

Análisis de la producción y propagación de los rayos X usando difracción por un cristal de LiF

Sofía Álvarez López* and Daniel Dorado Toro**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 15 de septiembre de 2021)

En este experimento, se estudiaron 4 fenómenos relacionados a los rayos X. Primero, se analizó el espectro característico de los rayos X del Cobre. En este, se evidenciaron los picos de radiación correspondientes a las líneas K_α y K_β . Con ello, se encontraron las energías asociadas a cada pico, las cuales se estimaron, para K_α , en 8010 ± 20 eV (orden de difracción $n = 1$) y 8024 ± 3 eV (orden de difracción $n = 2$); y, para K_β , en 8830 ± 40 eV ($n = 1$) y 8878 ± 8 eV ($n = 2$). Posteriormente, se analizó la absorción de rayos X para dos materiales: Zinc y Aluminio, con 3 espesores diferentes. En ambos casos, se logró verificar el decaimiento exponencial en la intensidad con el espesor del filtro, mostrando una relación entre el coeficiente de absorción lineal μ y la longitud de onda λ . No obstante, debido a que solo se tenían 3 datos por cada longitud de onda, estos eran insuficientes para verificar la relación entre μ y λ . Se proponen, entonces, mejoras para poder verificar este comportamiento. Más adelante, se verificó la relación de Duane-Hunt, con lo que se pudo obtener un valor para la constante de Planck de $h = 3,13 \times 10^{-34} \pm 2,44 \times 10^{-34}$ J s. Aunque no coincide exactamente con el valor teórico, esta es bastante cercana a lo esperado. Finalmente, se estudió la relación entre la intensidad de la radiación y tanto el voltaje como la corriente del haz. Se obtuvo una relación de la forma $I = bI_h(U_A - U_K)^\alpha$.

I. INTRODUCCIÓN

En el estudio de la materia condensada es necesario hacer mediciones sobre la estructura a nivel atómico y molecular de los sistemas objeto de estudio. Una importante clase de materiales son los cristales y la técnica más común para estudiarlos es la difracción de rayos X. Los rayos X son una forma de radiación electromagnética altamente energética con una longitud de onda similar a la separación inter-atómica en algunos cristales. Esto permite que se observen rayos difractados en ángulos muy distintos al incidente [7] y esta dispersión permite extraer información sobre la estructura cristalina.

No obstante, en esta investigación los roles estarán invertidos: se usará un cristal de estructura ya conocida para estudiar la producción y propagación de rayos X. El modelo bajo el cual se estudia la difracción de rayos X en cristales, propuesto por W.L. Bragg, consiste en considerar a los cristales como una red periódica, conformada por planos paralelos separados por una distancia d . La radiación incidente sobre el cristal es parcialmente reflejada por cada plano del cristal. La diferencia de caminos entre rayos reflejados por planos sucesivos es $2d \sin \theta$, donde θ es el ángulo de incidencia (véase fig. 1). Suponiendo que la dispersión de los rayos X es elástica, es decir que la energía de los fotones no cambia debido a la interacción con los átomos que conforman el material, se obtiene interferencia constructiva cuando la diferencia de caminos es un múltiplo entero de

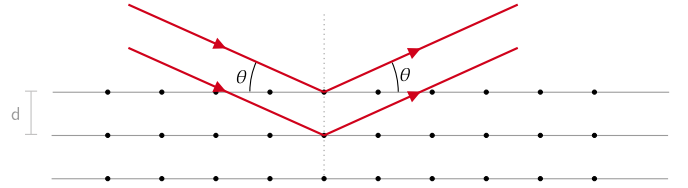


Figura 1. Difracción de rayos X a un ángulo θ a través de una estructura cristalina, cuyos planos están separados por d .

la longitud de onda, λ , es decir cuando se satisface

$$2d \sin \theta = n\lambda. \quad (1)$$

La ecuación (1) se conoce como ley de Bragg [3] y permite determinar la longitud de onda de los rayos X a partir del ángulo de dispersión medido experimentalmente.

Habiendo resumido la teoría que permite entender la interacción entre los rayos X y el material cristalino, es pertinente mencionar los fenómenos y propiedades a estudiar de los rayos X. Un punto de partida natural es la producción de rayos X. Al ser una forma de radiación, los rayos X se producen debido a la aceleración de cargas [6]. Usualmente, los rayos X se produce al interior de un tubo al vacío con un filamento (cátodo) y una placa metálica (ánodo) en su interior (fig. 2). El filamento se encuentra a una alta temperatura para inducir emisión térmica de electrones. Entre el filamento y la placa metálica hay una alta diferencia de potencial que acelera los electrones del filamento hacia la placa. Al colisionar contra la placa, los electrones desaceleran rápidamente [2]. Esta desaceleración produce radiación electromagnética, pero hay un voltaje mínimo que depende del material de la placa a partir del cual la radiación

