

Trabajo Práctico 1

Modelado, discretización y simulación de plantas

22.94 - Control Discreto

Tomás Martín Torea y Sofia Yanes Sanchez



Introducción

En este trabajo se realiza el modelado matemático, análisis y simulación de dos sistemas físicos distintos: un motor de corriente continua con una carga y un sistema de levitación magnética compuesto por una bolita y un electroimán. Para cada planta, se obtiene su ecuación diferencial, su función de transferencia en el dominio de Laplace y se analizan sus características dinámicas. Posteriormente, se procede a la discretización de los modelos continuos, seleccionando un período de muestreo adecuado y aplicando un Zero Order Hold (ZOH). Finalmente, se desarrollan simulaciones tanto de los sistemas continuos como de los discretos para comparar sus respuestas temporales y validar los modelos obtenidos.

Método, desarrollo y resultados

2.1. Práctica 1: Motor de corriente continua

El sistema consiste en un motor de CC que acciona una carga a través de una caja reductora. La entrada es la tensión de armadura e_a y la salida de interés es la posición angular de la carga θ_L . El sistema se encuentra esquematizado en la siguiente figura:

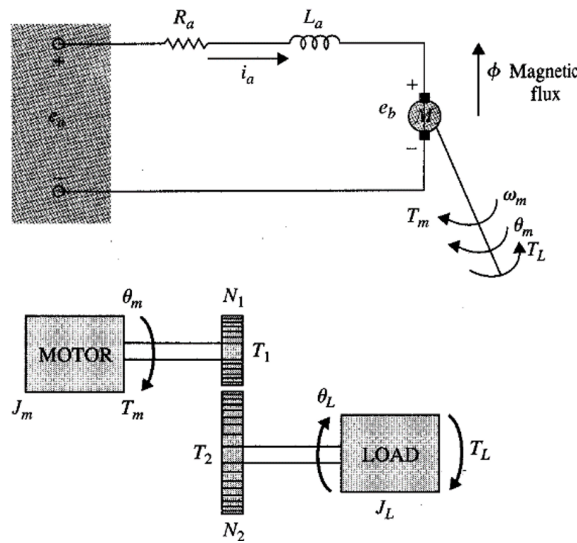


Figure 2.1: Esquema de la planta

Para modelar el sistema, se plantearon las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento del circuito de armadura y la dinámica rotacional del motor y la carga.

Ecuación Eléctrica:

$$e_a - e_b = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \quad (2.1)$$

Ecuaciones Mecánicas:

Para el eje del motor:

$$T_2(t) - B_L \cdot \omega_L(t) = J_L \cdot \frac{d\omega_L(t)}{dt} \quad (2.2)$$

Para el eje de la carga:

$$T_m(t) - B_m \cdot \omega_m(t) - T_1(t) = J_m \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} \quad (2.3)$$

En la ecuación (2.2) se utiliza la relación de transmisión para vincular las velocidades y los torques mediante las expresiones: $\omega_L(t) = \frac{\omega_m(t)}{N}$ y $T_1(t) = \frac{T_2(t)}{N}$. La ecuación resultante se la reemplaza por T_1 en la ecuación (2.3). A continuación, sabiendo que $T_m(t) = K_i i_a(t)$ se reemplaza en la ecuación (2.1).

Finalmente, se sabe que $e_b(t) = K_e \omega_m(t)$ y, definiendo inercia equivalente como $J_{eq} = J_m + \frac{J_l}{N^2}$ y el rozamiento equivalente como $B_{eq} = B_m + \frac{B_l}{N^2}$, la ecuación diferencial resulta ser:

$$e_a - k_e \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{R_a}{k_i} \left(J_{eq} \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_{eq} \frac{d\theta_m}{dt} \right) + \frac{L_a}{k_i} \left(J_{eq} \frac{d^3\theta_m}{dt^3} + B_{eq} \frac{d^2\theta_m}{dt^2} \right) \quad (2.4)$$

A la ecuación diferencial anterior, se le aplica la transformada de Laplace. Asumiendo condiciones iniciales nulas, se llega a la función de transferencia del sistema:

$$\frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{k_i}{Ns((L_a s + R_a)(J_{eq}s + b_{eq}) + k_i k_e)} \quad (2.5)$$

Y siendo los datos del problema:

Nombre	Unidades	Valor
Resistencia de Armadura (R_a)	$[\Omega]$	5
Inductancia de Armadura (L_a)	$[H]$	0.7
Constante del par motor (K_i)	$[Nm/A]$	0.5
Constante de FEM (K_e)	$[Vs/rad]$	0.5
Momento de inercia del Rotor (J_m)	$[kgm^2]$	3
Rozamiento viscoso Rotor-Armadura (B_m)	$[Nms/rad]$	0.01
Relación de la Reducción T2/T1 (N)	$[-]$	1000
Momento de inercia de la carga (J_l)	$[kg^2]$	10000
Rozamiento viscoso de la carga (B_l)	$[Nms/rad]$	30

Table 2.1: Datos del problema 1

Reemplazando, se obtiene:

$$\frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0.0005}{2.107s^3 + 15.06s^2 + 0.3001s} \quad (2.6)$$

Con la función de transferencia definida, se utilizó un script de MATLAB para identificar sus polos y ceros además de generar el diagrama de Bode correspondiente, el cual puede observarse en la figura próxima. La función de transferencia no tiene ceros mientras que tiene polos en 0, -7.1262 y -0.02

