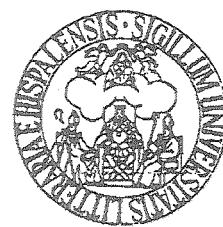


# TESIS DOCTORAL



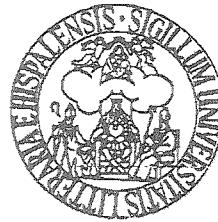
## CONTROL ÓPTIMO Y ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ DE SISTEMAS NO LINEALES. APLICACIONES A SISTEMAS ELECTROMECÁNICOS.

Carlos Vivas Venegas

Sevilla, Mayo de 2004



TESIS DOCTORAL



CONTROL ÓPTIMO Y ROBUSTO  $\mathcal{H}_{\infty}$  DE  
SISTEMAS NO LINEALES. APLICACIONES A  
SISTEMAS ELECTROMECÁNICOS.

por

Carlos Vivas Venegas

Ingeniero Industrial por la Escuela Superior de Ingenieros  
de la Universidad de Sevilla

Presentada en la  
Escuela Superior de Ingenieros

de la  
Universidad de Sevilla

para la obtención del  
Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, Mayo de 2004



## TESIS DOCTORAL

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
CATEDRA DE MATEMÁTICAS

Queda radicada en la sede MaríaDoctoral  
el folio 188 número 22 del libro

correspondiente a

Sevilla, 08-06-04

Firma del licenciado que pide

*Carlos Vivas*

### CONTROL ÓPTIMO Y ROBUSTO $H_\infty$ DE SISTEMAS NO LINEALES. APLICACIONES A SISTEMAS ELECTROMECÁNICOS.

Autor: Carlos Vivas Venegas

Director: Francisco Rodríguez Rubio

*Carlos Vivas Venegas*

*F. Rodríguez Rubio*

*Fco. Rodríguez Rubio*

A mi familia

# Agradecimientos

Han sido numerosas las personas que han contribuido a la formulación y desarrollo de los contenidos de esta Tesis. En primer lugar, quisiera hacer constar mi sincero agradecimiento a mi director de Tesis, el profesor Francisco Rodríguez Rubio, al cual debo el haberme embarcado en la tarea de iniciar este trabajo y sin cuyo decidido apoyo y dedicación no hubiese podido llevar a término.

Me gustaría del mismo modo mostrar mi agradecimiento a los miembros del grupo de investigación al que pertenezco por su apoyo, paciencia, y comprensión, tanto en los aspectos técnicos de desarrollo de esta Tesis, como en el no menos importante aspecto humano y personal de nuestra relación. Me gustaría hacer mención especial de los profesores Manuel Gil Ortega, Manuel Vargas, Fernando Castaño, Manuel López, Manuel R. Arahal y Francisco Salas, todos ellos desinteresados revisores de muchos de los contenidos de este trabajo.

Asimismo, quiero agradecer el apoyo y la ayuda recibida por parte de diferentes personas pertenecientes al departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. En especial, he de dar gracias a los profesores Javier Aracil y Francisco Gordillo, por las valiosas sugerencias y comentarios que a lo largo de estos años han contribuido, directa o indirectamente, a la elaboración de este trabajo de Tesis.

Mención especial merece el personal de secretaría del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática: Silvia Vallejo, Pilar Mellado y Manuel Martínez, por su diligente y eficaz trabajo administrativo.

Por último, aunque no por ello menos importante, quiero expresar mi especial agradecimiento a mi familia y amigos por el apoyo incondicional que siempre he recibido de ellos.

Carlos Vivas Venegas

# Resumen

La teoría de control automático ha experimentado un notable desarrollo en los últimos tiempos especialmente en el campo de los sistemas no lineales. Son aportaciones relativamente recientes los paradigmas de control basados en *pasividad*, *teoría de sistemas disipativos* o *funciones de Lyapunov para control*<sup>1</sup>.

Otras metodologías, como el control óptimo  $\mathcal{H}_2$  o el control robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , son hoy día técnicas maduras para las cuales se dispone de eficientes herramientas matemáticas de diseño, especialmente en el marco lineal. Existen además notables aplicaciones de estas metodologías a problemas prácticos en diferentes campos, que van desde la industria de procesos, a aplicaciones de la industria aeronáutica. En todos ellos, las técnicas de control mencionadas han exhibido notables resultados, mostrando que es posible incluir de forma conveniente en su formulación, aspectos tales como la robustez ante incertidumbres de modelado, o rechazo robusto de perturbaciones, tan importantes en las aplicaciones prácticas.

Sin embargo, para poder emplear estas técnicas de control, es necesario que los sistemas a controlar sean lineales o puedan ser razonablemente descritos mediante un sistema o conjunto de sistemas lineales en una determinada zona de operación. Sistemas típicos de esta naturaleza aparecen, por ejemplo, en la industria de procesos donde generalmente las dinámicas asociadas pueden ser en muchas ocasiones aproximadas por sistemas lineales de primer o segundo orden y el punto de operación suele variar en tiempos característicos mucho mayores que el de la dinámica dominante del sistema.

En otras muchas ocasiones, sin embargo, la presencia de no linealidades en la dinámica del sistema hace que estas metodologías se muestren claramente inapropiadas. Es más, aún en el caso de conseguir diseños estables para el comportamiento de la planta, éstos suelen proporcionar soluciones excesivamente conservativas que a menudo obligan a relajar las exigencias de comportamiento sobre el sistema controlado, y distan por tanto de la solución óptima deseable. Parece pues razonable pensar, que para este tipo de sistemas es conveniente eludir la aproximación lineal anteriormente mencionada, y

---

<sup>1</sup>Traducción del término *Control Lyapunov function*

recurrir a un diseño del control directamente en el marco no lineal.

La extensión no lineal de las metodologías de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  y el control robusto  $\mathcal{H}_\infty$  están en la actualidad sólidamente fundamentadas, si bien no son frecuentes las aplicaciones a problemas de índole práctica. Esto es debido a que la formulación matemática de estos problemas en el marco no lineal conduce por lo general a expresiones matemáticas complejas que no permiten a menudo obtener soluciones explícitas que resulten fáciles de implementar. Dos son las estrategias habitualmente empleadas para dar solución a este problema: una posibilidad consiste en obtener una expresión aproximada del controlador, empleando generalmente un método numérico apropiado. Esta solución dista en ocasiones de ser satisfactoria, al obtenerse a menudo comportamientos de naturaleza excesivamente local. Otro enfoque consiste en simplificar y/o adaptar la dinámica no lineal del sistema, para obtener expresiones que puedan ser resueltas de forma explícita para el controlador. Esta aproximación no está exenta tampoco de inconvenientes ya que en ocasiones obliga a imponer simplificaciones excesivamente severas sobre la dinámica del sistema.

