

Proyecto 1 Aceleradores de Partículas: Espectrómetro de Momentos

María Sofía Álvarez López
201729031

Juan Daniel Castrellón Botero
201729285

1. INTRODUCCIÓN

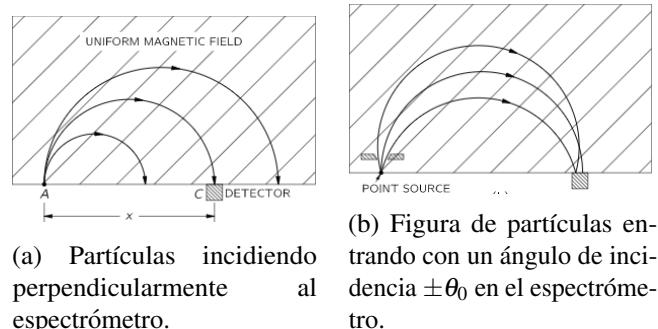
El objetivo de este proyecto fue el de simular la trayectoria de una partícula cargada en un espectrómetro de momentos. Asimismo, se verificó que el radio de una partícula cargada depende de su momento. Además, se quiso indagar en la propiedad de enfoque que tiene el espectrómetro, según lo propuesto por Feynman en el capítulo 29 de su volumen 2 del Feynman Lectures on Physics [1].

Con el fin de lograr el objetivo propuesto, se crearon dos programas en el lenguaje de programación Python. El primero simula una partícula que incide perpendicularmente a la base del espectrómetro, es decir, tiene una velocidad en la dirección \hat{j} . Por su lado, el campo magnético tenía una magnitud $B = 8T$ en la dirección \hat{k} , según se puede ver en la figura 1a. El objetivo de este programa era verificar que el momento de la partícula al entrar al espectrómetro, calculado como $|\vec{p}| = m|\vec{v}|$, es el mismo al salir, calculado según la ecuación 1 donde \vec{B} es el campo magnético, R el radio de la trayectoria semicircular que sigue la partícula y $q = 5 C$ su carga. El radio de la partícula se calculó con la distancia x_{final} a la que esta sale del espectrómetro, medida desde su punto de entrada, teniendo en cuenta que $x_{final} = 2R$. El código implementado para llevar a cabo este objetivo se encuentra en el repositorio al final del documento en el archivo parte1/parte1.py.

$$|\vec{p}| = q|\vec{B}|R \quad (1)$$

En el segundo programa se simulan partículas que entran con un ángulo de incidencia θ_0 medido respecto al eje y. Para este caso se estudiaron dos escenarios. El primero consistía en variar la velocidad de salida mientras se mantenía constante θ_0 y el segundo que variaba θ_0 , manteniendo constante la magnitud de la velocidad.

Para cada partícula que salía con un ángulo θ_0 se simulaba una segunda que incidía en un ángulo $-\theta_0$. El campo magnético se aplicó nuevamente con una magnitud $B = 8T$ en la dirección \hat{k} con una carga de magnitud $q = 5 C$. En teoría, el punto donde finalizan ambas trayectorias debe coincidir, lo cual genera un efecto de enfoque [1]. El montaje se puede ver en la figura 1b. El archivo que contiene el código está en el repositorio que se encuentra al final del documento en el archivo parte2/parte2.py.



(a) Partículas entrando perpendicularmente al espectrómetro.

(b) Figura de partículas entrando con un ángulo de incidencia $\pm\theta_0$ en el espectrómetro.

Figura 1: La figura muestra dos casos diferentes de partículas entrando al espectrómetro. La imagen 1a muestra partículas entrando perpendicular a la base del mismo y la imagen 1b muestra las partículas entrando con un ángulo de incidencia θ_0 . [1]

A continuación, se explica el procedimiento seguido para la simulación de las partículas y los resultados que fueron obtenidos.

2. EL ALGORITMO DE VERLET

El método numérico usado para simular la trayectoria de la partícula fue el algoritmo de Verlet, el cual es un mecanismo para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, como es el caso de las ecuaciones de movimiento. Este método suele ser usado para la simulación de múltiples partículas, las cuales están sujetas a muchas interacciones. En general, el funcionamiento del método de Verlet consiste en evaluar cada una de las

interacciones que tiene una partícula (con otras partículas o campos externos), obteniendo la fuerza neta que actúa sobre ella y de ahí la aceleración según indica la segunda ley de newton. [3]

Empecemos por demostrar el principio básico del método de Verlet. Para comenzar, este parte de la aproximación a la segunda derivada numérica numérica de una función $r(t)$.

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} \approx \frac{r(t + \Delta t) + r(t - \Delta t) - 2r(t)}{\Delta t^2} \quad (2)$$

Despejando para $r(t + \Delta t)$,

$$r(t + \Delta t) \approx 2r(t) - r(t - \Delta t) + \Delta t^2 \frac{d^2r(t)}{dt^2} \quad (3)$$

La idea es que el paso Δt se determine según la velocidad de la partícula. Aún así, como se puede ver, la posición en $t + \Delta t$ depende de las dos posiciones anteriores. Para solucionar esto, se usa la definición de la primera derivada numérica.

$$\frac{dr(t)}{dt} \approx \frac{r(t + \Delta t) - r(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (4)$$

Despejando para $r(t - \Delta t)$,

$$r(t - \Delta t) \approx -2\Delta t \frac{dr(t)}{dt} + r(t + \Delta t) \quad (5)$$

Reemplazando en la ecuación 3 queda que,

$$r(t + \Delta t) \approx 2r(t) + 2\Delta t \frac{dr(t)}{dt} - r(t + \Delta t) + \Delta t^2 \frac{d^2r(t)}{dt^2} \quad (6)$$

Despejando $r(t + \Delta t)$ queda finalmente que,

$$2r(t + \Delta t) \approx 2r(t) + 2\Delta t \frac{dr(t)}{dt} \Delta t^2 \frac{d^2r(t)}{dt^2} \quad (7)$$

$$r(t + \Delta t) \approx r(t) + \Delta t \frac{dr(t)}{dt} \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{d^2r(t)}{dt^2} \quad (8)$$

Ahora bien, para encontrar la derivada de la primera derivada de r (su segunda derivada), se sabe que según la definición de la primera derivada numérica,

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} \approx \frac{\frac{dr(t+\Delta t)}{dt} - \frac{dr(t-\Delta t)}{dt}}{2\Delta t} \quad (9)$$

Por lo tanto, se obtienen las ecuaciones

$$r(t + \Delta t) \approx r(t) + \Delta t \frac{dr(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2r(t)}{dt^2} \quad (10)$$

$$\frac{dr(t + \Delta t)}{dt} \approx \frac{dr(t)}{dt} + \frac{d^2r(t)}{dt^2} \Delta t \quad (11)$$

