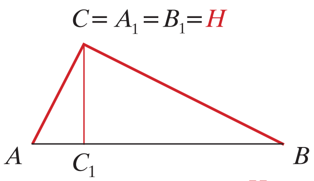
от $BCMA \Rightarrow AB = CM,\ AB \parallel CM.$ (2)

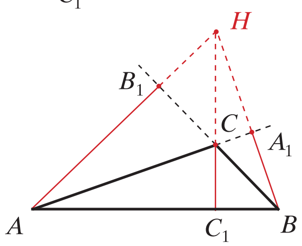
От (1) и (2) $\Rightarrow$ C – средата на ML, (3)

и $ML \parallel AB.$ (4)

От (4) и $CC_1 \perp AB \Rightarrow CC_1 \perp ML.$ (5)

От (3) и (5) $\Rightarrow$ правата CC_1 е симетрала на ML.
Аналогично доказваме, че BB_1 и AA_1 са симетрали съответно на NL и MN.
Трите прави AA_1, BB_1, CC_1 са симетрали на страните на $\triangle LMN$ и се пресичат в точката H. Върху тези прави лежат и височините AA_1, BB_1 и CC_1 на $\triangle ABC$. Тогава точката H е пресечната точка на височините в $\triangle ABC$.

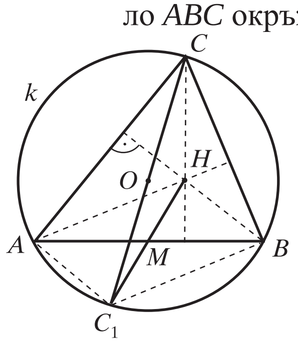




Точката H е ортоцентър на $\triangle ABC$.

! В случай че триъгълникът е правоъгълен, двете височини са катетите на триъгълника и върхът на правия ъгъл съвпада с ортоцентъра H.
В случай че триъгълникът е тъпоъгълен, ортоцентърът е външна точка за $\triangle ABC$ и се намира на продълженията на височините.

ЗАДАЧА 1 Точката H е ортоцентър на остроъгълния $\triangle ABC$. CC_1 е диаметър на описаната около ABC окръжност. Да се докаже, че отсечката C_1H се разполовява от страната AB.



Доказателство: Съединяваме точката C_1 с върховете A и B на $\triangle ABC$.
Разглеждаме четириъгълника AC_1BH.

$$\left.\begin{array}{l} \text{От } BH \perp AC \text{ (по условие)} \\ C_1A \perp AC \ (\sphericalangle C_1AC = 90^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow C_1A \parallel BH$$

Аналогично доказваме, че $C_1B \parallel AH$
$\Rightarrow AC_1BH$ е успоредник с диагонали AB и HC_1.
Тогава $AB \cap HC_1 = M \Rightarrow M$ е средата на HC_1, т.е. $MH = MC_1$.

В *Задача 1* доказахме още, че отсечката HC_1 разполовява страната AB на $\triangle ABC$. Твърдението на задачата е вярно и за тъпоъгълен триъгълник. При решението се правят аналогични разсъждения.

Забележителни точки в триъгълник

Доказахме, че в триъгълника:

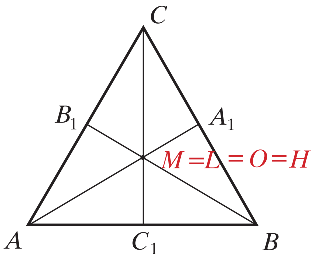
1. трите медиани се пресичат в една точка, която се нарича медицентър M;

2. трите ъглополовящи се пресичат в една точка – L, която е център на вписаната окръжност;

3. трите симетрали се пресичат в една точка – O, която е център на описаната окръжност ;

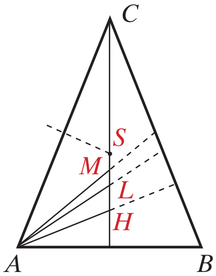
4. трите височини (или техните продължения) се пресичат в една точка – H, която се нарича ортоцентър.

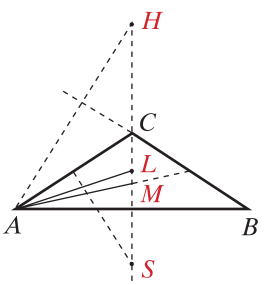
Тези четири точки се наричат **забележителни точки в триъгълника**.



Точките **1.** и **2.**, т.е. M и L, са **винаги вътрешни за триъгълника**, защото трите медиани и трите ъглополовящи по определение лежат вътре в триъгълника.

Точките **3.** и **4.** са вътрешни за остроъгълния триъгълник, лежат на страна или връх в правоъгълния триъгълник и са външни за тъпоъгълния триъгълник.





В **равностранния триъгълник** $M \equiv L \equiv O \equiv H$, защото $m_a \equiv l_a \equiv s_a \equiv h_a$, $m_b \equiv l_b \equiv s_b \equiv h_b$, $m_c \equiv l_c \equiv s_c \equiv h_c$.

В **равнобедрения триъгълник** точките M, L, $O \equiv S$, H са върху височината, спусната от върха C към основата AB, защото CC_1 е h_c, m_c, l_c и лежи на симетралата на AB. Подреждането на тези точки върху CC_1 и нейното продължение няма определен ред, защото зависи от ъгъла при върха C.

ЗАДАЧИ

1 В равностранен триъгълник радиусът на вписаната окръжност е 3 cm. Намерете разстоянието от ортоцентъра до върховете на триъгълника.

2 В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) малкият катет $AC = 6$ cm. Намерете разстоянието между ортоцентъра и върха B на триъгълника, ако лицето му е 30 cm^2.

3 В равнобедрен триъгълник височината към основата е 120 cm, а радиусите на вписаната и описаната окръжности са съответно 45 cm и 93,75 cm. Намерете разстоянията от медицентъра до центровете на вписаната и описаната окръжности.

4 В равнобедрен тъпоъгълен триъгълник радиусите на вписаната и описаната окръжности са съответно 8 cm и 25 cm. Намерете разстоянието между медицентъра M и центъра L на вписаната окръжност, ако разстоянието между L и центъра O на описаната окръжност е 15 cm.

5 В $\triangle ABC$ H е ортоцентър и $AH = 5$ cm. Ако $\sphericalangle CAB = 45°$, намерете BC.
Упътване: Докажете, че $\triangle AC_1H \cong \triangle CC_1B$ по II признак.

6 Докажете, че ако в остроъгълния $\triangle ABC$ точката H е ортоцентър и $BC = AH$, то ъгълът при върха A е 45°.

82. ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ТРИЪГЪЛНИКА. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 В $\triangle ABC$ точките O и H са съответно център на описаната окръжност и ортоцентър. Да се докаже векторното равенство $\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$.

Решение:

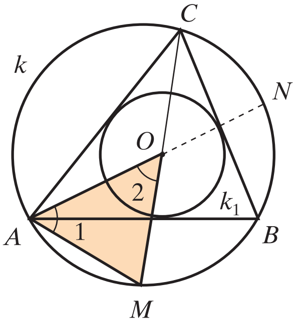
O е средата на диаметъра CC_1. Тогава $\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HC_1})$. (1)

В *Задачата* от предходния урок доказахме, че HAC_1B е успоредник с диагонал HC_1.

Тогава $\overrightarrow{HC_1} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}$. Заместваме в (1) и получаваме

$\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$.

ЗАДАЧА 2 В окръжност k е вписан $\triangle ABC$, а в него е вписана окръжност k_1 с център O. Ако M е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$ (която не съдържа C) в окръжността k, да се докаже, че $\triangle AOM$ е равнобедрен.



Доказателство:

Построяваме CM.

От $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow \sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM \Rightarrow O \in CM$. (1)

Построяваме ъглополовящата AO.

$AO \times \overset{\frown}{BC} = N \Rightarrow \overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{CN}$ (2)

$\sphericalangle 1$ е вписан в $k \Rightarrow \sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MBN} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BN})$.

$\sphericalangle 2$ е ъгъл с връх вътре в $k \Rightarrow \sphericalangle 2 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{CN})$.

От (1) и (2) $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BN}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{CN}) = \sphericalangle 2$

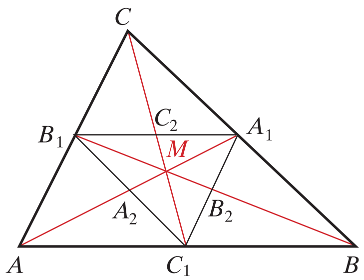
$\Rightarrow AM = MO \Rightarrow \triangle AMO$ е равнобедрен.

От M – средата на $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow MB = MA$, т.е. $MB = MA = MO \Rightarrow M$ е център на окръжност, описана около $\triangle ABO$. Чрез аналогични разсъждения можем да докажем, че N е център на окръжност, описана около $\triangle BCO$.
Обобщение: Центровете на описаните окръжности около $\triangle ABO$, $\triangle BCO$ и $\triangle CAO$ са средите на съответните дъги $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{CA}$.

ЗАДАЧА 3 Нека M е медицентърът на $\triangle ABC$. Правите AM, BM, CM пресичат страните BC, CA, AB съответно в точките A_1, B_1, C_1.
а) Да се докаже, че точката M е медицентър на $\triangle A_1B_1C_1$.
б) Да се намерят дължините на медианите на $\triangle A_1B_1C_1$, ако разстоянията от M до A_1, B_1 и C_1 са съответно 8 cm, 10 cm и 12 cm.

Решение:

а) AA_1, BB_1 и CC_1 са медиани
$\Rightarrow A_1$, B_1, C_1 са средите съответно на BC, CA, AB.

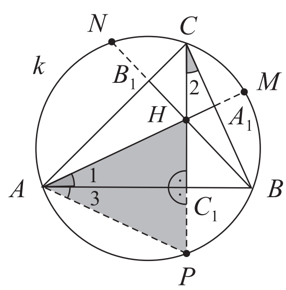


Тогава A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 са средни отсечки в $\triangle ABC$. Четириъгълникът $AC_1A_1B_1$ е успоредник, защото от свойството на средните отсечки $A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = AC_1$ $\Rightarrow AA_1 \times B_1C_1 = A_2$ – средата на B_1C_1.
Аналогично доказваме, че B_2 е средата на C_1A_1 и C_2 е средата на A_1B_1. A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 са медиани в $\triangle A_1B_1C_1$ и минават през $M \Rightarrow M$ е медицентър на $\triangle A_1B_1C_1$.

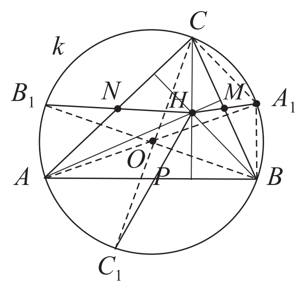
б) $A_1A_2 = MA_1 + MA_2 = MA_1 + \frac{1}{2}MA_1$ (свойство на медианите), $A_1A_2 = \frac{3}{2}MA_1 = \frac{3}{2}\cdot 8 = 12$; $A_1A_2 = 12$ cm.
Аналогично намираме, че $B_1B_2 = 15$ cm и $C_1C_2 = 18$ cm.

Свойства на ортоцентъра на триъгълника

Доказахме две твърдения за ортоцентъра в триъгълник, които могат да се обобщят в следните две свойства:



1. Симетричните точки на ортоцентъра на триъгълник спрямо страните му лежат на описаната около триъгълника окръжност:
$HA_1 = A_1M$, $HM \perp BC$
$HB_1 = B_1N$, $HN \perp AC$
$HC_1 = C_1P$, $HP \perp AB$
($\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 \Rightarrow \triangle AC_1H \cong \triangle AC_1P \Rightarrow HC_1 = C_1P$).



2. Симетричните точки на ортоцентъра на триъгълник спрямо средите на страните му лежат на описаната около триъгълника окръжност. Те са диаметрално противоположни точки на върховете на триъгълника: $HM = MA_1$, $HN = NB_1$, $HP = PC_1$ (доказваме, че HBA_1C е успоредник $\Rightarrow HM = MA_1$).
С това свойство доказваме, че отсечките HA_1, HB_1 и HC_1 разполовяват страните BC, CA и AB.

ЗАДАЧИ

1 Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H. Докажете, че ъглите ABH и ACH са равни.

2 Даден е $\triangle ABC$. Окръжността с диаметър AB пресича страните BC и AC съответно в точките D и E. Отсечките AD и BE се пресичат в точка P. Да се докаже, че:
а) P е ортоцентър на $\triangle ABC$;
б) $\sphericalangle APB = 180° - \sphericalangle ACB$.

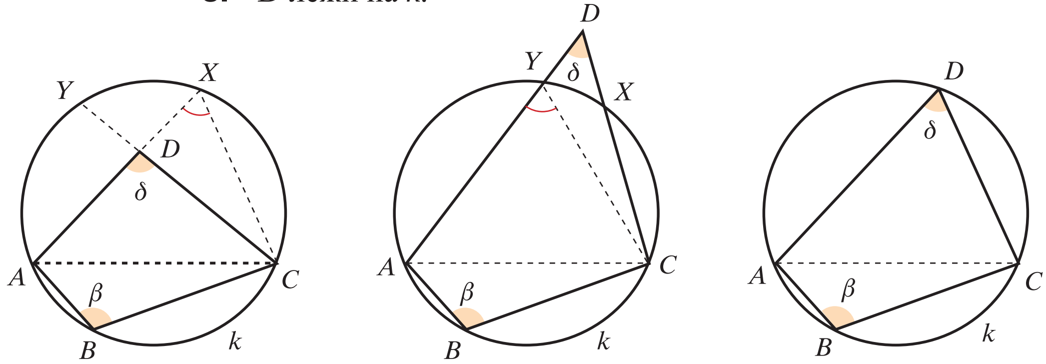
3 В $\triangle ABC$ точките O и H са съответно център на описаната окръжност и ортоцентър. Да се докаже векторното равенство $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

4 Правите g_1, g_2, g_3 минават съответно през върховете A, B, C на $\triangle ABC$ и са успоредни на срещулежащите им страни BC, CA, AB. Нека пресечната точка на g_2 и g_3 е A_1, на g_3 и g_1 е B_1 и на g_1 и g_2 е C_1. Да се докаже, че:
а) двата триъгълника ABC и $A_1B_1C_1$ имат един и същ медицентър;
б) медианите на $\triangle A_1B_1C_1$ са 2 пъти по-големи от медианите на $\triangle ABC$.

83. ЧЕТИРИЪГЪЛНИК, ВПИСАН В ОКРЪЖНОСТ

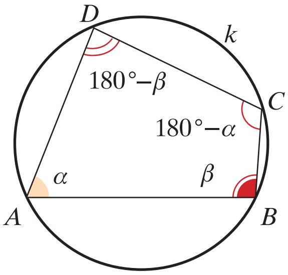
Даден е четириъгълник $ABCD$ с диагонал AC.
Ако построим единствената окръжност k, определена от трите точки A, B и C, за върха D има следните три възможности:

1. D е вътрешна точка за k;
2. D е външна точка за k;
3. D лежи на k.



В третия случай казваме, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжността k. Какви условия трябва да изпълнява върхът D, за да лежи на окръжността k?

T1 Ако един четириъгълник е вписан в окръжност, сборът на всеки два негови срещуположни ъгъла е $180°$.

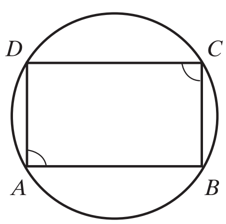


Дадено:
Окръжност k, четириъгълник $ABCD$ – вписан в k
Да се докаже: $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$, $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$
Доказателство:
От теоремата за вписан ъгъл получаваме

$$\sphericalangle A+\sphericalangle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{DAB}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{DAB})=\frac{1}{2}\cdot 360°=180°,$$

т.е. $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$.
Сборът на ъглите на четириъгълника е $360°$.
Тогава и $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$.

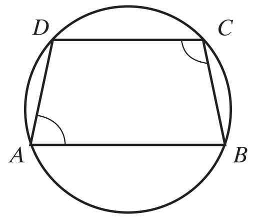
ЗАДАЧА 1 Докажете, че всеки вписан в окръжност:
а) успоредник е правоъгълник;
б) трапец е равнобедрен.



Доказателство:
а) $ABCD$ е вписан успоредник.

От $\left|\begin{array}{l}\sphericalangle A+\sphericalangle C=180° \\ \sphericalangle A=\sphericalangle C\end{array}\right.$ (по условие) $\Rightarrow 2\sphericalangle A=180° \Rightarrow \sphericalangle A=90°$

$\Rightarrow ABCD$ е правоъгълник.



б) $ABCD$ е вписан трапец.

I начин: От $\left| \begin{array}{l} \sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ \\ \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ \end{array} \right.$ (по условие)

$\Rightarrow \ \sphericalangle A = \sphericalangle B \Rightarrow \ ABCD$ е равнобедрен трапец.

II начин: От $AB \parallel CD \Rightarrow \ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \ \Rightarrow AD = BC$

$\Rightarrow ABCD$ е равнобедрен трапец.

T2 Ако в един четириъгълник сборът на два срещуположни ъгъла е 180°, около него може да се опише окръжност.

Дадено: четириъгълник $ABCD$, $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$ ($\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$)

Да се докаже: около $ABCD$ може да се опише окръжност k, т.е. $ABCD$ е вписан в k

Доказателство: Ако построим окръжност k около $\triangle ABC$, за върха D има три възможности.

Допускаме, че D е вътрешна точка за k. Тогава

$$\beta + \delta = \beta + \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{XY}) = \beta + \frac{1}{2}(360^\circ - 2\beta) + \frac{1}{2}\overset{\frown}{XY} = \beta + 180^\circ - \beta + \frac{1}{2}\overset{\frown}{XY} = 180^\circ + \frac{1}{2}\overset{\frown}{XY} > 180^\circ,$$

което противоречи на условието, че $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$.

Допускаме, че D е външна точка за k. Тогава

$$\beta + \delta = \beta + \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{XY}) = \beta + \frac{1}{2}(360^\circ - 2\beta) - \frac{1}{2}\overset{\frown}{XY} = \beta + 180^\circ - \beta - \frac{1}{2}\overset{\frown}{XY} = 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{XY} < 180^\circ,$$

което противоречи на условието, че $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$.

Остава вярно твърдението, че D лежи на k, т.е.

четириъгълникът *ABCD* е вписан в окръжност.

ЗАДАЧА 2
ОСНОВНА ЗАДАЧА

Около всеки правоъгълник и около всеки равнобедрен трапец може да се опише окръжност.

Доказателство:

В правоъгълника всички ъгли са прави. Тогава $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$

$\Rightarrow$ около него може да се опише окръжност.

В равнобедрения трапец $ABCD$ $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

От свойство на трапеца следва, че $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$. Тогава $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$

$\Rightarrow$ около равнобедрения трапец може да се опише окръжност.

ЗАДАЧИ

1 Докажете, че всеки вписан в окръжност ромб е квадрат.

2 Да се докаже, че около всеки квадрат може да се опише окръжност.

3 Може ли да се опише окръжност около четириъгълник, на който ъглите α, β, γ и δ, взети в този ред, се отнасят както:

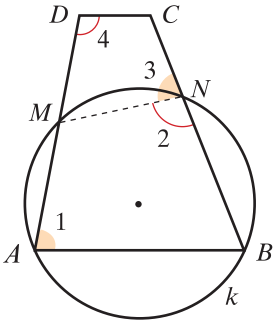
а) 1 : 2 : 3 : 4; б) 3 : 2 : 3 : 4;
в) 3 : 5 : 4 : 2?

4 Малката страна на правоъгълник е 20 cm. Острият ъгъл между диагоналите е 60°. Да се намери радиусът на описаната около правоъгълника окръжност.

5 Вписаният в окръжност четириъгълник $ABCD$ има диагонал AC, който е перпендикулярен на BD и го разполовява. Намерете ъглите на четириъгълника, ако $\sphericalangle BAD = 70^\circ$.

84. ЧЕТИРИЪГЪЛНИК, ВПИСАН В ОКРЪЖНОСТ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Дадени са трапец $ABCD$ и окръжност k, която минава през краищата на основата AB и пресича бедрата му AD и BC съответно в точките M и N. Докажете, че около четириъгълника $MNCD$ може да се опише окръжност.



Доказателство: Построяваме хордата MN.
Използваме означенията на ъглите от чертежа.
От $ABNM$ – вписан в k, и [T1]
$\Rightarrow \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180^\circ$. Но $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 180^\circ$ (съседни)
$\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$.
От $ABCD$ – трапец $\Rightarrow \sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 180^\circ$.
Доказахме, че $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$. Тогава $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 180^\circ$.
От [T2] следва, че около $MNCD$ може да се опише окръжност.

Необходимо и достатъчно условие

За вписан четириъгълник доказахме следните теореми:

Т1: Ако един четириъгълник е вписан в окръжност, сборът от два негови срещуположни ъгъла е 180°.