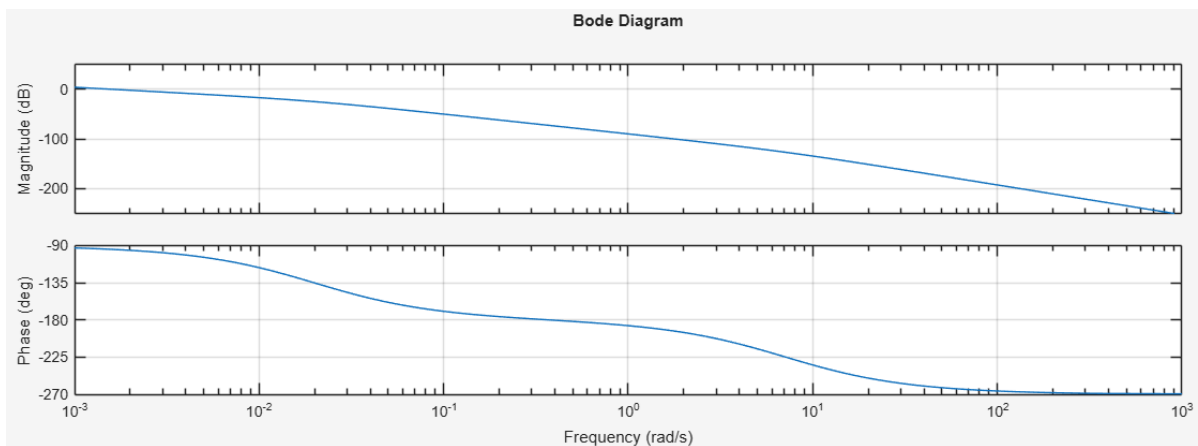


Figure 2.2: Diagrama de Bode

Para la discretización del sistema continuo se tomó como base el Teorema de Muestreo de Nyquist. Para asegurar una reconstrucción fiel y capturar adecuadamente la dinámica del sistema, se usa una

consideración práctica que consiste en trabajar con una frecuencia de muestreo entre 10 y 20 veces del ancho de banda del sistema.

Al intentar determinar el ancho de banda de la planta mediante la función *bandwidth* de MATLAB, se encontró que el resultado es indefinido. Esto se debe a que la función de transferencia del motor posee un polo en el origen, que actúa como un integrador. Su presencia provoca que la ganancia del sistema en frecuencia cero sea infinita.

En su defecto, se optó por una métrica alternativa que también caracteriza la respuesta en frecuencia del sistema: la frecuencia de cruce de ganancia ω_{gc} , que es aquella para la cual la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema es igual a 1 (o 0 dB). Físicamente, representa el límite a partir del cual el sistema comienza a atenuar las señales de entrada. Dicho valor se obtiene con la función *margin* de MATLAB sobre la transferencia definida.

A partir de este valor, se aplicó la regla práctica, seleccionando una frecuencia de muestreo 15 veces superior: $f_s = 15 \cdot \omega_{gc}/2\pi$. Luego, el período de muestreo $T=1/f_s$

Para prevenir el fenómeno de aliasing se requiere de un filtro anti-alias antes del conversor analógico-digital. Dados los parámetros calculados para el sistema, tal como se reporta en la siguiente tabla, un filtro pasa-bajos de primer orden se considera suficiente para esta aplicación. La frecuencia de corte f_c es tal que debe cumplir: $f_c \leq f_s/2$. La función de transferencia de este filtro es: $H(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$ con $\omega_c = 2\pi f_c$. Al establecer la frecuencia de corte en el límite de Nyquist se asegura atenuar las componentes de alta frecuencia que podrían contaminar la señal muestreada, garantizando la integridad de los datos que ingresan al sistema de control digital.

Del código de MATLAB se tienen los siguientes valores:

ω_c (rad/s)	f_c (Hz)	ω_{cg} (rad/s)	$f_s/2$ (Hz)	T (s)
2.8305	0.4505	0.3774	0.4505	1.1098

Table 2.2: Valores de interés para el muestreo

Determinado el período de muestreo, por medio de la función *c2d* se convierte la función de transferencia continua a su equivalente discreta. Para realizar esta conversión, se asume el uso de un Zero Order Hold (ZOH) a la entrada de la planta analógica. La expresión resulta ser:

$$\frac{\theta_L(z)}{E_a(z)} = \frac{1.587e^{-05}z^2 + 2.404e^{-05}z + 6.336e^{-07}}{z^3 - 1.978z^2 + 0.9788z - 0.0003594} \quad (2.7)$$

A continuación, se generó el mapa de polos y ceros de la función de transferencia discreta obtenida.

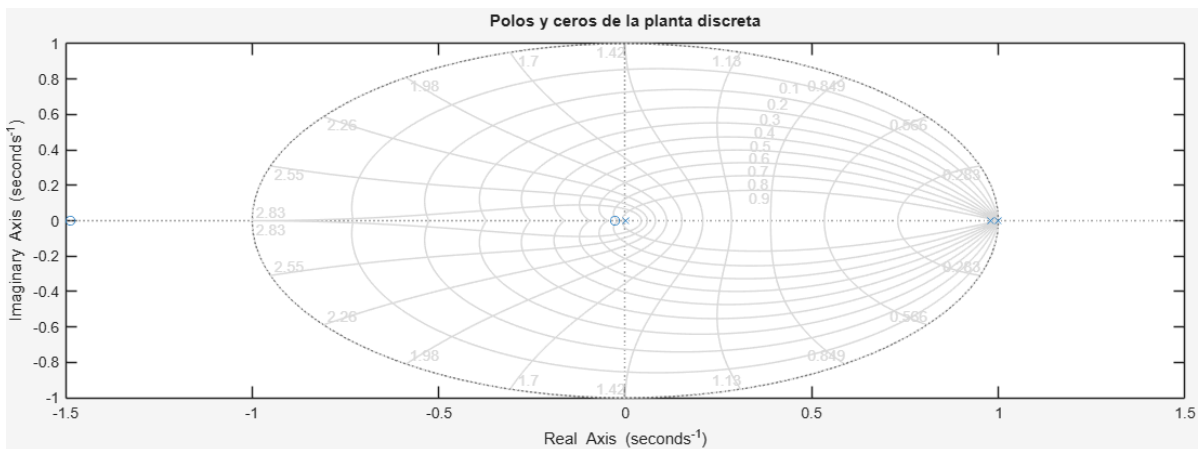


Figure 2.3: Mapa de polos de la transferencia discreta

Para verificar el correcto proceso de discretización, se toma como base la relación matemática que mapea los polos del plano S (continuo) al plano Z (discreto), la cual, es: $z=e^{sT}$. A continuación, se muestra la lista de polos discretos aplicando la fórmula previa y se puede observar que los polos coinciden con los calculados anteriormente con la función pole de MATLAB.

Polos función pole	Polos e^{st}
1	1
0.9781	0.9781
0.0004	0.0004

Table 2.3: Comparación de valores de los polos.

A continuación se presenta el gráfico de respuesta al escalón y al impulso.