* Correo institucional: ms.alvarezl@uniandes.edu.co

** Correo institucional: df.dorado@uniandes.edu.co

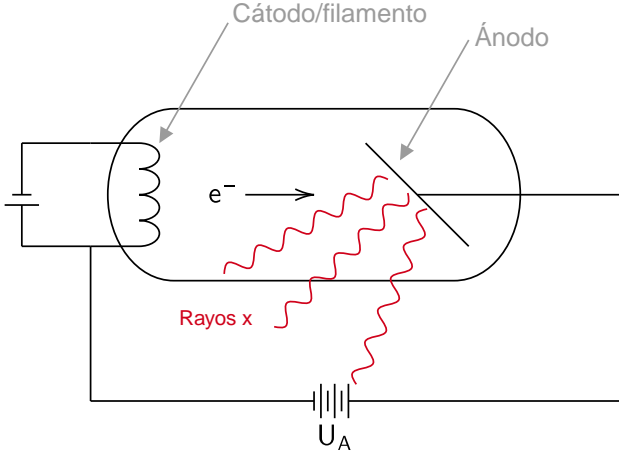


Figura 2. Esquema de un tubo de rayos X. Se emiten electrones termiónicos del filamento para ser acelerados por una diferencia de potencial U_A hacia un blanco metálico (ánodo). La desaceleración de los electrones debida al impacto con el ánodo produce rayos X.

producida son rayos X [5].

Algunas longitudes de onda se producen por *bremsstrahlung* (radiación de frenado), es decir debido a la desaceleración de los electrones. La radiación por *bremsstrahlung* produce un espectro continuo a partir de una longitud de onda, λ_{\min} , que depende del voltaje de aceleración U_A , de acuerdo a ley de Duane-Hunt:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_A} = \frac{12,40 \text{ \AA}}{U_A}, \quad (2)$$

donde h es la constante de Planck, c la velocidad de propagación de la luz en el vacío, e la carga fundamental y el voltaje de aceleración, U_A está en keV. El espectro de *Bremsstrahlung* se extiende hasta altas longitudes de onda (bajas energías) con intensidad decreciente [5]. El espectro de rayos X para el Cobre se muestra en la figura 3.

En la figura 3, además del continuo de *Bremsstrahlung*, se presentan una serie de líneas discretas de alta intensidad que reflejan la estructura atómica del ánodo y por ende conforman el espectro característico del material. Esta radiación característica se produce cuando un electrón con alta energía desprende otro electrón de un orbital interior en los átomos del ánodo. Esta vacancia es llenada por un electrón de los orbitales más externos, emitiendo un fotón con energía igual a la diferencia entre los niveles de la transición [5]. Este proceso se encuentra representado en la figura 4.

El otro fenómeno relativo a los rayos X que se investigará en este documento es la atenuación. La radiación electromagnética puede propagarse a través de distintos materiales e interactuar con las cargas en ellos a medida que lo hacen. La mayoría de materiales exhiben fenómenos de dispersión y absorción que conducen a una atenuación de la

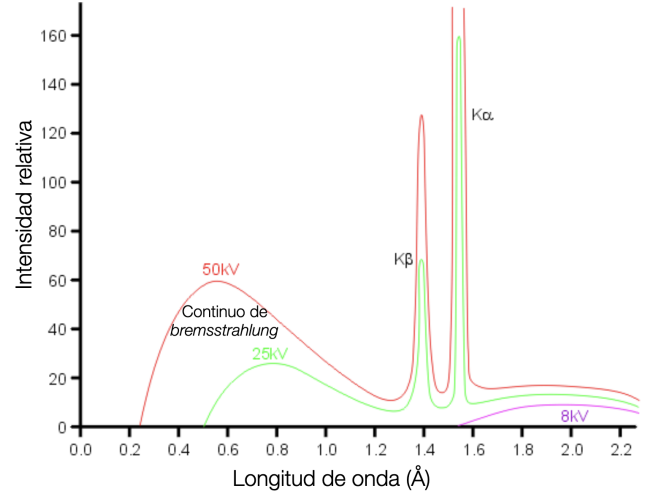


Figura 3. Espectro de rayos X para el cobre. La longitud de onda mínima varía con el voltaje de aceleración, de acuerdo a la ley de Duane-Hunt (imagen adaptada de [4]).