Т2: Ако в един четириъгълник сборът на два срещуположни ъгъла е 180°, около него може да се опише окръжност.

Теоремите Т1 и Т2 са обратни една на друга, т.е.

ако наречем Т1 права теорема, Т2 е нейна обратна теорема;
ако наречем Т2 права теорема, Т1 е нейна обратна теорема.

Във всяка от тези две теореми се съдържат две свойства:

Свойство I: Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност.

Свойство II: Сборът на два срещуположни ъгъла на четириъгълника $ABCD$ е 180°.

От свойство I $\Rightarrow$ свойство II, т.е. то е достатъчно условие, за да е изпълнено свойство II.
От свойство II $\Rightarrow$ свойство I, т.е. свойство II е изпълнено само тогава, когато е изпълнено свойство I, т.е. свойство I е и необходимо условие, за да бъде изпълнено свойство II.
Всяко от тези свойства е както необходимо, така и достатъчно условие, за да бъде изпълнено другото.
Двете теореми могат да се изкажат така:

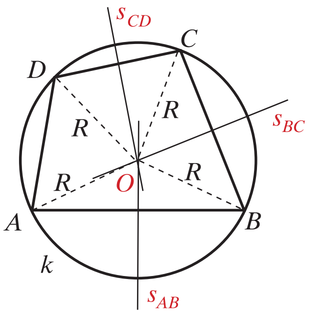
- Един четириъгълник е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато сборът на два негови срещуположни ъгъла е 180°.
- Необходимо и достатъчно условие един четириъгълник да е вписан в окръжност е сборът на два негови срещуположни ъгъла да е 180°.

За да се реши задача от вида: „Да се докаже, че свойство I е необходимо и достатъчно условие, за да е изпълнено свойство II“,
трябва да се решат следните две задачи:

1. Дадено е (I). Да се докаже (II).

2. Дадено е (II). Да се докаже (I).

ЗАДАЧА 2 Да се докаже, че необходимо и достатъчно условие един четириъгълник да е вписан в окръжност е симетралите на три негови страни да се пресичат в една точка.



Решение:

1. Дадено: четириъгълник $ABCD$, вписан в окръжност $k\,(O;\,R)$

Да се докаже: s_{AB}, s_{BC}, s_{CD} се пресичат в една точка

Доказателство:

От $ABCD$ – вписан $\Rightarrow OA = OB = OC = OD = R$. Тогава

от $\left|\begin{array}{ll} OA = OB \Rightarrow O \in s_{AB} & (1) \\ OB = OC \Rightarrow O \in s_{BC} & (2) \\ OC = OD \Rightarrow O \in s_{CD}. & (3) \end{array}\right.$

От (1), (2), (3) $\Rightarrow s_{AB}, s_{BC}, s_{CD}$ се пресичат в една точка (O).

2. Дадено: четириъгълник $ABCD$; s_{AB}, s_{BC}, s_{CD} се пресичат в една точка O

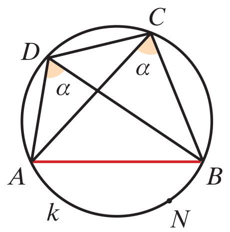
Да се докаже: $ABCD$ е вписан в окръжност

Доказателство:

$$\left.\begin{array}{l} \text{От } s_{AB} \times s_{BC} = O \Rightarrow OA = OB = OC \\ \text{От } s_{BC} \times s_{CD} = O \Rightarrow OB = OC = OD \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB = OD = OC \;(= R).$$

Тогава четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност $k\,(O;\,R)$.

ЗАДАЧА 3 Необходимо и достатъчно условие един четириъгълник $ABCD$ да е вписан в окръжност е $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$.



Решение:

1. Ако $ABCD$ е вписан в k, то $\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ANB}$ и $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ANB}$ (вписани в k) $\Rightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$.

2. Ако в четириъгълника $ABCD$ $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \alpha$ и k е описаната окръжност около $\triangle ABC$, за точка D има три възможности: D е вътрешна точка за k, D е външна точка за k, D лежи на k.

В първите два случая, като разсъждаваме както в доказателството на [T1], за $\sphericalangle ADB$ получаваме съответно, че е по-голям или по-малък от α, което противоречи на условието $\sphericalangle ADB = \alpha$. Остава вярно, че D лежи на k, т.е. четириъгълникът $ABCD$ е вписан в k.

ЗАДАЧИ

1 AA_1 и BB_1 са височини в $\triangle ABC$. Да се докаже, че:

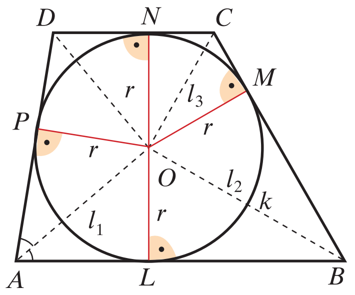
а) четириъгълникът ABA_1B_1 е вписан в окръжност;

б) $\triangle A_1B_1C$ има ъгли, равни на ъглите на $\triangle ABC$.

2 В остроъгълния $\triangle ABC$ височините BB_1 и CC_1 се пресичат в точка H. Намерете ъглите B_1C_1H и C_1B_1H, ако ъглите на триъгълника при върховете B и C са съответно β и γ.

85. ЧЕТИРИЪГЪЛНИК, ОПИСАН ОКОЛО ОКРЪЖНОСТ

О Един четириъгълник е описан около дадена окръжност, ако страните му са допирателни към тази окръжност.



На чертежа окръжността $k\,(O;\,r)$ е вписана в $ABCD$. Тогава разстоянията от центъра O на k до четирите страни са равни и

$OL = OM = ON = OP = r.$

От $OL = OP \Rightarrow O \in l$, т.е. лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle A$.

Аналогично се доказва, че O лежи на ъглополовящите на другите ъгли на четириъгълника $ABCD$, т.е. ъглополовящите се пресичат в една точка.

Обратното твърдение също е вярно.

Нека например ъглополовящите l_1, l_2, l_3 се пресичат в една точка O.

Тогава от $\left.\begin{array}{l} O \in l_1 \;\Rightarrow OL = OP \\ O \in l_2 \;\Rightarrow OL = OM \\ O \in l_3 \;\Rightarrow OM = ON \end{array}\right\} \Rightarrow\; OL = OM = ON = OP.$

Точката O е на равни разстояния от страните на четириъгълника, които ще се допират до $k\,(O)$, т.е. четириъгълникът ще е описан около окръжност.

С тези разсъждения доказахме, че:

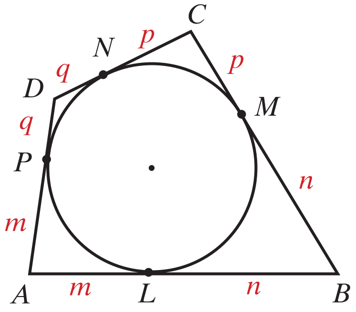
ЗАДАЧА 1
ОСНОВНА ЗАДАЧА

Необходимото и достатъчно условие един четириъгълник да е описан около окръжност е ъглополовящите на три негови ъгъла да се пресичат в една точка.

Изказаното необходимо и достатъчно условие в *Задача 1* използва ъглите на четириъгълника.

Ще изкажем друго необходимо и достатъчно условие един четириъгълник да е описан около окръжност, в което участват страните на четириъгълника и което е по-удобно при решаване на задачи.

Т Необходимо и достатъчно условие един четириъгълник да е описан около окръжност е сборът на две негови срещуположни страни да е равен на сбора на другите две срещуположни страни.



Необходимост:

Дадено: окръжност $k\,(O;\,r)$,

$ABCD$ – четириъгълник, описан около k

Да се докаже: $AB + CD = AD + BC$

Доказателство:

От свойството на допирателните от точка, нележаща на k, към k следва, че допирателните са равни.

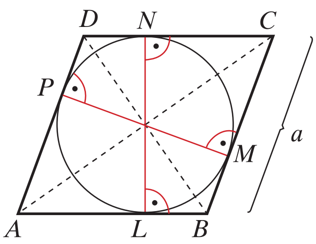
Означаваме ги с една и съща буква.

Тогава $\left| \begin{array}{l} AB + CD = m + n + p + q \\ AD + BC = m + q + n + p \end{array} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{AB + CD = AD + BC}$.

Достатъчност:

Дадено: четириъгълник $ABCD$, $AB + CD = AD + BC$

Да се докаже: $ABCD$ е описан около окръжност

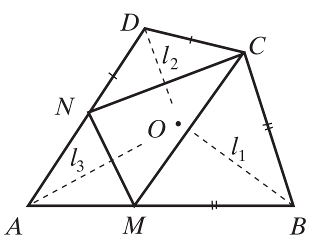


Доказателство:

I случай: $ABCD$ е ромб.

В ромба $AB + CD = AD + BC = 2a$, AC и BD са ъглополовящи на ъглите. Тогава $O = AC \times BD$ е на едно и също разстояние от страните на ромба, т.е. $OL = OM = ON = OP = r$. Тогава страните на ромба са допирателни към окръжност $k\,(O;\, r)$ и $ABCD$ е описан около окръжност.

II случай: $ABCD$ не е ромб, но е изпълнено $AB + CD = AD + BC$.



Нека $AB > BC$. (1)

Тогава $CD < AD$. (2)

Нанасяме отсечките BC и CD съответно върху лъчите $BA^{\to}$ и $DA^{\to}$.

Получаваме $BM = BC$ и (3)

$DN = DC$, (4)

като поради (1) M ще е между A и B, а поради (2) N ще е между A и D.

От $BM = BC \Rightarrow \triangle MCB$ е равнобедрен с връх B.

l_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle B \Rightarrow l_1$ е симетрала на MC.

От $DN = DC \Rightarrow \triangle NCD$ е равнобедрен с връх D.

l_2 е ъглополовяща на $\sphericalangle D \Rightarrow l_2$ е симетрала на CN.

От $AB + CD = AD + BC$ (по условие), което записваме така:

$AM + \underline{\underline{MB}} + \underline{CD} = AN + \underline{ND} + \underline{\underline{BC}}$, и от (3) и (4) получаваме

$AM = AN \Rightarrow \triangle MNA$ е равнобедрен ($AM = AN$) с връх A.

l_3 е ъглополовяща на $\sphericalangle A \Rightarrow l_3$ е симетрала на NM.

В $\triangle MCN$ трите симетрали се пресичат в една точка, която е центърът на описаната окръжност $\Rightarrow l_1, l_2, l_3$ се пресичат в една точка O.

Тогава около $ABCD$ може да се опише окръжност (това твърдение доказахме в *Задача 1*).

ЗАДАЧА 2 (Устно) Даден е четириъгълникът $ABCD$, описан около окръжност.

а) Ако $AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 6$ cm, намерете DA.

б) Ако $AB + CD = 14$ cm, намерете периметъра на $ABCD$.

Решение на б): От $AB + CD = AD + BC = 14 \text{ cm} \Rightarrow P_{ABCD} = 28$ cm.

ЗАДАЧИ

1 Даден е четириъгълник $ABCD$. Може ли в него да се впише окръжност, ако:

а) $AB = 7$ cm, $BC = 19$ cm, $CD = 14$ cm, $DA = 2$ cm;

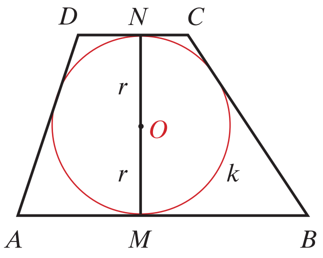
б) $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 5$ cm, $DA = 9$ cm?

2 Намерете страните на описан около окръжност четириъгълник $ABCD$, ако $AB : BC : CD = 2 : 5 : 4$, а периметърът му е 60 cm.

3 Да се докаже, че ако един успоредник е описан около окръжност, той е ромб.

86. ЧЕТИРИЪГЪЛНИК, ОПИСАН ОКОЛО ОКРЪЖНОСТ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 **ОСНОВНА ЗАДАЧА** В трапец е вписана окръжност. Да се докаже, че височината на трапеца е равна на диаметъра на окръжността.



Доказателство:

Означаваме допирните точки на k с AB и CD съответно с M и N.

От свойството на допирателната

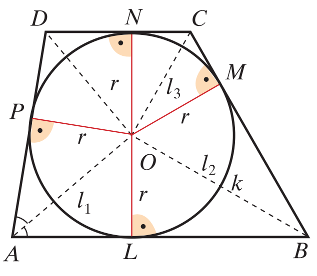
$\Rightarrow OM \perp AB$, $ON \perp CD$. Но $CD \parallel AB \Rightarrow ON \perp AB$.

Тогава диаметърът $MN \perp AB\ (CD)$

$\Rightarrow MN$ е височина $(MN = h)$.

Получаваме $h = 2r$.

ЗАДАЧА 2 Да се докаже, че лицето на четириъгълник, описан около окръжност, е равно на произведението от полупериметъра на четириъгълника и радиуса на окръжността.



Доказателство:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BCO} + S_{\triangle CDO} + S_{\triangle DAO} =$$

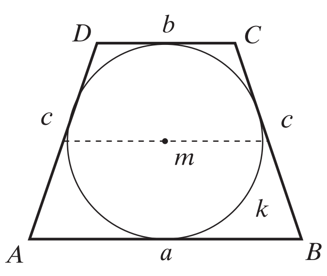
$$= \frac{AB.r}{2} + \frac{BC.r}{2} + \frac{CD.r}{2} + \frac{DA.r}{2}$$

Използвахме, че $OL = OM = ON = OP = r$.

$$S_{ABCD} = \frac{r}{2}(AB + BC + CD + DA) = \frac{r}{2}P = pr$$

$$S_{ABCD} = pr \text{ , където } p = \frac{1}{2}P.$$

ЗАДАЧА 3 **ОСНОВНА ЗАДАЧА** Да се докаже, че необходимо и достатъчно условие равнобедрен трапец да е описан около окръжност е средната отсечка на трапеца да е равна на бедрото му.



Решение:

Означаваме бедрата с c, основите с a и b и средната отсечка с m.

1. Ако $ABCD$ е описан около k

$\Rightarrow a + b = c + c$

$\Rightarrow a + b = 2c$

$\Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$, $c = m$.

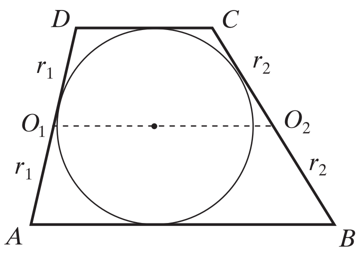
2. Ако $m = c \Rightarrow \frac{a+b}{2} = c$

$\Rightarrow a + b = 2c$

$\Rightarrow a + b = c + c.$ (1)

(1) е достатъчно условие трапецът $ABCD$ да е описан около окръжност.

ЗАДАЧА 4 Трапец е описан около окръжност. Да се докаже, че окръжностите с диаметри бедрата на трапеца се допират.



Доказателство:

Средите на бедрата O_1 и O_2 са центровете на двете окръжности $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$. Тогава O_1O_2 е средна отсечка в трапеца $ABCD$ и

$$2O_1O_2 = AB + CD.$$

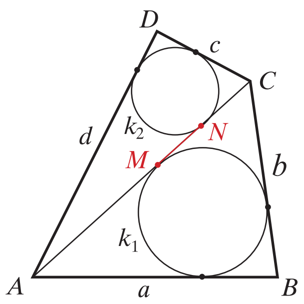
От $AB + CD = AD + BC$ (свойство на описания четириъгълник)

$$\Rightarrow 2O_1O_2 = AD + BC.$$

$$O_1O_2 = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = r_1 + r_2$$

От $O_1O_2 = r_1 + r_2 \Rightarrow$ окръжностите k_1 и k_2 се допират.

ЗАДАЧА 5 Диагоналът AC на четириъгълника $ABCD$ го разделя на два триъгълника. Вписаните в тези два триъгълника окръжности се допират до AC в точки M и N. Да се изрази MN чрез страните на четириъгълника.



Решение:

Означаваме страните на четириъгълника:

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d,$$

полупериметъра на $\triangle ABC$ с p_1, а на $\triangle ACD$ с p_2.

AN е допирателна към $k_2 \Rightarrow AN = p_2 - c$.

AM е допирателна към $k_1 \Rightarrow AM = p_1 - b$.

Тогава $MN = AN - AM = p_2 - p_1 + b - c$

$$MN = \frac{d+c+AC}{2} - \frac{a+b+AC}{2} + b - c =$$

$$= \frac{b+d}{2} - \frac{a+c}{2} = \frac{(b+d)-(a+c)}{2}.$$

Ако N е между A и M, получаваме $MN = \dfrac{(a+c)-(b+d)}{2}$.

ЗАДАЧИ

1 Намерете диаметъра на окръжност, вписана в равнобедрен трапец, ако средната отсечка на трапеца е 10 cm, а един от ъглите му е 150°.

2 Около окръжност е описан равнобедрен трапец с остър ъгъл 30°. Средната отсечка на трапеца е 80 cm. Намерете радиуса на окръжността.

3 Даден е четириъгълник, описан около окръжност с радиус 3 cm. Сборът на две срещуположни страни на четириъгълника е 20 cm. Намерете периметъра и лицето на четириъгълника.

4 В трапец е вписана окръжност с радиус 2 cm. Намерете лицето на трапеца, ако сборът от бедрата му е 10 cm.

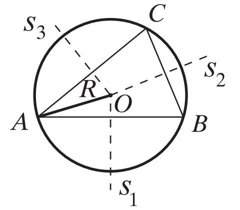
5 Около окръжност с радиус 1 cm е описан правоъгълен трапец $ABCD$, като $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$ и $\sphericalangle ABC = 30°$. Намерете периметъра и лицето на трапеца.

6 Четириъгълник $ABCD$ е описан около окръжност $k\ (O)$. Докажете, че $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180°$.

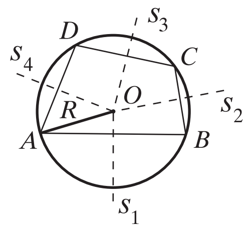
87. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ“

ЗАПОМНЕТЕ!

Описана окръжност $k\,(O;\,R)$

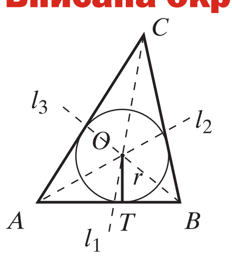


- Вписан триъгълник
  Център *O* – пресечна точка на симетралите,
  $AO = BO = CO = R$.
  Около всеки триъгълник може
  да се опише единствена окръжност.

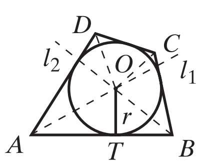


- Вписан четириъгълник
  Център *O* – пресечна точка на симетралите,
  $AO = BO = CO = DO = R$.
  $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$ $(\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ)$

Вписана окръжност $k\,(O;\,r)$



- Описан триъгълник
  Център *O* – пресечна точка
  на ъглополовящите,
  $OT \perp AB$.
  Във всеки триъгълник може
  да се впише единствена окръжност.

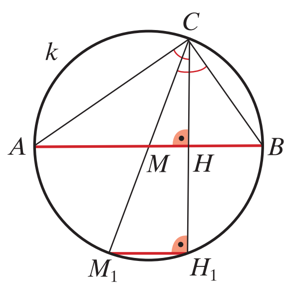


- Описан четириъгълник
  Център *O* – пресечна точка на ъглополовящите,
  $OT \perp AB$
  $AB + CD = AD + BC$.

Забележителни точки в триъгълника ($\triangle ABC$)

- Пресечната точка на медианите – медицентър M,
  M дели всяка медиана в отношение $2 : 1$, считано от върха.
- Пресечната точка на височините – ортоцентър H.
- Пресечната точка L на ъглополовящите, L – център на вписаната окръжност.
- Пресечната точка O на симетралите, O – център на описаната окръжност.

ЗАДАЧА 1



В неравнобедрен правоъгълен $\triangle ABC$ продълженията на височината CH и медианата CM, прекарани от върха C на правия ъгъл, пресичат описаната окръжност съответно в точките H_1 и M_1.

Да се докаже, че:

а) $M_1H_1 \parallel AB$; б) $\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCM$.

Доказателство: CM_1 е диаметър на $k \Rightarrow \sphericalangle CH_1M_1 = 90^\circ$.

а) От $\left.\begin{array}{r} M_1H_1 \perp CH_1 \\ AB \perp CH_1 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1H_1 \parallel AB$.

б) $\sphericalangle ACH = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM_1H_1} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AM_1} + \overset{\frown}{M_1H_1})$ (1)

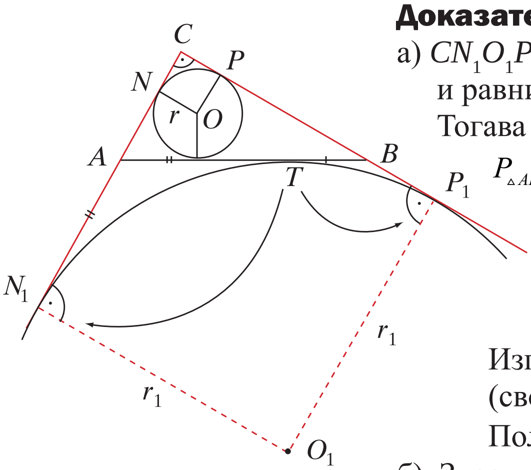
$\sphericalangle BCM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BH_1M_1} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BH_1} + \overset{\frown}{H_1M_1})$ (2)

От а) $\Rightarrow \overset{\frown}{AM_1} = \overset{\frown}{BH_1}$.