En este trabajo de tesis se propone seguir la segunda de estas metodologías restringiendo la aplicación a un tipo de sistemas en particular. Concretamente nos centraremos en la formulación de soluciones de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  y control robusto  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal para sistemas Euler-Lagrange. Dentro de esta categoría de sistemas podemos encontrar buena parte de los dispositivos electromecánicos empleados habitualmente en la industria tales como robots, sistemas de posicionamiento, ciertos tipos de robots móviles, e incluso algunos sistemas aeronáuticos simplificados. Las potenciales aplicaciones prácticas de estos métodos son pues notables.

Es bien conocido por otro lado, que las formulaciones de los problemas de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  y control robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , si bien son diferentes en cuanto a su naturaleza y los objetivos de control planteados, exhiben notables conexiones desde el punto de vista de su formulación. Así, la metodología de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  formula su objetivo de control en términos de la minimización de un índice de comportamiento integral cuadrático, sin incluir de forma explícita consideraciones acerca de la robustez del diseño, mientras que el control robusto  $\mathcal{H}_\infty$  en cambio plantea el objetivo de control en términos de una optimización de la relación de atenuación de energía de un determinado *canal entrada-salida*, permitiendo incorporar la noción de robustez en el diseño del control.

Estas particularidades junto con la mencionada similitud en la formulación matemática de ambos problemas, han motivado la aparición de estrategias de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  que ponderan los beneficios derivados de la aplicación de ambas técnicas de control. En este trabajo de tesis se presenta como contribución, una aproximación híbrida  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas dinámicos Euler-Lagrange formulada en el marco no lineal, junto con aplicaciones a un robot industrial, una plataforma giroestabilizada de dos grados de libertad y un robot de accionamiento directo también de dos grados de

libertad.

Otra contribución novedosa de este trabajo de tesis, reside en la formulación y resolución de una estrategia de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas Euler-Lagrange, empleando únicamente medidas de posición del sistema controlado. Este problema es de especial interés desde un punto de vista práctico, ya que buena parte de los sistemas electromecánicos usados habitualmente en la industria, incorporan únicamente sensores de posición, siendo necesario obtener las medidas de velocidad o incluso aceleraciones a partir de aquellas.

Las técnicas de control empleadas habitualmente para el control de sistemas electromecánicos requieren como mínimo la realimentación de las medidas de posición y velocidad de los grados de libertad del sistema. El procedimiento más corriente para obtener la medida de velocidad, suele ser la derivación numérica y posterior filtrado de la señal de posición. Esta heurística de estimación de la velocidad, conduce sin embargo en muchas ocasiones a una degradación notable del comportamiento del sistema controlado, llegando en ocasiones a inestabilizar el sistema. Dos son los motivos principales para este comportamiento: Por un lado, los ruidos eléctricos y errores de cuantización de las medidas de posición, tienden a amplificarse con el empleo de métodos de derivación numéricos que, si bien pueden atenuarse mediante filtrado, introducen retardos en la cadena de realimentación con el consiguiente deterioro del sistema controlado.

Por otro lado, con esta metodología de diseño, el controlador se obtiene generalmente bajo la hipótesis de un conocimiento perfecto de la medida de velocidad y, por tanto, no se contemplan en el proceso de síntesis del control las inevitables imperfecciones de estimación de la velocidad. Este desacople entre estimación de velocidad y diseño del control, conduce a deterioros imprevisibles en el comportamiento del sistema controlado.

Resulta por tanto interesante, integrar el proceso de estimación de la velocidad dentro de la estructura de control del sistema para poder garantizar, al menos bajo ciertas condiciones, un buen comportamiento del sistema controlado. En este sentido, la metodología de control robusto  $\mathcal{H}_\infty$  presentada como contribución en este trabajo de Tesis permite integrar una estructura de *observador del vector de estados* del sistema, con una ley de control que permite garantizar el nivel de rechazo de perturbaciones del problema  $\mathcal{H}_\infty$  estándar. Los resultados obtenidos son de naturaleza local y requieren que el error de estimación inicial sea suficientemente pequeño.

Para comprobar la validez de los controladores propuestos, los resultados han sido implementados sobre los sistemas experimentales previamente mencionados: un robot industrial, una plataforma giroestabilizada de dos grados de libertad y un robot de accionamiento directo también de dos grados de libertad, mostrando interesantes resultados en cada uno de los casos.

En una línea de trabajo, hasta cierto punto diferente de las descritas hasta este momento, abordamos en este trabajo de Tesis el problema de estabilización de oscilaciones con aplicaciones a sistemas electromecánicos subactuados.

En los últimos tiempos ha surgido un renovado interés por este problema, motivado por la necesidad de inducir comportamientos oscilatorios de determinadas magnitudes dinámicas en ciertas aplicaciones. Algunas de estas aplicaciones podrían ser, por ejemplo, los *robots caminantes*, donde las patas del robot que deben moverse según un movimiento alternativo o periódico para lograr un movimiento efectivo, o *inversores de potencia*, en los que la tensión o corriente son las magnitudes que deben oscilar de acuerdo con unas determinadas características.

Resulta interesante mencionar que la naturaleza del problema planteado es diferente del problema de seguimiento de trayectorias periódicas, para el cual es necesario proporcionar al sistema una referencia periódica exógena. En el problema de control de oscilaciones planteado, en cambio, el comportamiento oscilatorio surge de la aparición de un ciclo límite estable en la dinámica del sistema controlado mediante una ley de realimentación de estados apropiada. El objetivo de este problema es por tanto, inducir un comportamiento oscilatorio estructuralmente estable en el sistema controlado, sin referencias externas

Como aportación al problema del control de oscilaciones descrito, este trabajo de tesis adapta ciertas ideas asociadas a las técnicas de control hamiltoniano al marco de control  $\mathcal{H}_{\text{infty}}$  no lineal. Como se verá, la estructura de control resultante permite inducir comportamientos oscilatorios notablemente robustos, aún en presencia de perturbaciones acotadas  $L_2$ .

Adicionalmente, para la síntesis del control, se propone un método numérico basado en una adaptación para ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman del conocido método de Galerkin. La solución proporcionada por esta metodología tiene naturaleza local y ha sido validada, tanto de simulación como experimentalmente, sobre un péndulo de Furuta.