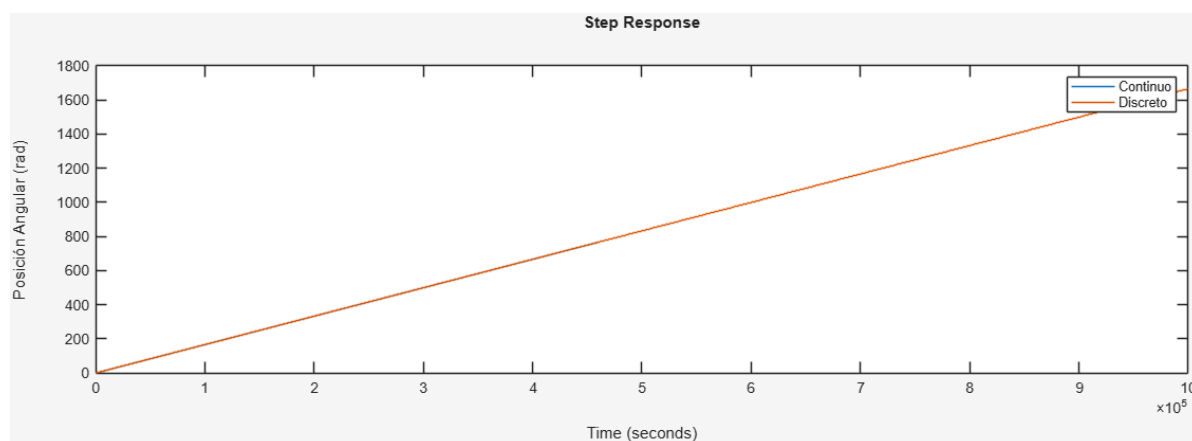


Figure 2.4: Respuesta al escalón

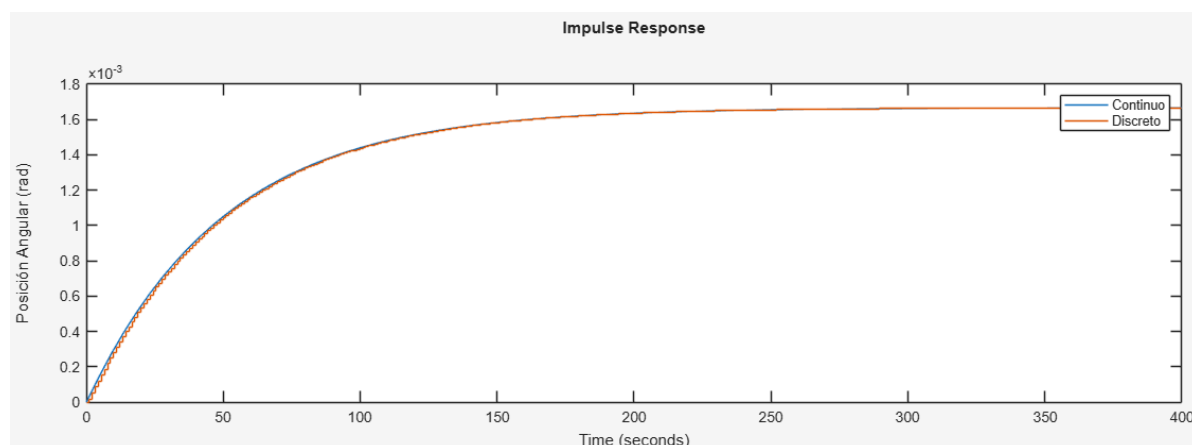


Figure 2.5: Respuesta al impulso

Al analizar la respuesta al escalón se simula la aplicación de una tensión de entrada constante al motor y la evolución de su posición angular a lo largo del tiempo. La salida del sistema, la posición angular, es una rampa con pendiente constante, aumentando de manera lineal e indefinida.

Este comportamiento es consecuencia del polo en $z=1$ lo que significa que el sistema se comporta como un integrador puro. Al aplicarle una entrada constante a un sistema integrador, su salida es, por definición, una rampa. Este resultado no solo coincide con la simulación, sino que también confirma la

validez del modelo matemático, ya que este comportamiento podría predecirse con solo identificar los polos.

Al analizar la respuesta al impulso se simula la aplicación de un pulso de energía muy corto y de gran amplitud. La posición del motor evoluciona hasta alcanzar un valor final constante, donde permanece indefinidamente sin retornar a cero.

Este comportamiento también se relaciona con el polo en $z=1$ ya que la salida no depende únicamente de la entrada actual, sino que acumula el efecto de las entradas pasadas. El integrador lo absorbe y lo convierte en un cambio permanente en la posición, que se mantiene indefinidamente. A diferencia de un sistema estable, que disiparía la energía y volvería a su posición de reposo, este sistema la retiene.

Además, la forma con la que la curva de respuesta alcanza su valor final está determinada por los otros polos estables del sistema. En particular, la presencia de un polo dominante cercano a $z=1$ indica una respuesta suave, lo cual concuerda con lo observado en la simulación.

Ambas respuestas ofrecen información valiosa y consistente sobre la dinámica del sistema. Sin embargo, para esta planta, la respuesta al escalón tiene una interpretación física más directa e intuitiva.

A continuación se presentan las simulaciones de la planta en Simulink:

