Caso: Optimización Lineal

Laura González Rojas, Tomas Figueroa,
Victoria Chavarro Díaz, Paula Sofia Torres

Noviembre 2024, Pontificia Universidad Javeriana

Nota:

Este documento presenta el planteamiento, modelamiento matematico y análisis de los resultados del caso dado. A continuación se detalla el modelo y los resultados con sus interpretaciones correspondientes.

Caso Empresa

1 Conjuntos

- **Aleaciones** $J = \{1, 2, 3, 4\}$
  - 1: Aleación A
  - 2: Aleación B
  - 3: Aleación C
  - 4: Aleación D
- **Materias primas** $I = \{1, 2, 3, 4\}$
  - 1: Hierro
  - 2: Cobre
  - 3: Zinc
  - 4: Magnesio
- **Plantas de producción** $K = \{1, 2, 3, 4\}$
  - Planta 1
  - Planta 2
  - Planta 3
  - Planta 4
- **Centro de distribución** $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - Centro 1
  - Centro 2
  - Centro 3
  - Centro 4
  - Centro 5
- **Mayoristas** $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- **Meses** $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2 Parametros

$\text{PMIN}_{i,j}$: Porcentaje mínimo permitido de la materia prima i en la aleación j.
$\text{PMAX}_{i,j}$: Porcentaje máximo permitido de la materia prima i en la aleación j.
PT_i : Precio por tonelada de la materia prima i.
CPP_k : Capacidad de producción mensual de la planta k.
CAP_k : Capacidad de almacenamiento mensual de la planta k.
CSPP_k : Costo de producción por tonelada en la planta k.
CSAP_k : Costo de almacenamiento por tonelada mensual en la planta k.
$\text{D}_{j,m,l}$: Demanda de la aleación j del mayorista m en el mes l.
CFC_c : Costo semestral de arriendo del centro c.
CAC_c : Capacidad de almacenamiento mensual del centro c.
CSAC_c : Costo de almacenamiento mensual por tonelada en el centro c.
$\text{CTPC}_{k,c}$: Costo de transporte por tonelada desde la planta k al centro c.
$\text{CTCM}_{c,m}$: Costo de transporte por tonelada desde el centro c al mayorista m.
$\text{BCM}_{c,m}$: Binario que indica si el centro c puede despachar al mayorista m.
$\text{PE}_{j,m}$: Penalización por tonelada de la aleación j no despachada al mayorista m.

3 Variables de Decisión

$$\mathrm{P}_i = \begin{cases} 1, & \text{si se cumple la política } i \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$$\mathrm{U}_c = \begin{cases} 1, & \text{si el centro de distribución } c \text{ es arrendado} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$\mathrm{X}_{i,j,k,l}$: Toneladas de materia prima i utilizada para producir la aleación j en la planta k durante el mes l.

$\mathrm{T}_{j,c,m,l}$: Cantidad de la aleación j enviada desde el centro de distribución c al mayorista m en el mes l.

$\mathrm{W}_{j,c,l}$: Toneladas de la aleación j almacenada en el centro de distribución c al final del mes l.

$\mathrm{Y}_{j,k,c,l}$: Toneladas de la aleación j enviada desde la planta k al centro de distribución c en el mes l.

$\mathrm{S}_{j,k,l}$: Toneladas de la aleación j almacenada en la planta k al final del mes l.

G : Máximo costo de operación de una planta k.

4 Función Objetivo

Minimizar el costo operativo de las plantas y la distribución:

$$\text{Minimizar } z = \text{costOP} \tag{1}$$

5 Restricciones

Proporciones de Materiales y Capacidad de Producción

$$\text{Proporción Mínima:} \quad X_{h,j,k,l} \geq \sum_{i \in I} \mathrm{PMIN}_{h,j} \cdot X_{i,j,k,l}, \quad \forall h \in I, j \in J, k \in K, l \in L \tag{2}$$

$$\text{Proporción Máxima:} \quad X_{h,j,k,l} \leq \sum_{i \in I} \mathrm{PMAX}_{h,j} \cdot X_{i,j,k,l}, \quad \forall h \in I, j \in J, k \in K, l \in L \tag{3}$$

$$\text{Capacidad de Producción:} \quad \sum_{i \in I, j \in J} X_{i,j,k,l} \leq \mathrm{CPP}_k, \quad \forall k \in K, l \in L \tag{4}$$

Balance de Inventario

$$\text{Balance de Inventario:} \quad \sum_{m \in M} T_{j,c,m,l} = \sum_{k \in K} Y_{j,k,c,l}, \quad \forall c \in C, j \in J, l \in L \tag{5}$$

Inventario en Plantas

$$\text{Primer Mes:} \quad S_{j,k,1} = \sum_{i \in I} X_{i,j,k,1} - \sum_{c \in C} Y_{j,k,c,1}, \quad \forall k \in K, j \in J \tag{6}$$

$$\text{Meses Posteriores:} \quad S_{j,k,l} = S_{j,k,l-1} + \sum_{i \in I} X_{i,j,k,l} - \sum_{c \in C} Y_{j,k,c,l}, \quad \forall k \in K, j \in J, l > 1 \tag{7}$$

Inventario en Centros de Distribución

$$\text{Primer Mes:} \quad W_{j,c,1} = \sum_{k\in K} Y_{j,k,c,1} - \sum_{m\in M} T_{j,c,m,1}, \qquad \forall c \in C, j \in J \tag{8}$$

$$\text{Meses Posteriores:} \quad W_{j,c,l} = W_{j,c,l-1} + \sum_{k\in K} Y_{j,k,c,l} - \sum_{m\in M} T_{j,c,m,l}, \qquad \forall c \in C, j \in J, l > 1 \tag{9}$$