# Glosario

## Notación matemática

$\mathcal{L}_\infty$	Espacio de Banach de la funciones, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas.
$\mathcal{L}_2$	Espacio de Hilbert de la funciones matriciales, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} (F^T(x)F(x))dx < \infty$ .
$L_2$	$L_2[0, \infty)$ norma 2 extendida al intervalo $[0, \infty)$ .
$L_{2,T}$	$L_2[0, T)$ norma 2 extendida al intervalo $[0, T)$ .
$\ \cdot\ $	Norma 2
$\lambda_i(\cdot)$	i-ésimo autovalor de la matriz considerada.
$\rho(\cdot)$	Radio espectral de la matriz, o equivalentemente, valor absoluto del autovalor de mayor módulo de la matriz.
$\arg \min_u(f(x))$	Valor de $x$ que hace mínimo localmente el la función $f(x)$ .
$C^n$	Conjunto de funciones diferenciables $n$ veces.
$R > 0$	Matriz simétrica definida positiva.
$R \geq 0$	Matriz simétrica semidefinida positiva.
$I_{n \times n}$	Matriz identidad de orden $n$ .
$u$	Señal de <i>exceso de control</i> (vector).
$\tau$	Señal de par de control (vector).
$\omega$	Señal de perturbaciones que actúan a la entrada del sistema (vector).
$\gamma$	Factor de atenuación de perturbaciones para el problema $\mathcal{H}_\infty$ .
$\lambda$	Parámetro asociado a la familia de problemas $\mathcal{H}_2$ según la definición 5.2.
$q$	Vector de coordenadas articulares de un sistema electromecánico de $n$ grados de libertad dado por $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ .
$\hat{q}$	Vector de coordenadas articulares estimadas de un sistema electromecánico de $n$ grados de libertad dado por $\hat{q} = [\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n]^T$ .
$q_r$	Vector de coordenadas articulares de referencia de un sistema electromecánico de $n$ grados de libertad dado por $q_r = [q_{r1}, q_{r2}, \dots, q_{rn}]^T$ .
$p$	Vector de momentos generalizados dado por $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ en un sistema electromecánico de $n$ grados de libertad.
$\tilde{x}$	Vector de error de seguimiento sobre las coordenadas generalizadas: $\tilde{x} = q - q_r$

$\tilde{y}$	Vector de error de estimación de la posición articular: $\tilde{y} = q - \hat{q}$ .
$\xi$	Vector de estados estimado: $\xi = (\dot{\hat{q}}^T \quad \ddot{\hat{q}}^T)^T$
$\tilde{\xi}$	Vector de error de estimación de las coordenadas generalizadas: $\tilde{\xi} = (\dot{\tilde{y}}^T \quad \ddot{\tilde{y}}^T)^T$
$f(x, t)$	Función vectorial asociada a un sistema dinámico afín en la actuación y la perturbaciones de la forma $\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u$ .
$g_1(x, t)$	Función vectorial asociada a un sistema dinámico de la forma $\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u$ .
$g_2(x, t)$	Función vectorial asociada a un sistema dinámico de la forma $\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u$ .
$f_\lambda(x, t, \lambda)$	Función vectorial asociada al problema óptimo $\mathcal{H}_2$ auxiliar. (Ver definición 5.2).
$g_{2\lambda}(x, t, \lambda)$	Función vectorial asociada al problema óptimo $\mathcal{H}_2$ auxiliar. (Ver definición 5.2).
$h_{2\lambda}(x, t, \lambda)$	Función vectorial asociada al problema óptimo $\mathcal{H}_2$ auxiliar. (Ver definición 5.2).
$\frac{\partial V(x)}{\partial x}$	Vector gradiente de una función escalar $V(x)$ dado por $\left( \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \quad \dots \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right)$ .
$V_x(x)$	Equivalente a $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ .
$M(q)$	Matriz de inercia de un sistema dinámico Euler-Lagrange.
$C(q, \dot{q})$	Términos de Coriolis-centrífugos de un sistema Euler-Lagrange.
$G(q)$	Términos de gravedad de un sistema dinámico Euler-Lagrange.
$T(q, \dot{q})$	Energía cinética de un sistema dinámico Euler-Lagrange.
$V(q)$	Energía potencial de un sistema dinámico Euler-Lagrange.
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	Momentos de inercia respecto a los ejes principales $x, y, z$ .

## Abreviaturas y acrónimos

<i>DSP</i>	Digital Signal Processing.
<i>EDP</i>	Ecuación diferencial en derivadas parciales.
<i>EDO</i>	Ecuación diferencial ordinaria.
<i>EL</i>	Euler-Lagrange.
<i>GDL</i>	Grados de Libertad.
<i>HJB</i>	Hamilton-Jacobi-Bellman.
<i>HJBI</i>	Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs.
<i>ISA</i>	Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.
<i>MIMO</i>	Sistema multivariable: Múltiples entradas - múltiples salidas (Multiple input-Multiple Output).
<i>SISO</i>	Sistema monovariable: una entrada- una salida (Single input-Single Output).

# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Generalidades . . . . .	1
1.2. Perspectiva histórica . . . . .	1
1.3. Motivación y objetivos . . . . .	7
1.4. Estructura de la Tesis . . . . .	10
<b>2. El problema de Control Óptimo</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Resultados previos en control no lineal . . . . .	14
2.2.1. Estabilidad de sistemas no lineales . . . . .	15
2.2.1.1. Estabilidad de sistemas autónomos . . . . .	15
2.2.1.2. Estabilidad asintótica de sistemas conectados en cascada	16
2.2.2. Pasividad y disipatividad . . . . .	17
2.2.3. Pasividad y ganancia $L_2$ . . . . .	19

