Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Guadalajara

Fundamentación de la robótica

Gpo 101

Ensayo

Control de posición pd=g(Q)

Presenta

Sofia Arias Villa A01642380

Profesores

Eduardo Francisco Sánchez Ocampo

Fecha de entrega

16 de marzo de 2024

Función de Lyapunov y Estabilidad

La función de Lyapunov es una herramienta matemática utilizada en el análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos, especialmente en sistemas no lineales. Permite determinar si un punto de equilibrio de un sistema es estable, asintóticamente estable o inestable sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales del sistema.

De la teoría clásica de la Mecánica, es sabido que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente hasta alcanzar el estado de equilibrio [1]. El segundo método de Lyapunov es una generalización de este hecho. Lyapunov demostró que ciertas otras funciones aparte de la función energía pueden ser usadas para la determinacioón de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema.

Los sistemas no lineales son más complejos y pueden mostrar comportamientos que los lineales no tienen. Por ejemplo, mientras un sistema lineal solo tiene un punto de equilibrio (un estado en el que el sistema se mantiene si no hay perturbaciones), un sistema no lineal puede tener varios. Además, en los sistemas lineales, si el punto de equilibrio es estable, el sistema siempre convergerá a él sin importar cómo empiece. En cambio, en los sistemas no lineales, hacia cuál equilibrio converge el sistema depende de su estado inicial. La estabilidad es una de las propiedades más importantes en los sistemas dinámicos, pero analizarla puede ser más o menos complicada dependiendo del tipo de sistema.

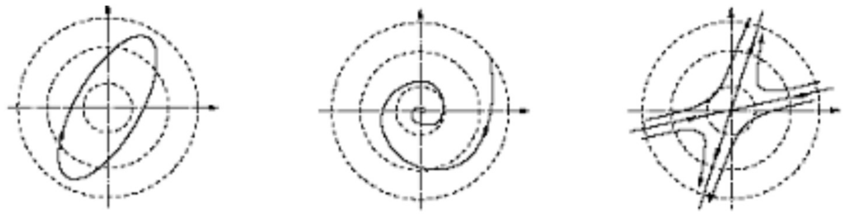
Las condiciones de Lyapunov son un conjunto de requisitos que debe cumplir una función $V(x)$ para garantizar la estabilidad de un punto de equilibrio en un sistema dinámico.

> La función $V(x)$ debe ser definida positiva en una región alrededor del punto de equilibrio:
>
> $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, y $V(0) = 0$.
>
> La derivada de $V(x)$ con respecto al tiempo debe ser definida negativa en la misma región:
>
> $$\dot{V}(x) = \nabla V \cdot f(x) < 0 \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

La desventaja de este método es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov por lo tanto hay que proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad.

Estabilidad según Lyapunov

Estabilidad	El sistema no diverge del equilibrio, pero tampoco converge a él; simplemente se mantiene cerca.
Estabilidad asintótica	El sistema no solo se mantiene cerca del equilibrio, sino que también converge a él con el tiempo.
Inestabilidad	El sistema diverge del equilibrio, incluso si inicialmente estaba cerca.



Estabilidad Lyapunov — Estabilidad asintótica — Inestabilidad

Controlador PID

El control PID (Proporcional, Integral, Derivativo) es el método de control más usado en la industria y es ampliamente aceptado en todo el mundo. El control PID combina tres acciones básicas: proporcional, integral y derivativa. Estas acciones se ajustan para obtener el mejor rendimiento del sistema.

Respuesta proporcional	Determina la relación entre la respuesta de salida y la señal de error. En general, aumentar la ganancia proporcional aumentará la velocidad de respuesta del sistema de control.
Respuesta integral	El componente integral suma el término de error en el transcurso del tiempo.
Respuesta derivativa	El componente derivado hace que la salida disminuya si la variable del proceso aumenta rápidamente. La respuesta derivada es proporcional a la tasa de cambio de la variable del proceso.

El control PID opera dentro de un sistema de ciclo cerrado, un mecanismo que utiliza sensores para medir la variable de proceso (como temperatura, presión o flujo) y proporcionar retroalimentación constante. Esta información se compara con el punto de referencia (el valor deseado), y la diferencia, conocida como error, es procesada por el algoritmo de control (compensador) para determinar la salida del actuador. El sistema debe manejar perturbaciones, que son señales externas (como una corriente de aire frío) que afectan la variable de proceso.

