Задача: Численное дифференцирование: конечные разности

Софиа Белен Лопес Висенс
Группа Б02-903
Московский физико-технический институт

17.09.2021

Пусть $f(x) = x + \cos x$. Найдём $f''(x)$ сначала схемой первой порядка и затем схемой второго порядка точности.

1 Схема 1-го порядка:

$$f_i''(x) = af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_i$$

$$f_i''(x) = af(x-2h) + bf(x-h) + cf(x)$$

$$\begin{aligned} f'' = a &\left(f - 2hf' + \frac{4h^2}{2}f'' - \frac{8h^3}{6}f''' + \frac{16h^4}{24}f^{IV} + o(h^4)\right) \\ &+ b\left(f - hf' + \frac{h^2}{2}f'' - \frac{h^3}{6}f''' + \frac{h^4}{24}f^{IV} + o(h^4)\right) \\ &+ cf \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -2a-b=0 \\ 4h^2a + h^2b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ b=-2a \\ 4h^2a - 2h^2a = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{h^2} \\ b = -\frac{2}{h^2} \\ c = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

$$f_i''(x) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} - \frac{8h}{6}f''' + \frac{2h}{6}f''' + o(h)$$

$$f_i''(x) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} - hf''' + \underbrace{o(h)}$$

$$f_i''(x) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} - hf'''(\xi), \qquad \xi \in [x-2h, x]$$

$$\boxed{f_i''(x) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2}}$$

$$\delta = |hf'''(\xi)| \le hM_3, \qquad M_3 = \max_{x\in[x-2h,x]} |f'''(x)|$$

$$\varepsilon_c = \Delta\left(\frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2}\right) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta f + 2\Delta f + \Delta f\right) = \frac{4E}{h^2}$$

$$\varepsilon_h' = \left(hM_3 + \frac{4E}{h^2}\right)_h' = M_3 - \frac{8E}{h^3} = 0$$

$E = 2^{-53}$, $M_3 = 1$

$$\boxed{h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{8E}{M_3}} \approx 9.28 \cdot 10^{-6}}$$

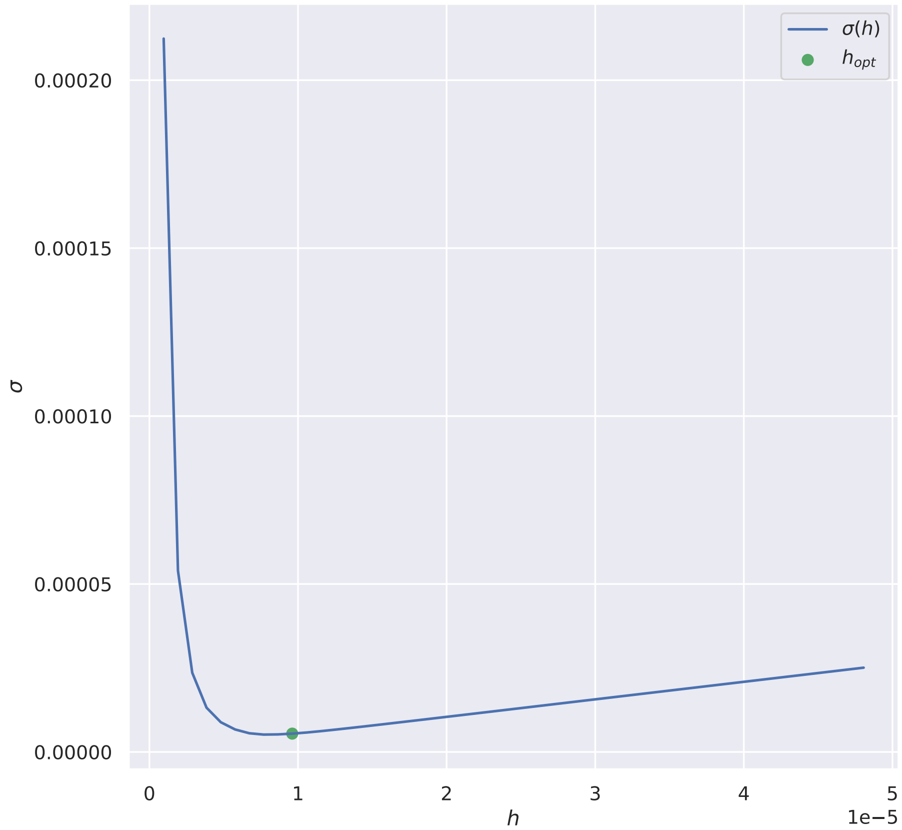

Figure 1: Погрешность метода 1-го порядка в зависимости от шага интегрирования

2 Схема 2-го порядка:

