CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 16 de Junio de 2010

Ejercicio 1.
Hallar los puntos del cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

Solución. Aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange a la función dada por el cuadrado de la distancia al punto $(4, 2, 0)$, es decir,

$$f(x, y, z) = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + z^2,$$

sujeta a la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

El sistema de ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ es

$$\begin{aligned} 2(x-4) &= 2\lambda x, \\ 2(y-2) &= 2\lambda y, \\ 2z &= -2\lambda z. \end{aligned}$$

La tercera ecuación del sistema es $(1 + \lambda) z = 0$, lo que implica que $z = 0$, o bien $\lambda = -1$. Si $z = 0$, sustituyendo en la restricción $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, obtenemos $x^2 + y^2 = 0$, lo que implica $x = y = 0$, que contradice las dos primeras ecuaciones.

Por tanto, $\lambda = -1$. Para este valor, las dos primeras ecuaciones son $x - 4 = -x$, $y - 2 = -y$, cuya única solución es $x = 2$, $y = 1$. Usando la restricción, obtenemos $z^2 = x^2 + y^2 = 5$.

Entonces, los puntos del cono más cercanos al punto $(4, 2, 0)$ son $\left(2, 1, \sqrt{5}\right)$ y $\left(2, 1, -\sqrt{5}\right)$.

Ejercicio 2.
Sea V el sólido definido mediante las desigualdades

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

Calcular la integral triple

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2} \, dx\, dy\, dz.$$

Solución. Usando coordenadas esféricas, las desigualdades que definen el sólido son $0 \leq \operatorname{sen}\phi \leq \cos\phi$, $0 \leq \rho\cos\phi \leq 2$. Entonces

$$V = \left\{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \;\; 0 \leq \phi \leq \pi/4\,, \;\; 0 \leq \rho \leq 2/\cos\phi\right\}.$$

Cambiando a coordenadas esféricas, la integral triple verifica

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2} \, dx\, dy\, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2/\cos\phi} \rho^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{2/\cos\phi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{2^5}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^6\phi} \, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{2^5}{3} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{5\cos^5\phi}\right]_0^{\pi/4} d\theta \\
&= \frac{2^5}{15} \int_0^{2\pi} \left[\left(\sqrt{2}\right)^5 - 1\right]_0^{\pi/4} d\theta \\
&= \frac{2^5}{15} \left(4\sqrt{2} - 1\right) 2\pi \\
&= \frac{64\left(4\sqrt{2} - 1\right)}{15}\pi.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.
Calcular la integral de línea

$$\oint_C e^{x^2}\,dx + (x+z)\operatorname{sen} y^3\,dy + \left(y^2 - x^2 + 2yz\right)\,dz,$$

siendo C la curva obtenida por la intersección del plano $x+y+z=3$ con los planos coordenados, indicando la orientación de C elegida.

Solución. El teorema de Stokes asegura que $\oint_C \mathbf{F}.dr = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, donde S es el triángulo contenido en el plano $x+y+z=3$ cuya frontera es la curva C. Elegimos la orientación positiva inducida por el vector normal de la ecuación implícita del plano, es decir $\mathbf{N}=(1,1,1)$. Calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ e^{x^2} & (x+z)\operatorname{sen} y^3 & y^2 - x^2 + 2yz \end{vmatrix} \\ &= \left(2y + 2z - \operatorname{sen} y^3, 2x, \operatorname{sen} y^3\right).\end{aligned}$$

La superficie S se define mediante $x+y+z=3$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$. Usando la parametrización $S(x,y)=(x,y,3-x-y)$, donde $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 3$, el producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1).$$

Observemos que el vector normal elegido coincide con $S_x \times S_y$. Calculamos el flujo

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iint_T \left(6 - 2x - \operatorname{sen} y^3, 2x, \operatorname{sen} y^3\right)\cdot(1,1,1)\;dx\,dy \\ &= 6\iint_T dx\,dy = 6\ \text{área}\,(T),\end{aligned}$$

donde $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ x+y\leq 3\right\}$ es un triángulo con base 3 y altura 3. Entonces, la integral de línea

$$\oint_C \mathbf{F}.\,dr = 6\times\frac{9}{2} = 27.$$