От (1) и (2) получаваме $\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCM$.

ЗАДАЧА 2 Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с катети a, b, хипотенуза c и радиус на вписаната окръжност r. Ако r_1 е радиусът на външно вписаната окръжност, която се допира до хипотенузата, да се докаже:

а) $r_1 = p$, където $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$; б) $S = r\,r_1$, където S е лицето на $\triangle ABC$.



Доказателство:

а) $CN_1O_1P_1$ е квадрат, защото има три прави ъгъла и равни съседни страни $O_1N_1 = O_1P_1 = r_1$.
Тогава $CN_1 = CP_1 = r_1$.

$P_{\triangle ABC} = CA + AB + BC =$

$= CA + AT + TB + BC =$

$= \underbrace{CA + AN_1}_{CN_1} + \underbrace{BP_1 + BC}_{CP_1} =$

$= CN_1 + CP_1 = 2r_1$

Използвахме, че $AT = AN_1$ и $BT = BP_1$ (свойство на допирателните).

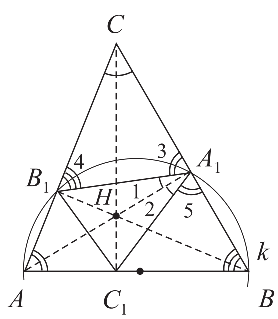
Получихме, че $P = 2r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}P = p$, $r_1 = p$.

б) Знаем, че $S_\triangle = pr$. Получихме, че $r_1 = p$. Тогава $S = r\,r_1$.

ЗАДАЧА 3 Даден е $\triangle ABC$ с височини AA_1, BB_1 и CC_1. Да се докаже, че:

а) триъгълниците AC_1B_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 имат ъгли, равни на ъглите на $\triangle ABC$;

б) ортоцентърът на $\triangle ABC$ е център на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност.



Доказателство:

а) Точките A_1 и B_1 „виждат“ AB под прав ъгъл $\Rightarrow$ около ABA_1B_1 може да се опише окръжност с диаметър AB.

Тогава $\alpha + \sphericalangle B_1A_1B = 180°$. (1)

Но $\sphericalangle 3 + \sphericalangle B_1A_1B = 180°$ (съседни). (2)

От (1) и (2) следва, че $\sphericalangle 3 = \alpha$. Аналогично доказваме, че $\sphericalangle 4 = \beta$.

Тогава $\triangle A_1B_1C_1$ има ъгли γ, α, β, т.е. ъглите на $\triangle ABC$.

Ако направим аналогични разсъждения, ще установим, че ъглите на триъгълниците B_1C_1A и C_1A_1B също са равни на ъглите α, β, γ на $\triangle ABC$, като $\sphericalangle 5 = \alpha$.

б) От $AA_1 \perp BC \Rightarrow \sphericalangle AA_1B = \sphericalangle AA_1C = 90°$.

В условие а) доказахме, че $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5 = \alpha$.

Тогава $\sphericalangle 1 = 90° - \alpha$ и $\sphericalangle 2 = 90° - \alpha \Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \Rightarrow AA_1$ е ъглополовяща на $\sphericalangle A_1$ в $\triangle A_1B_1C_1$.

Аналогично доказваме, че и BB_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle B_1$ в $\triangle A_1B_1C_1$.

Тогава $H = L$ – център на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност.

Триъгълник, върховете на който са петите на височините на даден триъгълник, се нарича педален за този триъгълник. Например $\triangle A_1B_1C_1$ е педален триъгълник на $\triangle ABC$.

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „ОКРЪЖНОСТ И МНОГОЪГЪЛНИК“

1. Четириъгълник е вписан в окръжност. Един от ъглите му е 5 пъти по-голям от срещуположния му ъгъл, а другите два ъгъла са равни. Намерете ъглите на четириъгълника.
2. Четириъгълникът $MNPQ$ е вписан в окръжност. Мерките на ъглите при върховете M, N и P се отнасят както $3 : 5 : 7$. Намерете ъглите на четириъгълника.
3. В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) M е пресечната точка на диагоналите AC и BD, $\sphericalangle DAB = 50°$, $\sphericalangle AMD = 40°$. Докажете, че центърът на описаната около трапеца окръжност е външна за него точка.
4. Трапецът $ABCD$ е вписан в окръжност. Намерете бедрата му, ако $\sphericalangle A = 60°$, а основите му са:
   а) $AB = 8$ cm, $CD = 6$ cm;
   б) $AB = a$, $CD = b$ ($a > b$).
5. Ъглополовящите AA_1 и BB_1 на $\triangle ABC$ се пресичат в центъра L на вписаната окръжност. Да се докаже, че необходимо и достатъчно условие четириъгълникът CA_1LB_1 да е вписан в окръжност е ъгълът при върха C на $\triangle ABC$ да е $60°$.
6. Трапецът $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е вписан в окръжност. Намерете ъглите на трапеца, ако центърът на окръжността лежи на основата AB и $AB = 2BC$.
7. В ромб със страна 12 cm и остър ъгъл $30°$ е вписана окръжност. Намерете радиуса ѝ.
8. Около окръжност е описан трапец с периметър 32 cm. Намерете средната отсечка на трапеца.
9. В равнобедрен триъгълник с основа 6 cm допирателните от върха му до вписаната окръжност са равни на 7 cm. Намерете бедрото на триъгълника.
10. Докажете, че допирните точки на страните на ромба и вписаната в него окръжност са върхове на правоъгълник.
11. В равнобедрен триъгълник с основа 8 cm допирната точка на вписаната окръжност дели бедрото в отношение $3 : 2$, считано от върха. Намерете периметъра на триъгълника.
12. В правоъгълен триъгълник с катети 6 cm и 8 cm е вписана окръжност. Построена е външно вписана окръжност за триъгълника, която се допира до хипотенузата му. Да се намери дължината на:
    а) хипотенузата на триъгълника;
    б) радиуса на външно вписаната окръжност;
    в) отсечката, която съединява допирните точки на хипотенузата с двете окръжности.
13. Медианата CM разделя $\triangle ABC$ на два триъгълника. Допирните ѝ точки с вписаните в тези триъгълници окръжности са T_1 и T_2. Намерете T_1T_2, ако $BC = a$, $AC = b$ ($b > a$).
14. Височината, ъглополовящата и медианата през върха C на $\triangle ABC$ делят ъгъла при този връх на четири равни части. Да се намерят ъглите на триъгълника.
15. Височината и медианата през върха C на $\triangle ABC$ делят ъгъла при този връх на три равни части. Да се намерят ъглите на триъгълника.
16. $\triangle ABC$ е вписан в окръжност, а точката M е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, принадлежаща на ъгъла при върха C, равен на γ. Намерете ъглите на $\triangle ABM$.

88. ТЕСТ № 1 ВЪРХУ ТЕМАТА „ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ“

1. В окръжност с диаметър 18 cm е вписан триъгълник с остър ъгъл 30°. Дължината на страната, която лежи срещу този ъгъл, в сантиметри е:

А) 8; Б) 10; В) 9; Г) 18.

2. $ABCD$ е четириъгълник, вписан в окръжност. За мерките на дъгите, съответни на страните му, е известно, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 2:3:4:6$. Големината на $\sphericalangle BCD$ е:

А) 90°; Б) 96°; В) 48°; Г) 144°.

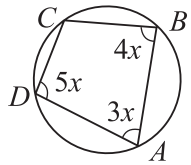
3. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на $\sphericalangle BCD$.

А) 60°;

Б) 80°;

В) 100°;

Г) 120°.



4. $\triangle BCA$ е равнобедрен и $\sphericalangle ACB = 120°$. Ако $AC = 24$ cm, разстоянието от медицентъра Q до центъра O на описаната около триъгълника окръжност в сантиметри е:

А) 12; Б) 16; В) 18; Г) 24.

5. В четириъгълник $ABCD$ е вписана окръжност и $AB : BC : CD = 2 : 3 : 5$. Ако периметърът му е 70 cm, дължината на страната AD в сантиметри е:

А) 10; Б) 15; В) 20; Г) 16.

6. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с център точката O. Ако $S_{\triangle AOB} = 24$ cm^2, $S_{\triangle BOC} = 16$ cm^2 и $S_{\triangle COD} = 12$ cm^2, лицето на $\triangle AOD$ в квадратни сантиметри е:

А) 20; Б) 36; В) 18; Г) 24.

7. Равнобедреният трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е описан около окръжност. Ако $\sphericalangle ABC = 30°$ и радиусът на окръжността е 12 cm, средната основа на трапеца в сантиметри е:

А) 16; Б) 18; В) 24; Г) 48.

8. В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 5 : 9$. Външно за триъгълника е построен $\triangle ABD$ ($\sphericalangle ADB = 90°$). Намерете големината в градуси на:

а) $\sphericalangle CDB$; б) $\sphericalangle ADC$.

9. Страните на правоъгълния $\triangle ABC$ имат дължини 10 cm, 24 cm и 26 cm. Намерете радиуса на:

а) описаната около триъгълника окръжност;

б) вписаната в триъгълника окръжност;

в) външно вписаната окръжност, която се допира до хипотенузата на триъгълника.

10. В трапец е вписана окръжност с радиус 6 cm. Ако лицето на трапеца е 156 cm^2, намерете периметъра му в сантиметри.

ТЕСТ № 2 ВЪРХУ ТЕМАТА „ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ“

1. В окръжност с радиус 8 cm е вписан триъгълник с остър ъгъл 30º. На колко сантиметра е равна страната, която лежи срещу този ъгъл?

А) 4; Б) 6; В) 8; Г) 16.

2. $ABCD$ е четириъгълник, вписан в окръжност. За мерките на дъгите, съответни на страните му, е известно, че $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 4:1:2:3$. Големината на $\sphericalangle ABC$ е:

А) 72º; Б) 108º; В) 144º; Г) 90º.

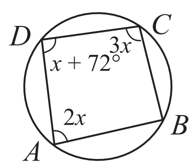
3. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на $\sphericalangle ABC$.

А) 36º;

Б) 72º;

В) 60º;

Г) 90º.



4. В $\triangle ABC$ ($CA = CB$) $\sphericalangle ACB = 120°$ и $AC = 12$ cm. Диаметърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност в сантиметри е:

А) 6; Б) 12; В) 18; Г) 24.

5. В четириъгълник $ABCD$ е вписана окръжност. Ако $AB : BC : CD = 3 : 4 : 5$ и $AD = 8$ cm, периметърът на $ABCD$ в сантиметри е:

А) 20; Б) 24; В) 32; Г) 40.

6. Четириъгълник $ABCD$ е описан около окръжност с център точка O. Ако $S_{\triangle AOD} = 20$ cm^2, $S_{\triangle AOB} = 24$ cm^2 и $S_{\triangle BOC} = 16$ cm^2, лицето на $ABCD$ в квадратни сантиметри е:

А) 60; Б) 64; В) 72; Г) 80.

7. Равнобедреният трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е описан около окръжност. Ако $\sphericalangle BAD = 30°$ и средната основа на трапеца е 20 cm, радиусът на окръжността в сантиметри е:

А) 4; Б) 5; В) 8; Г) 10.

8. В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$. Външно за триъгълника е построен $\triangle ABD$ ($\sphericalangle ADB = 90°$). Намерете големината в градуси на:

а) $\sphericalangle ADC$; б) $\sphericalangle BDC$.

9. Страните на правоъгълния $\triangle ABC$ имат дължини 6 cm, 8 cm и 10 cm. Намерете в сантиметри радиуса на:

а) описаната около триъгълника окръжност;

б) вписаната в триъгълника окръжност;

в) външно вписаната окръжност, която се допира до хипотенузата на триъгълника.

10. В трапец е вписана окръжност с радиус 6 cm. Ако периметърът на трапеца е 52 cm, намерете лицето му в квадратни сантиметри.

ТЕМА

9

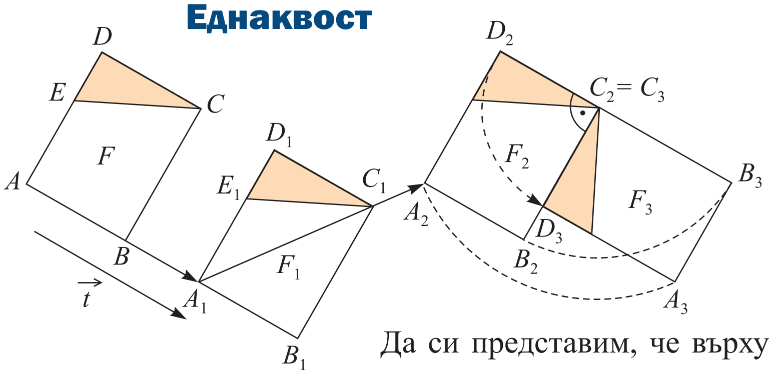
ЕДНАКВОСТИ В РАВНИНАТА
(Урок № 89 – Урок № 95)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:
- осева симетрия;
- ротация;
- централна симетрия;
- транслация.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:
- да различава видовете еднаквости;
- да откриват симетрични фигури в конкретни ситуации;
- да построяват образи на познати геометрични фигури при еднаквост.

89. ОСЕВА СИМЕТРИЯ

Еднаквост



Ако поставим върху маса (бялата дъска) лист хартия и започнем да го движим, без да го отделяме от повърхността на масата, казваме, че движим подвижна равнина (листа хартия) върху неподвижна равнина (масата). Така получаваме нагледна представа за математическото понятие *движение в равнината*.

Да си представим, че върху една неподвижна равнина има не лист хартия, а втора равнина, която се движи върху първата (като се плъзга). Ако върху подвижната равнина е начертана фигурата F, при това движение тя може да заеме мястото F_1, F_2 и т.н.

F се нарича първообраз, а F_1, F_2, ... – образи на F при това движение.

При движението всяка фигура F заема ново положение F' (образ на F), но не променя формата и големината си, т.е. $F \cong F'$. Разстоянията между отделните ѝ точки не се изменят.

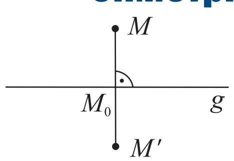
Всяко движение определя съответствие на точките в равнината.

О Едно съответствие (правило) в равнината се нарича

- **еднаквост** – когато образът на всеки триъгълник е еднакъв на него триъгълник;
- **движение** – когато цялата равнина може да се придвижи (без да излиза от себе си) така, че всяка фигура от нея да заеме мястото на образа си.

Всяко движение е еднаквост.

Симетрични точки относно права

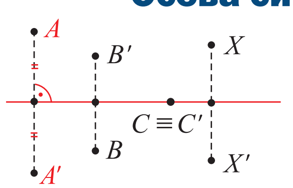


Дадени са права g и точка M, нележаща на g. От M към g е спуснат перпендикуляр, петата на който е M_0. Точката M' е симетричната точка на M относно M_0 (M_0 – среда на MM').

О Точката M' се нарича **симетрична точка** на точката M относно правата g, ако $g \perp MM'$ и средата на отсечката MM' лежи на g.

Симетричната точка на M' относно g е точката M. Затова казваме, че точките M и M' са **симетрични точки** относно правата g.

Осева симетрия



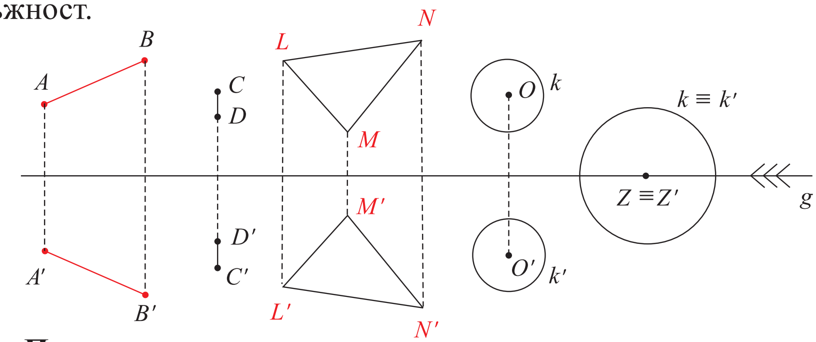
На произволно избрана точка A от равнината съответства точка A' от същата равнина, като A и A' са симетрични точки относно избраната права g.

О Съответствие в равнината, при което на произволна точка X се съпоставя симетричната ѝ точка X' относно дадена права g, се нарича **осева симетрия** (Sg).

Правата g се нарича ос на симетрията.
Всяка точка на оста се преобразува в себе си ($C \equiv C'$).

ЗАДАЧА При осева симетрия с ос g да се построят образите на отсечка, триъгълник, окръжност.

Решение:



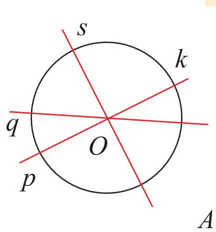
При осева симетрия:

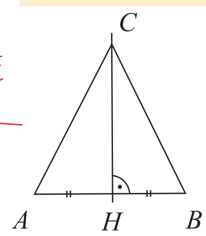
- Образът на отсечка е равна на нея отсечка.
- Образът на права е права, на лъч е лъч.
- Образът на ъгъл е равен на него ъгъл.
- Образът на триъгълник е еднакъв на него триъгълник.
- Образът на окръжност е еднаква на нея окръжност.

Осевата симетрия не е движение в равнината.

О Осевата симетрия е еднаквост, при която образът на всяка фигура е неин огледален образ (изменя се посоката на обхождане на фигурите). Такава еднаквост се нарича **отражение**.

О Ако съществува осева симетрия Sg, при която точките от една фигура F се изобразяват в точки от същата фигура, то F наричаме **симетрична фигура**. Правата g се нарича **ос на симетрия** на фигурата F.





Правоъгълникът има две оси на симетрия – двете му средни отсечки. Тяхната пресечна точка O е център на симетрия на правоъгълника.
Всеки диаметър на една окръжност е нейна ос на симетрия.
Един триъгълник има ос на симетрия тогава и само тогава, когато е равнобедрен. Оста на симетрия е височината му към основата.

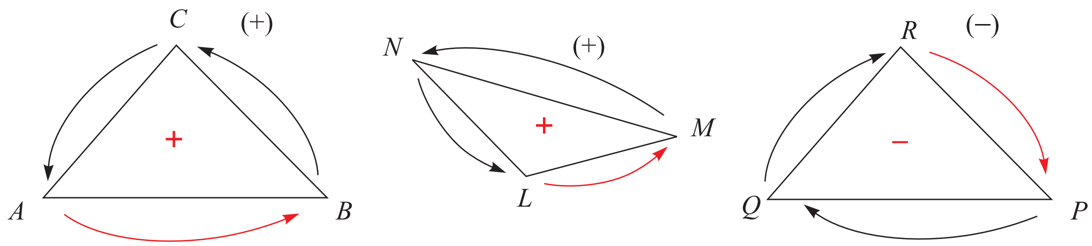
ЗАДАЧИ

1 Колко оси на симетрия има:
а) квадратът;
б) равностранният триъгълник?

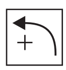
2 Дадена е осева симетрия с ос g. Постройте образите на:
а) права;
б) лъч;
в) ъгъл;
г) трапец.

4 Точките M и N лежат от различни страни на правата g така, че MN не е перпендикулярна на g. Постройте образа $M'N'$ на MN чрез осева симетрия с ос g.

90. РОТАЦИЯ

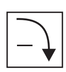


На чертежа обхождането на върховете на $\triangle ABC$ от A към B, от B към C и от C към A става в посока, обратна на посоката на въртене на часовниковата стрелка.



Тази посока се нарича **положителна посока на въртене в равнината.**

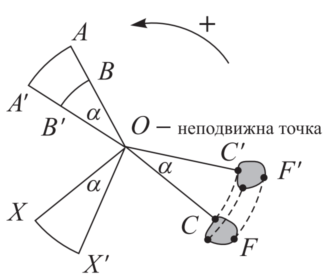
Посоката на обхождане на върховете на триъгълника LMN също е положителна.
Посоката на обхождане на върховете на триъгълника PQR съвпада с посоката на въртене на часовниковата стрелка.



