

# Trabajo Práctico 3

Modelado en VE y discretización.

22.94 - Control Discreto

Tomás Martín Torea y Sofía Yanes Sanchez

# Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Método, desarrollo y resultados</b>  | <b>2</b>  |
| 2.1      | Práctica 1: Motor de corriente continua . . . . .                                 | 2         |
| 2.1.1    | Representación por Variable de Estado a partir de la transferencia . . . . .      | 2         |
| 2.1.2    | Representación por Variable de Estado con variables físicas del sistema. . . . .  | 3         |
| 2.1.3    | Comparación de los modelos continuos . . . . .                                    | 4         |
| 2.1.4    | Comparación de los modelos discretos . . . . .                                    | 5         |
| 2.2      | Práctica 4: Levitación magnética . . . . .  | 8         |
| 2.2.1    | Representación por Variable de Estado a partir de la transferencia . . . . .      | 8         |
| 2.2.2    | Representación por Variable de Estado con variables físicas del sistema . . . . . | 9         |
| 2.2.3    | Comparación de los modelos continuos . . . . .                                    | 9         |
| 2.2.4    | Comparación de los modelos discretos . . . . .                                    | 11        |
| <b>3</b> | <b>Conclusiones y Observaciones Pertinentes</b>                                   | <b>14</b> |

# 1

## Introducción

Este trabajo aborda el modelado y discretización de dos sistemas físicos previamente desarrollados: un motor de corriente continua con carga y un sistema de levitación magnética compuesto por una esfera y un electroimán. El objetivo principal es analizar y comparar la equivalencia de distintos modelos matemáticos para describir el comportamiento de estas plantas.

Para ello, se obtendrán dos modelos en la representación en Variables de Estado (VE). El primero, se deriva a partir de las funciones de transferencia continua y discreta de cada sistema. Para el segundo, se seleccionan como variables de estado aquellas magnitudes físicas reales y medibles del sistema. Este modelo continuo es luego discretizado empleando un Zero Order Hold (ZOH).

Finalmente, se llevará a cabo una comparación exhaustiva mediante simulación, evaluando el comportamiento de los modelos obtenidos junto con la función de transferencia original. Esto permitirá validar la equivalencia de las distintas representaciones para describir la dinámica del sistema, así como analizar las posibles discrepancias y las ventajas conceptuales de cada enfoque.

# 2

## Método, desarrollo y resultados

### 2.1. Práctica 1: Motor de corriente continua

Del trabajo TP01, la ecuación diferencial para el problema resultó:

$$e_a - k_e \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{R_a}{k_i} \left( J_{eq} \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_{eq} \frac{d\theta_m}{dt} \right) + \frac{L_a}{k_i} \left( J_{eq} \frac{d^3\theta_m}{dt^3} + B_{eq} \frac{d^2\theta_m}{dt^2} \right) \quad (2.1)$$

La transferencia continua para este problema resultó:

$$\frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0.0005}{2.107s^3 + 15.06s^2 + 0.3001s} \quad (2.2)$$

La misma presenta polos en 0, -0.02 y -7.1262. Mientras que la transferencia discreta:

$$\frac{\theta_L(z)}{E_a(z)} = \frac{1.587e^{-05}z^2 + 2.404e^{-05}z + 6.336e^{-07}}{z^3 - 1.978z^2 + 0.9788z - 0.0003594} \quad (2.3)$$

La misma tiene sus polos en: 1, 0.9781 y 0.0004. Además el período de muestreo es de  $T = 1.1098s$ .

#### 2.1.1. Representación por Variable de Estado a partir de la transferencia

A partir de la transferencia continua deducida, en primer lugar se normaliza el coeficiente principal del denominador para llevarlo a un valor unitario. Luego, es posible reescribir la función de transferencia asociada como:

$$\ddot{\theta}_L + 7.1476 \dot{\theta}_L + 0.1424 \theta_L = 0.0002373 e_a.$$

Definiendo los estados como la salida y sus derivadas:

$$x_1 = \theta_L$$

$$x_2 = \dot{\theta}_L$$

$$x_3 = \ddot{\theta}_L$$

Por lo que las ecuaciones de estado son:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -7.1476x_3 - 0.1424x_2 + 0.0002373e_a$$

Y tomando como ecuación de salida:

$$y = \theta_L = x_1$$

Con ello, se pueden determinar las matrices A, B, C y D del sistema continuo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1424 & -7.1461 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0002373 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0 \ 0) \quad D = (0)$$

Partiendo de la transferencia discreta, se optó por escribirla en la forma canónica controlable. La transferencia se expresa como se muestra en la figura 2.1 y a partir de allí, las matrices pedidas se pueden llenar fácilmente según lo mostrado en la figura 2.2.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

Figure 2.1: Coeficientes del polinomio para obtener la forma canónica controlable.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 : b_{n-1} - a_{n-1} b_0 : \dots : b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

Figure 2.2: Armado del modelo según los coeficientes de la figura 2.1

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0004 & -0.9788 & 1.9784 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Cd = (6.336e-7 \ 2.4044e-5 \ 1.587e-5) \quad Dd = (0)$$

### 2.1.2. Representación por Variable de Estado con variables físicas del sistema.

La estrategia para este caso, es trabajar con las ecuaciones fundamentales del sistema. Para el caso del motor de continua, se tenía una mecánica y una eléctrica. La combinación de ambas es la que permitió obtener la ecuación diferencial presentada al inicio de la práctica 1. Del TP01, las ecuaciones fundamentales resultaron:

$$e_a - e_b = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \tag{2.4}$$

$$K_i i_a = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_{eq} \omega_m(t) \quad (2.5)$$