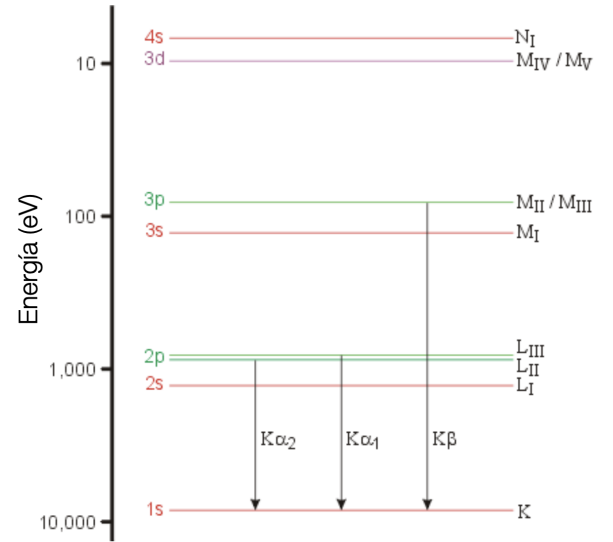


Figura 4. Transiciones en el espectro característico de rayos X para el Cobre (imagen adaptada de [4]).

radiación incidente. Esto es particularmente común en los metales, puesto que tienen cargas libres que pueden interactúan fácilmente con la radiación incidente [6]. Para esta clase de materiales, se observa una atenuación exponencial de la intensidad:

$$I = I_0 e^{-\mu(\lambda, Z)d}, \quad (3)$$

donde I_0 es la intensidad del rayo incidente, I la intensidad después de atravesar un material de espesor d y $\mu(\lambda, Z)$ es un coeficiente de absorción que depende de la longitud de

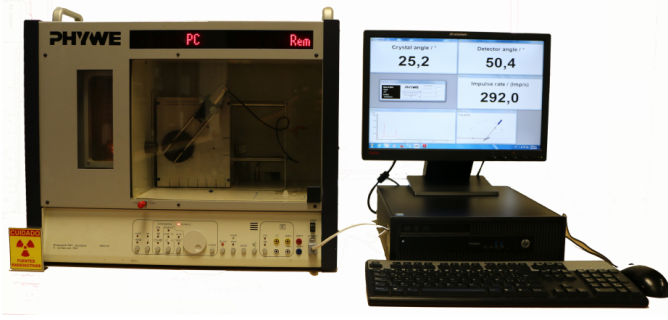


Figura 5. Montaje experimental para la práctica. A la izquierda podemos ver la unidad de Rayos X básica de 35 kV PHYWE, tubo contador con cable BNC y filtros y el tubo desmontable de rayos X de Cobre. Todo esto, conectado al computador con el Software especializado de la derecha (Imagen tomada de [1]).

onda de la radiación incidente y del material [9]. En esta investigación, la dependencia del coeficiente μ con el material se parametrizará a través del número atómico del material, Z . El tipo de dependencia que se explora experimentalmente es de la forma

$$\frac{\mu}{\rho} = k\lambda^3 Z^3, \quad (4)$$

donde ρ es la densidad del material y k es una constante por determinar.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

El principal instrumento para las mediciones y la producción de rayos X es la unidad de rayos X PHYWE, mostrada en la figura 5. Para producir los rayos X, esta unidad cuenta con tubos intercambiables con ánodos de distintos materiales. La unidad permite modificar el voltaje de aceleración U_A entre 0,0 kV y 35,0 kV y la corriente de haz entre 0,00 mA y 1,00 mA. Adicionalmente, la unidad permite montar diferentes cristales en una plataforma que controla electrónicamente la orientación del cristal. Para todas las mediciones se usó un tubo cuyo ánodo está hecho de Cobre y un cristal de fluoruro de litio (LiF).

Por otra parte, la detección de rayos X en la unidad se hace a través de un tubo contador de Geiger-Müller montado sobre un brazo que rota en torno al cristal. La unidad cuenta con un goniómetro electrónico que permite medir el ángulo del tubo contador en relación a la dirección del rayo incidente. Cabe resaltar que la manipulación por parte del investigador o la investigadora de los tubos y el cristal se reduce a ubicarlos dentro de la unidad; la rotación de los elementos se controla electrónicamente mediante a través de los controles y selectores en la unidad o desde el software especializado en un computador.

Previo a realizar mediciones propiamente dichas, es necesario calibrar los ángulos en la unidad. El procedimiento

de calibración se encuentra descrito en [1]. No obstante, el procedimiento descrito en aquella referencia recomienda fijar el cero cuando el ángulo del cristal es igual al negativo de la desviación, lo cual resulta en duplicar el error. En realidad, se debería fijar el cero cuando el ángulo del cristal es igual a la desviación misma.

Posterior a la calibración, la toma de datos se controlan desde el software especializado en un computador conectado a la unidad de rayos X. La unidad de rayos X mide los ángulos del cristal y del contador y la intensidad de la radiación en conteos por segundo con el tubo de Geiger-Müller. Para cada uno de los fenómenos que se pretende estudiar se hicieron uno o más barridos del ángulo del cristal. En todos los casos, los ángulos del tubo y el cristal mantuvieron un acople 2:1. Los valores del ángulo del cristal, voltaje de aceleración y corriente del haz para cada toma de datos se resumen en la tabla I.