Тази посока се нарича **отрицателна посока на въртене в равнината.**

За триъгълниците ABC и LMN казваме, че са **еднакво ориентирани**, а за триъгълниците ABC и PQR казваме, че са **противоположно (обратно) ориентирани.**

Ротация



Нека са дадени точка O, ъгъл $\alpha \in (0°; 360°)$ и едната от двете посоки на въртене.
Като завъртим равнината | около точката O, на дадения ъгъл α, в дадената посока,
точките на равнината ще се придвижат по окръжности с център O и ще заемат нови положения: $A \to A'$, $B \to B'$, така, че $OA' = OA$ и $\sphericalangle AOA' = \alpha$, $OB' = OB$ и $\sphericalangle BOB' = \alpha$.
За произволна точка от фигура F, например C, $OC' = OC$ и $\sphericalangle COC' = \alpha$.

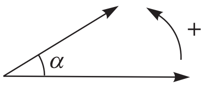
О

Дадени са точка O, ъгъл α и едната от двете посоки на въртене в равнината.
Съответствието, при което на произволна точка X, различна от O, се съпоставя точката X', за която $OX' = OX$, $\sphericalangle XOX' = \alpha$, като въртенето на лъча $\overrightarrow{OX}$ във вътрешността на $\sphericalangle XOX'$ до лъча $\overrightarrow{OX'}$ става в избраната посока, се нарича **ротация** или въртене.
Приемаме, че $O' \equiv O$. Точката O се нарича **център на ротацията**.

Ротацията е движение и следователно е еднаквост.

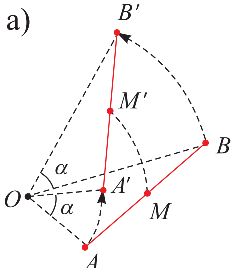
Ротация с център O и ъгъл на въртене α означаваме $R(O; \alpha)$.
Например $R(O; +30°)$ и $R(O; -30°)$.
Ако в задача е дадена посоката на въртене и конкретна стойност на ъгъла, е прието ротацията да се означи с R.

ЗАДАЧА 1 При ротация с център O, ъгъл α ($\alpha < 90°$) и положителна посока на въртене да се построят образите на:
а) отсечка AB и средата M на AB; б) ъгъл pCq; в) права g.



Решение:

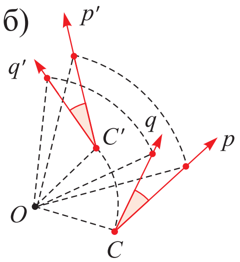
а)



! Образът на отсечка е **равна** на нея отсечка.

$AB \xrightarrow{R} A'B'$, $AB = A'B'$
$M \xrightarrow{R} M'$ – средата на $A'B'$

б)

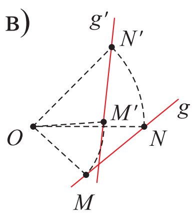


! Образът на ъгъл е **равен** на него ъгъл.

$Cp^{\to} \xrightarrow{R} C'p'^{\to}$
$Cq^{\to} \xrightarrow{R} C'q'^{\to}$

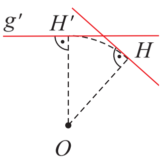
$\sphericalangle\ pCq \xrightarrow{R} \sphericalangle\ p'C'q'$
$\Rightarrow \sphericalangle\ pCq = \sphericalangle\ p'C'q'$

в)



! Образът на права е права.

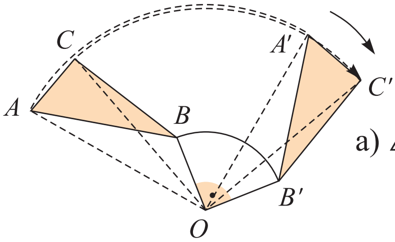
I начин:
$M \xrightarrow{R} M'$
$N \xrightarrow{R} N'$
$\Rightarrow g \xrightarrow{R} g'$



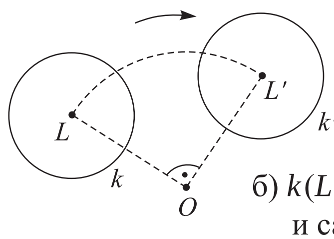
II начин:
$OH \perp g$
$H \xrightarrow{R} H'$ $\Rightarrow g \xrightarrow{R} g'$
$g' \perp OH'$

ЗАДАЧА 2 При ротация с център O, ъгъл $\alpha = 90°$ и отрицателна посока на въртене да се построят образите на: а) $\triangle ABC$; б) окръжност $k(L; r)$.

Решение:



а) $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ и са еднакво ориентирани.



б) $k(L; r) \xrightarrow{R} k'(L'; r)$ и са еднакви.

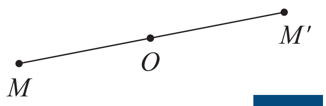
ЗАДАЧИ

1 При ротация с център O, ъгъл $60°$ и положителна посока на въртене постройте образите на:
а) лъч;
б) триъгълник и медицентъра му;
в) правоъгълник.

2 При ротация с център A, ъгъл $90°$ и отрицателна посока на въртене постройте образите на:
а) правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$);
б) успоредник $ABCD$;
в) трапец $ABCD$.

91. ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЯ

Симетрични точки относно точка

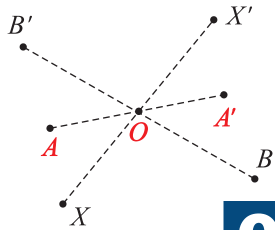


Дадени са точки O и M. На противоположния лъч на лъча $OM^{\to}$е нанесена отсечка $OM' = OM$.

О Точката M' се нарича **симетрична точка** на точката M относно O, ако O е средата на отсечката MM'.

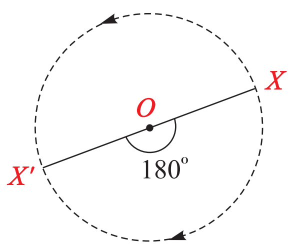
Симетричната точка на M' относно O е точката M.
Затова казваме, че точките M и M' са **симетрични точки** относно O.

Централна симетрия



На произволна точка A от равнината съответства точка A' от същата равнина, като A и A' са симетрични точки относно дадена точка O.

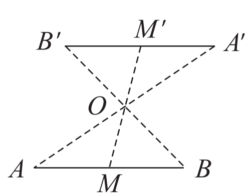
О Съответствие в равнината, при което на произволна точка X се съпоставя симетричната ѝ X' относно дадена точка O, се нарича **централна симетрия** (S_O).



Точката O се нарича център на централната симетрия. Той се преобразува в себе си: $O' \cong O$.
Ако разгледаме ротация с център O, ъгъл на въртене $\alpha = 180°$ и посока на въртене коя да е от двете възможни посоки, образът на всяка точка X е нейната симетрична точка X' относно O.
Следователно **централната симетрия е частен случай на ротация** – означава се със S_O.
Следователно централната симетрия притежава всички свойства на ротацията.
Централната симетрия е движение, следователно е еднаквост.

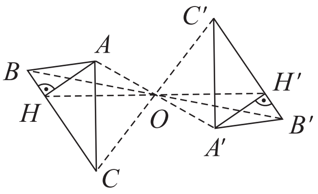
ЗАДАЧА 1 При централна симетрия с център O да се построят образите на:
а) отсечка AB и средата M на AB;
б) $\triangle ABC$ и височината AH на $\triangle ABC$;
в) окръжност $k(L; r)$.

Решение:



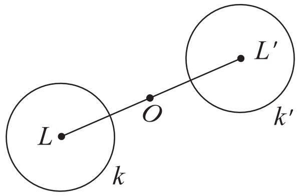
а) $\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{S_O} A' \\ B \xrightarrow{S_O} B' \end{array}\right\} \Rightarrow AB \xrightarrow{S_O} A'B' \Rightarrow \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AB \parallel A'B' \end{array}$

$M \xrightarrow{S_O} M'$ – средата на $A'B'$



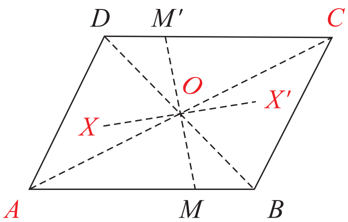
б) $\triangle ABC \xrightarrow{S_O} \triangle A'B'C' \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
и са еднакво ориентирани.

$\sphericalangle AHB \xrightarrow{S_O} \sphericalangle A'H'B'$
$\Rightarrow \sphericalangle AHB = \sphericalangle A'H'B' = 90^\circ$



в) $L \longrightarrow L' \Rightarrow k(L;\, r) \to k'(L';\, r)$
k и k' имат равни радиуси
$\Rightarrow$ са еднакви.

При централната симетрия с център O, ако $F \xrightarrow{S_O} F'$, за двете фигури F и F' казваме, че са **симетрични относно O.**



Начертан е успоредник $ABCD$. При централната симетрия с център пресечната точка O на диагоналите на този успоредник на всяка точка от него съответства точка, която също е на този успоредник:

$A \xrightarrow{S_O} C,\ B \xrightarrow{S_O} D,\ M \xrightarrow{S_O} M',\ X \xrightarrow{S_O} X'$ и т.н.

О Ако съществува точка O, спрямо която фигурата F е симетрична на себе си, F се нарича **централносиметрична фигура**. Точката O се нарича **център на симетрия на фигурата**.

Примери: Успоредникът има център на симетрия O – пресечната точка на диагоналите му.
Окръжността има център на симетрия O – центърът на окръжността.

ЗАДАЧИ

1 При централна симетрия с център произволна точка O да се построят образите на:
а) права; б) лъч; в) ъгъл;
г) успоредник; д) трапец.

2 Начертайте окръжност $k(O)$ и хорда AB. Намерете образа $A'B'$ на AB при централна симетрия с център O. Докажете, че полученият четириъгълник е правоъгълник.

3 Намерете центъра на симетрия на:
а) правоъгълник;
б) квадрат;
в) равностранен триъгълник.

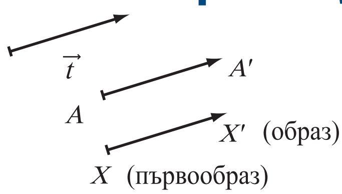
4 Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Постройте образа му при централна симетрия с център:
а) точката A;
б) точката C;
в) пресечната точка на диагоналите.

5 Докажете, че четириъгълник, който има център на симетрия, е успоредник.

6 Две еднакви окръжности k и k_1 се допират външно в точката T. Права през T пресича k и k_1 съответно в точките A и A_1. Докажете, че $\overrightarrow{O_1A_1} = -\overrightarrow{OA}$.

92. ТРАНСЛАЦИЯ

Транслация



Ако е даден един вектор $\vec{t}$ и точка $A(X)$, знаем, че има точно една точка A' (X'), за която $\overrightarrow{AA'} = \vec{t}$ $(\overrightarrow{XX'} = \vec{t})$.

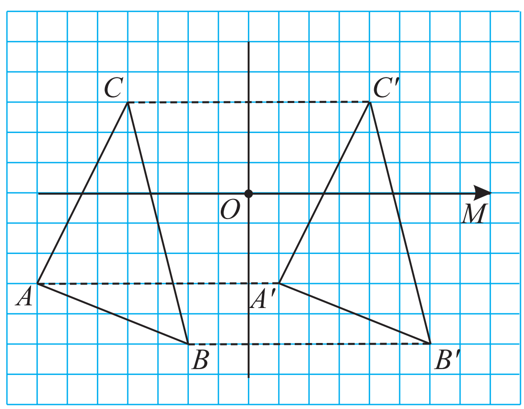
О Съответствие в равнината, при което на произволна точка X се съпоставя точката X', за която $\overrightarrow{XX'} = \vec{t}$, където $\vec{t}$ е даден вектор, се нарича **транслация** или **успоредно пренасяне**.

Векторът $\vec{t}$ се нарича **вектор на пренасянето.**

Транслацията се задава с вектора на пренасянето $\vec{t}$ и се означава с t.
Транслацията е движение. Всяко движение е еднаквост.
Следователно **транслацията е еднаквост.**

ЗАДАЧА 1 В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(-7; -3)$, $B(-2; -5)$, $C(-4; 3)$ и $M(8; 0)$.
Постройте $\triangle A'B'C'$, който е образ на $\triangle ABC$ при транслация с вектор $\vec{t} = \overrightarrow{OM}$.

Решение:



$A \xrightarrow{t} A' \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OM}$

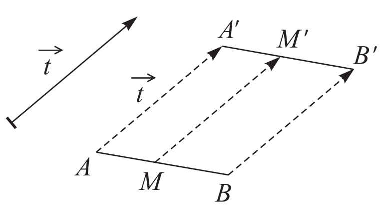
$B \xrightarrow{t} B' \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OM}$

$C \xrightarrow{t} C' \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OM}$

$\Rightarrow \triangle ABC \xrightarrow{t} \triangle A'B'C'$

ЗАДАЧА 2 При транслация с вектор $\vec{t}$ да се построят образите на:
а) отсечка AB и средата M на AB; б) окръжност k.

Решение:

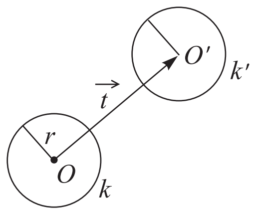


а)

! Образът на отсечка е **равна** на нея отсечка.

$AB \xrightarrow{t} A'B'$ $\begin{cases} AB \parallel A'B' \\ AB = A'B' \end{cases}$

$M \xrightarrow{t} M'$ – средата на $A'B'$



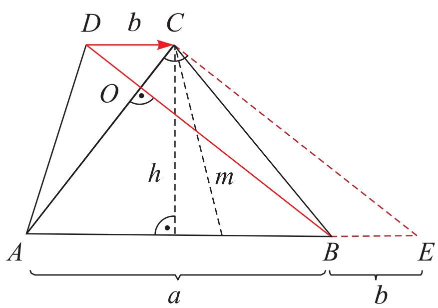
б)

Образът на окръжност е **еднаква** на нея окръжност.

$k(O;\, r) \xrightarrow{t} k'(O';\, r).$

При транслация всяка права се преобразува в успоредна на нея права или в себе си.
Правите, успоредни на вектора на пренасянето, се преобразуват в себе си и се наричат двойни прави.

ЗАДАЧА 3 Даден е трапец с перпендикулярни диагонали.
Да се докаже неравенството $h \le \dfrac{a+b}{2}$, където a, b и h са съответно основите и височината на трапеца.



Решение:
При транслация с вектор на пренасяне $\overrightarrow{DC}$ образът на диагонала DB е отсечката CE.

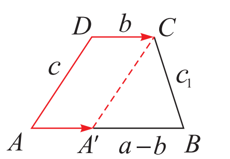
Разглеждаме $\triangle AEC$.

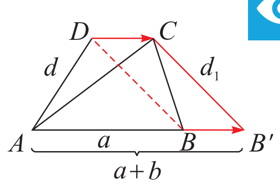
От $DB \xrightarrow{t} CE \Rightarrow \begin{cases} CE = DB \qquad CE \parallel DB \\ \sphericalangle AOB = \sphericalangle ACE = 90^\circ. \end{cases}$

Тогава $\triangle ABC$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха C. Медианата му към хипотенузата е

$m = \dfrac{1}{2} AE = \dfrac{1}{2}(a+b).$

От $h \le m \Rightarrow h \le \dfrac{1}{2}(a+b).$





Транслация с вектор $\overrightarrow{DC}$ $(\overrightarrow{CD})$, където CD е малката основа на трапеца, като се пренася бедро или диагонал, е често използвано допълнително построение при решаване на задачи.

ЗАДАЧИ

1 При транслация с вектор постройте образите на:
а) лъч;
б) правоъгълен триъгълник и медианата към хипотенузата.

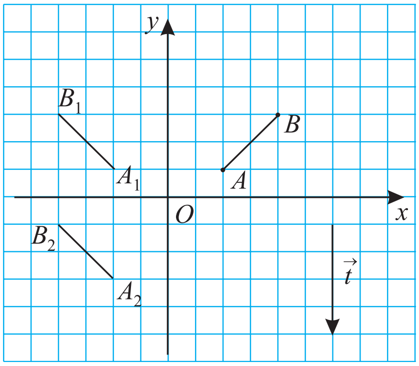
2 Даден е квадрат. Намерете образа му при транслация с вектор на пренасяне, определен от един от диагоналите на квадрата.

3 Начертайте $\triangle ABC$. Постройте образа му при транслация с вектор на пренасянето:
а) $\vec{t}$; б) $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{BA}$.

4 Дадени са права a, окръжност k и отсечка MN. Постройте отсечка, успоредна и равна на MN, краищата на която лежат на a и k.

93. ЕДНАКВОСТИ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Дадена е правоъгълна координатна система xOy и точките $A\ (2;\ 1)$ и $B\ (4;\ 3)$.



Постройте:

а) образа A_1B_1 на отсечката AB при осева симетрия с Oy и намерете координатите на точките A_1, B_1;

б) образа A_2B_2 на A_1B_1 при транслация с даден вектор t.

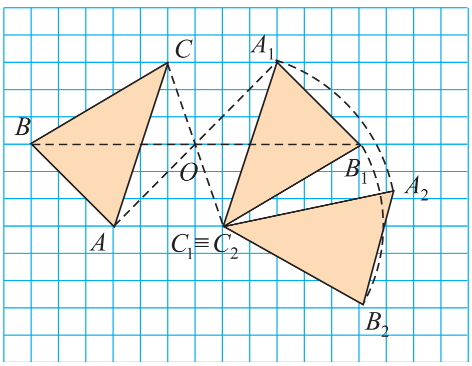
Решение:

а) $AB \xrightarrow{S_{Oy}} A_1B_1,\ A_1(-2;\ 1),\ B_1(-4;\ 3)$

б) $A_1B_1 \xrightarrow{t} A_2B_2$

ЗАДАЧА 2 Дадени е $\triangle ABC$ и точка O. Извършете построенията

$$\triangle ABC \xrightarrow{S_O} \triangle A_1B_1C_1 \xrightarrow{R(C;-60^\circ)} \triangle A_2B_2C_2$$



Решение:

$\triangle ABC \xrightarrow{S_O} \triangle A_1B_1C_1$

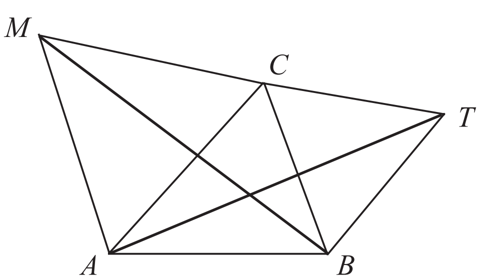
$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ и са еднакво ориентирани.

$\triangle A_1B_1C_1 \xrightarrow{R(C;-60^\circ)} \triangle A_2B_2C_2$

$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2 \quad (C_1 \equiv C_2)$

и са еднакво ориентирани.

ЗАДАЧА 3 Даден е остроъгълният $\triangle ABC$. Външно на триъгълника са построени равностранните триъгълници ACM и BCT. Докажете, че: а) $MB = AT$; б) ъгълът между правите MB и AT е 60°.



Решение:

Разглеждаме ротация с център C и ъгъл $+60^\circ$, $R(C;+60^\circ)$.

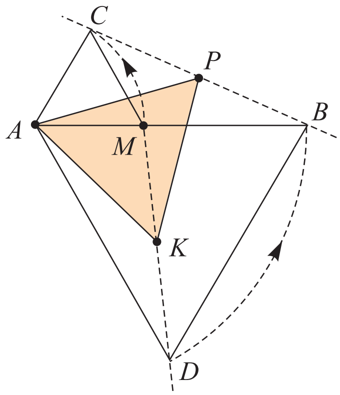
а) $\left.\begin{array}{l} M \xrightarrow{R} A \\ B \xrightarrow{R} T \end{array}\right\} \Rightarrow MB \xrightarrow{R} AT \ \Rightarrow MB = AT$

б) От $MB \xrightarrow{R} AT \Rightarrow$ ъгълът между правите MB и AT е равен на $|-60^\circ| = 60^\circ$.

ЗАДАЧА 4 Върху дадена отсечка AB е взета произволна точка M. В двете полуравнини с контур правата AB са построени равностранните триъгълници AMC и ABD.

а) Да се намери ъгълът между правите BC и MD.

б) Ако P и K са средите съответно на отсечките BC и MD, да се докаже, че $\triangle AKP$ е равностранен.



Решение:
Разглеждаме ротация R с център A и ъгъл на въртене $60°$ при положителна посока.

Тогава $\left| \begin{array}{l} M \xrightarrow{R} C \\ D \xrightarrow{R} B \end{array} \right.$

$\Rightarrow MD \xrightarrow{R} CB.$

а) От $MD \xrightarrow{R} CB$

$\Rightarrow \sphericalangle(MD, BC) = 60°.$

б) От $MD \xrightarrow{R} CB$

$\Rightarrow K$ (средата на MD) $\xrightarrow{R} P$ (средата на BC).

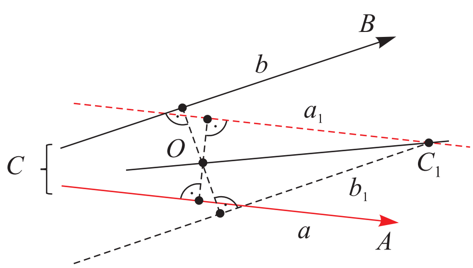
От $K \xrightarrow{R} P \Rightarrow AK = AP$

и $\triangle KAP = 60°$

$\Rightarrow \triangle AKP$ е равностранен.