2.3. El Problema del control óptimo . . . . .	22
2.3.1. Cálculo de variaciones . . . . .	23
2.3.2. Programación dinámica . . . . .	26
2.3.3. Teoría de Juegos diferencial . . . . .	29
2.3.4. Control óptimo $\mathcal{H}_2$ de sistemas no lineales . . . . .	32
3. Control óptimo $\mathcal{H}_{\infty}$ y robustez de sistemas no lineales	35
3.1. Introducción . . . . .	35
3.2. Formulación general del problema . . . . .	36
3.2.1. Conexiones del Control $\mathcal{H}_{\infty}$ . . . . .	38
3.2.1.1. Control $\mathcal{H}_{\infty}$ y sistemas disipativos . . . . .	38
3.2.1.2. Control $\mathcal{H}_{\infty}$ y la teoría de juegos . . . . .	38
3.2.3. Solución del control $\mathcal{H}_{\infty}$ no lineal . . . . .	39
3.3.1. Solución de realimentación de estados . . . . .	39
3.3.2. El estado de información . . . . .	41
3.4. El control $\mathcal{H}_{\infty}$ lineal desde la formulación no lineal . . . . .	44
4. Sistemas Euler-Lagrange en Ingeniería de Control	47
4.1. Introducción . . . . .	47
4.2. Descripción Euler-Lagrange de Sistemas Electromecánicos . . . . .	48
4.3. Tipos de Sistemas electromecánicos . . . . .	52
4.4. Descripción de espacio de estados de la dinámica de error . . . . .	53

4.5. Incertidumbres de modelado . . . . .	56
5. Un enfoque paramétrico para Control Híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	
5.1. El Paradigma del Control Híbrido . . . . .	59
5.2. Formulación General del Problema de Control Híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	62
5.3. Una aproximación paramétrica al control híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	64
5.3.1. Procedimiento de resolución del problema híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	68
5.4. Control Híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas Euler-Lagrange . . . . .	71
5.4.1. Control $\mathcal{H}_2$ sin restricciones para sistemas Euler-Lagrange . . . . .	71
5.4.2. Una familia de controladores asintóticamente estabilizantes . . . . .	77
5.4.3. Una solución para el control $\mathcal{H}_2$ sin restricciones . . . . .	79
5.4.4. Solución de control Híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas Euler-Lagrange	82
5.4.4.1. Estructura del control híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas EL	93
5.5. Aplicaciones . . . . .	93
5.5.1. Aplicación a un robot de dos grados de libertad . . . . .	95
5.5.2. Aplicación a un robot industrial . . . . .	106
5.5.2.1. Descripción del robot . . . . .	106
5.5.2.2. Resultados de simulación . . . . .	107
5.5.3. Aplicación a una plataforma giroestabilizada . . . . .	111
5.5.3.1. Descripción de la plataforma . . . . .	111
5.5.3.2. Modelo de la Plataforma . . . . .	112

5.5.3.3. Resultados experimentales . . . . .	114
6. Contribuciones al Control $\mathcal{H}_\infty$ no lineal mediante ...	119
6.1. Introducción . . . . .	119
6.2. Una breve perspectiva histórica . . . . .	121
6.3. Formulación general del problema . . . . .	123
6.3.1. Solución para el caso de estado accesible . . . . .	125
6.3.2. Solución general mediante realimentación de la salida . . . . .	126
6.4. Aplicación a sistemas Euler-Lagrange . . . . .	130
6.4.1. Dinámica del sistema . . . . .	131
6.4.2. Estructura del observador de estados . . . . .	133
6.4.3. Estructura del control mediante realimentación de la salida . . . . .	134
6.4.3.1. Control $\mathcal{H}_\infty$ de realimentación de estados . . . . .	134
6.4.3.2. Control $\mathcal{H}_\infty$ de realimentación de la salida . . . . .	136
6.4.4. Ley de control . . . . .	143
6.5. Aplicaciones . . . . .	144
6.5.1. Introducción . . . . .	144
6.5.2. Aplicación a un robot de dos grados de libertad . . . . .	144
6.5.3. Aplicación a una plataforma giroestabilizada . . . . .	147
6.5.4. Aplicación a un robot industrial de 6 grados de libertad . . . . .	150
7. Control de oscilaciones $\mathcal{H}_\infty$ no lineal en sistemas ...	153

7.1. Introducción . . . . .	153
7.2. Formulación general del problema . . . . .	155
7.3. Obtención de órbitas armónicas . . . . .	157
7.3.1. Transformación en oscilador armónico para el sistema . . . . .	157
7.3.2. Robustificación de la ley de control de oscilaciones . . . . .	158
7.4. Solución de la inecuación de HJB para estabilización de oscilaciones . .	161
7.4.1. Aplicación del método de Galerkin para la solución de la in- ecuación de HJB . . . . .	161
7.5. Algunos comentarios adicionales . . . . .	165
7.6. Resultados experimentales y de simulación . . . . .	165
7.6.1. Descripción del péndulo de Furuta . . . . .	165
7.6.2. Simulaciones . . . . .	165
7.6.3. Resultados experimentales . . . . .	165
8. Conclusiones y desarrollos futuros	171
8.1. Contribuciones y conclusiones por capítulos . . . . .	171
8.2. Desarrollos futuros . . . . .	172
A. Fundamentos Matemáticos	175
A.1. Algunas identidades matriciales . . . . .	175
A.2. Normas . . . . .	176
A.2.1. Definición de norma . . . . .	177
A.2.2. Normas de vectores . . . . .	177

A.2.3. Normas de matrices . . . . .	177
A.2.4. Normas de señales . . . . .	179
B. Código de Maple para estabilización de oscilaciones ...	181
<b>Bibliografía</b>	<b>184</b>

# Índice de figuras

2.1. Disposición de dos sistemas no lineales en cascada . . . . .	17
2.2. Esquema entrada salida del sistema y balance energético . . . . .	20
2.3. Interconexión por realimentación de sistemas pasivos . . . . .	21
2.4. Ilustración gráfica del principio de optimalidad. . . . .	27
3.1. Esquema de control $\mathcal{H}_\infty$ mediante realimentación de estados . . . . .	37
3.2. Esquema de control $\mathcal{H}_\infty$ mediante realimentación de la salida ( <i>Estado de Información</i> ) . . . . .	43
5.1. Ejemplo de comportamiento de curvas $J_2^*(u_\lambda)$ y $J_\infty^*(u_\lambda, \gamma)$ frente a $\lambda$ . .	69
5.2. Funciones $\varphi(\lambda)$ y $\phi(\lambda)$ . . . . .	88
5.3. Esquema de control híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	93
5.4. Robot de dos grados de libertad . . . . .	95
5.5. Trayectoria de referencia . . . . .	97
5.6. Comportamiento de la técnica de Par Calculado bajo perturbaciones de energía finita . . . . .	99
5.7. Comportamiento del control óptimo $\mathcal{H}_2$ bajo perturbaciones de energía finita . . . . .	100