Capacidad de Almacenamiento

$$\text{En Plantas:} \quad \sum_{j\in J} S_{j,k,l} \leq \text{CAP}_k, \qquad \forall k \in K, l \in L \tag{10}$$

$$\text{En Centros de Distribución:} \quad \sum_{j\in J} W_{j,c,l} \leq \text{CAC}_c \cdot U_c, \qquad \forall c \in C, l \in L \tag{11}$$

Condiciones de Despacho y Existencia de Centros

$$\text{Posible Despacho:} \quad T_{j,c,m,l} \leq \text{BCM}_{c,m} \cdot \text{MUY}, \qquad \forall c \in C, m \in M, l \in L, j \in J \tag{12}$$

$$\text{Existencia de Centros:} \quad \sum_{j\in J, m\in M} T_{j,c,m,l} \leq U_c \cdot \text{MUY}, \qquad \forall c \in C, l \in L \tag{13}$$

$$\text{Despacho Solo Si Arrendado:} \quad \sum_{m\in M, j\in J} T_{j,c,m,l} \geq U_c, \qquad \forall l \in L, c \in C \tag{14}$$

Demanda

$$\text{Demanda:} \quad D_{j,m,l} - \sum_{c\in C} T_{j,c,m,l} = R_{j,m,l}, \qquad \forall j \in J, m \in M, l \in L \tag{15}$$

$$\text{Demanda Máxima:} \quad \sum_{c\in C} T_{j,c,m,l} \leq D_{j,m,l}, \qquad \forall m \in M, l \in L, j \in J \tag{16}$$

Costo de Operación de Plantas

$$\begin{aligned} \text{Costo Operativo:} \quad \text{costOP} \geq & \sum_{i\in I, j\in J, l\in L} (\text{PT}_i \cdot X_{i,j,k,l} + \text{CSPP}_k \cdot X_{i,j,k,l}) \\ & + \sum_{j\in J, l\in L} S_{j,k,l} \cdot \text{CSAP}_k + \sum_{j\in J, c\in C, l\in L} Y_{j,k,c,l} \cdot \text{CTPC}_{k,c}, \qquad \forall k \in K \end{aligned} \tag{17}$$

Políticas

- 1. Grupo de mayoristas cuya demanda se debe satisfacer en su totalidad:

$$\sum_{c\in C} T_{j,c,m,l} \geq D_{j,m,l} - \text{MUY} \cdot (1 - \text{Pol}_1), \quad \forall l \in L, j \in J, m \in \{2, 3, 5, 7, 9\} \tag{18}$$

- 2. Restricción de acuerdos de arriendo entre centros de distribución:

$$U_c \leq U_s + \text{MUY} \cdot (1 - \text{Pol}_2), \quad \forall c \in C, s \in A[c] \tag{19}$$

- 3. Restricción del 95% de la demanda por mayorista:

$$\sum_{c\in C} T_{j,c,m,l} \geq 0.95 \cdot D_{j,m,l} - \text{MUY} \cdot (1 - \text{Pol}_3), \quad \forall m \in M, l \in L, j \in J \tag{20}$$

- 4. Restricción de pago de arriendos hasta 1700:

$$\sum_{c \in C} U_c \cdot \mathrm{CFC}_c \leq 1700 + \mathrm{MUY} \cdot (1 - \mathrm{Pol}_4) \tag{21}$$

- Costo de demanda faltante:

$$\sum_{j \in J, m \in M} \mathrm{PE}_{j,m} \cdot R_{j,m,l} \leq 0.1 \cdot \left(\sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I, j \in J} X_{i,j,k,l} \cdot \mathrm{PT}_i + \sum_{j \in J, i \in I} X_{i,j,k,l} \cdot \mathrm{CSPP}_k + \sum_{j \in J} S_{j,k,l} \cdot \mathrm{CSAP}_k \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j \in J, c \in C} Y_{j,k,c,l} \cdot \mathrm{CTPC}_{k,c} \right) + \sum_{c \in C, j \in J} W_{j,c,l} \cdot \mathrm{CSAC}_c + \sum_{j \in J, c \in C, m \in M} T_{j,c,m,l} \cdot \mathrm{CTCM}_{c,m} + \sum_{j \in J, m \in M} \mathrm{PE}_{j,m} \cdot R_{j,m,l} \right)$$

$$+ \mathrm{MUY} \cdot (1 - \mathrm{Pol}_5), \quad \forall l \in L \tag{22}$$

Cumplimiento Mínimo de Políticas

$$\sum_{p \in P} \mathrm{Pol}_p \geq 3 \tag{23}$$

6 Resultados del Gusek

6.1 Valor función objetivo

$$z = 335282.933$$

Decidimos analizar los resultamos por medio de hacernos las siguiente preguntas que son respondidas en el excel, junto con los resultados.

Preguntas de Análisis

1. ¿Cuál es el costo total de operación para cada planta cada mes?
2. ¿Cuánto espacio de almacenamiento se utilizó en cada centro de distribución cada mes?
3. ¿Cuál fue el costo total de penalización por tonelada de aleación no entregada a los mayoristas en cada mes?
4. ¿Cuántas toneladas de aleación corresponden a la demanda no satisfecha cada mes?
5. ¿Cuántas toneladas de aleación quedaron en inventario al final de cada mes?
6. ¿Cuáles fueron las tres políticas seleccionadas para cumplir en el modelo?