! Ъгълът между права и образа ѝ при ротация с ъгъл на въртене α е също равен на α. При задачи, в които се разглеждат равностранни триъгълници или квадрати, често се използват ротации с ъгъл на въртене съответно $60°$ и $90°$ и подходящо избран център.

ЗАДАЧА 5 Даден е $\sphericalangle ACB$, върхът C на който е извън рамките на чертежа (е недостъпен). Ако точка O е вътрешна за ъгъла, да се построи правата OC.



Решение:
Означаваме с a и b правите, върху които лежат лъчите $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.
Разглеждаме централна симетрия S_O с център O.
Построяваме

$a \xrightarrow{S_T} a_1, \; b \xrightarrow{S_T} b_1, \; a_1 \times b_1 = C_1.$

От $a \times b = C$ и $a_1 \times b_1 = C_1 \Rightarrow C \xrightarrow{S_O} C_1$ и O е средата на CC_1.
Тогава точките C, O и C_1 лежат на една права, т.е. търсената права е OC_1.

Образите на правите a и b чрез централната симетрия S_O са намерени чрез образите на петите на перпендикулярите, спуснати към тях от точката O.

ЗАДАЧИ

1 Дадена е правоъгълна координатна система Oxy и точките $A\,(2;5)$ и $B\,(4;7)$.
Постройте: а) образа A_1B_1 на AB при осева симетрия с ос Oy;
б) образа A_2B_2 на AB при осева симетрия с ос Ox;
в) образа A_3B_3 на AB при централна симетрия с център O.

2 Даден е $\triangle ABC$, точка O и права g. Постройте:
а) $\triangle ABC \xrightarrow{S_O} \triangle A_1B_1C_1 \xrightarrow{S_g} \triangle A_2B_2C_2$; б) $\triangle ABC \xrightarrow{S_g} \triangle A_3B_3C_3 \xrightarrow{S_O} \triangle A_4B_4C_4$.

3 Даден е квадрат $ABCD$ и вектор $\vec{t}$. Постройте:
а) $ABCD \xrightarrow{t} A_1B_1C_1D_1 \xrightarrow{R(A_1;-90°)} A_2B_2C_2D_2$;
б) $ABCD \xrightarrow{R(B;-60°)} A_3B_3C_3D_3 \xrightarrow{t} A_4B_4C_4D_4$.

4 Дадени са две пресичащи се прави a и b и отсечка MN. Постройте отсечка, успоредна и равна на MN, краищата на която лежат на a и b.

94. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „ЕДНАКВОСТИ“

Ако по някакво правило f на всяка точка M от равнината се съпоставя точка M', т.е. $M \xrightarrow{f} M'$, казваме, че е зададено изображение (съответствие) f на равнината в себе си.
Точката M' се нарича **образ** на M, а точката M се нарича **първообраз** на M'.

О Едно изображение на равнината в себе си се нарича **геометрично преобразуване**, ако:

1. всяка точка от равнината има и то само един образ;
2. всяка точка от равнината има и то само един първообраз, т.е. различните точки от равнината имат различни образи.

О Геометрично преобразуване на равнината, което запазва разстоянието между точките, се нарича **еднаквост**.

С други думи, едно преобразуване на равнината се нарича **еднаквост**, ако всеки две точки A и B се изобразяват съответно в точки A' и B' така, че отсечката $A'B'$ е равна на отсечката AB.

Ако $AB \xrightarrow{f} A'B'$, то $A'B' = AB$.

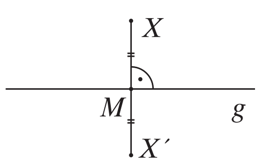
ЗАПОМНЕТЕ!

Основни еднаквости са:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{транслация} \\ \bullet\ \text{ротация} \\ \bullet\ \text{централна симетрия} \end{array}\right\} \text{движение,}$$

- осева симетрия ⟶ отражение.

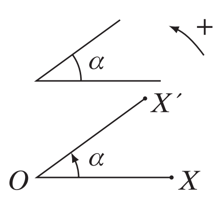
Осева симетрия (симетрия относно права)



Определя се с права g – ос на симетрията, $X \to X'$ така, че g е симетрала на XX',

т.е. $\boxed{\begin{array}{l} XX' \perp g \\ XM = MX' \end{array}}$.

Ротация (въртене)

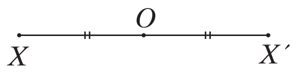


Определя се с

| точка O – център на ротацията,
| ъгъл α,
| посока на въртене,

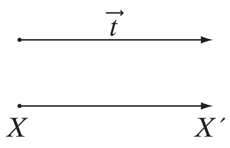
$X \to X'$ така, че $\boxed{\begin{array}{l} OX' = OX \\ \sphericalangle XOX' = \alpha \end{array}}$.

Централна симетрия (въртене на 180°)



Определя се с точка O,
O – център на симетрията,
$X \rightarrow X'$ така, че O е средата на XX'.

Транслация (успоредно пренасяне)



Определя се с вектор $\vec{t}$,
$\vec{t}$ – вектор на транслацията,
$X \rightarrow X'$ така, че $\overrightarrow{XX'} = \vec{t}$.

Еднаквостите притежават следните **свойства:**

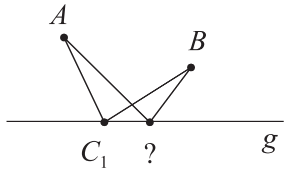
- Образът на отсечка е равна на нея отсечка.
- Образът на лъч е лъч.
- Образът на права е права.
- Образът на ъгъл е равен на него ъгъл.
- Образът на триъгълник е еднакъв на него триъгълник.
- Образът на окръжност е еднаква на нея окръжност.

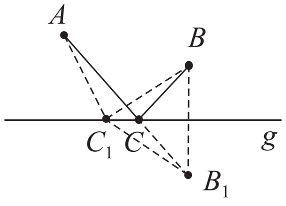
Еднаквостите се обособяват в **две групи** в зависимост от това дали запазват или променят ориентацията на фигурите в равнината, а именно:

1. Еднаквости, при които ориентацията на произволен триъгълник се запазва, се наричат **движения** или **еднаквости от първи род.**

2. Еднаквости, при които ориентацията на произволен триъгълник се изменя, се наричат **отражения** или **еднаквости от втори род.**

ЗАДАЧА Две селища A и B се намират от една и съща страна на железопътна линия. Намерете мястото, на което да се построи жп гара, така че да се изразходват най-малко материали за построяването на шосета от A и от B до тази гара.





Решение:

Означаваме железопътната линия с g,
а с C_1 – точка от линията, т.е. $C_1 \in g$.
Сборът $C_1A + C_1B$ на разстоянията от точка C_1 от g до селищата A и B се изменя с различния избор на C_1. За да решим задачата, трябва да намерим онази точка C_1 от g, за която този сбор е най-малък.

Разглеждаме осева симетрия с ос $g\,(Sg)$.

Нека $B \xrightarrow{Sg} B_1$. Тогава g е симетрала на $BB_1 \Rightarrow C_1B = C_1B_1$ и сборът, който изследваме, добива вида $AC_1 + C_1B_1$.
Този сбор очевидно е най-малък, когато точката C_1 е пресечната точка на правите AB_1 и g (в $\triangle AB_1C_1$ $AB_1 < AC_1 + C_1B_1$). Получихме, че търсената точка C е пресечната точка на g с правата, която минава през A (B) и образа на B (A) при осева симетрия с ос g.

95. ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА „ЕДНАКВОСТИ“

1. Център на симетрия няма фигурата:
А) окръжност;
Б) квадрат;
В) ромб;
Г) равностранен триъгълник.

2. Осите на симетрия на правилен шестоъгълник са:
А) 1;
Б) 2;
В) 3;
Г) 4.

3. Отсечката $AB = 27$ cm, точка M е от AB и $AM : MB = 2 : 7$. Ако A_1 е образ на A при централна симетрия с център точката M, дължината на A_1B в сантиметри е:
А) 15;
Б) 12;
В) 27;
Г) 33.

4. $\triangle ABC$ има периметър 48 cm и точките M, N и Q са средите съответно на страните AB, BC и AC. Точките M_1, N_1 и Q_1 са симетрични съответно на M, N и Q при централна симетрия с център медицентъра на $\triangle ABC$. Периметърът на $\triangle M_1N_1Q_1$ в сантиметри е:
А) 16;
Б) 20;
В) 24;
Г) 48.

5. В координатната система Oxy точката A има координати (2; 5). Точката A_1 е образ на A при централна симетрия с център точката O. Точката A_2 е образ на A_1 при осева симетрия с ос Ox. Координатите на A_2 са:
А) (–2; –5);
Б) (2; – 5);
В) (–2; 5);
Г) (2; 5).

6. В $\triangle ABC$ M е средата на BC и точка A_1 е симетрична на A относно M. Ако $AB = 18$ cm и $AC = 14$ cm, то периметърът на ABA_1C в сантиметри е:
А) 32;
Б) 48;
В) 60;
Г) 64.

7. Даден е $\sphericalangle AOB = 75^\circ$ и точка M, вътрешна за него. Ако M_1 и M_2 са съответно симетричните точки на M относно правите OA и OB, големината на $\sphericalangle M_1OM_2$ е:
А) 36°;
Б) 72°;
В) 144°;
Г) 120°.

8. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm и $h = 6$ cm. Ако точка A_1 е образ на A при транслация с вектор $\overrightarrow{DC}$, намерете лицето на:
а) AA_1CD (в cm^2);
б) $\triangle A_1BC$ (в cm^2).

9. Външно за остроъгълния $\triangle ABC$ са построени квадратите $ACPQ$ и $BCMN$. Ако $AM = 12$ cm, намерете:
а) BP (в cm);
б) ъгъла между правите AM и BP;
в) лицето на четириъгълника $ABMP$ (в cm^2).

10. За $\triangle ABC$ е дадено, че ротация с център A и ъгъл 120° изобразява точка B в точка C. Ако $AB = 14$ cm, намерете разстоянието от точка A до правата BC в сантиметри.

ИЗХОДНО НИВО

(Урок № 96 – Урок № 99)

ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА ИЗХОДНО НИВО С РЕШЕНИЯ

ДВА ПРИМЕРНИ ТЕСТА ЗА ИЗХОДНО НИВО

96. ПОДГОТОВКА ЗА ИЗХОДНО НИВО № 1

ЗАДАЧА 1 Извършете действията:

а) $\sqrt{9+\sqrt{17}}.\sqrt{9-\sqrt{17}}$; б) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$; в) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

Решение:

а) $\sqrt{9+\sqrt{17}}.\sqrt{9-\sqrt{17}}=\sqrt{9^2-\left(\sqrt{17}\right)^2}=\sqrt{81-17}=\sqrt{64}=8$

б) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=2\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{5}-\left(\sqrt{2}\right)^2=$

$=10+\sqrt{10}-2=8+\sqrt{10}$

в) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+3}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

а) $3x^2-5x+2=0$; б) $x^4-x^2-20=0$.

Решение:

а) $3x^2-5x+2=0$

$D=b^2-4ac$

$D=(-5)^2-4.3.2=1$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm1}{6}$

$x_1=1,\quad x_2=\dfrac{2}{3}$

б) $x^4-x^2-20=0$.

Полагаме $y=x^2,\ y\geq 0$.

$y^2-y-20=0$

$y_1=5,\qquad y_2=-4$

$x^2=5\qquad x^2=-4$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{5}\qquad$ няма реални корени

Отг. $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$

ЗАДАЧА 3 Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-8x+10=0$, пресметнете стойността на израза:

а) $\dfrac{5}{x_1}+\dfrac{5}{x_2}$; б) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; в) $x_1^2+x_2^2$; г) $x_1^3+x_2^3$.

Решение:

За корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2-8x+10=0$ са изпълнени равенствата $x_1+x_2=8$ и $x_1x_2=10$.

а) $\dfrac{5}{x_1}+\dfrac{5}{x_2}=\dfrac{5x_2+5x_1}{x_1x_2}=\dfrac{5(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{5.8}{10}=4$

б) $x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=10\,.\,8=80$

в) $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=8^2-2\,.\,10=44$

г) $x_1^3+x_2^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=$

$=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=8^3-3\,.\,10\,.\,8=8(64-30)=8\,.\,34=272$

ЗАДАЧА 4 Пресметнете стойността на израза

$$A=\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}\right) \text{ за } x=-2\sqrt{3}.$$

Решение: Преобразуваме

$$A=\frac{x^2-1+1}{x-1}:\frac{x^2-x-x^2}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{-x}=-x$$

$$A=-\left(-2\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}.$$

ЗАДАЧА 5 Решете уравненията:

а) $\dfrac{x+4}{x+2}-\dfrac{6}{x^2+6x+8}=\dfrac{3}{x+4}$;

б) $\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)+\dfrac{2x^2}{x-3}-8=0.$

Решение:

а) $\dfrac{x+4}{x+2}-\dfrac{6}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{3}{x+4}$

ДС: $x\neq -2,\ x\neq -4$

$(x+4)^2-6=3(x+2)$

$x^2+8x+16-6=3x+6$

$x^2+5x+4=0$

$x_1=-1\in$ ДС

$x_2=-4\notin$ ДС

Отг. $x=-1$

б) $\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)^2-\dfrac{2x^2}{x-3}-8=0$ ДС: $x\neq 3$

Полагаме $\dfrac{x^2}{x-3}=y$.

$y^2+2y-8=0$

$y_1=-4;$	$y_2=2$
$\dfrac{x^2}{x-3}=-4$	$\dfrac{x^2}{x-3}=2$
$x^2+4x-12=0$	$x^2-2x+6=0$
$x_1=-6\in$ ДС	$D=1-6<0$
$x_2=2\in$ ДС	няма реални корени

Отг. $x_1=-6,\ x_2=2$

ЗАДАЧИ

1 Извършете действията:

а) $\left(5\sqrt{2}+1\right)\left(1-3\sqrt{2}\right)$;

б) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$;

в) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}+\left(\sqrt{2}+1\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$.

2 Решете уравненията:

а) $x^2-7x+10=0$;

б) $x^2-20x-96=0$;

в) $x^4+5x^2-6=0$;

г) $x^3-5x^2-3x+15=0$.

3 Ахо x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-4x+3=0$, съставете квадратно уравнение $y^2+py+q=0$, корените на което са $y_1=3x_1, y_2=3x_2$.

4 Ахо x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-2x-5=0$, пресметнете стойността на израза:

а) $2x_1x_2-3x_1-3x_2$;

б) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$;

в) $5x_1^2x_2+5x_1x_2^2$;

г) $4x_1^3x_2+4x_1x_2^3$.

5 Решете уравненията:

а) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{54}{x^2-9}=\dfrac{9}{x+3}$;

б) $\dfrac{x+5}{2x-1}-\dfrac{2x^2-x+26}{6x^2+x-2}=\dfrac{2x+1}{3x+2}$;

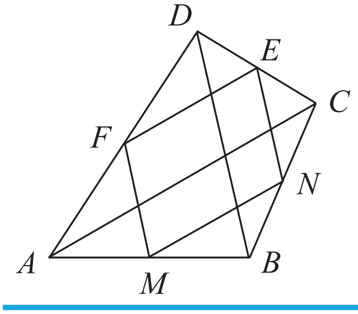
в) $\dfrac{1}{x^2+2x}-\dfrac{1}{x^2+2x+1}=\dfrac{1}{12}$;

г) $3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-11\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0.$

97. ПОДГОТОВКА ЗА ИЗХОДНО НИВО № 2

ЗАДАЧА 1 Докажете, че средите на всеки четириъгълник са върхове на успоредник (Теорема на Вариньон).

Решение:



Означаваме с M, N, E и F средите на страните на $ABCD$.

1. MN – средна отсечка в $\triangle ABC$

$\Rightarrow MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$

2. EF – средна отсечка в $\triangle ACD$

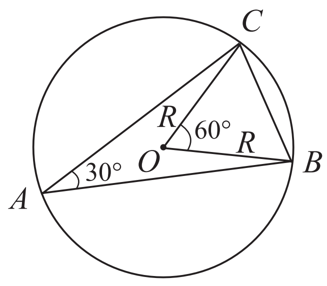
$\Rightarrow EF \parallel AC$ и $EF = \frac{1}{2}AC$

3. От (**1**) и (**2**) $\Rightarrow MN = EF$ и $MN \parallel EF$

$\Rightarrow MNEF$ е успоредник

ЗАДАЧА 2 В $\triangle ABC$ $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ и $BC = 2\sqrt{7}$ cm.
Намерете диаметъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Решение:



1. $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (вписан)

$30^\circ = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 60^\circ$

2. O – център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност

$\sphericalangle BOC = \overset{\frown}{BC} = 60^\circ$ (централен)

$BO = CO = R \Rightarrow \triangle BOC$ е равностранен

$R = BC = 2\sqrt{7}$ cm

3. $d = 2R = 4\sqrt{7}$ cm

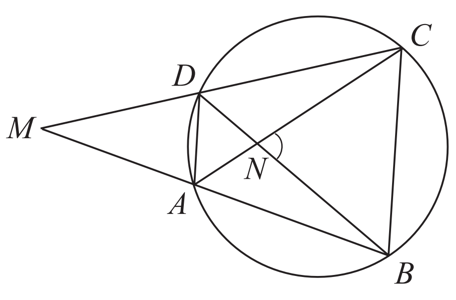
ЗАДАЧА 3 Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Ако $AB = BC = CD$ и $\sphericalangle BAD = 100^\circ$, намерете:

а) ъглите на четириъгълника $ABCD$;

б) $\sphericalangle BMC$, където $BA \times CD = M$;

в) $\sphericalangle BNC$, където $AC \times BD = N$.

Решение:



а) $AB = BC = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = x$

$\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$

$x = 100^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 100^\circ$

$\overset{\frown}{AD} = 360^\circ - 3x = 360^\circ - 3.100^\circ = 60^\circ$

$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC} = \frac{1}{2}(60^\circ + 100^\circ) = 80^\circ$

$\sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle A = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\sphericalangle D = 180^\circ - \sphericalangle B = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

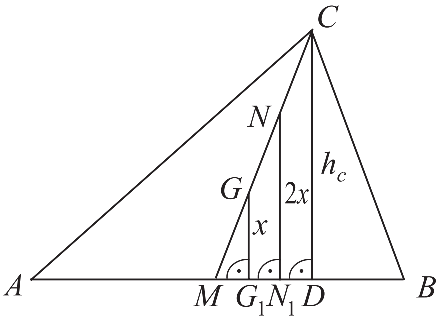
б) $\sphericalangle BMC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AD}\right) = \frac{1}{2}(100^\circ - 80^\circ) = 10^\circ$

в) $\sphericalangle BNC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{AD}\right) = \frac{1}{2}(100^\circ + 80^\circ) = 90^\circ$

ЗАДАЧА 4 В $\triangle ABC$ CD ($D \in AB$) е височина и точка G е медицентър. Ако GG_1 ($G_1 \in A$) е разстоянието от G до AB, докажете че:

а) $GG_1 = \frac{1}{3} \cdot CD$; б) $S_{\triangle ABG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$.

Доказателство:



а) **1.** CM – медиана в $\triangle ABC$

Означаваме с N средата на CG

$NN_1 \perp AB$, $GG_1 \perp AB \Rightarrow GG_1 \parallel NN_1$

GG_1 – средна отсечка в $\triangle MNN_1$

$GG_1 = x \Rightarrow NN_1 = 2 \,.\, GG_1 = 2x$

2. NN_1 – средна отсечка в трапеца CDG_1G

$$NN_1 = \frac{GG_1 + CD}{2}$$

$$2x = \frac{x + h_c}{2} \rightarrow h_c = 3x$$

$$x = \frac{1}{3} h_c \Rightarrow GG_1 = \frac{1}{3} \cdot CD$$

б) $$S_{\triangle ABG} = \frac{AB \,.\, GG_1}{2} = \frac{c \cdot \frac{1}{3} h_c}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{c \,.\, h_c}{2} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

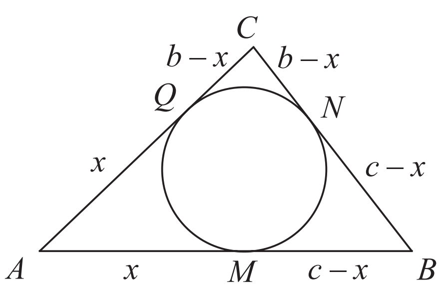
Аналогично $S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ACG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$

ЗАДАЧА 5 В $\triangle ABC$ е вписана окръжност, която се допира до страните AB, BC и CA съответно в точките M, N и Q.

а) Изразете отсечките AM, BN и CQ чрез страните a, b, c на $\triangle ABC$.

б) Ако $a = 7$ cm, $b = 9$ cm и $c = 12$ cm, пресметнете AM, BN и CQ.