5.8. Comportamiento del control óptimo $\mathcal{H}_\infty$ bajo perturbaciones de energía finita . . . . .	101
5.9. Comportamiento del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ bajo perturbaciones de energía finita	102
5.10. Comportamiento del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ bajo incertidumbres de modelado	105
5.11. Robot manipulador RM-10. . . . .	107
5.12. Comportamiento del control de par calculado para el robot RM10 . . . . .	109
5.13. Comportamiento del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para el robot RM10 . . . . .	110
5.14. Representación esquemática de la plataforma giroestabilizada. . . . .	112
5.15. Comportamiento del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para el eje de elevación . . . . .	115
5.16. Comportamiento del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para el eje de orientación . . . . .	116
5.17. Comportamiento del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para el eje de elevación con perturbaciones. . . . .	117
5.18. Comportamiento del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para el eje de orientación con perturbaciones. . . . .	118
6.1. Esquema de control $\mathcal{H}_\infty$ mediante realimentación de la salida. . . . .	143
6.2. Comportamiento del control $\mathcal{H}_\infty$ de realimentación de la salida en ausencia de perturbaciones . . . . .	145
6.3. Comportamiento del control $\mathcal{H}_\infty$ de realimentación de la salida con perturbaciones . . . . .	146
6.4. Comportamiento del eje de elevación para el control $\mathcal{H}_\infty$ mediante realimentación de la salida . . . . .	148
6.5. Comportamiento del eje de orientación para el control $\mathcal{H}_\infty$ mediante realimentación de la salida . . . . .	149
6.6. Comportamiento del control $\mathcal{H}_\infty$ de realimentación de la salida en ausencia de perturbaciones . . . . .	151

6.7. Comportamiento del control $\mathcal{H}_\infty$ de realimentación de la salida con perturbaciones . . . . .	152
7.1. Forma de las funciones de aproximación, $\phi_k(x) = (\omega_c^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu^2)^{2k}$ con $\rho^2 = \omega_c^2 x_1^2 + x_2^2$ para diferentes valores de $k$ , y representación 3D para $k = 1$ . . . . .	164
7.2. Resultados de simulación para el comportamiento oscilatorio del péndulo de Furuta sin perturbaciones. . . . .	166
7.3. Resultados de simulación para el comportamiento oscilatorio del péndulo de Furuta con perturbaciones. . . . .	167
7.4. Resultados experimentales para el comportamiento oscilatorio del péndulo de Furuta sin perturbaciones. . . . .	168
7.5. Resultados experimentales para el comportamiento oscilatorio del péndulo de Furuta con perturbaciones. . . . .	169

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Generalidades

En esta Tesis se presentan algunas contribuciones relacionadas con el control  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal, aplicados a sistemas dinámicos descritos según el formalismo de Euler-Lagrange.

Para ello, se ha creído conveniente enmarcar previamente en este capítulo las distintas aportaciones teóricas relacionadas con esta materia, exponiendo en la sección 1.2 una breve perspectiva histórica las mismas. A continuación, en la sección 1.3 se explicarán las motivaciones de este trabajo de Tesis y se expondrán los objetivos perseguidos en él. Finalmente, en la sección 1.4 se mostrará la estructura de la misma.

### 1.2. Perspectiva histórica

Durante la primera mitad del siglo XX surgieron los primeros trabajos relevantes en el marco del *Control Automático*. Aparecieron entonces los conocidos como *métodos clásicos de control* ((D'azzo, J., Houpis, C. 1966, Dorf, R.C. 1983, Franklin, G., Powell, J., Emami-Naeini, A. 1986)), que utilizaban exhaustivamente la descripción de sistemas dinámicos en el dominio de la frecuencia como herramienta básica de análisis y síntesis de estrategias de control, todo ello en el marco de sistemas lineales de una única entrada

y una salida. Para este tipo de sistemas resulta fácil encontrar correspondencias entre las especificaciones de comportamiento impuestas en el dominio temporal y el dominio frecuencial que, como se ha mencionado, sirve de base para el análisis de estos sistemas en la teoría clásica de control. Buena parte de estas ideas proceden del campo de la electrotecnia, disciplina con la que estaban familiarizados los primeros autores (Bode, Nyquist, Nichols, entre otros) que se aventuraron a formalizar matemáticamente las ideas básicas de la teoría de control clásica.

Estos métodos sin embargo pronto se mostraron ineficaces para tratar con problemas más complejos, tales como sistemas multivariables o sistemas de naturaleza altamente no lineal, y por tanto difícilmente modelables o asimilables a sistemas lineales convencionales.

Con el objeto de abordar éstos y otros problemas, en los años cincuenta se inicia el estudio de la teoría de control de sistemas mediante *variables de estado* ((Kwakernaak, H., Silvan, R. 1972, Zadeh, L., Desoer, C. 1963)), la cual abandona la representación frecuencial de los sistemas dinámicos y permite estudiar en un marco unificado tanto problemas monovariables como multivariables. La descripción de sistemas dinámicos en variables de estado inauguró la época conocida como *Control Moderno*, permitiendo la obtención de controladores de forma más directa e incorporar al problema de control especificaciones de comportamiento más sofisticadas, a costa eso si, de una formulación matemática más elaborada que requería de nuevas herramientas y algoritmos de resolución.

La descripción de sistemas en variables de estado también fue la plataforma desde la que se formuló originalmente el problema del control óptimo para sistemas lineales dando origen a los bien conocidos *Reguladores Óptimos LQR* (*Linear Quadratic Regulator*) y *LQG* que incorpora la estructura de observador de mínima varianza conocido como *filtro de Kalman-Bucy*. Son publicaciones notables en este contexto ((Kalman 1960, Kalman and Bucy 1960, Luenberger 1966, Pontryagin *et al.* 1962, Zadeh, L., Desoer, C. 1963)).

Pronto fue evidente sin embargo que, pese a los notables desarrollos logrados con las técnicas de control modernas, la implementación práctica de los controladores desarrollados con ellas distaban de tener comportamientos satisfactorios. El origen del problema estaba en la escasa *robustez* que estos controladores exhibían ante incertidumbres de modelado del sistema a controlar. Es decir, pequeñas discrepancias entre el modelo matemático del sistema empleado para la síntesis de la ley de control y el comportamiento de la planta real, conducen a deterioros de comportamiento notables e incluso en casos extremos a pérdidas de la estabilidad del sistema controlado. Este hecho fue puesto de manifiesto mediante ejemplos en (Doyle, J.C. 1978), mostrando que existen combinaciones de plantas con controladores LQG que exhiben márgenes de ganancia arbitrariamente pequeños y por tanto poco robustos desde el punto de

vista de su implementación práctica. Con el objeto de solventar esta debilidad de la metodología LQG, surge entonces la idea de la *recuperación la función de transferencia de lazo* (o LTR, *Loop Transfer Recovery*) (Doyle, J.C., Stein, G. 1981, Safonov, M., Athans, M. 1977).