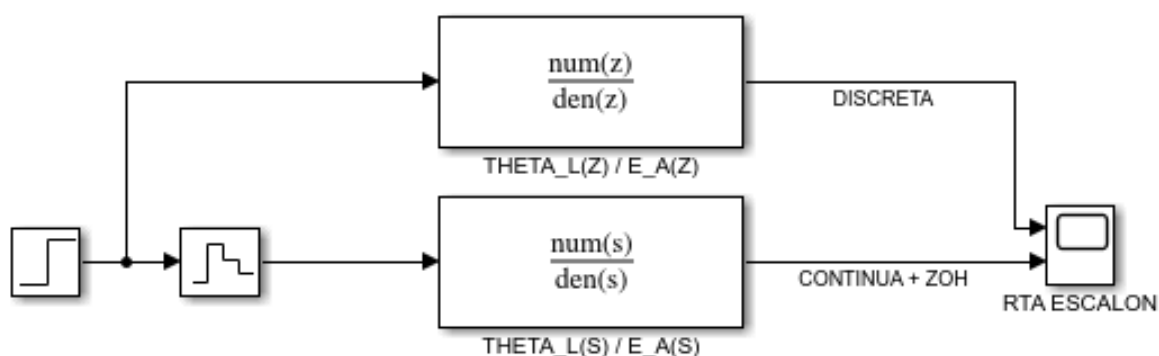


Figure 2.6: Modelo de bloques en Simulink: Caso escalón

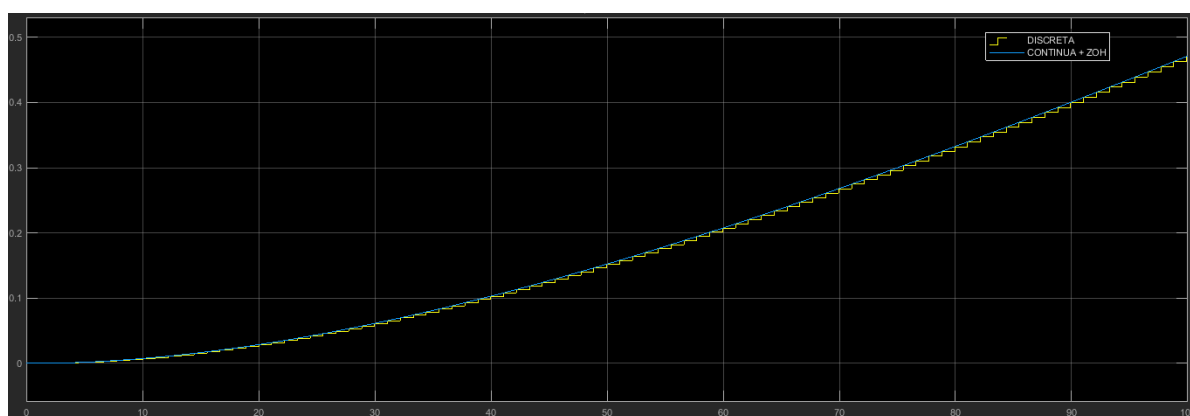


Figure 2.7: Respuestas al escalón (El eje vertical es amplitud en rad y el horizontal es el tiempo en segundos)

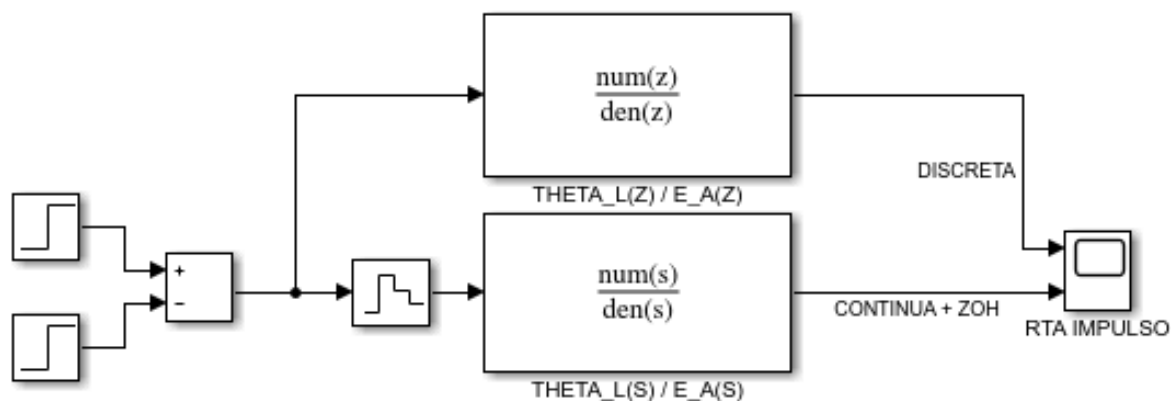


Figure 2.8: Modelo de bloques en Simulink: Caso impulso



Figure 2.9: Respuestas al impulso (El eje vertical es amplitud en rad y el horizontal es el tiempo en segundos)

Al comparar los resultados de Simulink con las respuestas al escalón y al impulso generadas previamente, se observa una correspondencia prácticamente perfecta, lo que valida tanto el modelo matemático obtenido como el proceso de discretización realizado.

En la respuesta al escalón se replica fielmente la respuesta en forma de rampa vista confirmando así el comportamiento integrador del sistema. De manera análoga, la respuesta al impulso muestra cómo la posición angular alcanza un valor constante final, también como consecuencia del polo integrador, y esto es validado por la simulación.

Cabe destacar que para la implementación de las funciones de transferencia en los bloques de Simulink, se utilizaron valores numéricos con la mayor precisión posible, más allá de la cantidad de decimales presentada en las ecuaciones (2.6) y (2.7). Esto es crucial, ya que al trabajar con los valores truncados, el polo $z=1$ no era observable debido a errores de redondeo. Como resultado, los gráficos de respuesta habrían sido incorrectos. La versión truncada se incluyó en el informe únicamente por razones de claridad y prolijidad en la presentación.

Se destaca además que para generar el impulso se usaron dos bloques tipo step de idénticos parámetros pero con un retardo temporal muy pequeño en el bloque que ingresa al negativo del bloque sumador. Se procedió de esta manera debido a la ausencia de un bloque impulse en Simulink.

2.2. Práctica 4: Levitación magnética

Este sistema consiste en una bola de acero que levita a una distancia y por debajo de un electroimán. La entrada de interés es la tensión e mientras que la salida de interés es la distancia y .

El sistema se encuentra esquematizado en la siguiente figura:

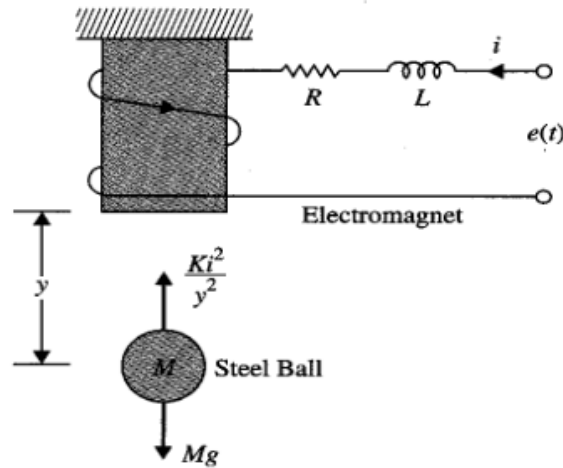


Figure 2.10: Esquema de la planta

Inicialmente, se plantea la ecuación de Newton para la bolita y la ecuación eléctrica para la bobina:

$$mg - f(t) = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2.8)$$

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.9)$$

Donde $f(t) = k^2 \frac{i^2(t)}{y^2(t)}$

En primer lugar, es necesario linealizar la ecuación (2.6). Para ello, se escoge un punto de equilibrio a partir del cual va a funcionar el sistema. Esto es, se supone una intensidad $i(t) = i_0$ que permite ejercer a la bobina una fuerza $f(t) = f_0 = mg$ tal que mantenga la bola suspendida a una distancia $y(t) = y_0$.