En este caso, como se está trabajando una partícula se sabe que $v = \frac{dr}{dt}$ y $a = \frac{d^2r}{dt^2}$, por lo que las ecuaciones 10 y 11 se pueden reescribir como:

$$r(t + \Delta t) \approx r(t) + \Delta t v(t) \frac{\Delta t^2}{2} a(t) \quad (12)$$

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \Delta t \quad (13)$$

Ahora bien, debido a que el paso Δt se toma en magnitudes discretas, esto puede generar discrepancias en los datos simulados respecto a la trayectoria real. En general, el error de exactitud en la posición va como $\mathcal{O}(\Delta t^3)$. Por su lado, la incertidumbre en la velocidad va como $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, como se puede ver a continuación [2]

$$r(t + \Delta t) \approx r(t) + \Delta t v(t) \frac{\Delta t^2}{2} a(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (14)$$

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (15)$$

Los problemas que suele traer el error suelen reflejarse en factores como que la energía o el momento no se conserven. Este fenómeno será estudiado más adelante. Asimismo, como se puede ver disminuir el paso Δt implica una disminución en el error. Aún así, cabe aclarar que cuando $\Delta t \rightarrow 0$ es necesario tener cada vez más poder de cómputo, puesto que se requiere realizar más operaciones.

El algoritmo que se creó calcula a cada paso la aceleración $a(t)$. Esto se logra mediante la segunda ley de movimiento de Newton $F = \frac{dp}{dt}$. En este caso, como la masa de la partícula no varía, se puede escribir que $F(t) = ma(t)$. Por último, debido a que, en este caso la partícula está sometida únicamente al campo magnético, su fuerza puede ser calculada usando,

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (16)$$

Que corresponde a la fuerza de Lorentz con $\vec{E} = 0$. La idea de los programas creados era realizar un cálculo avanzando en intervalos de tiempo discretos Δt . El algoritmo se iteraba hasta que la partícula saliera del espectrómetro de masas, es decir, hasta que su posición en el eje y fuera menor que 0. Para cada uno de los pasos, se realizaba el cálculo de la Fuerza, según la ecuación 16, luego se realiza el cálculo de la aceleración

como $a = F/m$. Por último, se calculan las velocidades y posiciones con las ecuaciones 12 y 13. En la siguiente iteración se actualizan los valores de la fuerza (haciendo uso del \vec{v} y \vec{r} encontrados en el paso anterior) y la aceleración para volver a calcular la posición y velocidad. Este procedimiento se repetía hasta finalizar la simulación.

3. PARTE 1: PARTÍCULA QUE ENTRA PERPENDICULAR AL ESPECTRÓMETRO

3.1. Descripción de los datos de entrada

Una vez corrido el programa, se solicita al usuario escribir el número de partículas que desea simular, la velocidad máxima, en ms^{-1} , que una partícula puede tener (la cual se multiplica posteriormente por un número aleatorio entre 0 y 1 con el fin de generar cargas con diferentes velocidades iniciales) y la magnitud del campo magnético B . Finalmente, se solicita al usuario que ingrese un paso temporal (Se recomiendan pasos temporales pequeños, del orden de $10^{-4}s$). Cabe aclarar que, en este caso, la partícula incide perpendicularmente al espectrómetro de momentos, por lo que su velocidad inicial será $\vec{v} = v\hat{j}$ con un campo magnético uniforme y constante en el tiempo de $\vec{B} = 8T\hat{k}$.

Para las simulaciones llevadas a cabo, se utilizaron 5 partículas en unos casos y 100 en otros. Asimismo, la velocidad máxima de una partícula se fijó en $|\vec{v}| = 300,000 ms^{-1}$, con el fin de obtener partículas con momentos diferentes y poder realizar un análisis detallado del error computacional. Con respecto a la carga y la masa de la partícula, se usó $q = 5 C$ y $m = 2 kg$, respectivamente. Con estos datos iniciales, se llevó a cabo la simulación, con la que se construyeron las trayectorias de las partículas bajo la influencia de \vec{B} y el momento de cada una de ellas.

3.2. Análisis de los datos obtenidos

Para este programa, se corrieron varias simulaciones. La primera corresponde a las trayectorias generadas por 5 partículas con velocidad máxima $|\vec{v}| = 300,000 ms^{-1}$ usando un paso temporal de $\Delta t = 10^{-4}s$. Las trayectorias obtenidas se muestran a continuación,

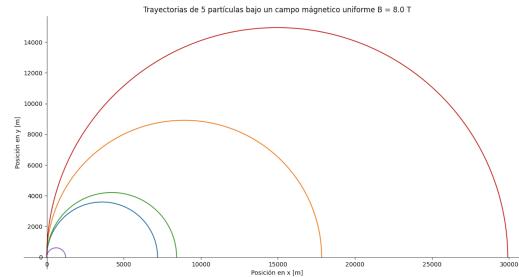


Figura 2: La gráfica muestra la trayectoria de 5 partículas que inciden en el espectrómetro perpendicularmente con velocidad máxima $|\vec{v}| = 300,000 ms^{-1}$.

Es fácil ver que las partículas recrean el espectrómetro de momentos de Feynman con incidencia perpendicular [1], de la figura 1a. Asimismo, podemos ver en la gráfica las posiciones finales de las partículas, x_{final} . Como estas siguen trayectorias semicirculares, obtenemos fácilmente que

$$x_{final} = 2R \quad (17)$$

Con R el radio del camino seguido por la carga en el espectrómetro de momentos.

La imagen 3 fue hecha únicamente con propósitos ilustrativos. Es decir, con el fin de mostrar, para pocas partículas a diferentes velocidades, las trayectorias de las mismas en el espectrómetro de momentos.

Ahora, para realizar los análisis de momentos, se usaron 100 partículas, a la misma velocidad máxima establecida previamente y con el mismo campo magnético, con el fin de tener una muestra significativa de partículas. Inicialmente, se usó un paso temporal de $\Delta t = 10^{-4}s$, el cual es lo suficientemente bueno como para tener un error bajo con un tiempo de cómputo razonable (aproximadamente 2 minutos). No obstante, con el fin de evaluar la exactitud del método numérico, más adelante se utilizaron diferentes Δt .

A continuación se muestran las trayectorias de las 100 partículas, usando $\Delta t = 10^{-4}s$, con velocidad máxima $|\vec{v}| = 300,000 ms^{-1}$,

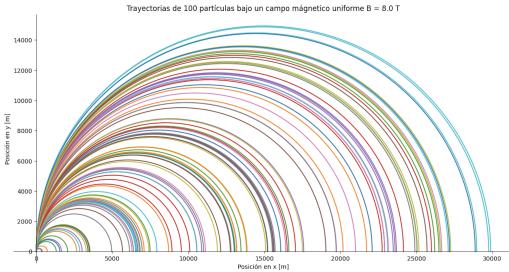


Figura 3: La gráfica muestra la trayectoria de 100 partículas que inciden en el espectrómetro perpendicularmente con velocidad máxima $|\vec{v}| = 300,000 \text{ ms}^{-1}$ a un paso temporal $\Delta t = 10^{-4}\text{s}$.