Con ello, se eligen los siguientes estados:

$$x_1 = \theta_m$$

$$x_2 = \omega_m$$

$$x_3 = i_a$$

Las ecuaciones de estado quedan escritas de la siguiente manera:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_m = \omega_m = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\omega}_m = \frac{1}{J_{eq}}(K_i i_a - B_{eq} \omega_m) = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} x_2 + \frac{K_i}{J_{eq}} x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a}(e_a - R_a i_a - e_b) = \frac{1}{L_a}(e_a - R_a i_a - K_e \omega_m) = -\frac{K_e}{L_a} x_2 - \frac{R_a}{L_a} x_3 + \frac{1}{L_a} e_a$$

Con las ecuaciones definidas, recordando que la salida de interés es la posición angular de la carga y usando los mismos datos que el TP01, las matrices A, B, C y D resultan:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_i}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.00333 & 0.1661 \\ 0 & -0.7143 & -7.1428 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.4286 \end{pmatrix}$$

$$C = \left( \begin{matrix} \frac{1}{N} & 0 & 0 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = (0)$$

Por medio de la función c2d de MATLAB, se pueden transformar las matrices halladas para el sistema continuo en su versión discreta. De la ejecución del código, se obtiene:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1.0998 & 0.0224 \\ 0 & 0.9804 & 0.0229 \\ 0 & -0.0983 & -0.0019 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0.0159 \\ 0.0320 \\ 0.1972 \end{pmatrix}$$

$$Cd = (0.001 \quad 0 \quad 0) \quad Dd = (0)$$

### 2.1.3. Comparación de los modelos continuos

A continuación, se muestra el diagrama en bloques implementado en SIMULINK:

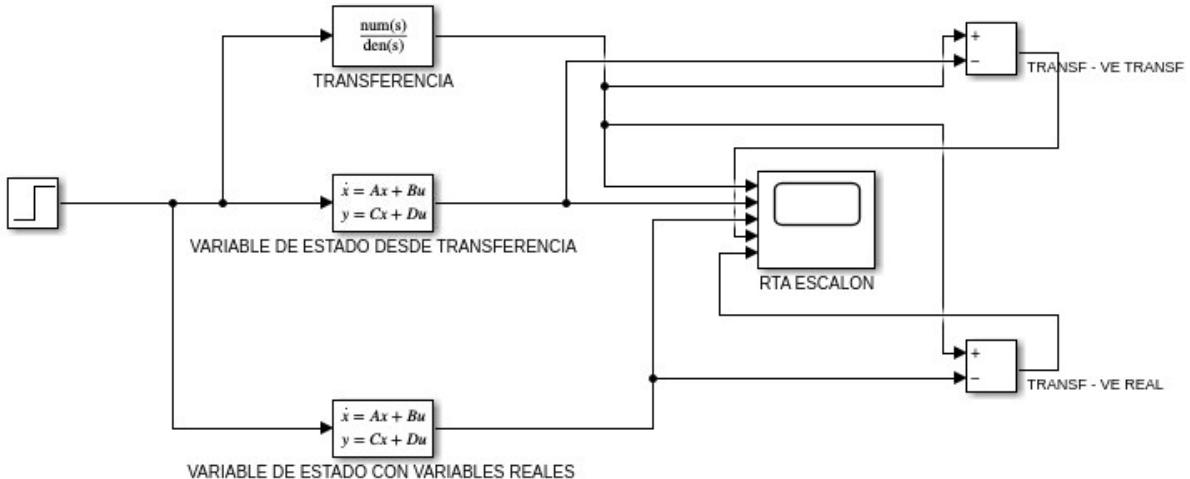


Figure 2.3: Bloques simulink: Modelos continuos

Se adjuntan también los gráficos comparativos entre los tres modelos continuos: La función de transferencia original, el VE deducido de la transferencia, y el VE con variables físicas reales. Adicionalmente, se incluyen los gráficos del error entre la función de transferencia original y la de cada uno de los modelos en VE.

En todos los casos, el eje vertical corresponde a la posición angular de la carga  $\theta_L$  medida en radianes y el eje horizontal es el tiempo en segundos. La entrada del sistema es 1 Volt en el instante inicial  $t=0$ .

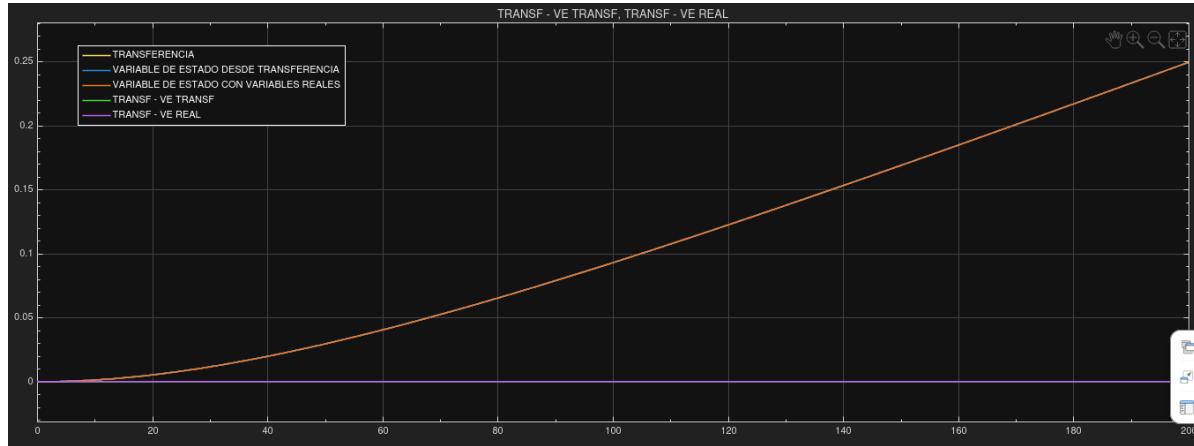


Figure 2.4: Comportamiento de la transferencia y los modelos en variables de estados continuos.