En esta investigación se estudian 4 fenómenos. El primero es la producción de rayos X. En particular, es de interés analizar el espectro característico del cobre. Para ello, simplemente se hace un barrido del ángulo del cristal. El siguiente fenómeno es la atenuación. Para estudiarle, se colocaron filtros de distintos espesores y materiales entre el cristal y el contador de Geiger-Müller. Para cada material y espesor se hizo un barrido con los parámetros indicados en la tabla I. Adicionalmente, se buscó corroborar la ley de Duane-Hunt. Para ello, se hace un barrido del ángulo para cada voltaje en un rango. Finalmente, se estudió también la dependencia de la intensidad con el voltaje de aceleración y la corriente del haz. Para ello, el barrido angular se hizo para varios voltajes, a corriente constante y para varias corrientes, a voltaje constante. Los parámetros de estos barridos se encuentran en las últimas dos filas de la tabla I.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para cumplir con los objetivos de la investigación es necesario poder traducir el ángulo del cristal en una longitud de onda. La relación entre estas cantidades es la ley de Bragg (ec. 1). Para un cristal de LiF, la distancia entre planos del cristal es $d = 2,014 \text{ \AA}$ [8]. De este modo, se produce el espectro característico del cobre de la figura 6. Note que la variable en el eje horizontal no es la longitud de onda sino un múltiplo entero de la longitud de onda. Esto se debe a que los datos incluyen dos órdenes de difracción. Al rededor de $1,5 \text{ \AA}$ se encuentran las líneas K_α y K_β con $n = 1$ y al rededor de $3,0 \text{ \AA}$ se encuentra las mismas líneas, pero con $n = 2$.

Para longitudes de onda cercanas a cero se puede apreciar un pico de intensidad. Sin embargo, esto no quiere decir que se haya detectado radiación con esta longitud de onda. Por el contrario, esto corresponde a radiación en todo el espectro producido por el tubo de rayos X que no fue colimada lo suficiente para poder interactuar con el cristal

Tabla I. Parámetros de las mediciones para cada fenómeno a estudiar. θ_i y θ_f son los ángulos inicial y final, respectivamente, del barrido del ángulo del cristal. $d\theta$ es la resolución angular del barrido. U_A es el voltaje de aceleración de los electrones en el tubo de rayos X, I_h es la corriente de haz y τ es el tiempo de integración para las mediciones.

Estudio	θ_i (°)	θ_f (°)	$d\theta$ (°)	U_A (kV)	I_h (mA)	τ (s)
Producción	3,0	55,0	0,1	35,0	1,00	3
Atenuación	6,0	16,0	0,5	30,0	1,00	50
Duane-Hunt	3,0	21,0	0,1	13,0 – 35,0 ^a	1,00	2
U_A	19,0	24,0	0,1	11,0 – 35,0 ^b	1,00	2
I_h	19,0	24,0	0,1	35,0	0,10 – 1,00 ^c	2

^a en pasos de 2,00 kV

^b en pasos de 3,00 kV

^c en pasos de 0,10 mA

y por ende es detectada directamente por el tubo contador. Por ende este pico se puede ignorar en el análisis de las longitudes de onda.

Adicionalmente, cerca a $0,5 \text{ \AA}$ se observa radiación con una intensidad apreciable, lo cual corresponde al continuo de Bremsstrahlung. A mayores longitudes de onda, se encuentran cuatro picos. Como se mencionó anteriormente, estos corresponden a distintos órdenes de difracción de las líneas K_α y K_β . La de menor longitud onda en cada orden de difracción corresponde a K_β , de acuerdo a la figura 3. Con los datos obtenidos es posible calcular la energía de estas transiciones usando la ley de Bragg y la relación $E = h\nu$, donde h es la constante de Planck y ν es la frecuencia del fotón emitido:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{nhc}{d \sin \theta}. \quad (5)$$

La tabla II resume las energías calculadas para los espectros obtenidos.

La figura 4 muestra que hay dos transiciones K_α , pero sus longitudes de onda no pueden ser resueltas con un cris-

Tabla II. Energías de las transiciones

Línea	Energía teórica (eV)	n	Energía experimental (eV)
K_α	8038 ^a	1	8010 ± 20
		2	8024 ± 3
K_β	8905	1	8830 ± 40
		2	8878 ± 8

^a K_α en realidad corresponde a dos transiciones. En esta tabla se registra el promedio de las energías de las dos transiciones.