Las primeras referencias al término *Control Robusto* como tal en el marco del control lineal, aparecen en la literatura asociadas al ya clásico método de moldeo de los valores singulares de la función de lazo para sistemas multivariados (Doyle, J.C., Stein, G. 1981, Safonov, M., Laub, A., Hartmann, G. 1981).

Por su parte, Zames, ya había sugerido a finales de los setenta que es la norma  $\mathcal{H}_\infty$  y no la norma  $\mathcal{H}_2$  tradicionalmente empleada, la que proporcionaba un marco apropiado para codificar las especificaciones de los problemas de control de índole práctico. Esta idea fue retomada por Helton, que identificó que la expresión de problemas de control clásico lineal en el marco de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  podía asimilarse a un conocido problema de interpolación, resoluble por métodos conocidos (Zames and Francis 1981), (Zames 1981).

Estos trabajos inspiraron el método de moldeo óptimo de los valores singulares de la función de transferencia de lazo en, empleando la norma  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas SISO (Zames and Francis 1983), que posteriormente fue extendido a sistemas multivariados en (Brancis *et al.* 1984).

Así la norma  $\mathcal{H}_\infty$  se ha demostrado eficaz como medida apropiada del “tamaño” de las señales involucradas en el problema de control, así como de la “distancia” entre dos plantas lineales dadas. Estas nociones de “tamaño” y “distancia” permiten respectivamente cuantificar de forma sencilla, la relación de *atenuación o amplificación* de dos señales dadas, y el conjunto de plantas admisibles en torno a una planta nominal determinada (*incertidumbre de modelado*).

Estas ideas condujeron a la primera formulación satisfactoria de la metodología de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineales (Doyle *et al.* 1989), que resultó presentar múltiples conexiones con otras metodologías como el *Control Sensible al Riesgo* (o *Risk-sensitive control* en inglés) (Whittle 1981), (Whittle 1990a), (Whittle 1990b), o la *Teoría de Juegos Diferenciales* (Basar and Bernhard 1991). Otros trabajos destacables en este marco los constituyen el ingenioso uso de la *Interpolación de Nevanlinna-Pick* para la solución de un problema de control robusto lineal (Tannenbaum, A. 1980), y el enfoque polinómico de Kwakernaak de la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  en (Kwakernaak, H., Silvan, R. 1986).

La extensión de estas ideas a sistemas no lineales, tropezó con no pocas dificultades. A mediados de los ochenta comenzaron los primeros esfuerzos en este sentido, donde encontramos una extensión formal del problema  $\mathcal{H}_\infty$  a sistemas no lineales y una solución aproximada empleando series de Volterra en (Ball *et al.* 1987a, Ball *et al.* 1987b). Estos esfuerzos han conducido a notables resultados (Foias *et al.* 1995, Foias

*et al.* 1996, Foias *et al.* 1998). Otros enfoques diferentes son los propuestos por Ball y Helton en (Ball and Helton 1988c) dentro del marco de lo que hoy podríamos llamar *Teoría de Juegos*, o la descripción de espacio de estados del problema en (Ball and Helton 1988a, Ball and Helton 1988b, Ball and Helton 1992a, Ball and Helton 1992b), trabajos que formularon la solución de un problema  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal estable en tiempo discreto en términos de la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) de Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs (HJBI).

Para el problema en tiempo continuo, la estructura básica de las soluciones fue propuesta por Van der Schaft en (Van der Schaft 1991; Van der Schaft 1992, Van der Schaft 1996), formulando el problema para el caso de realimentación de estados en términos de la solución de una ecuación HJBI. Para estos desarrollos, el autor fue inspirado por la *Teoría de Sistemas Disipativos* de Willem (Willem 1972, Hill and Moylan 1976, Hill and Moylan 1977), donde se introduce la terminología *ganancia  $L_2$*  para definir el concepto de disipación en sistemas dinámicos.

Esta formulación en términos de la *ganancia  $L_2$*  es extremadamente potente y permite interpretar la noción de control  $\mathcal{H}_\infty$  de un modo natural para sistemas no lineales. De hecho, estrictamente hablando, el concepto de norma  $\mathcal{H}_\infty$  en el dominio frecuencial carece de sentido como tal en el contexto de sistemas no lineales, debiendo ser éste sustituido por su equivalente en el dominio temporal<sup>1</sup>, la norma  $L_2$  inducida.

El problema  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal así formulado, adopta una estructura matemática más compleja desde el punto de vista de la obtención práctica de leyes de control implementables, ya que éstas vienen expresadas como la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales, las mencionadas ecuaciones HJBI, para las que hasta el momento no se dispone de una metodología de resolución satisfactoria para el caso general. Si bien, existen algunas soluciones interesantes para unos pocos sistemas no lineales que presenten una estructura concreta, los problemas genéricos únicamente hayan solución mediante la aplicación de métodos numéricos que permiten aproximar la solución hasta cierto grado. Trabajos relevantes en este sentido los encontramos en (Lukes, D.L. 1969) y (Beard and McLain 1998).

Un problema de naturaleza más compleja, en el que aún permanecen muchos aspectos de su formulación matemática, es el problema del control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal mediante realimentación parcial del vector de estados o *realimentación de la salida*.

Tal como se ha descrito al comienzo de este apartado, los problemas de control lineal clásicos incluyendo el problema de optimización  $\mathcal{H}_\infty$  lineal, usualmente se describen en el dominio de la frecuencia, y por tanto son inherentemente problemas planteados en términos de realimentación de la salida. Buena parte de los problemas de control

---

<sup>1</sup>Es un resultado bien conocido que dada una función de transferencia matricial  $p \times q$   $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ , se verifica que  $\|M_G\| = \|G(s)\|_\infty$ , donde  $\|M_G\| \triangleq \sup\{\|G(s)f\|_2 : f \in \mathcal{H}_2, \|f\|_2 \leq 1\}$

óptimo (incluyendo los de teoría de juegos) en cambio, emplean generalmente la descripción de *espacio de estados* del sistema y encuentran una solución más natural y simple en términos de realimentación del estado del sistema. Ello explica por qué la obtención de soluciones de control óptimo empleando realimentación de la salida fue un problema complejo de resolver para el que llevó prácticamente una década obtener una formulación completa y coherente de la teoría asociada.