$$f_i''(x) = af_{i-1} + bf_i + cf_{i+1}$$

$$
\begin{aligned}
f'' = a&\left(f - hf' + \frac{h^2}{2}f'' - \frac{h^3}{6}f''' + \frac{h^4}{24}f^{IV} + o(h^4)\right) \\
&+ bf \\
&+ c\left(f + hf' + \frac{h^2}{2}f'' + \frac{h^3}{6}f''' + \frac{h^4}{24}f^{IV} + o(h^4)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + c = 0 \\ a\frac{h^2}{2} + c\frac{h^2}{2} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = c = \frac{1}{h^2} \\ b = -\frac{2}{h^2} \end{cases}
$$

$$
f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+i}}{h^2} - \frac{h}{6}f''' + \frac{h}{6}f''' + 2 \cdot \frac{h^2}{24}f^{IV} + \underbrace{o(h^2)}
$$

$$
f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+i}}{h^2} + \frac{h^2}{12}f^{IV}(\xi), \qquad \xi \in [x-h, x+h]
$$

$$
\boxed{f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+i}}{h^2}}
$$

$$
\delta = \left|\frac{h^2}{12}f^{IV}(\xi)\right| \leq \frac{h^2 M_4}{12}, \qquad M_4 = \max_{\xi\in[x-h,x+h]} f(\xi)
$$

$$
\varepsilon_C = \Delta\left(\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+i}}{h^2}\right) = \frac{4\Delta f}{h^2} \leq \frac{4E}{h^2}
$$

$$
\varepsilon_h' = \left(\frac{h^2 M_4}{12} + \frac{4E}{h^2}\right)'_h = \frac{M_4 h}{6} - \frac{8E}{h^3} = 0
$$

$$
\boxed{h_{opt} = \sqrt[4]{\frac{48E}{M_4}} \approx 2.63 \cdot 10^4}
$$

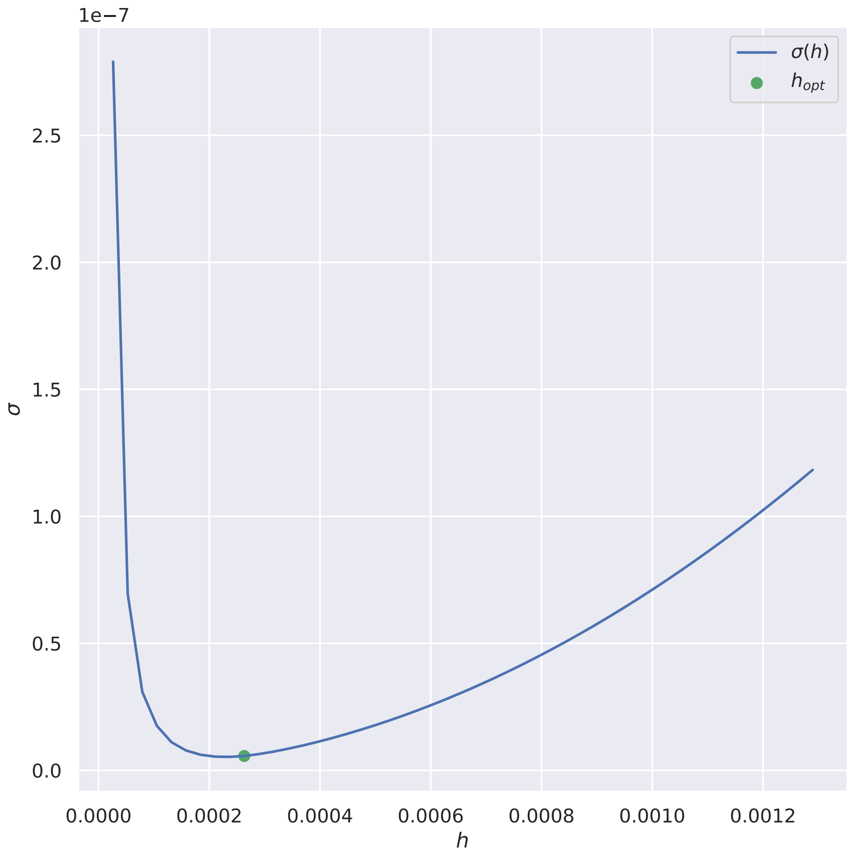

Figure 2: Погрешность метода 2-го порядка в зависимости от шага интегрирования