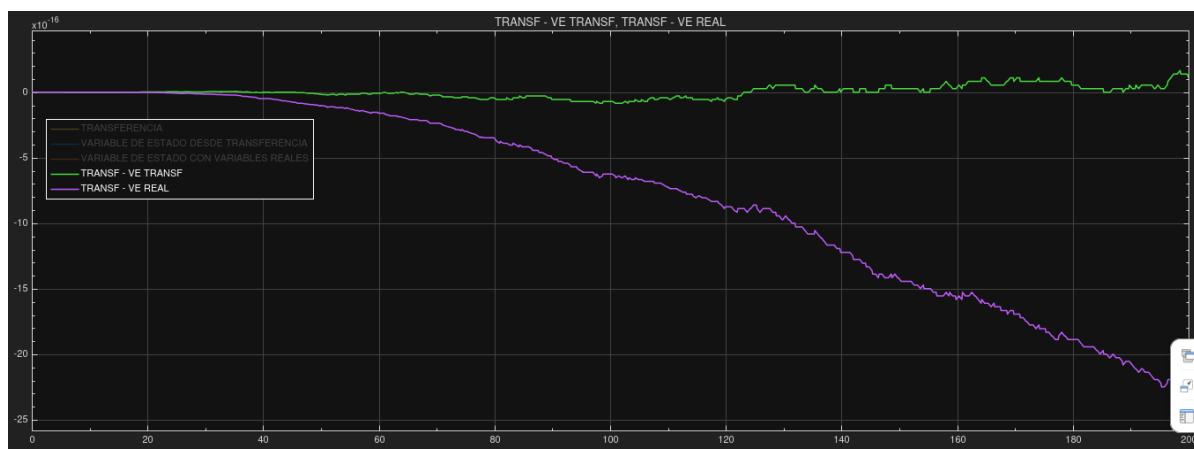


Figure 2.5: Comportamiento de los errores de los modelos continuos.

La simulación permite validar que los tres modelos continuos son representaciones equivalentes de la dinámica del sistema. Los modelos de variables de estado son una representación fiel de la transferencia original. Esto puede observarse a partir de la superposición prácticamente idéntica de las curvas en la figura 2.4. Además, si se observa la figura 2.5, el error se encuentra en el orden de  $10^{-16}$ . Teóricamente, su diferencia debería ser cero. El pequeño error que se observa no se debe a una diferencia en los modelos, sino a los límites de la precisión numérica de la computadora.

#### 2.1.4. Comparación de los modelos discretos

A continuación, se muestra el diagrama en bloques implementado

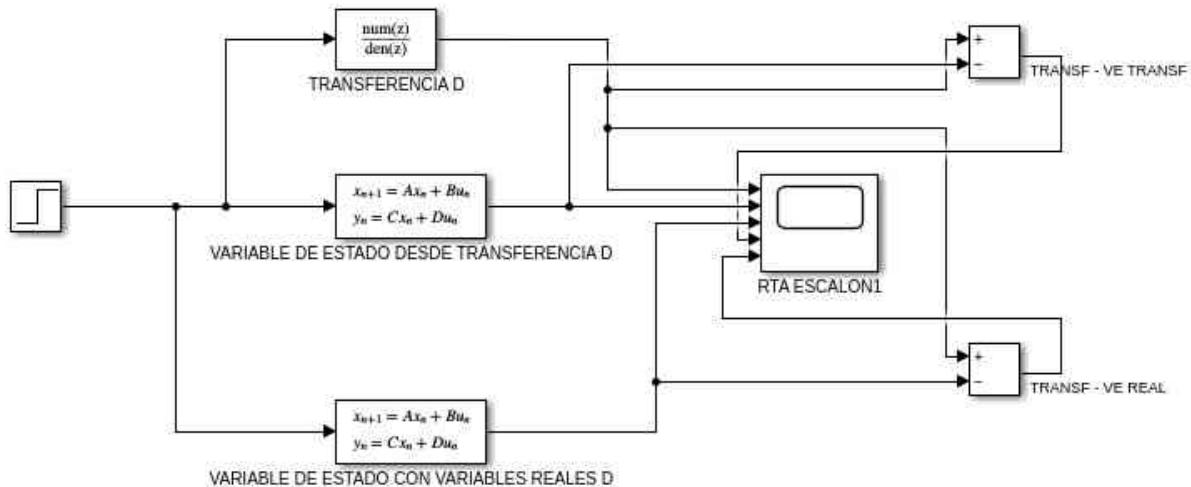


Figure 2.6: Bloques simulink: Modelos discretos.

Se adjuntan también los gráficos comparativos, de manera análoga al caso del modelo continuo. Nuevamente, en todos los gráficos, el eje vertical corresponde a la posición angular de la carga  $\theta_L$  medida en radianes y el eje horizontal es el tiempo en segundos. Además, se usó la misma entrada al sistema que la anterior.