Función propuesta

El sistema que estamos analizando es un péndulo simple considerando la fricción cuya dinámica está dada por la siguiente ecuación:

$$mL^2\ddot{q} + b\dot{q} + mgL\sin q = \tau,$$

θ	ángulo del péndulo
m	Masa del péndulo
L	longitud del péndulo
b	coeficiente de fricción
g	aceleración debido a la gravedad
τ	torque de entrada aplicada al péndulo

Por simplificación vamos a igualar m=1, L=1, b=0.1 y 9.8=9.81.

Definimos las variables de estado:

$x_1 = q$

$x_2 = \dot{q}$

$\dot{x}_1 = x_2$

$e = \Theta_d - x_1$

$\dot{e} = -x_2$

La dinámica del sistema se puede reescribir en forma de espacio de estado:

$$\dot{x}_2 = -9.81 \sin(x_1) - 0.1x_2 + \tau$$

Proponemos un controlador:

$$\tau = -kpx_1 - kdx_2 + G(x_1)$$

kp y kd son las ganancias del controlador.

$G(x_1)$ es un término de compensación para eliminar la gravedad:

$$G(x_1) = -9.81 \sin(x_1)$$

Sustituyendo el controlador en la dinámica del sistema:

$$\dot{x}_2 = -9.81 \sin(x_1) - 0.1x_2 + (-kpx_1 - kdx_2 + 9.81 \sin(x_1))$$

Simplificando obtenemos:

$$\dot{x}_2 = -kpx_1 - (kd + 0.1)x_2$$

En forma matricial esto se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_p & 0 & -(K_d + 0.1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Función de lyapunov propuesta

$$V(x) = a\,(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

Análisis de $V(x)$:

$(1 - \cos x_1)$ es siempre no negativa y es 0 solo cuando $x_1 = 2\pi n$, donde n es un entero.

$\frac{1}{2}x_2^2$ es siempre positiva gracias al exponente cuadrado y es 0 solo cuando $x_2 = 0$.

por lo tanto $V(x)$ es definida positiva

Análisis de $V(x)$:

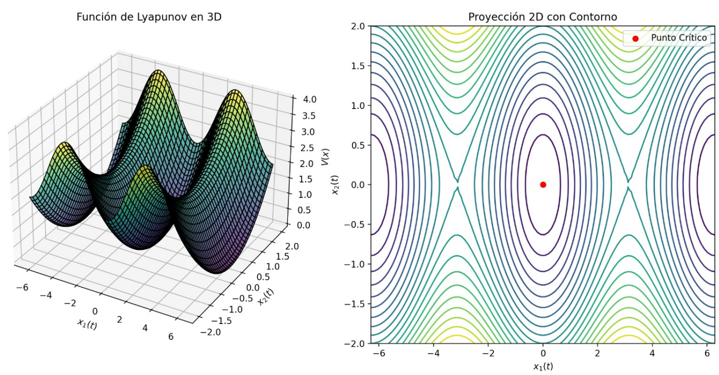
La derivada de la función $\dot{V}(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$ es:

$$\dot{V}(x) = ax_2 \sin(x_1) - ax_2 \sin(x_1) - bx_2^2$$

$\dot{V}(x) = -bx_2^2$ función definida semi-negativa porque b es una función con 2 variables.

Esta función en el eje $x_2 = 0$ hace que la derivada de la función sea 0, por lo que $\dot{V}(x)$ no es estrictamente menor a 0. Se puede concluir estabilidad pero no estabilidad asintótica en el origen.

Esto no quiere decir que el sistema no sea asintóticamente estable, simplemente no se puede probar esa estabilidad asintótica con esta función. Por lo tanto, tenemos que buscar otra ecuación de Lyapunov que nos dé más información sobre cómo se comporta nuestro sistema.



La gráfica nos dice que el sistema es estable pero no disipativo, lo que significa que las trayectorias no divergen, pero tampoco convergen exactamente al equilibrio.

La gráfica confirma que $V(x)$ es una función de Lyapunov que garantiza estabilidad en $(0, 0)$, pero no estabilidad asintótica.