Si a partir de este punto de equilibrio se produce un pequeño incremento en la intensidad que recorre la bobina, se produce en consecuencia pequeños incrementos tanto de la fuerza ejercida por el electroimán como en la posición de la bola. Esto significa que: $i(t) = i_0 + \Delta i(t)$; $f(t) = f_0 + \Delta f(t)$; $y(t) = y_0 + \Delta y(t)$

A continuación se hace un desarrollo en serie de Taylor y despreciando los términos que sean incrementos al cuadrado se llega a que: $\Delta f(t) = K_i \Delta i(t) - K_x \Delta y(t)$. Siendo $K_i = \frac{2K_f i_0}{y_0^2}$ y $K_x = \frac{2K_f i_0^2}{y_0^3}$. Aquí ya se puede armar la ecuación diferencial que representa la dinámica del sistema a partir del punto de equilibrio:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = K_x y(t) - K_i i(t) \quad (2.10)$$

La ecuación anterior se reemplaza en (2.9) para finalmente llegar a la ecuación diferencial del sistema:

$$e = \frac{R}{K_i} \left(K_x y(t) - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + \frac{L}{K_i} \left(K_x \frac{dy}{dt} - m \frac{d^3 y}{dt^3} \right) \quad (2.11)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior y suponiendo las condiciones iniciales nulas, se obtiene la función de transferencia deseada:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = -\frac{K_i}{(ms^2 - K_x)(Ls + R)} \quad (2.12)$$

Y con los datos del problema:

Nombre	Unidades	Valor
Resistencia del bobinado (R)	$[\Omega]$	2
Inductancia del bobinado (L)	$[H]$	0.04
Masa de la bolita (m)	$[kg]$	0.5
Gravedad (g)	$[m/s^2]$	9.8
Constante de acople magnético (k)	$[Nm^2/A^2]$	8
Distancia deseada (y0)	$[m]$	0.005

Table 2.4: Datos del Problema 4

Reemplazando, se obtiene:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{-2504}{0.02s^3 + s^2 - 78.4s - 3920} \quad (2.13)$$

Con un script de MATLAB se identifican polos y ceros y se genera el diagrama de Bode correspondiente como se observa en la siguiente figura. La función no tiene ceros mientras que los polos son 62.6099, -62.6099 y -50.

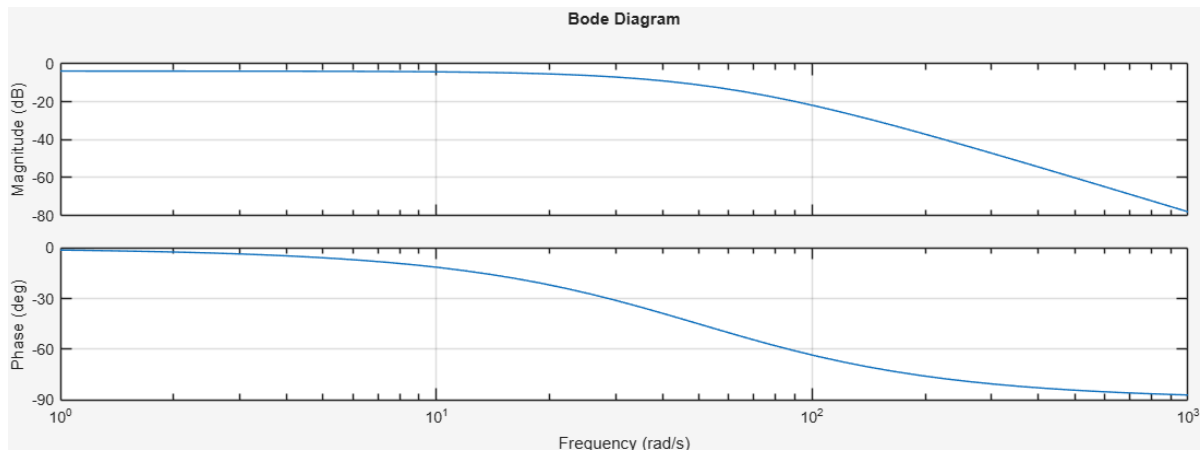


Figure 2.11: Diagrama de Bode

Nuevamente, con el mismo procedimiento explicado anteriormente se calcula el período de muestreo. En esta ocasión, se pudo usar la función *bandwidth* para obtener w_{bw} y con las mismas ecuaciones previas, se calcularon los valores presentados en la siguiente tabla. Al igual que en el ejercicio 1, se eligió un filtro anti-alias pasa-bajos de primer orden. Si bien representa una solución simple con una atenuación que podría resultar insuficiente en un entorno con ruido de alta frecuencia, para la validación del modelo discretizado en esta simulación, se considera una aproximación adecuada.

ω_c (rad/s)	f_c (Hz)	ω_{cg} (rad/s)	$f_s/2$ (Hz)	T (s)
219.6622	34.9603	29.2882	34.9603	0.0143

Table 2.5: Valores de interés para el muestreo.