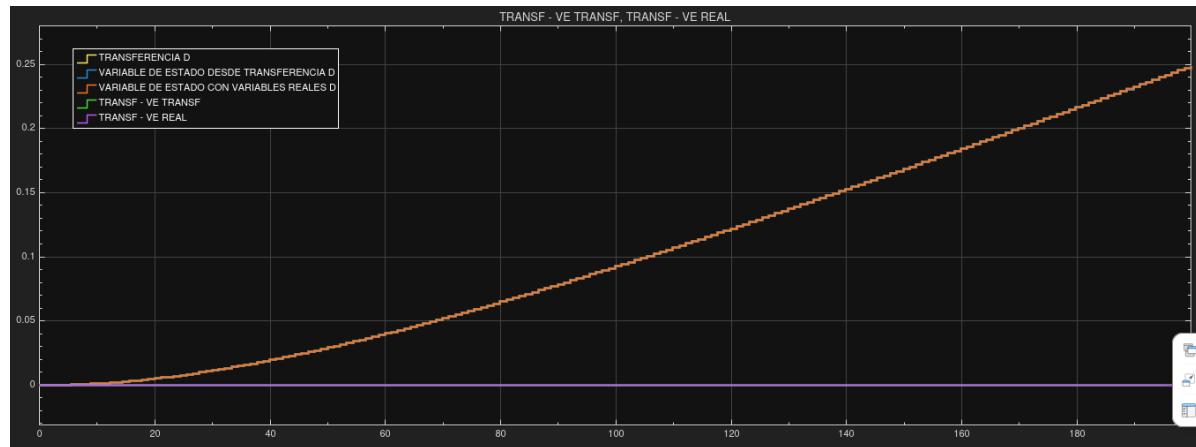


Figure 2.7: Comportamiento de la transferencia y los modelos en variables de estados discretos.

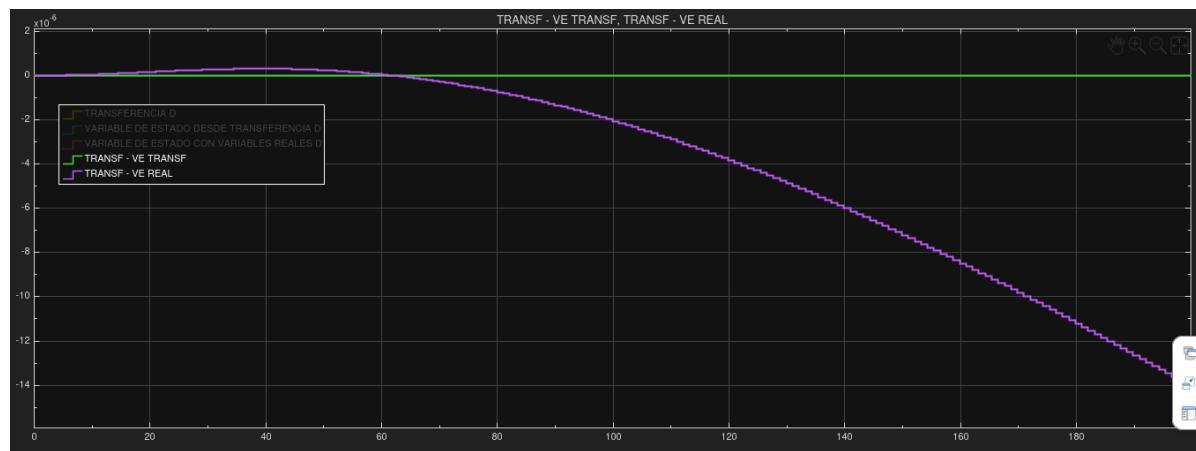


Figure 2.8: Comportamiento de los errores de los modelos discretos I

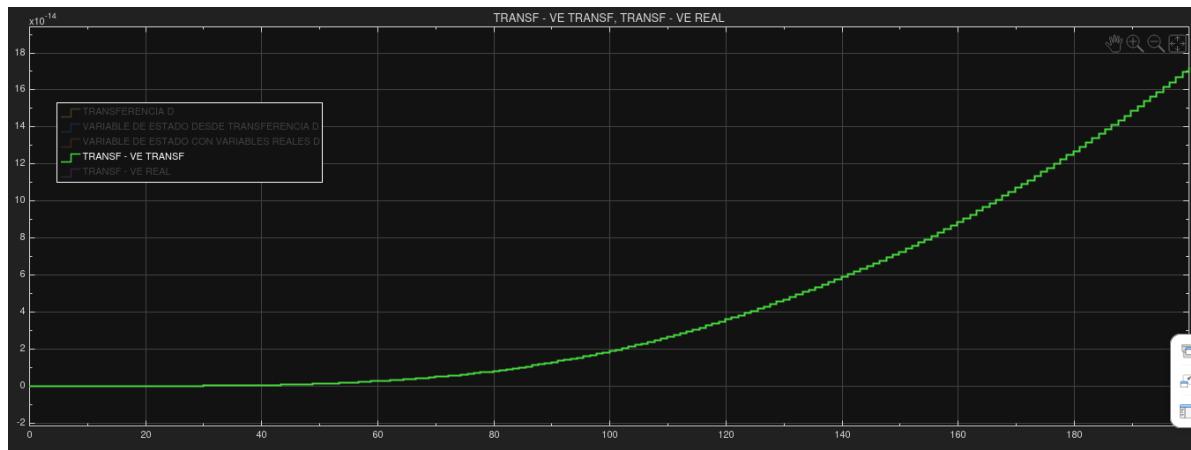


Figure 2.9: Comportamiento de los errores de los modelos discretos II

De la figura 2.7, se observa que los tres modelos discretos presentan respuestas prácticamente superpuestas, lo que evidencia su equivalencia y fiabilidad. La diferencia entre ellos se aprecia al analizar el error, el cual se encuentra en escalas numéricas distintas.