Las oscilaciones en x_1 sugieren que el sistema puede mantener movimientos periódicos sin disipar energía.

Propuesta para una segunda función de Lyapunov

Añadir término cuadrático ponderado con la matriz P, donde P tiene que ser una matriz definida positiva.

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x^T P x$$

Donde $x = [x_1, x_2]^\top$. Para incluir el error e, podemos reescribir la función de Lyapunov como:

$$V(e, x_1, x_2) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Donde:

- $a > 0$ es una constante positiva.
- $P = P^T > 0$ es una matriz definida positiva.
- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ es el vector de estado.

Verificación de que $V(x)$ es definida positiva

- $(1 - \cos(x_1))$ es siempre no negativo, ya que $\cos(x_1) \leq 1$. Además, $1 - \cos(x_1) = 0$ solo cuando $x_1 = 0$.
- El término $\frac{1}{2}x^T P x$ es definido positivo porque P es definida positiva.

Por lo tanto, $V(x)$ es una función definida positiva y puede ser utilizada para el análisis de estabilidad.

Derivada de la función de Lyapunov

La derivada de la función de Lyapunov $V(e, x_1, x_2)$ con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(e, x_1, x_2) = \frac{d}{dt}\left[a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right]$$

Por lo tanto, la derivada de $V(e, x_1, x_2)$ es:

$$\dot{V}(e, x_1, x_2) = a\sin(x_1)x_2 + e(-x_2) + x_2(-K_p e - (K_d + 0.1)x_2)$$

Simplificando:

$$\dot{V}(e, x_1, x_2) = a\sin(x_1)x_2 - ex_2 - K_p e x_2 - (K_d + 0.1)x_2^2$$

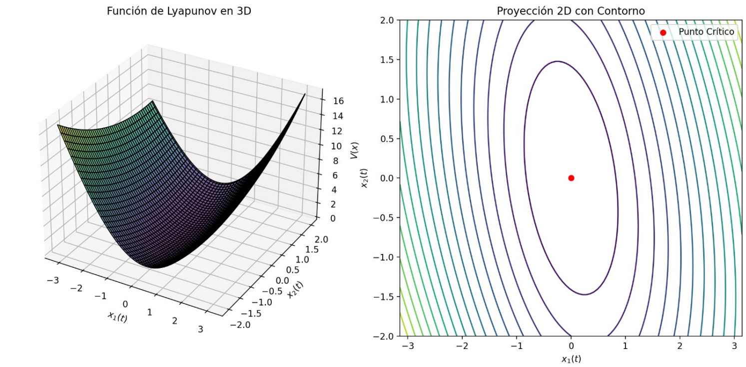
Agrupamos los términos que dependen de x_2:

$$\dot{V}(e, x_1, x_2) = (a\sin(x_1) - e - K_p e)\, x_2 - (K_d + 0.1)x_2^2$$

Para garantizar que $\dot{V}(e, x_1, x_2)$ sea definida negativa, observamos que:

1. El término $-(K_d + 0.1)x_2^2$ es siempre negativo, ya que $K_d + 0.1 > 0$. 2. Los términos $a\sin(x_1)x_2$, $-ex_2$, y $-K_p e x_2$ pueden cancelarse o dominarse si elegimos K_p y K_d adecuadamente.

Por lo tanto, $\dot{V}(e, x_1, x_2)$ es definida negativa, lo que garantiza la estabilidad asintótica del sistema.



Bibliografía

[1] Explicación sobre el controlador PID y la teoría. (2006, 31 agosto). NI. https://www.ni.com/es/shop/labview/pid-theory-explained.html?srsltid=AfmBOopNWZ7LXbJ4xDZgMyW8cHP0V1P66Bbn7M0xQEZRS53j4ht9qruX

[2] Wu, Q. (2018). Adaptive Sliding Mode Neural Network Control for Nonlinear Systems (Y. Li, J. Zhang, & W. Qiong, Eds.). Elsevier Science. https://www.sciencedirect.com/book/9780128153727/adaptive-sliding-mode-neural-network-control-for-nonlinear-systems

[3] UNR Ingeniería. (s. f.). Análisis de la estabilidad interna de los sistemas no lineales. https://www.fceia.unr.edu.ar/dsf/files/A_EstSNL.PDF