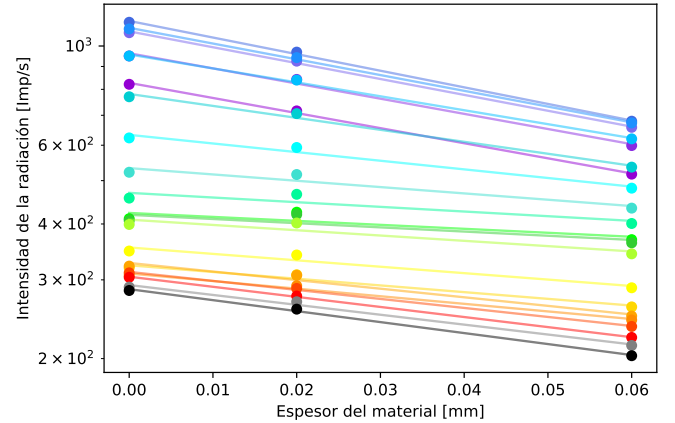


Figura 7. Intensidad de la radiación de rayos X (en escala logarítmica) en función del espesor del obstáculo de Aluminio. Los colores indican la longitud de onda, donde el violeta representa menor longitud de onda y el rojo mayor longitud de onda.

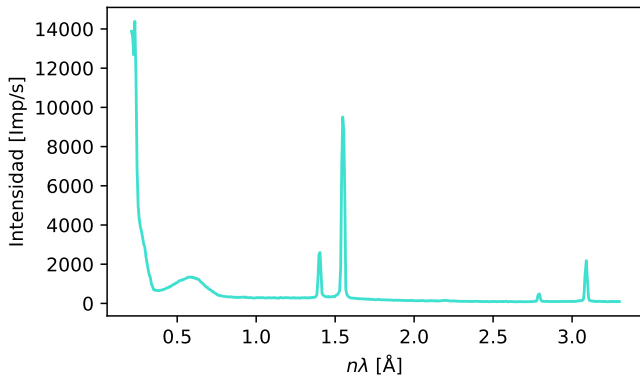


Figura 6. Intensidad de la radiación de rayos X emitida por un tubo con ánodo de Cobre en función de un múltiplo entero de la longitud de onda $n\lambda$. El voltaje de aceleración U_A fue de 35,0 kV.

tal de fluoruro de litio. En consecuencia, el valor teórico para K_α se toma como el promedio de las dos energías. Al tomar el promedio de las energías para distintos órdenes de difracción, la desviación del valor experimental de K_α con el teórico es de 23 eV y para K_β es de 51 eV. En ambos casos, los valores experimentales se encuentran por fuera del rango de incertidumbre de las mediciones.

Por otra parte, en términos de la atenuación, el decaimiento exponencial de la intensidad con el espesor se puede

evidenciar en las figuras 7 y 8. La primera corresponde al Aluminio y, la segunda, al Zinc. Note que si bien la tendencia parece lineal, en realidad se trata de una tendencia exponencial, pues la intensidad está representada en escala logarítmica. En la figura 8 el ajuste no es apropiado para algunas longitudes de onda. Se evaluó la posibilidad de que estos errores estuviesen relacionados con la radiación de fondo, pero esta fue consistentemente cero cuando fue medida. Este error tampoco se puede asociar a fenómenos no lineales, puesto que el Zinc es un metal.

En las figuras 7 y 8, la pendiente de las rectas corresponde al coeficiente de absorción lineal, μ definido en la introducción. De estas figuras es evidente que μ depende de la longitud de onda. No obstante, para analizar la relación entre estas variables, es necesario analizar una gráfica del coeficiente de absorción lineal en función de la longitud de onda. Estos datos se encuentran en la figura 9. De esta figura es evidente que estos datos no siguen una relación semejante a (4), pues el coeficiente de absorción no es una función estrictamente creciente de la longitud de onda, como sugiere la ecuación mencionada. Cabe resaltar que los valores obtenidos para el coeficiente de absorción pueden ser errados, puesto que el conjunto de espesores es reducido. Por restricciones temporales, no fue posible realizar mediciones para más espesores. Se espera que, teniendo datos para una mayor cantidad de espesores para ambos el Aluminio y el Zinc, la pendiente de la función semilogarítmica se vea suavizada (en ambos casos, contamos con sólo tres datos por cada longitud de onda, donde uno de ellos corresponde al caso no atenuado) y, por tanto, se pueda visualizar una relación lineal entre μ y λ^3 . En el caso mostrado, ni siquiera es factible determinar un exponente para λ que explique adecuadamente la relación. No obstante, sí podemos hablar sobre el efecto del número atómico en el coeficiente de atenuación. Es de esperarse que, si aumenta Z , el coeficiente de atenuación lo haga también. Note que, para el Aluminio, $Z = 13$; mientras que, para el Zinc, $Z = 30$. De la figura 9, es posible ver que el coeficiente de atenuación del Zinc es bastante mayor que el del Aluminio. Por lo tanto, hay una clara dependencia entre Z y el coeficiente de atenuación de un material en particular, el cual debe determinarse teniendo en cuenta varios espesores del mismo.