Para cada una de las partículas, calculamos sus momentos iniciales, usando la definición de momento,

$$p = mv_0 \quad (18)$$

Donde m corresponde a la masa de la partícula y v_0 a la velocidad inicial de la misma. Ahora, gracias a la deducción realizada en clase, a partir de la fuerza de Lorentz sabemos que el momento puede calcularse también como,

$$p = qBR \quad (19)$$

Con q la carga de la partícula, B el campo magnético y R el radio de la trayectoria, calculado a partir de 17. Como este último se obtiene con el método de Verlet, se tiene que, debido a los errores computacionales que se acumulan, era de esperarse que el momento, obtenido bajo este método, fuese diferente al calculado usando 18; lo cual permite obtener conclusiones acerca de la precisión del método numérico. Debido a la relación directa entre el momento y la velocidad, era previsible que, aumentando la segunda, el error entre ambos momentos incrementara de forma lineal.

Por lo tanto, para verificar la eficiencia del método con un paso temporal de 10^{-4}s , se realizó en primer lugar una gráfica que evalúa el momento final con respecto al momento inicial. En teoría, se desea que $p_f = p_i$, es decir, que la recta que se forma tenga una pendiente de 1 y un punto de corte igual a 0. A continuación se puede ver el resultado obtenido.

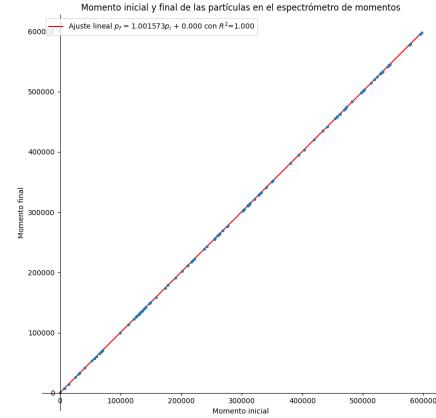


Figura 4: La gráfica muestra los momentos finales en función de los momentos iniciales para 100 partículas, con $\Delta t = 10^{-4}\text{s}$.

Como se puede apreciar en la gráfica, las diferencias entre los errores son prácticamente cero. El punto de corte que se obtuvo corresponde a 0, y la pendiente a 1,001573. Esto nos dice que, para momentos más pequeños, la diferencia entre los momentos ideales y los obtenidos suele ser más parecida. En otras palabras, para momentos iniciales más grandes se obtiene un error mayor. A continuación, se puede ver una gráfica de cómo aumenta el error en función de p_i . El error es definido como $\text{error} = |p_i - p_f|$.

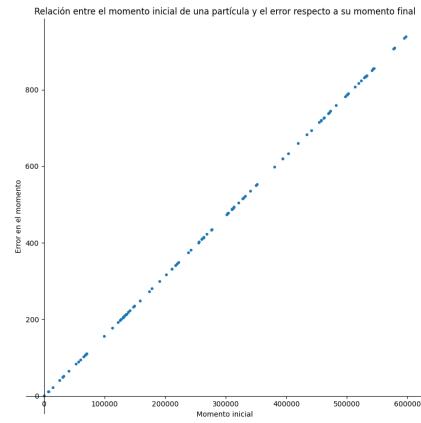


Figura 5: La gráfica muestra los errores en función del momento inicial para 100 partículas, con $\Delta t = 10^{-4}\text{s}$.

Como se ve en la figura 5, los errores se hacen más

grandes a medida que aumenta el momento inicial. Esto tiene sentido puesto que el error se acumula a medida que se calculan nuevos datos en la trayectoria. Al tener más velocidad, la partícula toma más tiempo en el espejómetro por lo que se acumula más error. Esto se puede solucionar implementando simulaciones con Δt más pequeños. Aún así, es necesario evaluar qué tan efectivo es disminuir el paso y como esto influye en la eficacia del método y el tiempo de cómputo.

De esta manera, a pesar de los errores vistos previamente, podemos determinar que el paso temporal utilizado es bueno, para realizar simulaciones con tiempos de cómputo relativamente bajos, debido al argumento que se presentará a continuación.

Usando la relación entre x_{final} y R de 17 en la ecuación de momento 19 obtenido a partir de la fuerza de Lorentz, nos queda que,

$$p = qB \frac{x_{final}}{2} \quad (20)$$

En este caso, nos interesa ver la forma en que varía la posición final, calculada utilizando el método de Verlet, en función del momento de la partícula, obtenido mediante la ecuación 18, que es bien conocido. En este sentido, despejando para x_{final} ,

$$x_{final} = \frac{2}{qB} p \quad (21)$$

Que es una relación lineal sencilla con pendiente $m = \frac{2}{qB}$ y punto de corte $b = 0$. Usando los datos de la simulación, con $q = 5 \text{ C}$ y $B = 8T$, tenemos que, de forma teórica, esta debería ser de,

$$m = \frac{2}{5 \times 8} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 0,05 \quad (22)$$

Usando los datos de x_{final} y momento inicial (calculado como $p = mv_0$) para esta simulación, se obtuvo la gráfica mostrada a continuación,

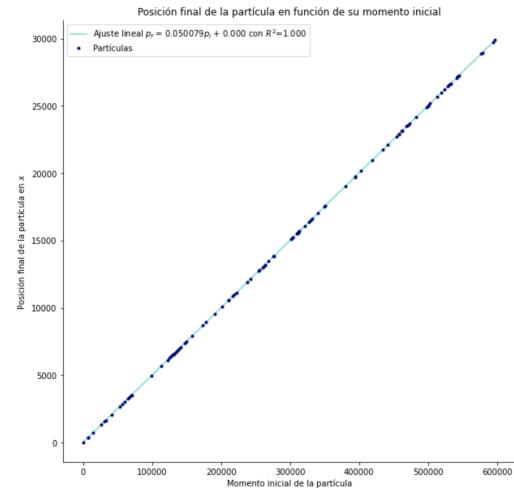


Figura 6: La gráfica muestra la posición final, en x, en función de su momento inicial, para 100 partículas con $\Delta t = 10^{-4}s$.

Como vemos, la posición final en x y el momento inicial de la partícula guardan una relación lineal. Más aún, la pendiente calculada con los datos de la simulación fue de $m = 0,050079$, que discrepa de la teórica únicamente por un error del 0,158%. Esto tiene sentido pues, debido al paso temporal usado, $\Delta t = 10^{-4}s$, según el método de Verlet, se espera obtener un error a partir de la cuarta cifra significativa, como se ve en los resultados obtenidos. Al ser tan pequeño el error, podemos concluir que el paso temporal utilizado es bastante bueno, para el tiempo de cómputo utilizado (aproximadamente 2 minutos).