Por un lado, el modelo de variable de estados deducido desde la transferencia, el error es del orden de  $10^{-14}$ . Esto se debe a que este modelo se construyó usando exactamente los mismos coeficientes que la función de transferencia discreta. Las pequeñas discrepancias visibles provienen únicamente de errores numéricos de redondeo asociados a las diferencias entre los algoritmos de simulación de bloques de transferencia y de espacio de estados

Por otro lado, en el modelo de variable de estados con variables físicas reales, el error es del orden de  $10^{-6}$ . Este error es mayor, aunque sigue siendo pequeño, porque los dos modelos, aunque representan al mismo sistema, no se derivan de forma analíticamente idéntica. En este caso, el procedimiento seguido consiste en partir del modelo continuo en variables de estado y discretizarlo para luego obtener el modelo discreto en el dominio.

## 2.2. Práctica 4: Levitación magnética

Del trabajo TP01, la ecuación diferencial para el problema resultó:

$$e = \frac{R}{K_i} \left( K_x y(t) - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + \frac{L}{K_i} \left( K_x \frac{dy}{dt} - m \frac{d^3 y}{dt^3} \right) \quad (2.6)$$

La transferencia continua para este problema resultó:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{-2504}{0.02s^3 + s^2 - 78.4s - 3920} \quad (2.7)$$

La misma presenta polos en 62.6099, -62.6099 y -50. Mientras que la transferencia discreta:

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{-0.05376z^2 - 0.1884z - 0.03745}{z^3 - 3.346z^2 + 2.397z - 0.4891} \quad (2.8)$$

La misma tiene polos en: 2.4484, 0.4891 y 0.4084. Además, el período de muestreo es de  $T = 0.0143s$ .

### 2.2.1. Representación por Variable de Estado a partir de la transferencia

Aplicando los mismos pasos, tal como se explicó en la sección 2.1.1, se obtiene para este caso:

$$\ddot{y} + 50\dot{y} - 3920y - 196000y = -125200e$$

Definiendo los estados:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

Las ecuaciones de estado resultan:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = 196000x_1 + 3920x_2 - 50x_3 - 125200e$$

Y tomando como ecuación de salida:

$$y = x_1$$

Las matrices A, B, C y D del continuo son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 196000 & 3920 & -50 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -125220 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0 \ 0) \quad D = (0)$$

Con la misma metodología explicada en la práctica anterior, se obtienen las matrices a partir de la transferencia discreta:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.4891 & -2.3974 & 3.3460 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Cd = (-0.0374 \ -0.1884 \ -0.0538) \quad Dd = (0)$$

### 2.2.2. Representación por Variable de Estado con variables físicas del sistema

Se replicó la misma estrategia explicada en la sección 2.1.2. Nuevamente, se tiene una ecuación fundamental mecánica y eléctrica cuya combinación de ambas permitió obtener la ecuación diferencial presentada al inicio de la práctica 4. Del TP01, las ecuaciones fundamentales resultaron:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.9)$$

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = K_x y(t) - K_i i(t) \quad (2.10)$$

Con ello, se eligen los siguientes estados:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = i$$

Las ecuaciones de estado quedan escritas de la siguiente manera

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{m}(K_x y - K_i i) = \frac{K_x}{m}x_1 - \frac{K_i}{m}x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(e - Ri) = -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}e$$

Con las ecuaciones definidas, recordando que la salida de interés es la posición de la bola y usando los mismos datos que el TP01, las matrices A, B, C y D resultan:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_x}{m} & 0 & -\frac{K_i}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3920 & 0 & -5008.8 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0 \ 0) \quad D = (0)$$

Nuevamente, con el uso de c2d, se transforman las matrices de continuo en su versión discreta. De la ejecución del código, se obtiene:

$$G = \begin{pmatrix} 1.4284 & 0.0163 & -0.4399 \\ 63.8618 & 1.4284 & -59.6045 \\ 0 & 0 & 0.4891 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -0.0538 \\ -10.9976 \\ 0.2554 \end{pmatrix}$$