En cuanto al estudio de la Ley de Duane-Hunt, se buscaba determinar la constante que relaciona la longitud de onda mínima a partir de la cual se comienza a producir Brehmstrahlung, con el inverso de los voltajes U_A estudiados. En este caso, entre 13 keV y 35 keV. Dicha relación es lineal; por lo tanto, al graficar los datos, esperamos obtener una tendencia lineal. Los datos obtenidos se presentan en la imagen 10.

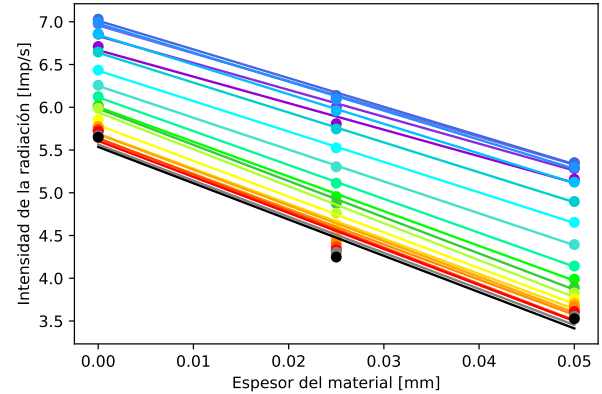


Figura 8. Intensidad de la radiación de rayos X (en escala logarítmica) en función del espesor del obstáculo de Zinc. Los colores indican la longitud de onda, donde el violeta representa menor longitud de onda y el rojo mayor longitud de onda.

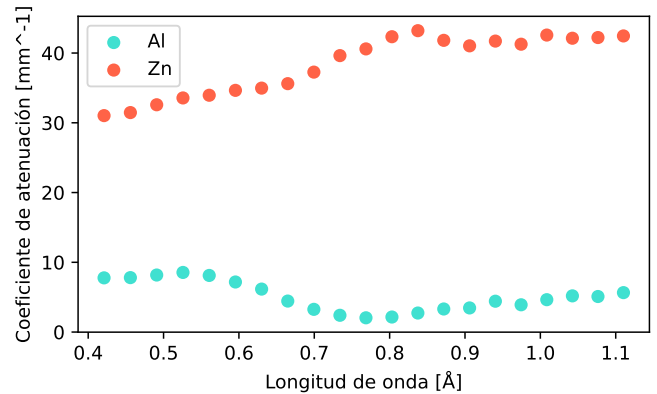


Figura 9. Coeficiente lineal de absorción (μ) del Aluminio y el Zinc en función de la longitud de onda de la radiación analizada

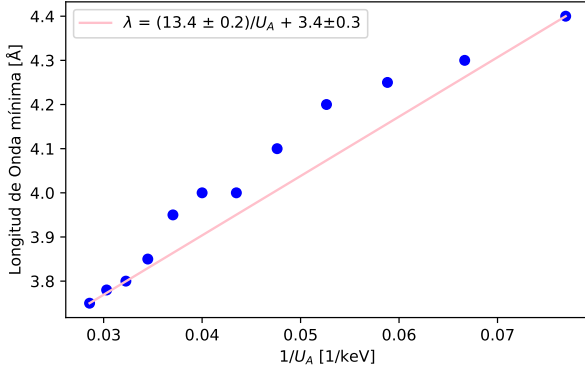


Figura 10. Longitud de onda mínima, en Angstrom, en función del inverso de los voltajes U_A del tubo. Los parámetros de la regresión lineal ajustada se presentan en la esquina superior izquierda.

Con los datos graficados, se procedió a realizar un ajuste lineal entre ambas cantidades, tal que la pendiente correspondiera a la constante a hallar. De acuerdo con la ley de Duane-Hunt, de la ecuación (2), esta pendiente debe ser de $12,40 \text{ \AA}$. Para los datos obtenidos, la pendiente fue de $13,44 \pm 0,2 \text{ \AA}$. Comparado con el valor teórico, este es un muy buen resultado experimental.

Asimismo, la ley de Duane-Hunt se puede relacionar con $E = h\nu$, tal que $eU_A = hc/\lambda_{\min}$, con e la carga del electrón, c la velocidad de la luz y h la constante de Planck. Utilizando el valor de la pendiente calculado previamente y las constantes e y c , se obtuvo que el valor de la constante de Planck era de $h = 3,13 \times 10^{-34} \pm 2,44 \times 10^{-34} \text{ J s}$. Considerando el valor teórico, tenemos que $h = 6,34 \times 10^{-34} \text{ J s}$. Note que el valor experimental obtenido se encuentra en el mismo orden de magnitud que el teórico y, de hecho, ambos son bastante cercanos. Lo anterior es el resultado de que el equipo PHYWE toma mediciones con gran precisión y una baja incertidumbre de medición. La diferencia entre el valor obtenido y el esperado se debe, seguramente, a errores en la calibración del aparato, o a dificultades al determinar el valor exacto en la longitud de onda para la cual se comienza a producir Brehmstrahlung.