3.3. Mejorar la precisión disminuyendo el Δt

A continuación, se estudió el impacto que tiene el parámetro del paso (Δt) en el cálculo de las trayectorias. Para esto, se generaron datos para 100 partículas con valores de $\Delta t = 1s, 0,1s, 0,01s, 0,001s, 0,0001s, 0,00001s, 0,000001s$. A continuación, se muestran algunas gráficas que resultaron interesantes. En primer lugar, se puede ver el resultado de correr la simulación con un paso de tiempo de 0.1.

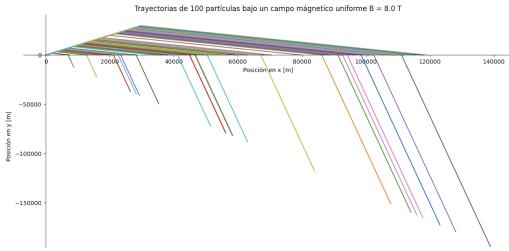
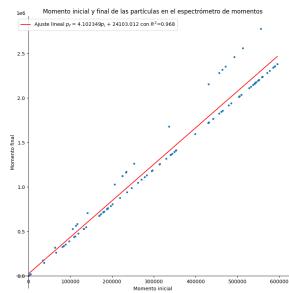
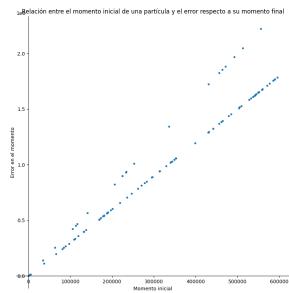


Figura 7: Trayectoria de la simulación de la carga con un paso de $\Delta t = 0,1\text{s}$

En primer lugar, es interesante ver que la simulación termina en 3 pasos, por lo que el método refleja poco la realidad. Además, cabe notar que la gráfica termina en valores de y negativos, esto debido a que el programa calcula pasos mientras $y \geq 0$. Esto es un problema, pues como se puede ver, los valores de x que toma el programa no coinciden con un valor en que $y \approx 0$. Las gráficas del error y de p_i vs p_f se pueden ver a continuación.



(a) Gráfica que muestra los momentos finales en función de los momentos iniciales para un paso de $\Delta t = 0,1\text{s}$



(b) Gráfica que muestra el error de cálculo en función del momento inicial para un $\Delta t = 0,1\text{s}$.

Figura 8: Gráfica que muestra los errores en función del momento inicial para un paso de 0.1.

En primer lugar, el momento final como función del momento inicial tiene una pendiente de 4,10. Es decir, la correlación no es la esperada, por lo que el método es impreciso. Esto se puede ver visualizando la gráfica del error respecto al momento inicial. Como se puede ver, esta aumenta a medida que lo hace p_i , nuevamente, debido a que una partícula con mayor momento inicial permanece más tiempo en el espectrómetro, por lo que el error se acumula más.

A continuación, se muestra una gráfica de las trayectorias cuando el paso se disminuye a $\Delta t = 0,01\text{s}$.

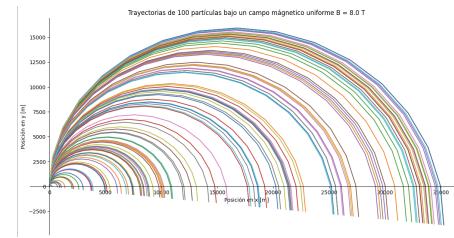


Figura 9: Trayectoria de la simulación de la carga con un paso de $\Delta t = 0,01\text{s}$

Como se ve, se generan trayectorias que ya son más acercadas a la realidad. Aún así, siguen existiendo problemas. Por ejemplo, nuevamente los valores de y_{final} no son cercanos a cero. Esto implica que siguen existiendo discrepancias en los valores reales de x cuando el algoritmo deja de ejecutarse.

Por último, se muestran las gráficas respectivas para el paso de tiempo $\Delta t = 10^{-6}$. En primer lugar, se muestra la trayectoria seguida por las 100 cargas en la simulación.

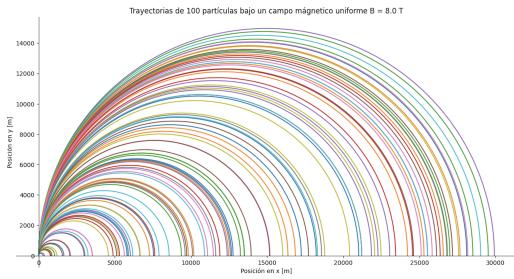
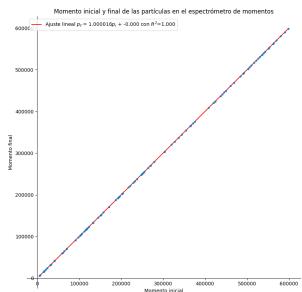


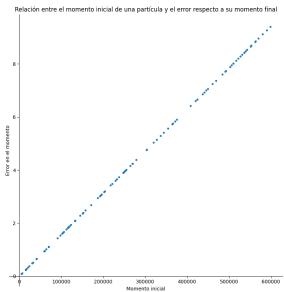
Figura 10: Trayectoria de la simulación de la carga con un paso de $\Delta t = 10^{-6}$

Como se ve, las trayectorias seguidas en este caso ya se detienen en valores de $y \approx 0$, lo cual indica que el método es muy preciso. La gráfica es similar a la obtenida en la gráfica 3 (con $\Delta t = 10^{-4}\text{s}$). Esto puede indicar que, a pesar de ser más preciso, no representa una mejora sus-

tancial respecto al de $\Delta t = 10^{-4}$. Aún así, es de interés estudiar el error producido por esta simulación.



(a) Gráfica que muestra los momentos finales en función de los momentos iniciales para un paso de $\Delta t = 10^{-6}s$



(b) Gráfica que muestra el error de cálculo en función del momento inicial para un $\Delta t = 10^{-6}s$.

Figura 11: Gráfica que muestra los errores en función del momento inicial para un paso de $10^{-6}s$.

Como se ve, la pendiente obtenida para la relación de p_i vs p_f es de aproximadamente 1. Más aún, esta es de exactamente $m = 1,000016$. Como se puede apreciar, el error es apenas considerable a partir de la quinta cifra significativa, lo cual coincide con el hecho de estar usando un paso temporal $\Delta t = 10^{-6}s$. En este sentido, este paso temporal es el que mejores resultados produce en términos de exactitud de los cálculos. Además, el error de una partícula con momento inicial de aproximadamente $600,000 \text{ kg ms}^{-1}$ tiene un error de aproximadamente 8 kg ms^{-1} . Aún así, el tiempo que tardó en correr la simulación fue de aproximadamente 3 horas.

Por último, se muestra una gráfica de la variación del error medio de una toma de datos respecto al valor de Δt utilizado.