$$Cd = (1 \ 0 \ 0) \quad Dd = (0)$$

### 2.2.3. Comparación de los modelos continuos

A continuación, se muestra el diagrama en bloques implementado

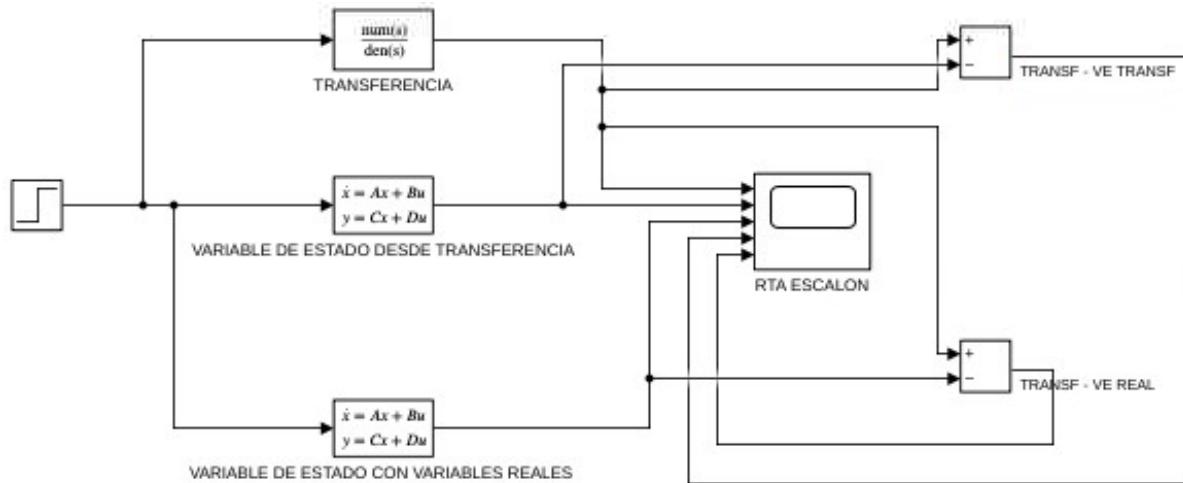


Figure 2.10: Bloques simulink: Modelos continuos

Se adjuntan los gráficos comparativos para los tres modelos continuos: Transferencia, VE deducido de la transferencia y VE con variables físicas reales, junto con los gráficos del error de cada modelo de VE respecto a la función de transferencia original.

En todos los casos, el eje vertical corresponde a la altura de la bola  $y$  medida en metros y el eje horizontal es el tiempo en segundos. Además, la entrada del sistema es 0.007826 Volt en el instante inicial  $t=0$  que es equivalente a la posición de equilibrio 0.005m solicitada para este problema.

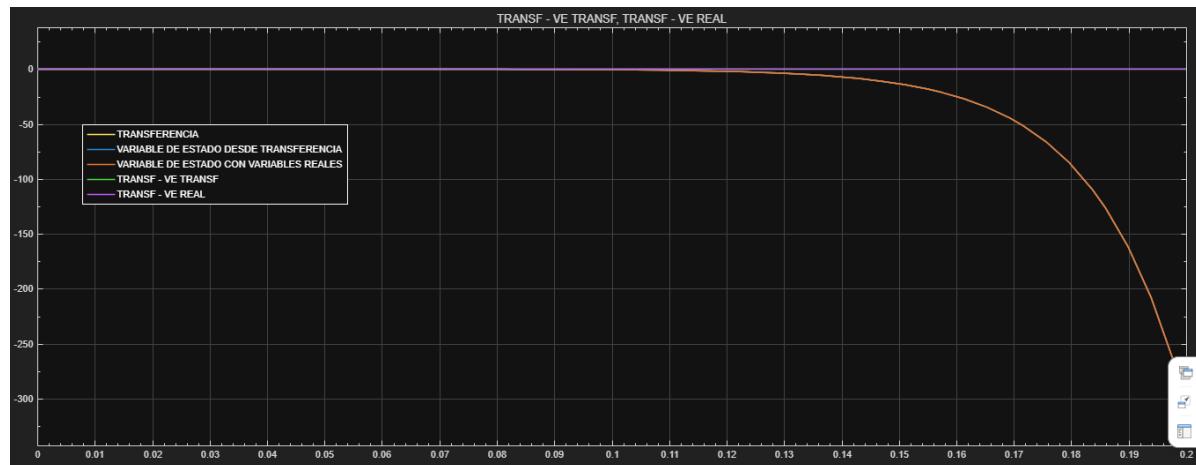


Figure 2.11: Comportamiento de la transferencia y los modelos en variables de estados continuos.

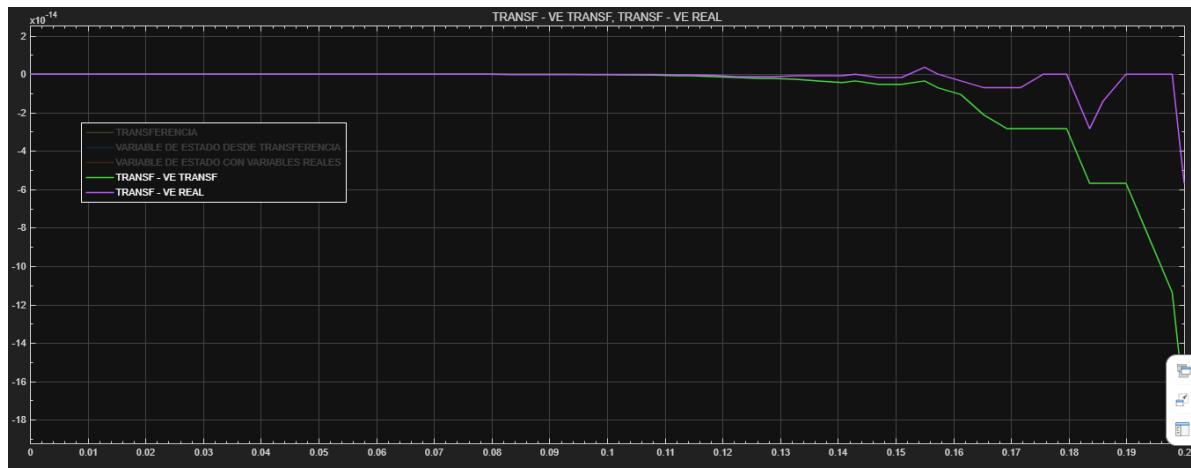


Figure 2.12: Comportamiento de los errores de los modelos continuos.

Se observa una superposición visualmente perfecta de las tres curvas. La altura tiende a  $-\infty$ . Este comportamiento refleja la naturaleza inestable del sistema tal como se había discutido en el trabajo previo. El hecho de que los tres modelos se comporten idénticamente valida que son representaciones equivalentes del mismo sistema.