El otro elemento por estudiar es la dependencia de la intensidad con el voltaje de aceleración y la corriente del haz. En [1] se sugiere que la intensidad varía con la corriente y el voltaje a través de

$$I = bI_h(U_A - U_K)^{3/2}, \quad (6)$$

donde I es la intensidad, b es una constante de proporcionalidad, I_h es la corriente del haz, U_A el voltaje de aceleración y U_K es el potencial de ionización del orbital K del cobre. El valor de U_K se toma como $9,979 \text{ kV}$. Para verificar experimentalmente esta relación se toma la intensidad de las líneas K_α y K_β para los distintos valores de U_A e I_h . Con el fin de determinar el exponente de una relación de la forma

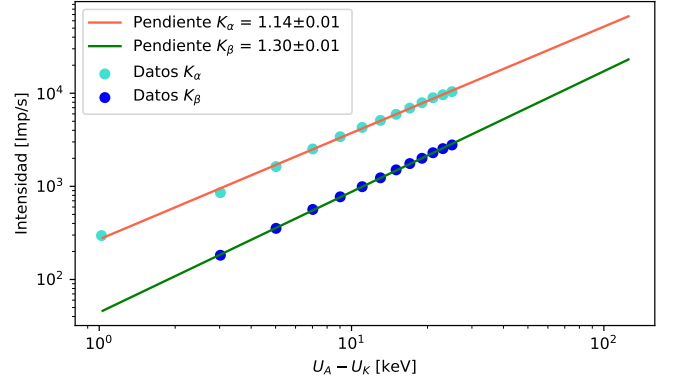


Figura 11. Intensidad de rayos X en función de $U_A - U_K$, donde U_A es el voltaje de aceleración y $U_K = 9,979 \text{ kV}$ es el potencial de ionización del orbital K del cobre (escala logarítmica).

$I = k(U_A - U_K)^\alpha$, se representa en una gráfica con escalas logarítmicas la intensidad en función de $(U_A - U_K)$, como en la figura 11. Los datos indican que el exponente no es $3/2$ sino $1,14 \pm 0,01$ (para la línea K_α) o $1,30 \pm 0,01$ (para la línea K_β). Esto representa una desviación significativa, pues el valor teórico no está en el rango de incertidumbre del valor experimental.

Note que, para los datos de K_β , tenemos un valor de intensidad menos (el que correspondería a 11 kV). Esto se debe a que, cuando tomamos los datos para esta parte del experimento, el equipo PHYWE no se encontraba adecuadamente calibrado (debido a que las instrucciones eran equivocadas) y, por tanto, la desviación del ángulo 0° de casi 2.2° hacía que no se alcanzara a visualizar esta línea. No obstante, en el barrido angular realizado para analizar la radiación de Brehmstrahlung y la ley de Duane-Hunt se alcanzaba a visualizar, al final del espectro, el pico correspondiente a K_β para valores de voltaje entre 13 kV y 35 kV . Por lo tanto, tomamos estos datos para poder realizar el análisis correspondiente a la intensidad de la radiación de K_β en función de un voltaje variable U_A .

Por otro lado, es posible evaluar la linealidad con I_h a través de la figura 12. La pendiente de estas regresiones es proporcional a la constante b en la ecuación 6. Para K_α , la pendiente es de $8800 \pm 200 \text{ Imp s}^{-1} \text{ mA}^{-1}$, mientras para K_β es de $2700 \pm 70 \text{ Imp s}^{-1} \text{ mA}^{-1}$. Puesto que el voltaje de aceleración es igual para ambas líneas, no es posible definir un único valor de b .

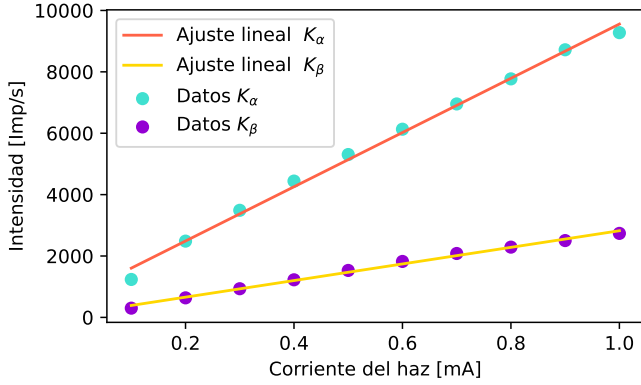


Figura 12. Intensidad de rayos X en función de la corriente del haz. Se incluyen regresiones lineales para las dos líneas del espectro característico del Cobre.