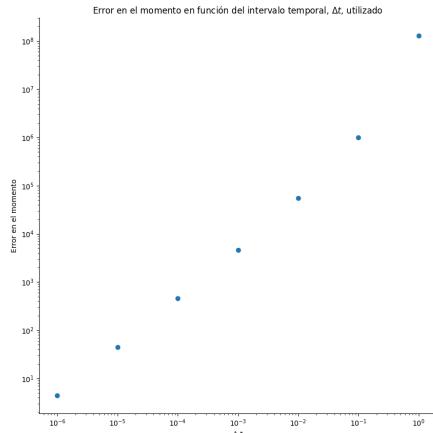


Figura 12: Gráfica del error medio respecto al valor de Δt . Como se puede ver, los ejes x y y se encuentran en escala logarítmica, lo que permite una mejor visualización de los datos.

Como se ve, para valores de Δt cada vez más pequeños, la ganancia en precisión es cada vez menor. Asimismo, tomando en cuenta factores de tiempo y capacidad de cómputo, es necesario elegir correctamente el valor de Δt . En caso de necesitar datos que sean muy precisos y exactos es necesario correr la simulación con un paso muy pequeño, a costa de necesitar mucho tiempo y capacidad de cómputo. De lo contrario, usar un paso de $\Delta t = 10^{-4}$ puede ser suficiente. Asimismo, tomar pasos menores implica simulaciones incorrectas que no corresponden con los experimentos.

4. PARTE 2: PARTÍCULA QUE INCIDE CON UN ÁNGULO θ_0 MEDIDO RESPECTO AL EJE Y

4.1. Descripción de los datos de entrada

Para este programa, se piden los siguientes datos al usuario. En primer lugar, se pregunta qué escenario desea correr. Los dos escenarios consisten en variar la magnitud de la velocidad inicial manteniendo θ_0 constante (Opción 1), y la segunda opción es variar el ángulo y mantener constante v . A continuación, se pide al usuario los parámetros con los que desea correr la simulación. Estos corresponden al número de pares de partículas que se desea simular, la velocidad con la que incide (en caso de no variar v) o la velocidad máxima con la que se pueden generar datos (en caso de variar esta magnitud). El valor recibido en la velocidad está en ms^{-1} . La magnitud del campo magnético, en Teslas, y el ángulo de incidencia máximo (en caso de variar θ_{00}) o el

ángulo que se mantendrá constante, que se usará en caso de variar la velocidad, en grados.

4.2. Análisis de los datos obtenidos

Para el segundo programa se realizaron un total de 4 simulaciones, cada una con 100 partículas, con un $\Delta t = 10^{-4}s$. El objetivo de estas era indagar como influye la velocidad y ángulo iniciales en la distancia x a la que llega la partícula. Las distancias medidas deben ser, en teoría, las mismas. Aún así, debido a que los errores de cálculo de la posición se propagan a medida que avanza la simulación, como se estudió previamente, ángulos más grandes deben generar un mayor error, puesto que se deben realizar más cálculos antes de salir del espectrómetro, por lo que el error se acumulará más. Esto, en el caso de la partícula que incide con un ángulo $-\theta_0$.

En primer lugar, se muestran las gráficas obtenidas para dos pares de partículas ($+\theta_0$ y $-\theta_0$). Ambos se corrieron con una velocidad constante de $100ms^{-1}$, sometidas a un campo magnético de $B = 8T$.

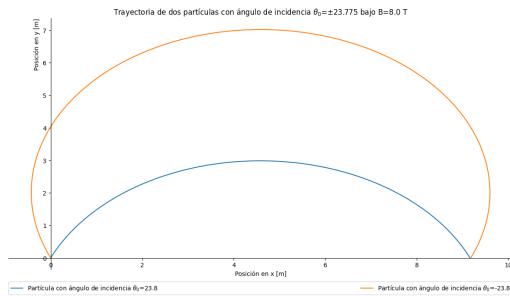


Figura 13: La gráfica muestra la trayectoria de dos partículas, las cuales inciden en el espectrómetro con un ángulo $\theta_0 = 23,775^\circ$

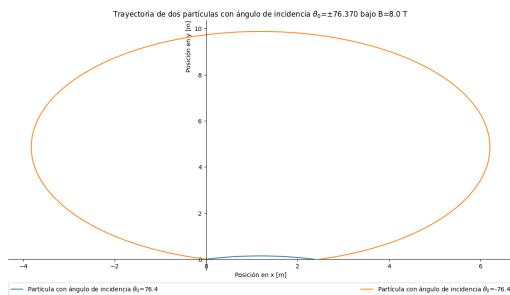


Figura 14: La gráfica muestra la trayectoria de dos partículas, las cuales inciden en el espectrómetro con un ángulo $\theta_0 = 76,370^\circ$

En primer lugar, cabe resaltar que en la figura 13 am-

bas partículas salen del espectrómetro casi en el mismo punto (x_{final}), mientras que en la figura 14, al aumentar el ángulo, existe una diferencia en el punto en el que la carga deja el espectrómetro. Como se mencionó anteriormente, esto se debe a errores de precisión en el método. Se puede ver una tendencia a que las partículas con mayor ángulo de incidencia hagan que las diferencias entre ambas posiciones de salida sean distintas. Este comportamiento se estudiará más adelante.

Además, cabe resaltar que a pesar de que en ambas simulaciones las cargas tienen el mismo momento, estas no salen a la misma distancia x . Mientras que las simulaciones con el ángulo de incidencia bajo (figura 13) indican que las partículas abandonan el espectrómetro a aproximadamente 9 metros del punto de entrada, un mayor ángulo de incidencia hace que la partícula abandone el espectrómetro más pronto, aproximadamente a 2 metros.

Según la lectura de Feynman, las partículas que inciden con un ángulo $\pm\theta_0$ al espectrómetro tienen un punto de salida similar [1]. Aún así, el mismo aclara posteriormente que hay un límite en el cual la afirmación anterior tiene validez. Para explorar esto, se realizó una gráfica haciendo uso del programa de la parte 1 para una partícula que incide con velocidad $v = 100ms^{-1}$.

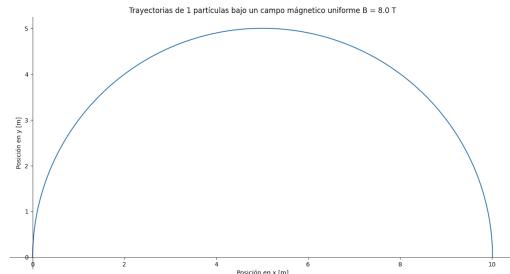


Figura 15: La gráfica muestra la trayectoria de una partícula, con $v = 100ms^{-1}$, que incide perpendicularmente al espectrómetro de momentos.