Además, los gráficos del error oscilan en un rango de  $10^{-14}$ . Teóricamente, la diferencia debería ser cero. Los modelos son analíticamente equivalentes, ya que representan el mismo sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Sin embargo, el error observado no se debe a una falla o diferencia de los modelos, sino a los límites de la precisión numérica del software de simulación.

#### 2.2.4. Comparación de los modelos discretos

A continuación, se muestra el diagrama en bloques implementado

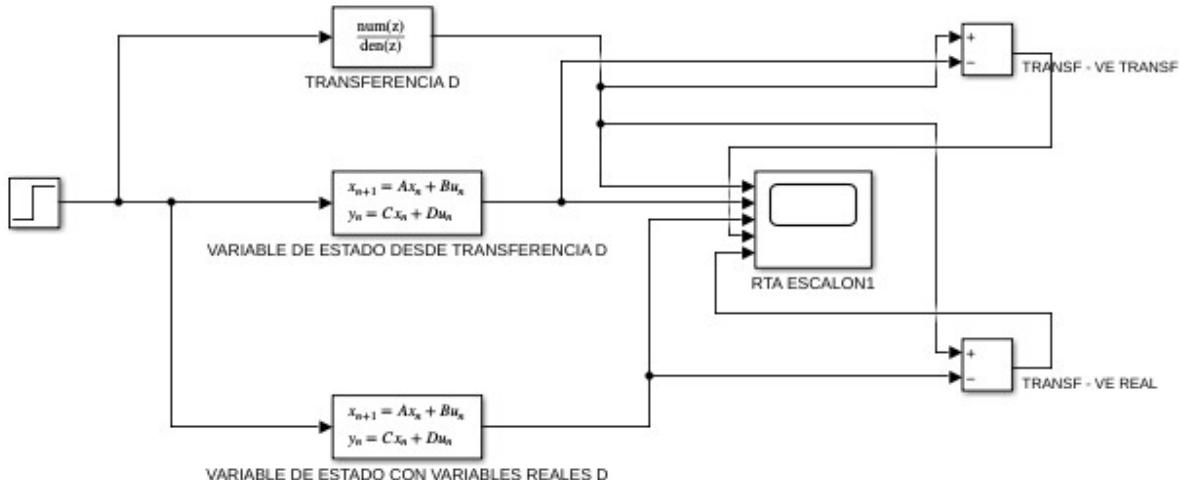


Figure 2.13: Bloques simulink: Modelos discretos

Se adjuntan también los gráficos comparativos, de manera análoga al caso del modelo continuo. Nuevamente, en todos los gráficos, el eje vertical es la altura de la bola  $y$  medida en metros y el eje horizontal es el tiempo en segundos. Se usó la misma entrada al sistema que la anterior.

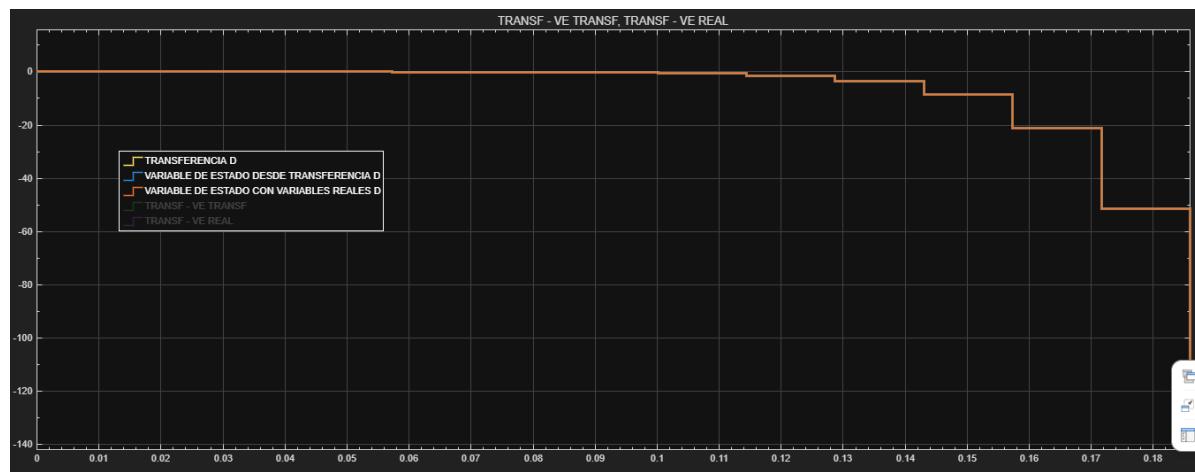


Figure 2.14: Comportamiento de la transferencia y los modelos en variables de estados discretos.

