Sofía Cantú Talamantes A01571120

Algunas Distribuciones de Probabilidad
Problemas en clase (Pt1)

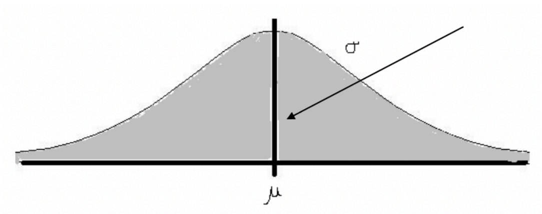
1. Función de densidad de probabilidad fdp

La función de densidad de probabilidad fdp se define como sigue:

Sea X una variable aleatoria continua. Entonces una función $f(x)$ es una fdp sí:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Su área total de $-\infty\ a\ \infty$ vale 1.



Sea $f(x)$ una función definida por

$$f(x) = \left\{\frac{cx^2 \qquad 0\leq x\leq 2}{0 \qquad en\ otro\ caso}\right\}$$

(División utilizada solamente para generar dos líneas, no dividir.)

Calcule el valor de la constante c para que $f(x)$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X.

Primero encontramos la integral a resolver, considerando que es 0 si es debajo de 0 y arriba de dos, nos quedamos con la siguiente función.

$$\int_0^2 cx^2 dx = 1$$

Calculamos la integral de la siguiente manera:

$$c\int_0^2 x^2 dx = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = c\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = c \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$$c = \frac{3}{8}$$

El valor de la constante c es: 0.375 = ⅜.

Calcule $P[0 < X \leq 1]$

Para calcular la probabilidad, ocupamos integrar la funcion $f(x)$ entre 0 y 1

$$P[0 < X\ 1] = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{8}x^2 dx$$

$$\frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{8}$$

Como se demuestra con el código, P(0 < X < 1) = 0.125 = ⅛.

Actividad verificada con R en el siguiente código.

```
# Código en R pendiente
```

2. Flujo vehicular [EN PROCESO]

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automóvil y otro. Sea X es el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo en que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x) = \left\{\frac{\frac{k}{x^4}, \quad si\, x > 1}{0 \quad si\, x \leq 1}\right\}$$

(División utilizada solamente para generar dos líneas, no dividir.)

Determine el valor de k para la cual f(x) es una función de densidad de probabilidad (fdp).

Para encontrar la integral a resolver, ocupamos recordar que la función de densidad de probabilidad es no negativa en todas partes, y el área bajo la curva completa es igual a 1. Que por el contexto que nos dan, nos lleva a lo siguiente:

$$\int_1^\infty \frac{k}{x^4}dx = 1 = \lim_{\infty \to b} k\int_1^b \frac{1}{x^4}dx$$

$$\int \frac{1}{x^4}dx = -\frac{1}{3}x^{-3}$$

$$\lim_{\infty \to b} k\left[-\frac{1}{3x^{3}}\right]_{1}^{b} = \lim_{\infty \to b} k\left[-\frac{1}{3b^{3}} - \frac{1}{3(1)^{3}}\right] = k\left[-\frac{1}{3\infty^{3}} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = k \cdot \frac{1}{3} = 1$$
$$k = 3$$

Valor de k para la cual f(x) es una función de densidad de probabilidad (fdp) es igual a -3.

¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su varianza?

En probabilidad y estadística, la expectativa o valor esperado es el valor promedio ponderado de una variable aleatoria. En otras palabras, el valor esperado se calcula con la siguiente integral:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$E(X)$ es el valor esperado de la variable aleatoria continua X
x es el valor de la variable aleatoria continua X
$f(x)$ es la función de densidad de probabilidad

Por otro lado, la varianza se define como la diferencia esperada al cuadrado entre una variable aleatoria y la media (valor esperado) de la siguiente manera:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^{2}]$$

Si se deriva, se obtiene la siguiente ecuación:

$$Var(X) = E[X^{2}] - (E[X])^{2}$$

Ya conociendo la fórmula anterior, buscamos $E[X]$ y $E[X^{2}]$.

$$E[X] = \int_{1}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{k}{x^{4}}dx = \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^{4}}dx = 3\int_{1}^{\infty} x^{-3}dx = 3\left[\frac{1}{-2x^{2}}\right]_{1}^{\infty} = 3 \cdot \frac{1}{2}$$
$$E[X] = \frac{3}{2}$$

$$E[X^{2}] = \int_{1}^{\infty} x^{2} \cdot f(x)dx = \int_{1}^{\infty} x^{2} \cdot \frac{3}{x^{4}}dx = 3\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{2}}dx = 3\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{\infty} = 3 \cdot 0$$
$$E[X^{2}] = 3$$

Ahora si podemos reemplazar

$$Var(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Con esto concluimos que el valor esperado entre autos es de $\frac{3}{2}$ y su varianza de $\frac{3}{4}$.

¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2?¿x segundos o menos?

Para calcular la probabilidad de que se tarde más de 2 segundos, a lo más 2 segundos, y x segundos o menos, calcularemos las siguientes tres integrales:

$$P(X > 2) = \int_{2}^{\infty} f(x)dx$$

$$P(X \leq 2) = \int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Los procedimientos son los siguientes.

$$P(X > 2) = \int_{2}^{\infty} f(x)dx = \int_{2}^{\infty} \frac{3}{x^{4}}dx = 3\left[\frac{1}{-3x^{3}}\right]_{2}^{\infty} = \frac{1}{8}$$

$$P(X > 2) = \frac{1}{8}$$

$$P(X \leq 2) = \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} \frac{3}{x^{4}}dx = 3\left[\frac{1}{-3x^{3}}\right]_{1}^{2} = \frac{7}{8}$$

o

$$P(X < 2) = 1 - \frac{1}{8}$$

$$P(X < 2) = \frac{7}{8}$$

$$P(X \leq x) = \int_{1}^{x} f(x)dx = \int_{1}^{x} f(x)dx = \int_{1}^{x} \frac{3}{x^{4}}dx = 3\left[\frac{1}{-3x^{3}}\right]_{1}^{x} = 3\left(\frac{1}{-3x^{3}} - \frac{1}{-3}\right) = 1 - \frac{1}{x^{3}}$$

$$P(X \leq x) = 1 - \frac{1}{x^{3}}$$

En resumen, la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos es de $\frac{1}{8}$, No más de 2 segundos es $\frac{7}{8}$ y x segundos o menos $1 - \frac{1}{x^{3}}$.

References

Rapid Tables. (2024). *Valor De Expectativa*. Rapidtables.org. https://www.rapidtables.org/math/probability/Expectation.html

Wikipedia. (2004, February 4). *Función de densidad de probabilidad*. Wikipedia.org; Wikimedia Foundation, Inc. https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_densidad_de_probabilidad

Xiong, Z., Hardy, H., & Schreiber, S. (2016, July 18). *Questions | Proving Var(X)=E[X2]−(E[X])2*. Mathematics Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/questions/1863562/proving-operatornamevarx-ex2-ex2