IV. CONCLUSIONES

El propósito de esta investigación era caracterizar cuatro fenómenos relativos a los rayos X. El primero: su producción por Bremsstrahlung y la radiación característica del material de ánodo. Los datos experimentales permiten evidenciar el continuo de Bremsstrahlung y los picos K_α y K_β del cobre. Sin embargo, las energías de estas transiciones se encuentran desviadas en relación al valor teórico, incluso teniendo en cuenta el rango de incertidumbre de las medi-

ciones. Esto configura un error sistemático, probablemente asociado a un error de calibración.

El segundo fenómeno que se buscaba estudiar era el de atenuación. En este caso, los datos exhiben el decaimiento exponencial con el espesor del filtro, en concordancia con la ecuación (3). Del experimento también es claro que el coeficiente de absorción lineal depende de la longitud de onda. Sin embargo, la relación no coincide con la ecuación (4), puesto que la relación propuesta es estrictamente creciente y los datos evidentemente no exhiben este comportamiento. Como sugerencia para futuras investigaciones, se deberían considerar más espesores y realizar algún ajuste polinomial distinto al aquí propuesto.

Por otra parte, también se buscó corroborar experimentalmente la ley de Duane-Hunt. Los datos exhiben el comportamiento funcional de la ley de Duane-Hunt, pero la constante detrás de los datos no coincide con el valor teórico. De hecho, la discrepancia entre experimento y teoría excede la incertidumbre del valor medido. Nuevamente, esto puede ser atribuido a un posible error en la calibración del equipo.

Finalmente, se buscó entender la relación entre la intensidad y el voltaje de aceleración y corriente del haz. Los datos muestran una relación lineal entre la intensidad y la corriente del haz. Asimismo, los resultados también permiten concluir que la intensidad es proporcional a una potencia de $U_A - U_K$, pero la potencia no coincide con la del modelo propuesto.

APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

Para el cálculo de los errores, utilizamos las facilidades computacionales que Python nos brinda. En particular, al reportar las incertidumbres en los valores de las pendientes y puntos de corte cuando hicimos regresiones lineales (por ejemplo, para la determinación de las constantes de la ley de Duane-Hunt y h), usamos la matriz de covarianza dada por `scipy`:

$$\begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_N) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_N, X_1) & \text{Cov}(X_N, X_2) & \dots & \text{Var}(X_N) \end{pmatrix}.$$

Note que los elementos de la diagonal de dicha matriz corresponden a la varianza de cada uno de los parámetros estimados en la regresión. Por lo tanto, sacando la raíz cuadrada de dicho resultado, es posible encontrar la incertidumbre en los parámetros calculados.

En cuanto a los valores basados en cálculos, como las

- [1] N. Barbosa. Rayos x, 2021.
- [2] R. Behling. *Modern Diagnostic X-Ray Sources: Technology, Manufacturing, Reliability*. CRC Press, 1st edition, 2015.
- [3] W. H. Bragg and W. L. Bragg. The reflection of x-rays by crystals. *Proceedings of the Royal Society A*, 88(605):428–438, 1913.
- [4] J. K. Cockcroft. Generation of x-rays.
- [5] E. Dietz and D. Preston. *The Art of Experimental Physics*. Wiley, 1st edition, 1991.
- [6] D. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 4th edition, 2017.
- [7] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, 8 edition, 2005.
- [8] PHYWE. Charakteristische röntgenstrahlung von kupfer, 2017.
- [9] S. Seltzer. Calculation of photon mass energy-transfer and mass energy-absorption coefficients. *Radiation Research*, 136(2):147–170, 1993.

energías de los picos K_α y K_β , usamos la fórmula

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial x_n}\right)^2}.$$

Aquí, $q = q(x_1, \dots, x_n)$ es la variable medida. En el caso particular de la energía, la incertidumbre depende del ángulo medido por el aparato. Dado

$$E = \frac{nhc}{d \sin \theta},$$

Nos queda que,

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = -\frac{nhc}{d} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

y entonces

$$\delta E = \left| \frac{\partial E}{\partial \theta} \right| \delta \theta = \frac{nhc}{d} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \delta \theta.$$

Usando los valores de los ángulos (en radianes) a los cuales ocurren los picos: En $n = 1$ para K_α , tenemos que el ángulo será 0,394rad y K_β ocurrirá a 0,355rad. En $n=2$, para K_α el ángulo será 0,874rad y K_β ocurrirá a 0,766rad. Usando estos valores en la fórmula descrita previamente, se obtienen las incertidumbres reportadas en la tabla II.