Sabiendo el período de muestreo, nuevamente con *c2d* se convierte la función de transferencia continua a su equivalente discreta al igual que para el ejercicio 1. La expresión resulta ser:

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{-0.05376z^2 - 0.1884z - 0.03745}{z^3 - 3.346z^2 + 2.397z - 0.4891} \quad (2.14)$$

El mapa de polos y ceros de la función de transferencia discreta en esta oportunidad resulta ser:

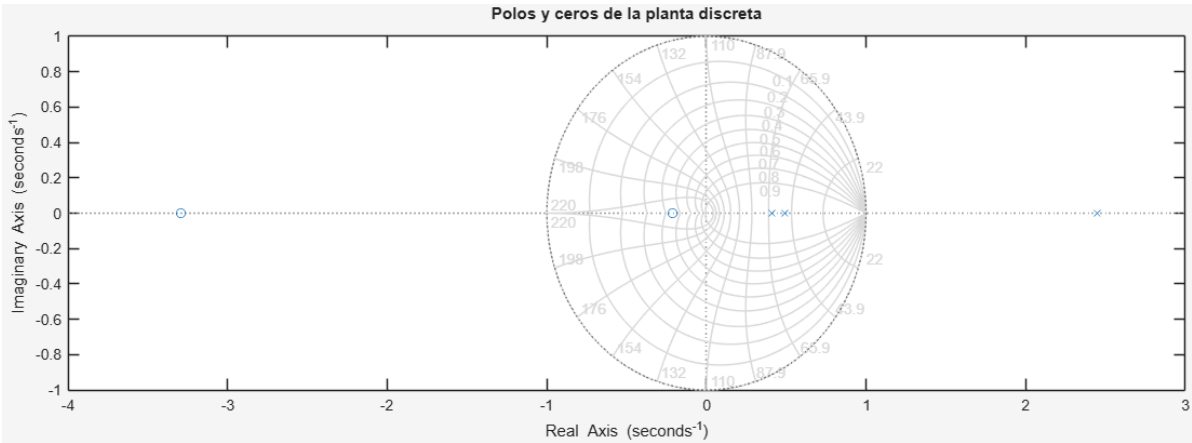


Figure 2.12: Mapa de polos de la transferencia discreta.

Por medio de la misma verificación hecha en el problema 1 la comparación de polos:

Polos función pole	Polos e^{st}
2.4484	2.4484
0.4891	0.4891
0.4084	0.4084

Table 2.6: Comparación de polos discretos

A continuación se presentan los gráficos de respuesta al escalón e impulso.

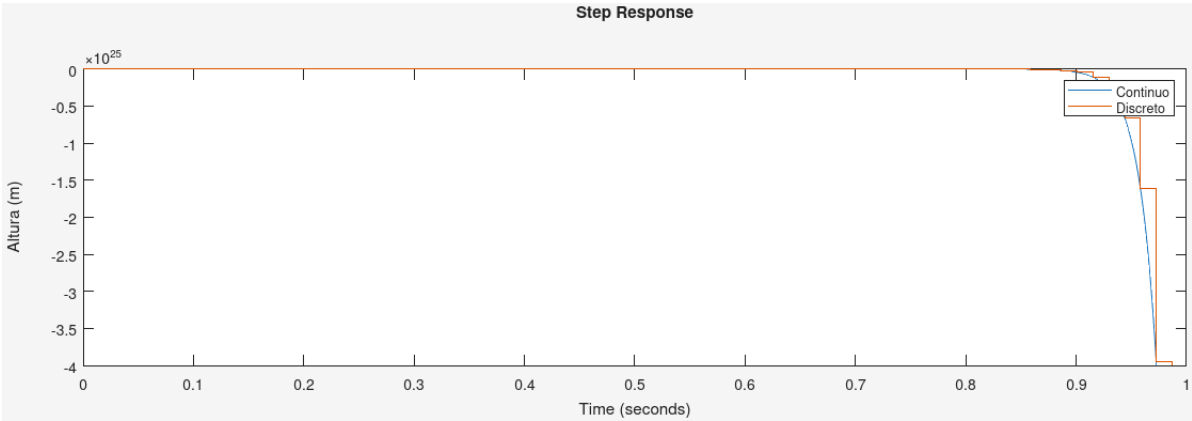


Figure 2.13: Respuesta al escalón.

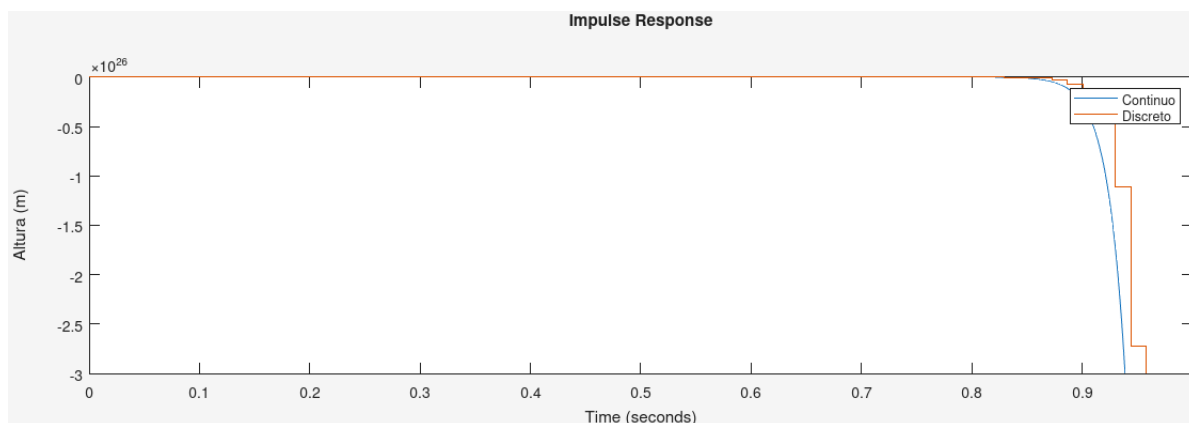


Figure 2.14: Respuesta al impulso.

Tanto la respuesta al impulso como la del escalón muestran un comportamiento divergente ya que la salida del sistema crece de forma descontrolada hasta alcanzar valores extremadamente altos en un tiempo inferior a 1 segundo.

Este comportamiento se relaciona directamente con el polo inestable presente en el semiplano derecho. En el dominio del tiempo, este polo introduce un término de la forma $e^{62.61t}$ que, sin importar la entrada, crecerá indefinidamente con el tiempo. Este término es el que domina completamente la respuesta causando la inestabilidad observada en los gráficos. La contribución a la respuesta de parte de los otros dos polos se extinguen rápidamente y su efecto se ve opacado por la presencia del polo en el semiplano derecho.

Los gráficos de respuesta al impulso y al escalón permiten mostrar de manera experimental lo que el análisis de polos predice teóricamente. La presencia de un único polo en el semiplano derecho es suficiente para que el sistema sea inestable. La salida divergerá exponencialmente para cualquier entrada acotada, lo que pone de manifiesto la imposibilidad de mantener la bola en levitación sin un sistema de control en lazo cerrado.