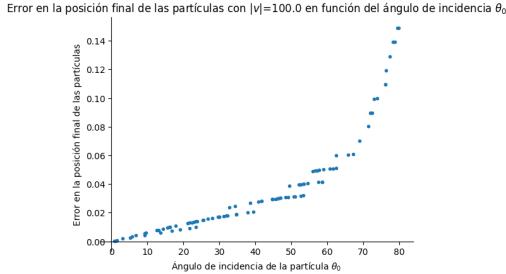
Como se ve, la partícula sale del espectrómetro a 10 metros del lugar donde incidió. Por lo tanto, acá se puede evidenciar que la capacidad que tiene el espectrómetro de enfocar partículas con un mismo momento es válida para ángulos pequeños. Según Feynman, aumentar el ángulo disminuye el tiempo necesario para tomar una medida. Aún así, según lo encontrado previamente, si se aumenta mucho el ángulo, se puede generar ruido, puesto que esto permite que partículas con un espectro más grande de momentos puedan dañar las mediciones. En otras palabras,

significa que partículas con ángulos de incidencia muy grandes puedan ser confundidas con partículas, de bajo momento, que inciden perpendicularmente al espectrómetro.

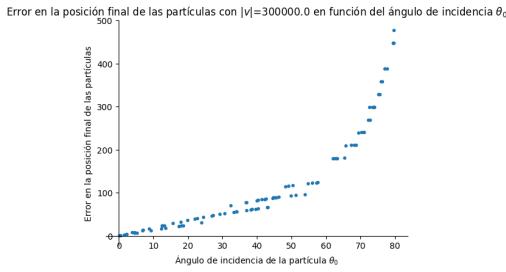
Ahora, se estudiará también la precisión del método para esta segunda parte. En principio, se sabe que las partículas que salen del espectrómetro a $\pm\theta_0$ llegan a una misma distancia del origen (mismo x_{final}). Aún así, debido a los errores que se acumulan a medida que se reconstruye la trayectoria, la partícula que incide con ángulo $-\theta_0$ tiene un mayor error que aquella que incide con ángulo θ_0 , sobre todo para $\theta > 40^\circ$. Por lo tanto, se evaluó la diferencia entre ambos puntos finales, y esto se usó como métrica de error en el método, como se ve en la ecuación 23.

$$\text{error} = |X_{carga\theta_0} - X_{carga-\theta_0}| \quad (23)$$

En primer lugar, se vió como influye el ángulo en que incide la partícula, manteniendo la velocidad constante, como se ve en las figuras mostradas a continuación,



(a) Error entre la distancia de dos cargas que inciden con ángulos $+\theta_0$ y $-\theta_0$ con una velocidad de 100 ms^{-1} .

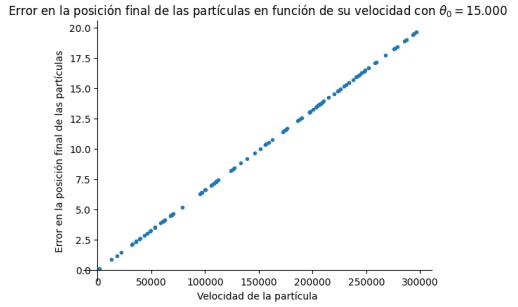


(b) Error que hay entre la distancia de dos cargas que inciden con ángulos $+\theta_0$ y $-\theta_0$ con una velocidad de 300000 ms^{-1} .

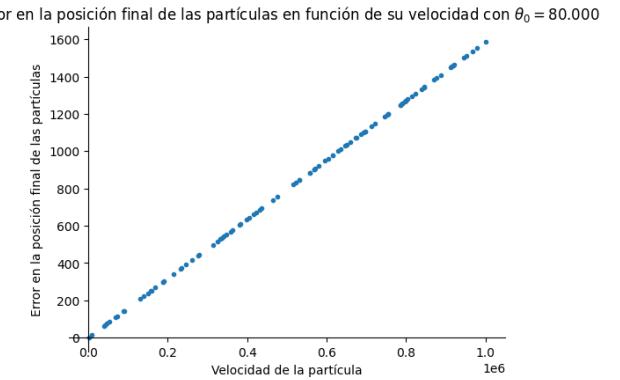
Figura 16: Aumento de los errores en función del incremento en el ángulo de incidencia θ_0 .

Como se ve, a medida que aumenta el ángulo de inci-

dencia, incrementa la diferencia entre ambos valores de x_{final} , tendiendo a infinito a medida que el ángulo de incidencia se aproxima a 90° . Esto tiene sentido puesto que, a medida que el ángulo aumenta, la partícula que incide a un ángulo $-\theta_0$ debe hacer un recorrido más largo con respecto a la partícula que incide a θ_0 . Por el contrario, para ángulos pequeños, ambas cargas recorren distancias similares, lo que causa que el error sea menor, y tienda a 0 cuando el ángulo es 0 (es decir, cuando la partícula incide de forma perpendicular). Además, cabe notar que el error para las partículas que viajan a $300,000 \text{ ms}^{-1}$ es más elevado que el de las partículas que viajan a 100 ms^{-1} , lo cual indica que el error también aumenta a medida que lo hace la velocidad inicial. A continuación, se estudiará el error del método a medida que la velocidad aumenta y se mantiene el ángulo de incidencia constante, con valores de $\theta_0 = 15^\circ$ y $\theta_0 = 80^\circ$.



(a) Error que hay entre la distancia de dos cargas que inciden con ángulos $+\theta_0$ y $-\theta_0$ con valor de $\theta_0 = 15^\circ$



(b) Error que hay entre la distancia de dos cargas que inciden con ángulos $+\theta_0$ y $-\theta_0$ con valor de $\theta_0 = 80^\circ$.

Figura 17: Aumento de los errores a medida que la velocidad a la que la partícula incide aumenta.

Como se ve, el error también incrementa a medida que

aumenta la velocidad. Esta diferencia de las posiciones de llegada se comporta de forma positiva y lineal con respecto a $|\vec{v}|$. Cabe resaltar que los errores debidos a θ_0 y $|\vec{v}|$ muy grandes se pueden minimizar si se disminuye el paso de tiempo Δt . Para las simulaciones realizadas se uso un valor de $\Delta t = 10^{-4}$. Aún así, como se mencionó previamente, correr las simulaciones con un paso muy pequeño requiere una cantidad grande de tiempo y un poder computacional elevado.

5. CONCLUSIONES

Como se pudo evidenciar a lo largo del proyecto, fue posible cumplir con los objetivos propuestos. En primer lugar, ambos programas llevaron a cabo las tareas requeridas para simular la trayectoria de una partícula en movimiento en un campo magnético. El algoritmo usado con el fin de realizar la simulación fue el algoritmo de Verlet, el cual permite solucionar ecuaciones diferenciales de segundo grado, como es el caso de las ecuaciones de movimiento.

El enfoque principal de la parte 1 fue verificar la precisión del método usado a lo largo del proyecto. Esto se logró obteniendo las diferencias que había entre los momentos medidos al iniciar la simulación y los momentos finales, medidos según la ecuación 19. En primer lugar, se realizaron simulaciones con partículas haciendo uso de un paso $\Delta t = 10^{-4}$. Los resultados obtenidos fueron buenos, indicando que con el Δt usado ya hay una buena precisión. Esto se nota al estudiar la relación entre p_i vs p_f , que es aproximadamente $p_i = p_f$, con un error bajo (del orden de 10^{-5}). Asimismo, al realizar el cálculo de la regresión de la posición x_{final} en función del momento inicial, se obtuvo que el valor de la pendiente fue de 0.500079, generando un error muy bajo (de aproximadamente 0,158 %), con respecto al valor teórico de la pendiente, cuyo cálculo detallado se encuentra en la ecuación 22. Esto quiere decir que los resultados obtenidos son bastante precisos, lo cual es deseable para la simulación. A pesar de lo anterior, cabe resaltar que el error aumenta a medida que lo hace la velocidad, puesto que partículas con mayor momento permanecen más tiempo en el espectrómetro y se acumulan más errores computacionales en los cálculos.