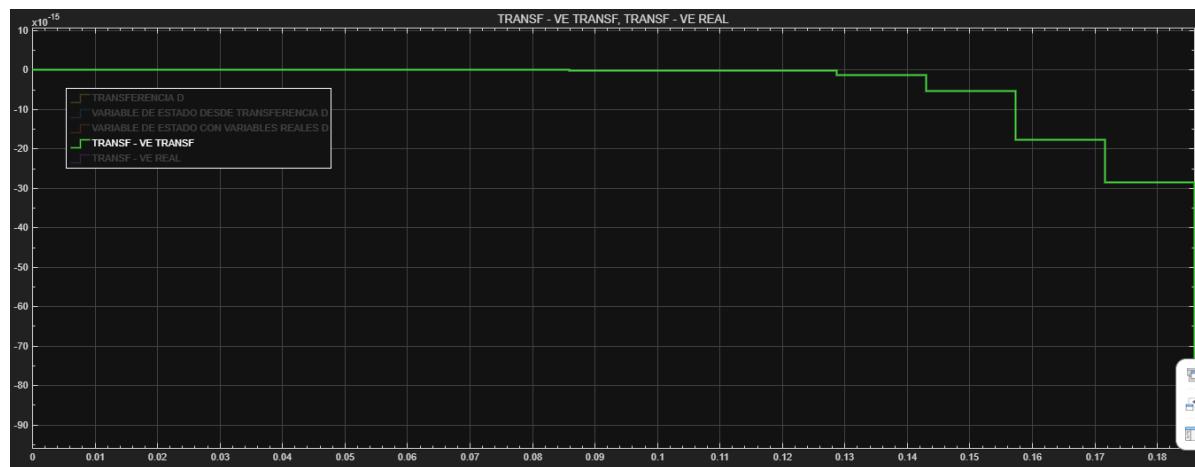


Figure 2.15: Comportamiento de los errores de los modelos discretos I

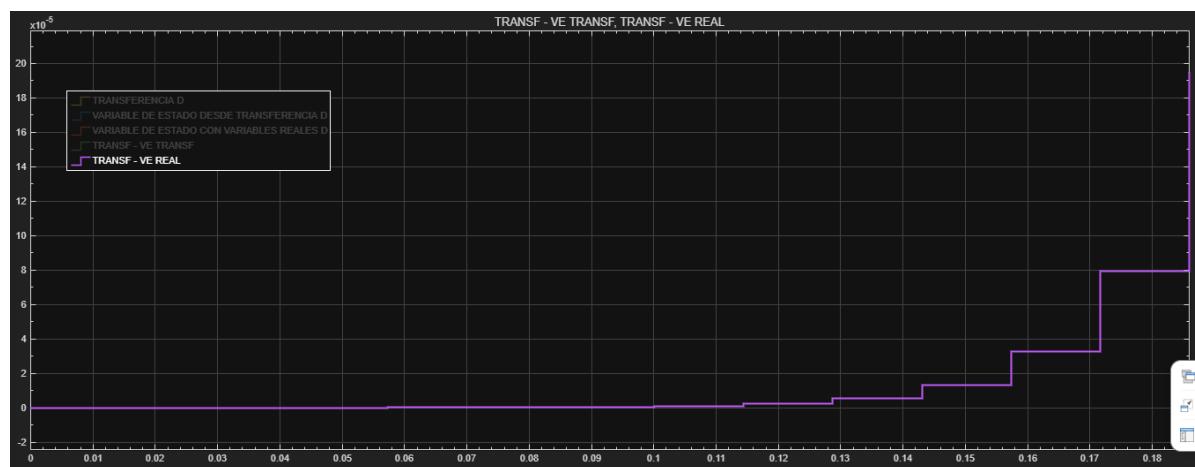


Figure 2.16: Comportamiento de los errores de los modelos discretos II

Las tres curvas muestran una superposición prácticamente total, evidenciando la inestabilidad inherente del sistema.

El error entre la función de transferencia discreta y el modelo de variables de estado derivado de ella es extremadamente pequeño (del orden de  $10^{-15}$ ), y se atribuye únicamente a ruido numérico. Esto resulta esperable, dado que ambos modelos son representaciones analíticamente equivalentes de la misma ecuación.

En cambio, el modelo con variables físicas presenta ligeras discrepancias numéricas respecto de los anteriores, producto del método de discretización matricial empleado por la función *c2d*, que no es idéntico al utilizado para obtener la función de transferencia discreta. Aun así, el error máximo, del orden de  $10^{-5}$ , es despreciable a efectos prácticos, por lo que las tres representaciones pueden considerarse equivalentes y fiables para la simulación.

# 3

## Conclusiones y Observaciones Pertinentes

En este trabajo se pudo lograr exitosamente el análisis de las plantas mencionadas por medio de sendos modelos de VE. La superposición visual de las respuestas dinámicas en todas las simulaciones permite confirmar que todos los modelos son representaciones válidas y fiables de la dinámica del sistema original. En particular, en el caso del Levitador Magnético, la coincidencia en la divergencia de los modelos demuestra su capacidad para reflejar fielmente la naturaleza inestable del sistema linealizado.

Se observó una clara distinción en la magnitud del error entre los modelos, la cual depende de la metodología de obtención. Por un lado, el error por ruido numérico para los modelos que son analíticamente idénticos. Este resultó insignificante y se atribuye exclusivamente a los límites de la precisión numérica en las simulaciones. Por otro lado, el error por Aproximación Discreta. Aquí se encontró un error mayor. Esta discrepancia, aunque pequeña y despreciable en la práctica, se debe a que la discretización matricial  $c2d$  es una aproximación numérica que no es analíticamente idéntica a la transformada Z para el ZOH, lo que introduce un pequeño error de aproximación esperado.

Finalmente, a pesar de que todos los modelos son matemáticamente equivalentes en su relación entrada-salida, el modelo de VE con variables físicas reales se presenta como la opción conceptual y práctica más ventajosa. La razón principal es que los estados del sistema poseen un significado físico directo y medible. Esto facilita la comprensión del comportamiento interno del sistema. El modelo canónico, si bien reproduce la dinámica con exactitud, es algebraico en su naturaleza y sus estados internos carecen de un correlato físico directo, limitando su utilidad en la fase de instrumentación real del sistema.

# Bibliography

Ogata. (1995). Discrete-Time control Systems (2nd ed.). Capítulo 5