A continuación se presentan las simulaciones de la planta en Simulink:

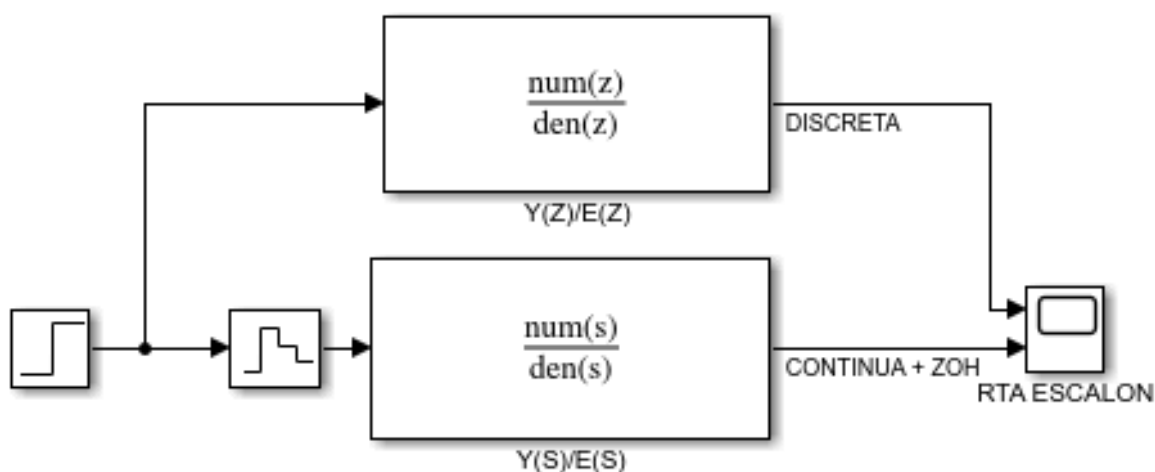


Figure 2.15: Modelo de bloques en Simulink: Caso escalón.



Figure 2.16: Respuestas al escalón (El eje vertical es altura en m y el horizontal es el tiempo en segundos)

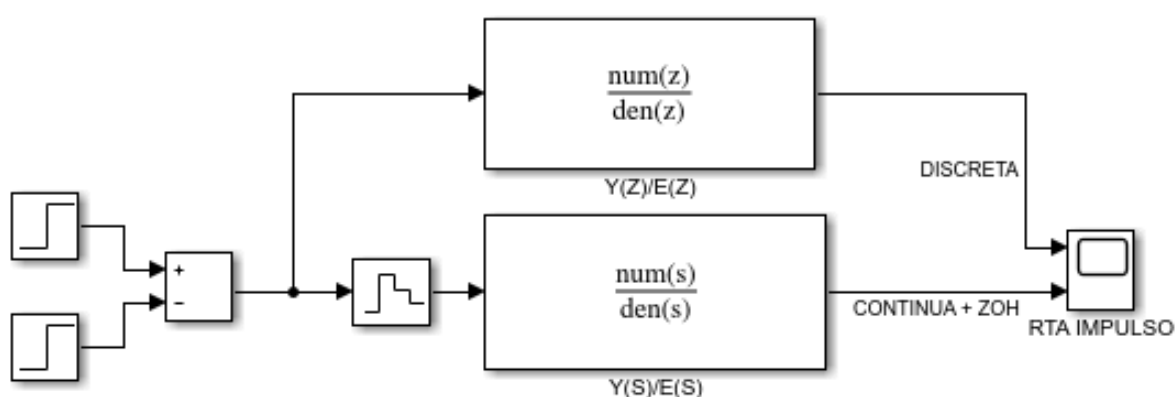


Figure 2.17: Modelo de bloques en Simulink: Caso impulso.



Figure 2.18: Respuestas al impulso ((El eje vertical es altura en m y el horizontal es el tiempo en segundos))

De estos gráficos se observa como las respectivas respuestas demuestran un comportamiento divergente validando las predicciones teóricas basadas en el análisis de polos. Esto refleja la imposibilidad de mantener la bola en una posición de levitación estable sin la implementación de un sistema de control en lazo cerrado.

A continuación, se simula la planta no lineal:

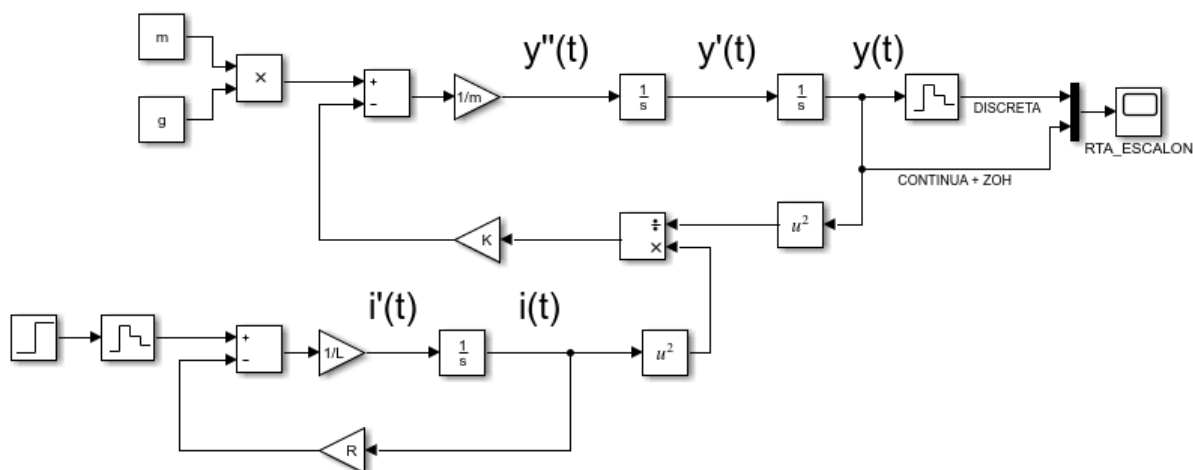


Figure 2.19: Modelo de bloques en Simulink (no lineal): Caso escalón.