Asimismo, se estudió como cambia el error al variar el paso temporal usado. La conclusión a la que se llega en este ámbito es que, para pasos de tiempo muy grandes se produce un error significativo, por lo que no es recomendable. Por el contrario, al usar pasos cada vez más

pequeños hay una mejoría en la exactitud de los resultados. Aún así, cabe resaltar que a menor paso temporal, mayor tiempo y recursos computacionales son necesarios para correr la simulación, sin producir una mejora sustancial en los resultados (a partir de $\Delta t = 10^{-4}$, aproximadamente).

Debido a que reducir el intervalo de tiempo empieza a ser muy costoso computacionalmente, sin precisar grandes cambios en la disminución del error, si se requiere obtener resultados más exactos, se podría optar por utilizar un algoritmo computacional más preciso, cuyo costo computacional sea bajo. Para esto, se podría usar, por ejemplo, el algoritmo de Runge-Kutta cuarto orden, el cual es un método para solucionar ecuaciones diferenciales de primer orden, de forma numérica, con un error que, comparado con el del método de Verlet, va siempre como $\mathcal{O}((\Delta t)^5)$ y no como $\mathcal{O}((\Delta t)^3)$ [2], mejorando la aproximación computacional siempre en dos órdenes de magnitud. No obstante, como se pudo ver, el algoritmo de Verlet es una aproximación bastante buena para los requerimientos de este proyecto, obteniendo buenos resultados para las trayectorias y el momento de las partículas, sin consumir mucho tiempo de cómputo, siempre y cuando se use un $\Delta t \approx 10^{-4}$ s.

Por su lado, el segundo programa cumplió el objetivo de verificar la capacidad de enfoque del espectrómetro de momentos, según lo menciona Feynman [1]. La conclusión a la que se llegó es que, para ángulos pequeños esta condición se cumple, puesto que los puntos de salida x_{final} son similares para partículas, con momento inicial igual, que inciden tanto perpendicularmente como a un ángulo de incidencia θ_0 , siempre y cuando este sea pequeño. Por el contrario, al tener valores muy grandes de θ_0 , esta propiedad no se cumple. Es necesario tener en cuenta esto puesto que, al tener más datos, es posible reducir el tiempo que se requiere para tomar una medición (pues se tienen partículas incidiendo no sólo perpendicularmente sino también a diversos ángulos de incidencia, lo que permite calcular una muestra significativa de datos más rápido). Aún así, esto puede llevar a consecuencias indeseadas, como más ruido en las observaciones, por partículas de momentos diferentes que, por su ángulo de incidencia, llegan al mismo x_{final} .

Por último, también fue posible medir la precisión del método haciendo uso del programa creado para la parte dos. Esto se logró creando una métrica de error, la cual indica que tan distinta es la distancia x_{final} para dos partículas que inciden en ángulos $\pm \theta_0$. En teoría, ambas

cargas deben salir en el mismo x_{final} . Aún así, debido a errores en los cálculos esto no es así. Se llegó a la conclusión de que a mayor velocidad y mayor ángulo, la diferencia de $|X_{final\theta_0} - X_{final-\theta_0}|$ era mayor y por tanto el error es mayor. Esto se debe a que partículas que están más tiempo en el espectrómetro tienen una acumulación de error más grande.

6. CORRER EL PROGRAMA

Con el fin de correr este repositorio, deben seguirse los pasos mostrados a continuación.

1. Clonar el proyecto haciendo uso del comando `git clone <URL REPOSITORIO>` (ver final de la página) o descargarlo como un archivo .zip.
2. Antes de correr el proyecto, asegúrese de tener instalado python3 en su máquina local y pip o pip3 para instalar las dependencias y librerías necesarias para la ejecución del programa. Si no cuenta con alguno de estos, puede instalarlos remitiéndose a la documentación oficial de python para instalar python3, con lo que se instalará una distribución de pip.
3. Corra el archivo `./run.sh`. En caso de que le salga el error `Permission denied` ejecute alguno de los comandos mostrados a continuación.

- `sudo ./run.sh`
- `chmod 777 ./run.sh`

Lo cual dará los permisos de ejecución necesarios para correr el programa.

4. Una vez corrido el programa, se le mostrarán las opciones disponibles:

- I Instalar las dependencias y librerías del programa.
- II Correr la parte 1 del proyecto.
- III Correr la parte 2 del proyecto.
- IV Correr la gráfica para el error en el momento en función del intervalo de la parte 1

Como se ve en la imagen mostrada a continuación,

```
(base) sofiaalvarezlopez@MacBook-Pro-de-Sofia: Proyecto1-Aceleradores % ./run.sh
-----Simulacion de trayectorias de particulas bajo un campo magnetico-----
-----Juan Daniel Castrellon y Maria Sofia Alvarez -----
Escriba el numero de la opcion que desea correr [e.g. 1]
1. Instalar las dependencias del programa
2. Correr la simulacion para particulas que inciden perpendicular al campo.
3. Correr la simulacion para particulas que inciden a un angulo theta0.
4. Correr la grafica para el error en el momento en funcion del intervalo de la parte 1
```

Figura 18: NOTA: Si es la primera vez que corre el programa, seleccione la opción 1. Otra forma de instalar las dependencias es corriendo el comando `pip install -r requirements.txt`

5. **Correr la parte 1 del proyecto:** Si desea correr la primera parte del proyecto, seleccione la segunda opción del archivo `./run.sh`. Aquí, se le solicitarán algunos datos con el fin de correr la simulación.

- I Primero, deberá ingresar el número de partículas que desea simular.
- II Despues, deberá ingresar la velocidad máxima, en m/s, que una partícula debe tener. Esta velocidad se multiplica por un número aleatorio entre 0 y 1 con el fin de generar partículas con diferentes velocidades (y momentos) iniciales.
- III Más adelante, deberá ingresar la magnitud del campo magnético B, en Tesla, que existirá en el espectrómetro de momentos.
- IV Finalmente, deberá ingresar el paso temporal con el que desea realizar la simulación. Se recomiendan pasos temporales menores a 0.0001 s con el fin de tener resultados precisos.