Решение:



а) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

$AM = AQ = x$ (допирателна към окръжност)

$BM = BN = c - x$

$CQ = CN = b - x$

$BN + CN = BC$

$c - x + b - x = a$

$2x = b + c - a$

$2x = b + c + a - 2a$

$2x = 2(p - a)$

$x = p - a$

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Получихме, че $AM = AQ = p - a$.

Аналогично $BM = BN = p - b$

$CN = CQ = p - c$

б) $$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{7 + 9 + 12}{2} = 14 \text{ cm}$$

$AM = AQ = p - a = 14 - 7 = 7$ cm

$BM = BN = p - b = 14 - 9 = 5$ cm

$CN = CQ = p - c = 14 - 12 = 2$ cm

98. ТЕСТ С РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА 1 Числената стойност на израза $M=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ е:

А) $-2-4\sqrt{3}$; **Б)** $-4\sqrt{3}$; **В)** -2; **Г)** $\dfrac{-8\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

$$M=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(6-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{3-\left(12-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}-3\right)}{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{3-12-4\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{-6-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}=\frac{-2\left(3+2\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}+3}=-2$$

Отг. **В)**

ЗАДАЧА 2 Корените на уравнението $3x^2+6x-1=0$ са x_1 и x_2.
Числената стойност на израза $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ е:

А) -6; **Б)** 6; **В)** $\dfrac{2}{3}$; **Г)** $\dfrac{-2}{3}$.

Решение:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{6}{3}=-2$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{3}$$

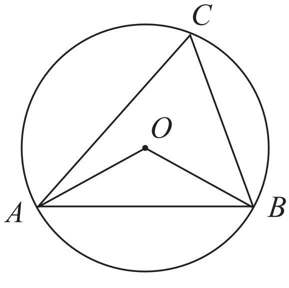
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-2}{-\frac{1}{3}}=6$$

Отг. **Б)**

ЗАДАЧА 3 За $\triangle ABC$ е дадено, че е вписан в окръжност $k(O, R)$ и $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{AC}=4:3:5$.
Сборът на $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle ACB$ е:

А) 120°; **Б)** 140°; **В)** 180°; **Г)** 200°.

Решение:



$\overset{\frown}{AB}=4x,\ \overset{\frown}{BC}=3x,\ \overset{\frown}{AC}=5x$

от $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}=360^\circ$ получаваме

$4x+3x+5x=360^\circ$.

$12x=360^\circ \quad x=30^\circ$

$\overset{\frown}{AB}=120^\circ \quad \sphericalangle AOB=\overset{\frown}{AB}=120^\circ$ (централен ъгъл)

$\sphericalangle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=60^\circ$ (вписан ъгъл)

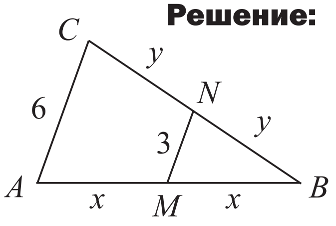
$\sphericalangle AOB+\sphericalangle ACB=180^\circ$

Отг. **В)**

ЗАДАЧА 4 Отсечката MN ($M \in AB$, $N \in BC$) е средна отсечка на $\triangle ABC$. Ако $AC = 6$ cm и периметърът на четириъгълника $AMNC$ е 19 cm, периметърът на $\triangle MNB$ в сантиметри е:

А) 16; **Б)** 13; **В)** 10; **Г)** 20.

Решение:



$AC = 2 \,.\, MN \rightarrow MN = 3$ cm

$AM = MB = x,\ \ BN = CN = y$

$P_{AMNC} = x + 3 + y + 6 = x + y + 9 = 19$

$\Rightarrow\ x + y = 10$

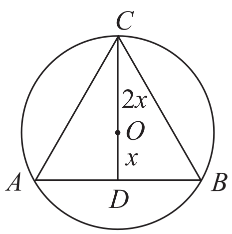
$P_{\triangle MNB} = x + y + 3 = 10 + 3 = 13$ cm

Отг. Б)

ЗАДАЧА 5 Радиусът на описаната около равностранен триъгълник окръжност е 14 cm. Дължината на радиуса на вписаната в триъгълника окръжност в сантиметри е:

А) 6; **Б)** 10; **В)** 5; **Г)** 7.

Решение:



В равностранния триъгълник точка O е медицентър, център на описаната и център на вписаната окръжност.

$CO = R = 2x = 14\ \Rightarrow x = 7$ cm

$OD = r = x = 7$ cm

Отг. Г)

ЗАДАЧА 6 За награда на спортен празник закупили за 300 лв. федербали и за 400 лв. топки. Ако цената на една топка е с 8 лв. по-висока от цената на един федербал и закупените топки са с 5 по-малко от федербалите, броят на закупените награди е:

А) 20; **Б)** 24; **В)** 44; **Г)** 50.

Решение:

$x > 0$ (лв.) – цена на 1 федербал.

	Q (лв.)	ед. цена	n брой
федербал	300	x	$\frac{300}{x}$
топки	400	$x + 8$	$\frac{400}{x+8}$

$n_{ф.} = n_{т.} + 5$

$\frac{300}{x} = \frac{400}{x+8} + 5 \mid :5$

$\frac{60}{x} = \frac{80}{x+8} + 1$

$60x + 480 = 80x + x^2 + 8x$

$x^2 + 28x - 480 = 0$

$x_1 = -30 \notin ДС\quad x_2 = 12 \in ДС$

$n_{ф.} = \frac{300}{12} = 24\qquad n_{т.} = \frac{400}{20} = 20$

$n_{ф.} + n_{т.} = 24 + 20 = 44$

Отг. В)

ЗАДАЧА 7 Кодът на охранителна система се състои от 4 различни нечетни цифри. Какъв е максималният брой опити, които трябва да се направят, за да се открие кодът на системата?

А) 180; **Б)** 120; **В)** 240; **Г)** 200.

Решение:

Броят на нечетните цифри (1, 3, 5, 7 и 9) е 5, а броят на всички възможни опити да се открие четирицифреният код е $V_5^4 = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 = 120$.

Отг. Б)

ЗАДАЧА 8 Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 3x + 1 = 0$, съставете квадратно уравнение с цели коефициенти и с корени:

а) $y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$; б) $y_1 = 3x_1 - 2$, $y_2 = 3x_2 - 2$.

Решение:

Търсеното уравнение е $y^2 + py + q = 0$,
където $y_1 + y_2 = -p$, $y_1 \,.\, y_2 = q$.
За корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - 3x + 1 = 0$ са изпълнени равенствата $x_1 + x_2 = 3$ и $x_1x_2 = 1$.

а) $-p = y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \,.\, 3 = 6$

$\Rightarrow p = -6$

$q = y_1 \,.\, y_2 = 2x_1 \,.\, 2x_2 = 4x_1x_2 = 4 \,.\, 1 = 4$

$\Rightarrow q = 4$

Уравнението е $y^2 - 6y + 4 = 0$.

б) $-p = y_1 + y_2 = (3x_1 - 2) + (3x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2) - 4 =$
$= 3 \,.\, 3 - 4 = 9 - 4 = 5$

$\Rightarrow p = -5$

$q = y_1 \,.\, y_2 = (3x_1 - 2)(3x_2 - 2) = 9x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4 =$
$= 9 \,.\, 1 - 6 \,.\, 3 + 4 = -5$

$\Rightarrow q = -5$

Уравнението е $y^2 - 5y - 5 = 0$.

Отг. а) $y^2 - 6y + 4 = 0$
б) $y^2 - 5y - 5 = 0$

ЗАДАЧА 9 В лявата страна на бланката за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, напишете номера на еквивалентното му уравнение.

<table>
<tr><td>(А)</td><td>$\dfrac{3x}{x^2-4}=1$</td><td>(1)</td><td>$(x+4)^2 = 5(x+4)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(Б)</td><td rowspan="2">$\left(x^2+2\sqrt{5}\right)\left(x^2-2\sqrt{5}\right)+x^2=0$</td><td>(2)</td><td>$\dfrac{x}{x+5}-\dfrac{1}{7-x}=0$</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>$\dfrac{\left(x\sqrt{2}+1\right)\left(x\sqrt{2}-1\right)}{x^2+3}=1$</td></tr>
<tr><td>(В)</td><td>$(x^2-6x)^2+15(x^2-6x)+50=0$</td><td>(4)</td><td>$x-\dfrac{3x+4}{x}=0$</td></tr>
</table>

Решение:

(А) $\dfrac{3x}{x^2-4}=1$ ДС: $x \neq \pm 2$

$3x = x^2 - 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = 4 \in$ ДС, $x_2 = -1$

(Б) $x^4-\left(2\sqrt{5}\right)^2+x^2=0$

$x^4 + x^2 - 20 = 0$

$x^2 = -5$ няма реални корени

$x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$

(В) $x^2 - 6x = y$

$y^2 + 5y + 60 = 0$

$y_1 = -5, y_2 = -10$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 5$

$x^2 - 6x + 10 = 0$

няма реални корени

(1) $(x + 4)^2 - 5(x + 4) = 0$

$(x + 4)(x - 1) = 0$

$x_1 = -4,\ x_2 = 1$

(2) $\dfrac{x}{x+5}+\dfrac{1}{x-7}=0$ ДС: $x \neq -5, x \neq 7$

$x^2 - 7x + x + 5= 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = 5$

(3) $\dfrac{2x^2-1}{x^2+3}=1$ ДС: $\forall x$

$2x^2 - 1 = x^2 + 3$

$x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm 2$

(4) $x-\dfrac{3x+4}{x}=0$ ДС: $x \neq 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = 4,\ x_2 = -1$

Отг.

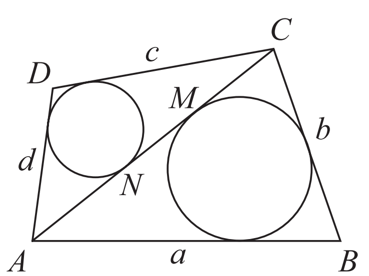
(А)	(4)
(Б)	(3)
(В)	(2)

ЗАДАЧА 10 В четириъгълника $ABCD$ са дадени $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Вписаните окръжности в триъгълниците ACB и ACD допират диагонала AC съответно в точките M и N.

а) Изразете MN чрез a, b, c и d.

б) Ако $a = 14$ cm, $b = 9$ cm, $c = 12$ cm и $d = 5$ cm, пресметнете MN.

Решение:



а) **1.** За $\triangle ABC \Rightarrow AM = p_1 - b,\quad p_1=\dfrac{a+b+AC}{2}$

$$AM=\frac{a+b+AC}{2}-b=\frac{a+AC-b}{2}$$

2. За $\triangle ACD \Rightarrow AN = p_2 - c,\quad p_2=\dfrac{c+d+AC}{2}$

$$AN=\frac{c+d+AC}{2}-c=\frac{d+AC-c}{2}$$

3. $MN = AM - AN =$

$$=\frac{a+AC-b}{2}-\frac{d+AC-c}{2}=$$

$$=\frac{a+AC-b-d-AC+c}{2}=$$

$$=\frac{a+c-b-d}{2}$$

б) $MN=\dfrac{a+c-b-d}{2}=\dfrac{14+12-9-5}{2}=6$ cm

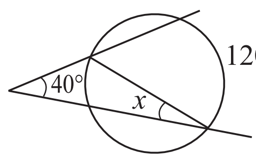
Отг. **а)** $MN=\dfrac{a+c-b-d}{2}$

б) $MN = 6$ cm

99. ИЗХОДНО НИВО
ПРИМЕРЕН ТЕСТ № 1

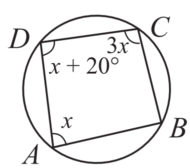
1. Най-голямото от числата е:
А) $3\sqrt{5}$;
Б) $5\sqrt{3}$;
В) $7\sqrt{2}$;
Г) $4\sqrt{6}$.

2. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на ъгъл x.
А) 20°;
Б) 30°;
В) 45°;
Г) 60°.



3. Корените на квадратното уравнение $6x^2 + 7x - 3 = 0$ са:
А) $-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}$;
Б) $-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}$;
В) $-\frac{1}{3}; -\frac{3}{2}$;
Г) $\frac{1}{3}; \frac{3}{2}$.

4. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на $\sphericalangle ABC$.
А) 30°;
Б) 45°;
В) 65°;
Г) 115°.



5. Корените на уравнението $(2x + 3)^2 - (x + 5)(2x + 3) = 0$ са:
А) –1,5; 5;
Б) –1,5; –3;
В) –1,5; 2;
Г) 1,5; 2.

6. Стойността на израза $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2$ е:
А) 16;
Б) 14;
В) $8\sqrt{3}$;
Г) 12.

7. По колко начина могат да се изберат три учебни предмета за ЗИП от пет възможни?
А) 3;
Б) 6;
В) 10;
Г) 15.

8. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $x^2 - 4x + 2 = 0$, съставете уравнението $y^2 + py + q = 0$, корените на което са:
а) $y_1 = 2x_1 + 1, y_2 = 2x_2 + 1$;
б) $y_1 = 3 - 2x_1, y_2 = 3 - 2x_2$.

9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на еквивалентното му уравнение.

(А)	$x^4 - 2x^2 = 8$	(1)	$x^2 - 5 = 2(3x - 5)$
(Б)	$\frac{5}{x} = \frac{7-2x}{2-x}$	(2)	$\frac{7}{3-x} = x - 2$
		(3)	$(x - 2)(x + 2) = 3x$
(В)	$\frac{3x+5}{x^2+1} = 1$	(4)	$\frac{5}{\lvert x \rvert + 3} = 1$

10. Точките M и N са средите съответно на страните BC и AC на $\triangle ABC$ и $AM \times BN = Q$. Ако разстоянието от точка M до правата AB е 18 cm, намерете разстоянието от точка Q до правата MN в сантиметри.

ИЗХОДНО НИВО
ПРИМЕРЕН ТЕСТ № 2

1. Най-малкото от числата е:

А) $6\sqrt{2}$;

Б) $5\sqrt{3}$;

В) $3\sqrt{5}$;

В) $2\sqrt{7}$.

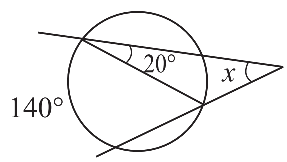
2. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на ъгъл x.

А) 40º;

Б) 70º;

В) 50º;

Г) 80º.



3. Корените на квадратното уравнение $6x^2 - x - 2 = 0$ са:

А) $-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$;

Б) $-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}$;

В) $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}$;

Г) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$.

4. Корените на уравнението $(3x - 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$ са:

А) $-4; -\frac{2}{5}$;

Б) $-4; \frac{2}{5}$;

В) $-\frac{2}{5}; 4$;

Г) $\frac{2}{5}; 4$.

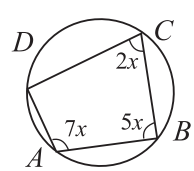
5. Като използвате означенията на чертежа, намерете големината на $\sphericalangle ADC$.

А) 40º;

Б) 140º;

В) 80º;

Г) 100º.



6. Пресметнете

$\left(\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$.

А) 14; Б) 12; В) 10; Г) $4\sqrt{21}$.

7. Автомобилна фирма предлага на пазара нов модел автомобил с три различни двигателя, четири различни варианта на вътрешно обзавеждане и пет различни цвята на купето. Колко различни варианта на автомобила се предлагат на пазара?

А) 12; Б) 15; В) 20; Г) 60.

8. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $x^2 - 5x + 3 = 0$, съставете уравнението $y^2 + py + q = 0$, корените на което са:

а) $y_1 = x_1 + 2, y_2 = x_2 + 2$;

б) $y_1 = 1 - x_1, y_2 = 1 - x_2$.

9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на еквивалентното му уравнение.

(А)	$x^2(x^2 + 1) = 20$	(1)	$\frac{5x-8}{x+2} = x - 2$
(Б)	$\frac{5x-1}{x^2+3} = 1$	(2)	$\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 2$
		(3)	$\frac{5}{\lvert x \rvert + 3} = 1$
(В)	$\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1$	(4)	$x(x + 3) = 0$

10. Точките M и N са средите съответно на страните BC и AC на $\triangle ABC$ и $AM \times BN = Q$. Ако разстоянието от точка Q до правата AB е 5 cm, намерете дължината на височината CD в сантиметри.

ОТГОВОРИ

ВХОДНО НИВО

4. Входно ниво

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	Б	2
2	Б	2
3	В	2
4	В	3
5	Г	3
6	В	3
7	В	3
Задача 8		
а)	9 cm	3
б)	108 cm^2	3
Задача 9		
(А)	(5)	2
(Б)	(3)	2
(В)	(1)	2
Задача 10		
а) 40°; б) 60°		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	А	2
2	В	2
3	Г	2
4	А	3
5	Г	3
6	Б	3
7	В	3
Задача 8		
а)	18 cm	3
б)	8 cm	3
Задача 9		
(А)	(2)	2
(Б)	(3)	2
(В)	(5)	2
Задача 10		
а) 64 cm^2; б) 36 cm		10

ТЕМА 1. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ

6. Умножение и събиране на възможности. Упражнение

1. 24; **2.** 10;
3. 28; **4.** 55;
5. 12; **6.** 28;
7. $9720 = 2^3 . 3^5 . 5^1$;
$4 . 6 . 2 = 48$ делителя;
8. $36000 = 2^5 . 3^2 . 5^3$;
$6 . 3 . 4 = 72$ делителя;
9. $32400 = 2^4 . 3^4 . 5^2$;
$5 . 5 . 3 = 75$ делителя.

7. Пермутации

1. $5! = 120$;
2. $4! - 3! = 18$;
3. $4! - 3! = 18$;
4. $4! - 1 = 23$;
5. $4! . 2! = 48$;
6. $4! . 3! = 144$.

8. Вариации

1. а) 504; б) 840;
2. $V_5^3 = 60$;
3. $2 . V_4^2 = 24$;
4. $24 + 18 = 42$.

9. Комбинации

1. а) $C_{10}^2 = 45$; б) $C_6^4 = 15$;
2. $C_8^3 = 54$;
3. $C_{35}^5 = 324632$;
4. $C_6^2 . C_4^1 = 60$;
5. $C_3^2 . C_7^3 = 105$;
6. $C_6^2 . C_9^3 = 1260$;
7. $C_2^1 . C_{12}^6 = 1848$;
8. а) $C_8^1 . C_{12}^2 . C_{10}^1 = 5280$;
б) $C_8^2 . C_{12}^3 . C_{10}^1 = 61600$;
в) $C_8^3 . C_{12}^2 . C_{10}^2 = 166320$.

10. Общи задачи върху темата "Основни комбинаторни понятия"

1. 10; **2.** 18;
3. 12; **4.** 120;
5. 720; **6.** 90;
7. 720; **8.** 120;
9. 24; **10.** 30 240;
11. 210;
12. $C_{14}^2 . C_{35}^4 = 4764760$;
13. 35;
14. а) $C_5^4 = 5$;
б) $C_{10}^4 = 210$;
в) $C_5^2 . C_{10}^2 = 450$;
г) $C_5^1 . C_{10}^3 = 600$;
15. а) $C_6^5 = 6$;
б) $C_6^5 + C_8^5 + C_{10}^5 = 314$;
в) $C_6^2 . C_8^2 . C_{10}^1 = 4200$;
г) $C_6^1 . C_8^1 . C_{10}^3 = 5760$;
16. $C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 = 50$.

ТЕМА 2. ВЕКТОРИ

13. Събиране на вектори. Упражнение

1. а) $\vec{AC}$; б) $\vec{AD}$; в) $\vec{AE}$; г) $\vec{0}$.

14. Изваждане на вектори

2. а) $\vec{XY}$; б) $\vec{NM}$; в) $\vec{AB}$;
3. а) $\vec{OD} - \vec{OC}$;
б) $\vec{OD} - \vec{OA}$;
в) $\vec{OA} - \vec{OD}$;
г) $\vec{OS} - \vec{OR}$;
4. $\vec{DC} = \vec{AC} - \vec{AD}$; $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$;
$\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$.

16. Вектори. Приложения

2. $\vec{OS} = \frac{7}{9}\vec{OA} + \frac{2}{9}\vec{OB}$;
3. $\vec{LM} = \frac{2}{7}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$; $\vec{MN} = \frac{4}{35}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$;
$\vec{NL} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{20}\vec{b}$;

17. Общи задачи върху темата "Вектори"

3. а) 1; б) 0;
в) –1; г) $k > 0$;
д) $k < 0$; е) $k = 5$;
4. $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{OA}$; $\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{OA}$;
$\vec{CB} = -\vec{OA}$; $\vec{CD} = \frac{3}{2}\vec{OA}$;
$\vec{DB} = -\frac{5}{2}\vec{OA}$; $\vec{AD} = 3\vec{OA}$;
6. $\vec{OB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$; $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;
$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}$; $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$; $\vec{ON} = \frac{1}{4}\vec{b}$;
8. $\vec{AO} = \vec{OC} = \vec{MP} = \vec{QN} = \vec{AM} + \vec{AQ}$.