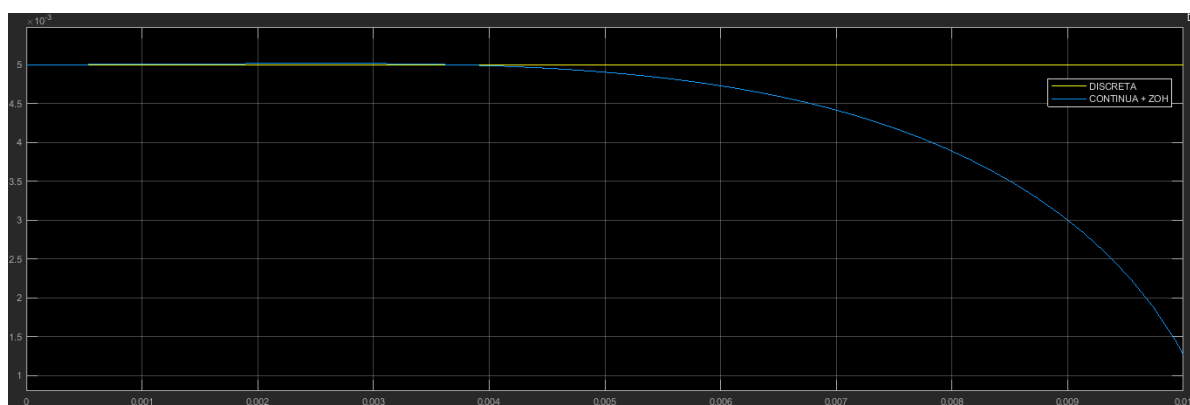


Figure 2.20: Planta no lineal con escalón a la entrada para un tiempo de simulación 0.1s ((El eje vertical es altura en m y el horizontal es el tiempo en segundos)

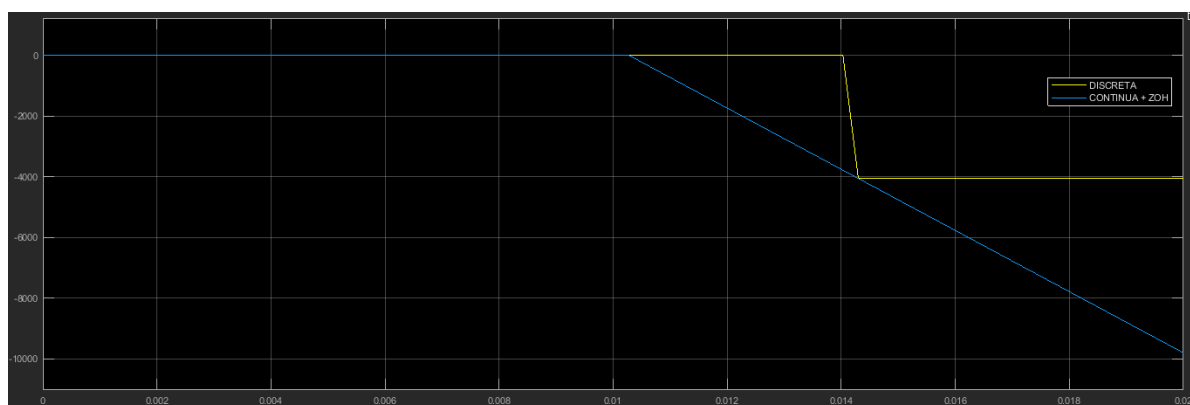


Figure 2.21: Planta no lineal con escalón a la entrada para un tiempo de simulación 0.2s ((El eje vertical es altura en m y el horizontal es el tiempo en segundos)

Los resultados de la simulación de la planta no lineal con una entrada escalón muestran la marcada inestabilidad del sistema. El origen de este comportamiento está en la fuerza electromagnética, inversamente proporcional a y^2 . Al iniciar la simulación, cualquier pequeña perturbación hace que la bola se aleje de su punto de equilibrio.

Si la bola se mueve hacia arriba, $y(t)$ disminuye y tiende a cero, por ende la fuerza tiende al infinito. El solver de Simulink intenta representar esta divergencia reduciendo progresivamente el paso de integración, hasta que la variación es tan violenta que ya no puede garantizar la precisión y emite un warning. En particular, la falla ocurre para $t = 0.01027s$. Este tiempo resulta ser menor al período T calculado. La planta es tan velozmente inestable que puede fallar incluso antes de que un controlador digital tenga tiempo de tomar su primera muestra y actuar. Sin embargo, esto no invalida dicho período, sino más bien, justifica la necesidad de un control de respuesta muy rápido.

Al repetir la simulación con una entrada impulso, la inestabilidad se presentó aún más temprano. Concretamente, para $t = 0.00219s$. Esto es lógico ya que un impulso de tensión es un pulso muy grande y corto. Esto provoca un aumento casi instantáneo y muy brusco de la corriente $i(t)$. Como la fuerza es proporcional a $i(t)^2$, esta fuerza se vuelve inmensa de forma casi inmediata, provocando que la bolita se acelere violentamente hacia el imán y choque en un tiempo mucho más corto. En contraste, por medio de un escalón de tensión, la inductancia de la bobina modera el crecimiento inicial de la corriente, retrasando ligeramente la “explosión” de la dinámica.

Conclusiones y Observaciones Pertinentes

En este trabajo se realizó con éxito el modelado, discretización y simulación del sistema del motor de CC y de levitación magnética. El motor, por la presencia de un integrador, resulta marginalmente estable, pero su posición puede controlarse adecuadamente. En cambio, el sistema de levitación es inestable y requiere un control en lazo cerrado para funcionar. Esto plantea exigencias significativas sobre la velocidad y capacidad de respuesta del controlador.

El análisis de polos y ceros demostró ser una herramienta predictiva fundamental para anticipar con certeza el comportamiento para ser posteriormente validado mediante las simulaciones. En cuanto a la elección del período de muestreo, en el caso del motor se debió recurrir a un método alternativo lo que remarca la necesidad de comprender las particularidades de cada sistema.

Asimismo, la excelente correspondencia entre las respuestas de los modelos continuos con ZOH y los modelos discretos obtenidos matemáticamente valida el método de discretización empleado. Finalmente, se resalta la presencia del filtro anti-alias como elemento clave para la correcta adquisición de datos en un sistema de control digital.

Bibliography

Ogata. (1995). Discrete-Time control Systems (2nd ed.). Capítulos 1-3