Si es la primera vez que se corre la simulación, se genera la carpeta `datos`, donde, por cada vez que se ejecuta el programa, se almacenan los datos de la simulación en una carpeta con la fecha en que se inició la simulación. Por ejemplo: 2020-11-05 16:56:29.880790 es una simulación que se inició el 5 de noviembre a las 16:56 horas. Dentro de cada carpeta, se pueden encontrar los siguientes archivos y carpetas:

- **Carpeta `trayectorias`:** Almacena, en un archivo por partícula, las posiciones x,y,z, en cada momento del tiempo, de cada una de

las partículas simuladas. Se generan tantos archivos como partículas se hayan simulado. El formato del archivo es: x,y,z y se almacena como i.dat donde i es el número de la partícula simulada.

- Archivo **x_finales.dat**: Almacena las posiciones finales, en x, de cada una de las partículas. El formato del archivo es: **id_particula,x_final**.
- Archivo **momentos.dat**: Almacena el momento inicial y final de cada partícula, calculados como $p = qv$ y $p = qBR$, respectivamente. El formato del archivo es: **id_particula,x_inicial,x_final**
- Imagen **trayectorias.png**: Muestra gráficamente las trayectorias de cada una de las partículas simuladas en el espectrómetro de momentos.
- Imagen **momentos.png**: Muestra el momento final de una partícula en función de su momento inicial y realiza un ajuste lineal entre ambas cantidades.
- Imagen **error_momento.png**: Muestra el error en el momento (calculado como $|p_{final} - p_{inicial}|$) en función del momento inicial de las partículas. Entre más grande sea el paso temporal y/o la velocidad de las partículas, se espera un mayor error. Una imagen ejemplo generada con 100 partículas, con un paso temporal de 1 microsegundo, se muestra a continuación,

Asimismo, dentro de la carpeta datos, se genera un archivo **errores.dat**, con el formato **delta_tiempo,error_maximo,error_medio**, donde **delta_tiempo** corresponde al paso temporal usado en una simulación y **error_maximo** y **error_medio** el error más alto y el error promedio en el momento p, calculado como $|p_{final} - p_{inicial}|$, de cada simulación. Cada vez que se corre una simulación, se agregan estos datos a dicho archivo. Con los datos de este archivo, corriendo el script **grafica_errores.py**, o ejecutando la opción 4 del script **./run.sh**, se genera la gráfica 12. Esta permite visualizar el error en el momento según el paso temporal utilizado en la simulación. Esta gráfica se almacena en la ruta **datos/error_momento_tiempo.png**

NOTA: Para correr esta opción, es necesario haber corrido, por lo menos, dos veces la simulación de la parte 1 con diferentes pasos temporales.

6. **Correr la parte 2 del proyecto:** Si desea correr la segunda parte del proyecto, seleccione la tercera opción del archivo **./run.sh**. Aquí, se le solicitarán algunos datos con el fin de correr la simulación.

- I Primero, se le pedirá que ingrese el escenario que desea simular. Hay dos escenarios disponibles. En el primero, se mantiene el ángulo de incidencia, θ_0 constante, para diferentes velocidades y, en el segundo, se mantiene fija la velocidad de la partícula para ángulos de incidencia variados. Seleccione 1 o 2 según desee.
- II Despues, deberá ingresar el número de partículas que desea simular.
- III Más adelante, deberá ingresar la magnitud del campo magnético B, en Tesla, que existirá en el espectrómetro de momentos.
- IV Si escogió la opción 1, deberá ingresar la velocidad máxima, en $m s^{-1}$, que una partícula debe tener. Esta velocidad se multiplica por un número aleatorio entre 0 y 1 con el fin de generar partículas con diferentes velocidades (y momentos) iniciales. Posteriormente, se le pedirá que ingrese el ángulo de incidencia θ_0 (en grados) de las partículas (medido con respecto al eje y). Si escogió la opción 2, deberá ingresar la velocidad inicial que llevarán las partículas y, seguido de esto, deberá ingresar el ángulo de incidencia máximo en grados. Este ángulo se multiplica por un número aleatorio entre 0 y 1 con el fin de generar partículas con diferentes ángulos de incidencia al espectrómetro de momentos.

NOTA: Cabe aclarar que, por cada ángulo θ_0 , se generan dos partículas. Una con ángulo de incidencia $+\theta_0$ y otra con ángulo de incidencia $-\theta_0$.

Si es la primera vez que se corre la simulación, se genera la carpeta **datos**, donde, por cada vez que se ejecuta el programa, se almacenan los datos de la simulación en una carpeta con la fecha en que se inició la simulación. Por ejemplo: **2020-11-05 16:56:29.880790** es una simulación que se

inició el 5 de noviembre a las 16:56 horas. Dentro de cada carpeta, se pueden encontrar los siguientes archivos y carpetas:

- Carpeta **trayectorias**: Almacena, en un archivo por partícula y ángulo de incidencia, las posiciones x, y, z , en cada momento del tiempo, de cada una de las partículas simuladas.

Se generan el doble de archivos de partículas simuladas: uno para $+\theta_0$ y otro para $-\theta_0$.

El formato del archivo es: x, y, z y se almacena como $i_theta0?.dat$ donde i es el número de la partícula simulada y ? se reemplaza por + o - dependiendo de si el ángulo de incidencia θ_0 es positivo o negativo, respectivamente.

- Carpeta **graficas_trayectorias**: Almacena las gráficas para cada par de partículas con ángulo de incidencia $\pm\theta_0$ con el formato **Trayectoria_particulai.png** donde i corresponde al número de la partícula que se está simulando. Dos gráficas generadas en este punto se pueden ver en las imágenes 13 y 14 para θ_0 pequeño y grande, respectivamente. Como vemos, entre más aumenta el ángulo de incidencia, más difiere la posición final en x de ambas partículas.

- Archivo **x_finales.dat**: Almacena las posiciones finales, en x , de cada una de las partículas con sus diferentes ángulos de incidencia.

El formato del archivo es:
 $id_particula, theta_0, x_final_+theta0,$
 $x_final_theta0,$ donde
 $x_final_+theta0$ y x_final_theta0 corresponden a la posición final en x de la partícula con un ángulo de incidencia positivo y negativo, respectivamente.

- Imagen **error_xfinal?.png**: Dependiendo de si se escogió la opción 1 o la opción 2, el ? se reemplaza por velocidad o θ_0 respectivamente. Esta gráfica busca analizar el error en la posición final, medido como $|x_final_theta0_positivo - x_final_theta0_negativo|$ en función de la variable velocidad o θ_0 según sea el caso. Algunos ejemplos de estas gráficas para θ_0 y

velocidad pueden verse en las imágenes 16b y 17b, respectivamente.

[CLICK ACÁ PARA VER EL REPOSITORIO](#)

REFERENCIAS

- [1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands. *Feynman lectures on physics*. Basic Books, 2015.
- [2] R. Landau, J. Paez, and C. Bordeianu. *A Survey of Computational Physics*.
- [3] J. F. Rojas and R. Martinez. Mecánica 3d: python y el algoritmo de verlet. *REVISTA MEXICANA DE FÍSICA*, (60), 2014.