18.

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	Б	2
4	Г	3
5	А	3
6	Г	3
7	Г	3
Задача 8		
а) $\vec{CN}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$		3
б) $\vec{AN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$		3
Задача 9		
а) $\vec{BC}=-2\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$		2
б) $\vec{BN}=-2\vec{a}+\vec{b}$		2
в) $\vec{CM}=\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$		2
Задача 10		
		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	Б	2
3	В	2
4	Г	3
5	Б	3
6	Г	3
7	Г	3
Задача 8		
а) $\vec{BN}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$		3
б) $\vec{AN}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$		3
Задача 9		
а) $\vec{AC}=-3\vec{a}+2\vec{b}$		2
б) $\vec{AN}=-3\vec{a}+\vec{b}$		2
в) $\vec{CM}=\vec{a}-2\vec{b}$		2
Задача 10		
		10

ТЕМА 3. ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ

19. Делене на отсечка в дадено отношение

1. а) 12 cm и 8 cm;
б) 3,6 cm и 5,4 cm;
в) $\frac{ma}{m+n}$ и $\frac{na}{m+n}$;

2. 5 : 1; AP = 25 cm; PB = 5 cm; AM = 10 cm; MP = 15 cm.

20. Средна отсечка в триъгълник

1. ML = 6 cm; MN = 7 cm; NL = 8 cm; P = 21 cm;

2. 2 ($m + n + p$);

3. 6 cm; 8 cm; 12 cm.

21. Средна отсечка в триъгълник. Упражнение

1. 5 cm; 4 cm.

22. Медицентър на триъгълник

1. 4 cm, 6 cm, 8 cm

2. 9,3 cm, 10,5 cm, 12 cm.

23. Медицентър на триъгълник. Упражнение

1. 4 cm.

24. Трапец. Равнобедрен трапец

1. 14 cm;

2. 60°; 120°.

25. Трапец. Продължение

1. 360°;

3. а) 4 cm; б) 12 cm;

4. 140 cm.

26. Средна отсечка в трапец

1. 4,7 cm; 7,5 cm;

2. 6 cm; 10 cm;

3. 15 cm; 5 cm;

4. 14 cm; 8 cm;

5. 4 cm; 7 cm; 4 cm;

7. 8 cm.

27. Средна отсечка в трапец. Упражнение

1. 11 cm; 9 cm;

2. 6 cm;

3. $m + n : m - n; m$;

4. $\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}$;

5. 9 cm;

6. в) 5 cm; г) 4 cm.

28. Общи задачи върху темата “Триъгълник и трапец”

1. 5 cm;

2. 4,5 cm;

3. 12 cm; 8 cm;

4. 12 cm;

9. 3 cm;

13. 16 cm; 12 cm;

16. 60°; 120°.

29.

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	В	2
4	В	3
5	Б	3
6	Г	3
7	Б	3
Задача 8		
а)	28	3
б)	56	3
Задача 9		
а)	12	2
б)	11	2
в)	13	2
Задача 10		
18		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	В	2
3	Г	2
4	Г	3
5	В	3
6	А	3
7	Б	3
Задача 8		
а)	28	3
б)	56	3
Задача 9		
а)	9	2
б)	8	2
в)	10	2
Задача 10		
2		10

ТЕМА 4. КВАДРАТЕН КОРЕН

31. Квадратен корен

1. 6; 8; 14; 15; 2; 7;
2. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{7}{16}; \frac{3}{8}; \frac{5}{9}$;
3. 0,5; 0,9; 1,4; 1,5; 0,18;
4. 2,4495; 2,8284; 3,1623;
5. 3,4641; 3,6056; 3,7417; 3,8730;
6. 4,123; 4,243; 4,359; 4,472;
7. 4,060; **8.** 0,7128; **9.** 3,821.

32. Свойства на квадратните корени

1. 35; 21; 44; 24;
2. 168; 42; 264;
3. 0,25; 0,78; 0,03;
4. $\frac{8}{13}; \frac{5}{9}; \frac{4}{7}; \frac{2}{9}$;
5. 42; 132; 84; 105;
6. 2772; 378; 1001;
7. $\frac{3}{2}; \frac{5}{3}$; 3;
8. 5; 13; 25; **9.** 15; 12; 48.

33. Действия с квадратни корени

1. а) 6; б) 2; в) 30;
2. а) 3; б) 3; в) 4;
3. а) $5\sqrt{6}$; б) $3\sqrt{7}$;
   в) $4\sqrt{5}$;
4. а) $3\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{7}$;
   в) $7\sqrt{6}$;
5. а) $3a\sqrt{3a}$; б) $2a^2\sqrt{3a}$;
   в) $3a\sqrt{2}$;
6. а) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; б) $\frac{1}{5}\sqrt{35}$;
   в) $\frac{1}{7}\sqrt{14}$; г) $\frac{1}{4}\sqrt{14}$.

34. Действия с квадратни корени. Продължение

1. 168; 660; 462; 637;
2. $7\sqrt{2}; 8\sqrt{3}; 13\sqrt{3}; 18\sqrt{5}$;
3. $\sqrt{45}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{175}$, $\sqrt{72}$;
4. а) $36\sqrt{2}$;
   б) $24\sqrt{3}$;
   в) $30\sqrt{2}$;
   г) $40\sqrt{3}$;
5. а) 24; б) 24;
   в) 40; г) 150.

35. Сравняване на ирационални числа, записани с квадратни корени

1. $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$; $3\sqrt{5} > 2\sqrt{10}$;
   $5\sqrt{7} < 6\sqrt{5}$; $8\sqrt{3} < 10\sqrt{2}$;
2. $\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{7}{3}} < \sqrt{\frac{5}{2}}$;
   $\sqrt{\frac{6}{5}} < \frac{1}{3}\sqrt{11}$; $\frac{2}{\sqrt{7}} > \sqrt{\frac{13}{23}}$;
3. $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$; $-2\sqrt{3} > -3\sqrt{2}$;
   $5\sqrt{2} > 3\sqrt{5}$; $-3\sqrt{5} < \sqrt{46}$.

36. Преобразуване на изрази, съдържащи квадратни корени

1. 6; 4; 10; 21;
2. 0,6; 0,8; 1,2; 0,14;
3. 1,2; 1; 0,3; 0,12;
4. 10; 36; 30; 378;
5. 4; 5; $\frac{1}{7}$; 11;
6. $\frac{4}{3}; \frac{21}{10}; \frac{10}{21}; \frac{15}{14}$;
7. $5\sqrt{7}; 3\sqrt{2}$; 0;
8. $\sqrt{10}+\sqrt{15}$; $\sqrt{3}-\sqrt{6}$; $2+\sqrt{6}-5\sqrt{2}$;
9. 4; 1;
10. $\sqrt{30}-\sqrt{15}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$;
    $\sqrt{21}-\sqrt{3}+2\sqrt{7}-2$;
11. $16+6\sqrt{7}$; $11-2\sqrt{30}$; $17-2\sqrt{66}$;
12. $19+6\sqrt{2}$; $47-12\sqrt{15}$; $13-4\sqrt{10}$.

37. Рационализиране на изрази, съдържащи квадратни корени

1. а) x^2-5; б) $2x^2-12$;
2. а) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$;
   в) $\frac{2\sqrt{15}}{5}$; г) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$;
3. а) $4(\sqrt{7}+\sqrt{5})$;
   б) $\sqrt{11}-\sqrt{2}$;
   в) $4(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$:
4. а) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$;
   б) $\frac{5}{3\sqrt{5}}$;
   в) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;
   г) $\frac{1}{2(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}$;
5. а) $\frac{4\sqrt{3}-9\sqrt{2}}{6}$;
   б) $\frac{6\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{15}$;
   в) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}+4$;
   г) $\frac{-\sqrt{6}}{2}$;
6. а) –2; б) –2; в) 9; г) 2.

38. Общи задачи върху темата "Квадратен корен"

1. 32; 34; 72;
2. 2,8; 0,29; 0,33;
3. $31\sqrt{2}; 27\sqrt{3}; 26\sqrt{5}$;
4. $x \in [3; +\infty)$; $x \in [8; +\infty)$;
   $x \in (-\infty; 9]$;
5. $x \in [-6; +\infty)$; $x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right)$;
   $x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$;
6. а) 16; б) –9;
7. а) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$;
   б) $\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{11})$;
   в) $\sqrt{5}(\sqrt{6}+\sqrt{7})$;
   г) $\sqrt{6}(3-\sqrt{7})$;
8. а) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$;
   б) $(2x-\sqrt{7})(2x+\sqrt{7})$;
   в) $(\sqrt{2}x-3)(\sqrt{2}x+3)$;
   г) $(\sqrt{3}x-\sqrt{11})(\sqrt{3}x+\sqrt{11})$;
9. а) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{5}-\sqrt{7}$;
   в) $\sqrt{7}-3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{11}-2$;
10. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $\frac{1}{6}\sqrt{30}$; $\frac{1}{3}\sqrt{21}$; $\frac{1}{4}\sqrt{14}$;
11. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$; $\frac{1}{9}\sqrt{33}$; $\frac{5}{4}\sqrt{2}$; $\frac{1}{6}\sqrt{82}$;
12. $\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{7}}{14}; \frac{\sqrt{3}}{14}$;
13. а) $2\sqrt{30} < 3\sqrt{14}$;
    б) $5\sqrt{21} > 7\sqrt{10}$;

в) $3\sqrt{30} > 4\sqrt{15}$;

г) $4\sqrt{21} < 3\sqrt{39}$;

14. а) $\sqrt{1\frac{1}{5}} > 2\sqrt{\frac{2}{7}}$;

б) $2\sqrt{2\frac{5}{6}} < \sqrt{11\frac{1}{2}}$;

в) $-\sqrt{3\frac{2}{5}} < -\sqrt{\frac{10}{3}}$;

г) $-3\sqrt{\frac{11}{2}} < -2\sqrt{12\frac{1}{3}}$;

15. а) $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{13}+4\sqrt{7}$;

16. а) $\frac{3}{5+\sqrt{10}}$; б) $\frac{1}{-3\sqrt{7}+6\sqrt{2}}$;

17. а) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$;

б) $-3-2\sqrt{2}-\sqrt{6}$;

в) $-4-\sqrt{6}$; г) $4+\sqrt{3}$;

18. а) $11-5\sqrt{6}-\sqrt{2}$;

б) $21-7\sqrt{6}+\sqrt{3}$;

в) $-1-2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$;

г) $35-4\sqrt{35}$;

19. а) $\frac{49\sqrt{3}-12\sqrt{7}}{42}$;

б) $\frac{-3-3\sqrt{15}-2\sqrt{10}}{2}$.

39.

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	В	2
3	Г	2
4	Б	3
5	Г	3
6	А	3
7	В	3
Задача 8		
а)	9	3
б)	20	3
Задача 9		
(А)	(4)	2
(Б)	(3)	2
(В)	(1)	2
Задача 10		
2		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	В	2
4	В	3
5	В	3
6	Г	3
7	Г	3
Задача 8		
а)	1	3
б)	16	3
Задача 9		
(А)	(4)	2
(Б)	(1)	2
(В)	(3)	2
Задача 10		
2		10

ТЕМА 5. КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

40. Квадратни уравнения. Непълни квадратни уравнения

1. 0; 8;
2. 0; –7;
3. 0; $\frac{5}{3}$;
4. 0; $-\frac{5}{2}$;
5. ± 4;
6. $\pm\frac{3}{2}$;
7. $\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$;
8. $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$;
9. $\pm\frac{\sqrt{35}}{5}$;
10. няма решение;
11. няма решение;
12. $x_1 = x_2 = 0$;
13. 0; $\frac{7}{2}$;
14. 0; –2;
15. няма решение;
16. $\pm\frac{\sqrt{38}}{4}$;
17. 0; $-\frac{7}{5}$.

41. Формули за корените на квадратното уравнение

1. –3; 5;
2. 1; –5;
3. –5; 2;
4. –7; 9;
5. 13; 1;
6. няма решение;
7. $2\pm\sqrt{5}$;
8. $-\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{2}$;
9. $\frac{1}{3}$; -4;
10. $-\frac{2}{5}$; 3;
11. $-\frac{1}{3}$; 7;
12. -6; $\frac{3}{4}$;
13. няма решение;
14. $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{3}$;
15. $-\frac{5}{3}$; -2;
16. $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$;
17. -1; $1\frac{1}{2}$;
18. $-\frac{2}{5}$; 4 .

42. Съкратена формула за корените на квадратното уравнение

1. $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$;
2. $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{4}$;
3. няма решение;
4. $\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}$;
5. $\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{2}$;
6. $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{7}$;
7. $\frac{7}{3}$; $-\frac{2}{5}$;
8. $\frac{4}{3}$; $-\frac{1}{4}$;
9. 3; 5;
10. $\frac{1}{3}$; 1;
11. $-\frac{1}{5}$; -1;
12. $\frac{1}{2}$; 1;
13. 1; $-\frac{3}{5}$;
14. 1; $-\frac{7}{9}$;
15. 1; $-3\frac{1}{2}$;
16. 1; $\frac{3}{5}$;
17. няма решение;

18. $\frac{1}{3}; -\frac{1}{2};$
19. $1; -\frac{5}{3};$
20. $-2; \frac{1}{2};$
21. 2; –5;
22. $3; -\frac{19}{9};$
23. $-3; \frac{8}{3};$
24. –2; –1;
25. 3;
26. –0,4.

43. Разлагане на квадратен тричлен на множители

1. $x(3x + 2)$;
2. $x(3 - 5x)$;
3. $(x - 3)(x + 3)$;
4. $\left(4-\sqrt{7x}\right)\left(4+\sqrt{7x}\right)$;
5. неразложим;
6. $(x - 2)(x + 6)$;
7. $(x + 3)(x - 7)$;
8. $(2x - 1)(x - 3)$;
9. $(2x - 3)(x + 3)$;
10. $(x + 1)^2$;
11. $(2x + 1)^2$;
12. $(x - 3)(x + 8)$;
13. $(3x - 5)(x + 4)$;
14. $(2x - 3)(x + 5)$;
15. $(5x - 7)(x + 1)$;
16. $(2x - 1)(x + 3)$
17. $(4x + 5)(x - 3)$;
18. $(2 - 3x)(x + 1)$;
19. $(3 - 2x)(5x + 2)$;
20. $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(3x+\sqrt{2}\right)$;
21. $\left(\sqrt{2}-x\right)\left(x+3\sqrt{2}\right)$;
22. неразложим;
23. неразложим;
24. $(1 - 3x)(2x + 5)$;
25. $\frac{2x+5}{x+3},\ x \neq \pm 3$;
26. $\frac{4x-1}{x-3},\ x \neq 3,\ x \neq -1$;
27. $\frac{2x-7}{x-1},\ x \neq 1,\ x \neq -2$.

44. Биквадратни уравнения

1. $x_{1,2} = \pm 1$;
2. $x_{1,2} = \pm 2;\ x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$;
3. $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$;
4. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2};\ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$;
5. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$;
6. $x_{1,2} = \pm 1$;
7. няма корени;
8. няма корени;
9. $x_1 = x_2 = 0;\ x_{3,4} = \pm\frac{5}{2}$;
10. $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$;
11. $x_{1,2} = \pm\sqrt{3};\ x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$;
12. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$.

45. Уравнения от по-висока степен, свеждащи се до квадратни

1. 1;
2. –3;
3. 3; –4; 0;
4. 0; 0,5; 0,5;
5. 0;
6. –1; –1; 1;
7. –1; ±3;
8. –2;
9. ±3;
10. 0; ±5;
11. ±1; ±3;
12. $\pm 2; \pm\sqrt{5}$;
13. ±3;
14. няма корени;
15. 2; –1;
16. –1; 1; 1; 3.

46. Уравнения от по-висока степен, свеждащи се до квадратни. Упражнение

1. $x_1 = 0;\ x_2 = 5;\ x_3 = 6;\ x_4 = -1$;
2. $x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{7}{3}$;
   $x_3 = 1;\ x_4 = -\frac{10}{3}$;
3. $x_{1,2} = \pm\sqrt{7};\ x_3 = 7;\ x_4 = -1$;
4. $x_{1,2} = \pm 3;\ x_3 = 9;\ x_4 = -1$;
5. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_3 = -5;\ x_4 = -7$;
6. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 3$;
7. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 3$;
8. $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = -3;\ x_4 = 2$;
9. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_3 = -4;\ x_4 = 2$;
10. $x_1 = 1;\ x_2 = -2{,}5;$
    $x_3 = -1;\ x_4 = -0{,}5;$
11. $x_1 = 2;\ x_2 = 3;$
12. $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{6};$
    $x_3 = -2;\ x_4 = -6;$
13. $x_1 = -1;\ x_2 = -6.$

47. Зависимости между корените и коефициентите на квадратното уравнение. Формули на Виет

1. да; **2.** не;
3. да; **4.** не;
5. $x_1 + x_2 = -3;\ x_1x_2 = -\frac{11}{4}$;
6. $x_1 + x_2 = \frac{14}{3};\ x_1x_2 = \frac{31}{9}$;
7. $x_1 + x_2 = -\frac{4}{5};\ x_1x_2 = \frac{1}{25}$;
8. няма корени;
9. –9; **10.** –31;
11. $-\frac{13}{2}$; **12.** $-\frac{7}{2}$;
13. 22; **14.** 18;
15. $\frac{7}{2}$;
16. няма корени.

48. Приложение на формулите на Виет

1. $x_1 > 0;\ x_2 > 0$;
2. $x_1 > 0;\ x_2 < 0;\ x_1 > |x_2|$;
3. $x_1 < 0;\ x_2 < 0$;
4. $x_1 < 0;\ x_2 < 0$;
5. няма корени;
6. $x_1 > 0;\ x_2 < 0;\ x_1 > |x_2|$;
7. $x^2 + 2x - 35 = 0$;
8. $x^2 + 8x + 15 = 0$;
9. $x^2 + 9x - 10 = 0$;
10. $2x^2 + 5x - 12 = 0$;
11. $6x^2 - 7x + 2 = 0$;
12. $10x^2 + 19x + 6 = 0$;
13. $3x^2 - 22x + 35 = 0$;
14. $x^2 + 3\sqrt{3}x - 30 = 0$;
15. $x^2 - 6x + 4 = 0$;
16. а) $2y^2 + 13y + 5 = 0$;
    б) $y^2 + y - 32 = 0$;
    в) $16y^2 - y - 2 = 0$;
17. а) $3y^2 + 14y + 14 = 0$;
    б) $2y^2 + 7y - 12 = 0$;
    в) $28y^2 + 2y - 7 = 0$.

49. Моделиране с квадратни уравнения

1. 8;
2. 7 и 8;
3. 5, 6 и 7;

4. 23;
5. 7 cm и 10 cm;
6. 24;
7. 7 и 12;
8. 12 и 14;
9. 10 cm и 13 cm;
10. 5%.

50. Общи задачи върху темата “Квадратни уравнения”

1. 4; 8 и –8; 2;
2. –2; 3 и $-\frac{6}{7}$; 1;
3. $-\frac{6}{5}$; 1 и 1; 3;
4. $-\frac{5}{2}$; 1 и $\frac{1}{3}$; 1;
5. $\frac{1}{2}$; $-\frac{11}{2}$;
6. $\frac{1}{2}$; $-\frac{11}{2}$;
7. $\frac{1}{2}$; $-\frac{11}{2}$;
8. 3; –5;
9. –2; $\frac{11}{3}$;
10. –3; 1;
11. –2; 1;
12. –3; 1;
13. $x_1 = x_2 = 1$;
14. –3; 1;
15. –1,5; 1;
16. 1; 4;
17. 2,5; 6;
18. –4; $1\frac{5}{6}$;
19. –1; 5;
20. 1; 4;
21. –1; 8;
22. 1; 6;
23. $-5 \pm \sqrt{15}$;
24. $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$;
    $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$;
25. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$;
    няма корени;
26. $x_1 = -3{,}5$; $x_2 = -1{,}5$;
    $x_3 = -1$; $x_4 = 1$;
27. $x_1 = -1\frac{1}{3}$; $x_2 = -1$;
    $x_3 = 1\frac{2}{3}$; $x_4 = 2$
28. а) $m = 5$; $x_2 = 3$;
    б) $m = -8$; $x_2 = 5$;
    в) $m = 8$; $x_2 = -\frac{5}{8}$;
    г) $m = 2$; $x_2 = 1$;
29. а) $A = -1{,}25$; б) $B = -60$;
30. а) $A = 59$; б) $B = -11{,}8$;
31. а) $y^2 - y - 8 = 0$;
    б) $2y^2 - 11y + 11 = 0$;
32. а) $y^2 - 10y + 5 = 0$;
    б) $y^2 - 2y - 44 = 0$.