El principal problema de emplear realimentación de la salida para controlar un sistema dinámico estriba en el modo de emplear la información contenida en la señal de salida. En la formulación de espacio de estados, el *estado del sistema* constituye una síntesis del pasado dinámico del sistema y por tanto de su situación actual. Esta información junto con las señales de control actuales y futuras permite (en ausencia de incertidumbres) predecir la evolución dinámica futura del sistema. Sin embargo, no es extraño encontrarnos en la práctica con sistemas dinámicos para los que no es posible obtener una medida directa del estado del sistema, y para los que por tanto, no son de aplicación directa las técnicas de control de *realimentación de estados*. Este hecho motiva los esfuerzos que en las últimas décadas se dirigen hacia la obtención de una solución apropiada para el control de sistemas mediante realimentación de la salida.

Una aproximación corriente al problema consiste en diseñar un *observador* que, tomando como información la salida del sistema y la señal de control aplicada, proporcione una estimación del estado. Este estado estimado se emplea entonces para sustituir al estado real (no accesible) en la ley de control de realimentación de estados obtenida con la formulación general. Es lo que se conoce como *Principio de Equivalencia Cierta* (Wonham 1968) (*Certainty Equivalence Principle* en inglés). La estimación del estado del sistema, a menudo denominada también *filtrado* (*filtering* en su denominación en inglés), presenta sin embargo el inconveniente de que conduce en general a controles de naturaleza subóptima.

Así, es bien sabido que la solución basada en el *Principio de Equivalencia Cierta* es óptima para el problema de control óptimo lineal cuadrático gausiano (*Linear Quadratic Gaussian Regulator* o LQG), solución que consiste en diseñar un control óptimo de realimentación de estados al que finalmente es acoplado a un estimador óptimo del estado conocido como *filtro de Kalman-Bucy* (Kalman 1960), (Kalman and Bucy 1960). El *Principio de Equivalencia Cierta* no es óptimo en cambio para el *regulador cuadrático lineal determinista* (*Linear Quadratic Regulator* o LQR). Para este último regulador es frecuente emplear un *observador de Luemberger* (Luenberger 1966).

El motivo por el que el problema LQG admite una solución óptima mediante el *Principio de Equivalencia Cierta*, reside en el hecho de que la estimación óptima del estado resultante de la aplicación del filtro de Kalman-Bucy, pasa a ser el estado de un nuevo sistema, de tal modo que el control óptimo para este nuevo sistema coincide con la ley de realimentación de estados para el sistema original. En otras palabras,

el controlador óptimo LQG realimenta la distribución de probabilidad de la señal de salida que, tratándose de un distribución Gausiana, viene completamente definida por su media y su varianza (un conjunto de parámetros finito). La distribución de probabilidad se comporta en este caso como un *estado de información* que hace las veces de *estadístico suficiente* (ver (James *et al.* 1994), (James and Baras 1995) y (James and Baras 1996)) para la “reconstrucción” del estado del sistema.

Para sistemas no lineales, el control óptimo del problema LQG equivalente, es función también la distribución de probabilidad de la salida del sistema, e igual que para el caso lineal, la solución óptima del problema de realimentación de la salida coincide con la del problema de realimentación de estados, empleando un estado transformado en el *estado de información* se comporta como estado del sistema global sistema+estimador óptimo. En este caso, la evolución dinámica de la distribución de probabilidad viene dada por una ecuación diferencial en derivadas parciales estocástica conocida como *ecuación de Kushner-Stratonovich* (ver (Kushner 1964) y (Stratonovich 1968)). Esta ecuación diferencial es la versión no lineal del filtro óptimo de Kalman-Bucy. De este modo, el filtrado no lineal es, en general, un problema de dimensión infinita (no puede en general ser resuelto *en línea* ya que se requiere la información de la evolución dinámica del sistema) e involucra una ley de realimentación de estados de un sistema de dimensión infinita. Las implicaciones derivadas de esta complejidad matemática son notables y constituyen hoy día estimulantes líneas de trabajo a las que se dedican importantes esfuerzos para encontrar una solución satisfactoria desde los puntos de vista matemático y de implementación práctica.

La aproximación al control de realimentación de la salida mediante el empleo del *estado de información* es bien conocida desde los años 60 (ver (Kumar and Varaiya 1986) para una descripción bastante completa y asequible).

Para el problema análogo al LQR determinista en el marco no lineal, no existe sin embargo una solución basada en el *estado de información* y por tanto no disponemos de una solución óptima de realimentación de la salida en este caso. Una aproximación corriente para este tipo de problemas es recurrir a un control basado en el *Principio de Equivalencia Cierta* mencionado anteriormente y descrito en detalle en el capítulo 3. La principal dificultad en este caso reside en el diseño de un *estimador de estados u observador* ((Kou *et al.* 1975), (Hermann and Krener 1977), (Krener and Respondek 1985)).

En lo que se refiere al control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal mediante realimentación de la salida, la formulación teórica del problema tienen su origen a comienzos de la década de los 80, donde encontramos los primeros trabajos que mostraban la relación entre la teoría de juegos y el problema de control introducido por Jacobson ((Jacobson 1991)) conocido a menudo como *Risk-Sensitive Control* o *Control Óptimo Sensible al Riesgo*, para el cual tenemos una solución de realimentación de la salida en (Whittle 1981) que emplea

el *Principio de Equivalencia Cierta*.

Más tarde, se descubrieron conexiones de estos problemas con el control  $\mathcal{H}_\infty$  (Glover and Doyle 1988) y una solución completa para el problema en el marco lineal en (Doyle *et al.* 1989) donde se presenta una solución de realimentación de estados y de realimentación de la salida mediante el *Principio de Equivalencia Cierta*.

Un trabajo clave que resume los logros en este sentido hasta finales de los 80, podemos encontrarlo en la monografía (Basar and Bernhard 1991), publicación en la que encontramos una excelente aproximación a la formulación *minimax* de la teoría de juegos y el *Principio de Equivalencia Cierta*, esencialmente para el caso lineal, con alguna generalización para sistemas no lineales afines en la actuación.