51.
Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	Б	2
2	В	2
3	Г	2
4	Б	3
5	Г	3
6	В	3
7	Б	3
Задача 8		
а)	11	3
б)	30	3
Задача 9		
а)	–10	2
б)	–2	2
в)	14	2
Задача 10		
$2y^2 + 7y + 4 = 0$		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	Б	2
2	Г	2
3	Г	2
4	Б	3
5	В	3
6	Б	3
7	В	3
Задача 8		
а)	13	3
б)	42	3
Задача 9		
а)	42	2
б)	2	2
в)	11	2
Задача 10		
$y^2 - 7y + 4 = 0$		10

ТЕМА 6. ОКРЪЖНОСТ

52. Окръжност. Взаимни положения на точка и окръжност

1. а) A е външна за k;
   б) A е вътрешна за k;
   в) A е външна за k;
   г) A лежи на k;
2. а) A лежи на k;
   б) B лежи на k;
   в) C е вътрешна за k;
   г) D е външна за k;
3. а) $y_M = 2$; б) $x_N = -2$;
4. а) N лежи на k;
   б) L лежи на k;
   в) C е вътрешна за k;
   г) D е външна за k.

53. Взаимни положения на права и окръжност

1. а) две общи точки;
   б) нямат общи точки;
2. а) нямат общи точки;
   б) една обща точка;
3. а) нямат общи точки;
   б) една обща точка;
4. а) две общи точки;
   б) нямат общи точки.

54. Допирателни към окръжност

1. 60°; 120°; 30°; **2.** 120°;
3. а) $2r$; б) r; в) $\frac{r}{2}$;
4. $\frac{a}{2}$; б) 60°.

55. Централни ъгли, дъги и хорди

2. а) 120°; б) 90°; в) 60°;
   г) 45°; д) 40°; е) 36°;
3. 90°; 60°; 210°;
4. 36°; 72°; 108°; 144°.
5. 7,1 cm; 6,8 cm; 5,7 cm;
6. правоъгълен трапец.

57. Вписан ъгъл

1. 47°30′ или 50°30′;
2. 30° или 150°;
3. 37°30′; 52°30′; 90°.

58. Периферен ъгъл

1. 37°30′; 142°30′;
2. 51°48′;
3. 77°30′; 102°30′;

4. 40°; 60°.

59. Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност

1. 60°; **2.** 38°45′; **3.** 72°;
4. 125° и 55° или 150° и 30°.

60. Ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжност

1. 60°; 40°;
2. $\sphericalangle AMC = 40°$, $\triangle ABC(25°, 65°, 90°)$;
3. 44°;
4. 26°;
5. 132°40′;
6. 10°; 70°; 100°;
7. 180° – 2α.

61. Взаимно положение на две окръжности

2. **Упътване:** Постройте перпендикулярна права към пресекателната права, която минава през центъра.
3. 35 cm; 21 cm;
4. 24 cm; 24 cm².

62. Общи допирателни на две окръжности

2. 60°; **3.** 12;
4. 8.

63. Общи задачи върху темата "Окръжност"

2. а) 70°; 110°; б) 55°; 125°; в) 85°; 95°; г) 40°; 140°;
3. 50°; 130°; 10°; 10°; 90°; 80°;
8. $60° - \frac{1}{3}\gamma$; $120° - \frac{1}{3}\gamma$;
9. 88°; 272°;
11. 60°; 240°;
12. 80°.

64.

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	Б	2
2	В	2
3	Г	2
4	А	3
5	А	3
6	Б	3
7	Г	3
Задача 8		
а)	5	3
б)	7	3
Задача 9		
а)	120°	2
б)	60°, 60°, 60°	2
в)	18 cm	2
Задача 10		
99°, 45°		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	А	2
3	А	2
4	В	3
5	Б	3
6	А	3
7	Г	3
Задача 8		
а)	6	3
б)	4	3
Задача 9		
а)	120°	2
б)	60°, 60°, 60°	2
в)	24 cm	2
Задача 10		
54°, 72°		10

ТЕМА 7. РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

65. Рационални дроби. Дефиниционно множество

1. $x \neq -7$; **2.** $x \neq \pm 3$;
3. $x \neq 0, x \neq 4$;
4. всяко x;
5. $x \neq 1, x \neq 2$;
6. $x \neq 0, x \neq \pm 1$;
7. $x \neq 3$; **8.** $x \neq \pm 3$.

66. Основно свойство на рационалните дроби

1. $a, a \neq 0$; **2.** $ax, x \neq 0$;
3. $-1, x \neq 2$; **4.** $0{,}5, m \neq n$;
5. $x - 1, x \neq 1$;
6. $\frac{1}{b^2+1}$, $a \neq 0$, всяко b;
7. $-\frac{a}{b}$, $x \neq y$, $b \neq 0$, всяко a;
8. $a + b, a \neq b$;
9. $x - 2, x \neq -2$;
10. $-m - 2, m \neq 2$;
11. $x - y, x \neq y$;
12. $\frac{1}{a+1}$, $a \neq -1$;
13. $\frac{2(x-1)}{x+1}$, $x \neq \pm 1$;
14. $\frac{-x}{x+1}$, $x \neq \pm 1$;
15. $x, x \neq 4$;
16. $\frac{4(m-1)}{m+1}$, $m \neq -1$;
17. $\frac{1}{a}$, $a \neq 0, a \neq 3$;
18. 0; **19.** 34; **20.** 9.

67. Привеждане на рационални дроби към общ знаменател

1. $\frac{3}{x^2}$ и $\frac{5x}{x^2}$;
2. $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$ и $\frac{3x-6}{x^2-4}$;
3. $\frac{2x-2}{x^2-4x+3}$ и $\frac{5x-15}{x^2-4x+3}$;
4. $\frac{3x+6}{x^3-4x}$ и $\frac{x}{x^3-4x}$;
5. $\frac{3x}{3x^2-27}$ и $\frac{2x-6}{3x^2-27}$;
6. $\frac{2x+8}{x^2-16}$, $\frac{x^2-4x}{x^2-16}$ и $\frac{5}{x^2-16}$;
7. $\frac{3x+9}{x^2+x-6}$, $\frac{4x-8}{x^2+x-6}$ и $\frac{2x+1}{x^2+x-6}$;
8. $\frac{2x+6}{x^3-9x}$, $\frac{x^2+7x}{x^3-9x}$ и $\frac{4x-12}{x^3-9x}$;
9. $\frac{5x}{4x^3-9x}$, $\frac{4x^2-6x}{4x^3-9x}$ и $\frac{8x+12}{4x^3-9x}$;
10. $\frac{5x^2+10x+20}{x^3-8}$, $\frac{x+7}{x^3-8}$ и $\frac{3x-6}{x^3-8}$.

68. Събиране и изваждане на рационални дроби

1. $\frac{2}{x+1}$, $x \neq -1$;
2. $\frac{a-1}{x-1}$, $x \neq 1$;

3. $\frac{x+2a}{a-b}$, $a \neq b$;

4. $\frac{3}{a-1}$, $a \neq 1$;

5. $\frac{2bc+3ac-4ab}{abc}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

6. $\frac{5b+7}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;

7. $\frac{8a-6}{a^2}$, $a \neq 0$;

8. $\frac{2x^2y+1}{xy^3}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$;

9. $\frac{3x+a}{3(x+a)}$, $x \neq -a$;

10. $\frac{mn+1}{n}$, $n \neq 0$;

11. $\frac{2ab-a-b}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;

12. $\frac{2}{x+2}$, $x \neq \pm 2$;

13. $\frac{5x-4}{(x-a)^2}$;

14. $\frac{3x^2-2xy-y^2}{2(x^2-y^2)}$;

15. $\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$, $x \neq \pm 1$;

69. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби

1. $\frac{b}{xy}$;
2. $\frac{3bx}{2a}$;
3. $\frac{y}{x}$;
4. 20;
5. $\frac{2x^2y}{ab}$;
6. $\frac{a^3x^2}{5b}$;
7. $\frac{ay}{bx}$;
8. $\frac{1}{2bx}$;
9. $\frac{a^4bx}{y^2}$;
10. $\frac{25a^2}{49b^2}$;
11. $\frac{-x^3}{8b^6}$;
12. $\frac{a^2}{x^4y^2}$;
13. xy, $x \neq 1$, $y \neq 0$;
14. $\frac{x-y}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$;
15. $\frac{a(a-b)}{a+b}$, $a \neq 0$, $a \neq -b$;
16. $y(x+1)$, $x \neq 1$, $y \neq 0$;
17. $\frac{x}{x+2}$, $x \neq -2$, $y \neq 0$;
18. $\frac{x^2}{y^2(y-1)}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; $y \neq 1$.

70. Преобразуване на рационални изрази

1. $\frac{2x-3}{x-1}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$;
2. $\frac{x-4}{x+4}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 4$;
3. $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$;
4. $\frac{2x}{x^2-4}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$;

9. $\frac{4}{9}$;

10. -1;

11. -2.

71. Дробни уравнения

1. $-\frac{7}{6}$;
2. 3;
3. 5;
4. 1; -2;
5. $-4{,}5$;
6. няма корени
7. -2; -3;
8. $-\frac{6}{5}$;
9. 0, $\frac{1}{3}$;
10. $\frac{19}{24}$;
11. няма корени;
12. 5,5;
13. 1; 8;
14. 0; -8;
15. $9\frac{3}{7}$;
16. -4;
17. -3;
18. $-2\sqrt{3}$;
19. $\frac{1}{3}$;
20. -6;
21. $-\frac{4}{3}$.

72. Дробни уравнения. Упражнение

1. -1;
2. $x_1=-11$, $x_2=1$;
3. 0
4. $x_1=-3$, $x_2=1$;
5. $x_1=0$, $x_2=5$, $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$;
6. $x_1=1$, $x_2=-5$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}$;
7. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$;
8. $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$, $x_3=2$, $x_4=-\frac{1}{2}$;
9. $x_1=5$, $x_2=2$, $x_3=x_4=-1$;
10. 1.

73. Моделиране с дробни уравнения

1. 60 km/h;
2. 52 km/h, 39 km/h;
3. 9 km/h;
4. 8 дни, 10 дни;
5. 4 дни.

74. Общи задачи върху темата "Рационални изрази"

1. а) $x \neq 3$; б) $x \neq 0$, $x \neq -4$; в) $x \neq \pm 2$; г) всяко x;
2. а) $\frac{x-3}{2}$, $x \neq 3$;
   б) $-\frac{x}{x+3}$, $x \neq \pm 3$;
   в) $\frac{x+2}{x}$; $x \neq 0$; $x \neq -2$;
   г) $-\frac{x^2+x+1}{x}$; $x \neq 0$; $x \neq 1$;
3. а) $\frac{3x-6}{x^2-4}$; $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$; $\frac{12}{x^2-4}$;
   б) $\frac{5x-10}{x^2+2x-8}$; $\frac{3x+12}{x^2+2x-8}$; $\frac{3x-7}{x^2+2x-8}$;
   в) $\frac{3x+15}{x^3-25x}$; $\frac{2x-x^2}{x^3-25x}$; $\frac{5x-25}{x^3-25x}$;
   г) $\frac{3x^2-3x+3}{x^3+1}$; $\frac{2x-3}{x^3+1}$; $\frac{-2x-2}{x^3+1}$;

4. а) $\frac{x-16}{x-5}$, $x \neq 5$;
б) $\frac{-x+15}{x^2-9}$, $x \neq \pm 3$;
в) $\frac{x^2+2x-3}{x^3}$, $x \neq 0$;
г) $\frac{2x+5}{x^2-3x}$, $x \neq 0$, $x \neq 3$;

5. а) $xy-2y$, $x \neq -2$, $y \neq 0$;
б) $\frac{x}{x+3}$, $x \neq -3$, $y \neq 0$;
в) xy, $x \neq 2$, $y \neq 0$;
г) $\frac{x^2-xy}{x+y}$, $x \neq -y$, $x \neq 0$;

6. $\frac{5-x}{x-2}$, $x \neq 0, \pm 2, 3, 5$;

7. $\frac{x-2}{x+5}$, $x \neq 0, \pm 5, -4, 2$;

8. $\frac{2}{x(x+2)}$, $x \neq 0, \pm 2, -4$;

9. $\frac{9}{x(x-3)}$, $x \neq 0, \pm 3, -1$;

10. $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{8}{3}$;

11. $x = 3$;

12. $x = -3$;

13. $x_1 = 3, x_2 = 9$;

14. $x = -10$;

15. $x_1 = 1, x_2 = 4$;

16. $x_1 = 1, x_2 = 4$;

17. $x_1 = 1, x_2 = 2$;

18. $x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}$,
$x_3 = 1$, $x_4 = 2$;

19. $x_1 = 1, x_2 = 1{,}5$,
$x_3 = 2, x_4 = 3$;

20. $x_1 = x_2 = x_3 = -1$,
$x_4 = -2$,
$x_5 = x_6 = 1$;

21. $x_1 = 1, x_2 = 3$.

75.
Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	А	2
3	В	2
4	Г	3
5	Б	3
6	В	3
7	Б	3
Задача 8		
а)	10	3
б)	4	3
Задача 9		
(А)	(3)	2
(Б)	(4)	2
(В)	(2)	2
Задача 10		
$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3}$		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	Б	2
3	Г	2
4	А	3
5	Б	3
6	Г	3
7	Б	3
Задача 8		
а) 4 kg по 3 лв.		3
б) 6 kg по 2 лв.		3
Задача 9		
(А)	(4)	2
(Б)	(3)	2
(В)	(1)	2
Задача 10		
$x_1 = -11, x_2 = 1$		10

ТЕМА 8. ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

76. Окръжност, описана около триъгълник
2. 164°;
3. 40 cm;
4. 90°; 60°; 30°;

77. Окръжност, описана около триъгълник. Упражнение
2. а) 60°; 70°; 50°;
б) 40°; 50°; 90°;
3. 6 cm;
4. $\frac{\beta+\gamma}{2}$; $\frac{\gamma+\alpha}{2}$; $\frac{\alpha+\beta}{2}$;
5. 8 cm;
6. 5 cm.

78. Окръжност, вписана в триъгълник
1. $\frac{1}{3}h$;
2. 50°; 50°; 80°;
3. 130°;
5. $90° + \frac{\alpha}{2}$; $135° - \frac{\alpha}{2}$;
6. 24 cm^2.

79. Окръжност, вписана в триъгълник. Упражнение
1. а) c = 15 cm; б) p = 17 cm;
в) a = 8 cm;
2. 13 cm; 14 cm; 15 cm;
4. 4 cm; 30°; 60°; 90°;
5. 4 cm.

80. Външновписани окръжности
2. а) 60°; 50°; 70°;
б) 70°; 50°; 60°;
в) 70°; 60°; 50°;
г) 70°; 60°; 50°;
3. а) $c - a$; б) 3.

81. Ортоцентър на триъгълник
1. 6 cm;
2. 10 cm;
3. 5 cm; 13,75 cm;
4. ML = 2 cm;
5. 5 cm.

83. Четириъгълник, вписан в окръжност
3. а) не; б) да; в) да;
4. 20 cm;
5. 70°; 90°; 110°; 90°.

84. Четириъгълник, вписан в окръжност. Упражнение
2. 90° – γ; 90° – β.

85. Четириъгълник, описан около окръжност
1. а) да; б) не;
2. 10 cm; 25 cm; 20 cm; 5 cm.

86. Четириъгълник, описан около окръжност. Упражнение
1. 5 cm;
2. 20 cm;
3. 40 cm; 60 cm^2;

4. 20 cm^2;
5. 12 cm; 6 cm^2.

87. Общи задачи върху темата “Вписани и описани многоъгълници”

1. 30°; 90°; 150°; 90°;
2. 54°; 90°; 126°; 90°;
4. а) 2 cm; б) $a - b$;
6. 60°; 60°; 120°; 120°;
7. 3 cm;
8. 8 cm;
9. 10 cm;
11. 28 cm;
12. а) 10 cm; б) 12 cm; в) 2 cm;
13. 0,5 . $(b - a)$;
14. 90°; 22°30′; 67°30′;
15. 90°; 30°; 60°;
16. 0,5 . γ; 0,5 . γ; 180 – γ.

88.

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	Б	2
3	Г	2
4	Б	3
5	В	3
6	А	3
7	Г	3
Задача 8		
а)	40°	3
б)	50°	3
Задача 9		
а)	13 cm	2
б)	4 cm	2
в)	30 cm	2
Задача 10		
52		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	Г	2
3	Б	2
4	Г	3
5	В	3
6	В	3
7	Б	3
Задача 8		
а)	60°	3
б)	30°	3
Задача 9		
а)	5 cm	2
б)	2 cm	2
в)	12 cm	2
Задача 10		
156		10

ТЕМА 9. ЕДНАКВОСТИ В РАВНИНАТА

95.

Примерен тест

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	А	2
4	В	3
5	В	3
6	Г	3
7	В	3
Задача 8		
а)	48	3
б)	12	3
Задача 9		
а)	12	2
б)	900	2
в)	144°	2
Задача 10		
7		10

ИЗХОДНО НИВО

96. Подготовка за изходно ниво № 1

1. а) $2\sqrt{2} - 29$; б) –1;
в) $3\sqrt{2} + 3$; г) 6;
2. а) 2; 5;
б) –4; 24;
в) $x_{1,2} = \pm 1$;
г) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3},\ x_3 = 5$;
3. $y^2 - 12y + 27 = 0$;
4. а) –16; б) 2,8;
в) –50; г) –280;
5. а) 9;
б) 1; 5;
в) –3; 1;
г) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

99.

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	А	2
3	А	2
4	Г	3
5	Б	3
6	А	3
7	В	3
Задача 8		
а) $y^2 - 10y + 17 = 0$		3
б) $y^2 + 2y - 7 = 0$		3
Задача 9		
(А)	(4)	2
(Б)	(1)	2
(В)	(3)	2
Задача 10		
6 cm		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	А	2
4	В	3
5	В	3
6	А	3
7	Г	3
Задача 8		
а) $y^2 - 9y + 17 = 0$		3
б) $y^2 + 3y - 1 = 0$		3
Задача 9		
(А)	(3)	2
(Б)	(1)	2
(В)	(4)	2
Задача 10		
15 cm		10

Квадрати и кубове на числата от 1 до 99

n	n^2	n^3
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1 000
11	121	1 331
12	144	1 728
13	169	2 197
14	196	2 744
15	225	3 375
16	256	4 096
17	289	4 913
18	324	5 832
19	361	6 859
20	400	8 000
21	441	9 261
22	484	10 648
23	529	12 167
24	576	13 824
25	625	15 625
26	676	17 576
27	729	19 683
28	784	21 952
29	841	24 389
30	900	27 000
31	961	29 791
32	1 024	32 768
33	1 089	35 937

n	n^2	n^3
34	1 156	39 304
35	1 225	42 875
36	1 296	46 656
37	1 369	50 653
38	1 444	54 872
39	1 521	59 319
40	1 600	64 000
41	1 681	68 921
42	1 764	74 088
43	1 849	79 507
44	1 936	85 184
45	2 025	91 125
46	2 116	97 336
47	2 209	103 823
48	2 304	110 592
49	2 401	117 649
50	2 500	125 000
51	2 601	132 651
52	2 704	140 608
53	2 809	148 877
54	2 916	157 464
55	3 025	166 375
56	3 136	175 616
57	3 249	185 193
58	3 364	195 112
59	3 481	205 379
60	3 600	216 000
61	3 721	226 981
62	3 844	238 328
63	3 969	250 047
64	4 096	262 144
65	4 225	274 625
66	4 356	287 496

n	n^2	n^3
67	4 489	300 763
68	4 624	314 432
69	4 761	328 509
70	4 900	343 000
71	5 041	357 911
72	5 184	373 248
73	5 329	389 017
74	5 476	405 224
75	5 625	421 875
76	5 776	438 976
77	5 929	456 533
78	6 084	474 552
79	6 241	493 039
80	6 400	512 000
81	6 561	531 441
82	6 724	551 368
83	6 889	571 787
84	7 056	592 704
85	7 225	614 125
86	7 396	636 056
87	7 569	658 503
88	7 744	681 472
89	7 921	704 969
90	8 100	729 000
91	8 281	753 571
92	8 464	778 688
93	8 649	804 357
94	8 836	830 584
95	9 025	857 375
96	9 216	884 736
97	9 409	912 673
98	9 604	941 192
99	9 801	970 299

МАТЕМАТИКА 8. КЛАС
Здравка Паскалева, Мая Алашка, Пламен Паскалев, Райна Алашка

Художник на корицата *Емил Христов*
Редактор и коректор *Юлиана Дамянова*
Графичен дизайн *Ангелина Аврамова*

Българска, първо издание 2017 г.

Формат: 60/90/8. Печатни коли 29,5

Издателство “Архимед 2” ЕООД – София
тел./факс: 02 963 2890
www.arhimedbg.com, e-mail: arhimed_2@abv.bg

ISBN: 978-954-779-213-5

Печат “АЛИАНС ПРИНТ” – София