Las bases para la extensión del control  $\mathcal{H}_\infty$  al marco no lineal se sentaron a principio de la década de los 90, sirviendo como base las mencionadas conexiones entre el control  $\mathcal{H}_\infty$ , la Teoría Dinámica de Juegos y el Control Óptimo Sensible al Riesgo. Entre la publicaciones relevantes en este sentido cabe mencionar (Whittle 1990a), (Whittle 1990b), (Whittle 1991), (Fleming and McEneaney 1992), (Fleming and McEneaney 1995), así como la formulación de las *soluciones de viscosidad* para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales involucradas en la formulación del problema (Ball and Helton 1996), (McEneaney 1995b), (McEneaney 1995a), (James 1993), (Soravia 1996). Otros enfoques al problema vinieron de la teoría de *sistemas disipativos* y sus relaciones con la *Pasividad*, (Van der Schaft 1996), (Van der Schaft 1991).

Algo más tardó la formulación del problema para el caso de información parcial del estado del sistema (realimentación de la salida). En (Van der Schaft 1996) se identificaron algunas de las propiedades esenciales del problema para el caso no lineal, si bien sólo se presentaban condiciones suficientes para la resolución del problema. Es decir, podrían existir controles  $\mathcal{H}_\infty$  no incluidos en el juego de controladores formulados en dicho trabajo. Controladores basados en el *estado de información* para el problema  $\mathcal{H}_\infty$  con realimentación de la salida se obtuvieron en (Didinsky *et al.* 1993) asumiendo el *Principio de Equivalencia Cierta*, si bien los primeros resultados generales incluyendo condiciones necesarias y suficientes para la existencia de estos controles, fueron presentados en (James and Baras 1995). Esta última formulación emplea el *estado de información* para establecer la estructura del controlador, que es por este motivo de dimensión infinita, y por tanto difícil de implementar.

Por esta razón, la aproximación seguida en esta Tesis para la formulación de un control  $\mathcal{H}_\infty$  con realimentación de la salida, sigue los resultados desarrollados en (Isidori and Astolfi 1992a), (Isidori and Astolfi 1992b) y (Isidori 1994) (ver capítulo 6), donde los autores plantean una estructura especialmente simple para un estimador de estados del sistema no lineal y, formulan condiciones suficientes para que un controlador basado en el *Principio de Equivalencia Cierta* verifique las relaciones de atenuación propias del

control  $\mathcal{H}_\infty$ . Los resultados son obviamente subóptimos, un moderado precio a pagar en relación a la simplicidad de la estructura del control resultante.

### 1.3. Motivación y objetivos

En este apartado se presentan los motivos y problemas de control que han inspirado la realización de este trabajo.

Como resulta evidente tras el resumen histórico del estado del arte en materia de técnicas de control óptimo y robusto  $\mathcal{H}_\infty$  realizado en el apartado anterior, la formulación lineal del problema ha sido extensamente tratada y estudiada en la literatura, disponiéndose asimismo de eficientes métodos de resolución que permiten obtener controladores de orden moderado y eficaces desde el punto de vista práctico. Para el caso no lineal, disponemos también en la actualidad de un marco teórico bastante completo en lo referente a la formulación matemática del problema, si bien las dificultades vienen asociadas a la obtención de expresiones cerradas para los controladores, para la cual no existe una metodología genérica suficientemente satisfactoria.

Las técnicas lineales por su parte han proporcionado notables resultados en aplicaciones prácticas, si bien por su propia naturaleza encuentran dificultades de aplicación en aquellas plantas de naturaleza altamente no lineal o para las que es difícil obtener un modelo linealizado satisfactorio en una zona de trabajo suficientemente amplia. La solución habitual para este tipo de problemas, consiste en aproximar la planta no lineal mediante modelos lineales en un conjunto finito de puntos de operación; o bien en un conjunto continuo (*Sistemas Lineales de Parámetros Variantes o LPV según sus siglas en inglés*), diseñando controladores específicos para cada uno de los puntos de operación. El control global se articula entonces como una ley de control que interpola o conmuta entre los distintos controladores en función del punto de trabajo (técnicas de *Planificación de ganancias* o *Gain-Scheduling*) (Rugh, W. J. and Shamma, J. S. 2000, Vivas *et al.* 2000, Vivas *et al.* 2002). Esta aproximación sin embargo dista de ser satisfactoria, ya que la estabilidad del control interpolado/conmutado no está garantizada en general, salvo que se impongan ciertas condiciones sobre la *velocidad de variación del punto de operación de la planta* a menudo poco realistas. En cualquier caso, si logramos garantizar la estabilidad del conjunto, es a menudo más complejo establecer resultados satisfactorios acerca del sistema controlado, por lo que en la práctica estas técnicas son de aplicación para sistemas en los que el punto de operación varía en tiempos característicos mucho mayores que la dinámica dominante de la planta en el punto considerado.

Hay por tanto un amplio número de aplicaciones en las que las técnicas lineales no logran proporcionar soluciones satisfactorias o bien deben considerar un excesivo

grado de incertidumbres de modelado en el diseño para dar cuenta de la discrepancia inherente asociada a la descripción de un sistema no lineal mediante un modelo lineal.

Para centrar un objetivo concreto en las líneas de investigación en el desarrollo de esta Tesis, se ha limitado el objeto de estudio de esta Tesis a un conjunto de sistemas no lineales de características bien conocidas, como son los sistemas Lagrangianos o sistemas descritos mediante la formulación de Euler-Lagrange (EL). A la estructura matemática de estos sistemas responden un buen conjunto de sistemas dinámicos, entre los que se incluyen la inmensa mayoría de los sistemas electromecánicos empleados habitualmente en ingeniería (robots, sistemas de posicionamiento, etc), así como otros sistemas de naturaleza no mecánica tal como sistemas eléctricos, ciertos sistemas biológicos e incluso sistemas relativistas o cuánticos.

La consideración de este tipo de sistemas ha venido también motivada en parte por el marco proporcionado por los proyectos desarrollados en el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla: *Control Robusto de Robots Industriales*, *Control de Precisión de Sistemas de Posicionamiento (CONPOS)*, y *Dispositivos de Control por Métodos Energéticos (DICOME)* todos ellos financiados por la CICYT con referencias TAP98-541, DPI 2001-2424-C01-01 y DPI 2003-00429 respectivamente. De este modo, las aplicaciones presentadas en esta Tesis se restringen a sistemas electromecánicos y robóticos.

Aprovechando la bien conocida estructura de los sistemas Euler-Lagrange, el objetivo principal de esta Tesis ha consistido en investigar las posibilidades de aplicación de leyes de control no lineales para estos sistemas dentro de las formulaciones de control  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_{\infty}$  no lineal, así como las posibles mejoras asociadas a la incorporación de la naturaleza no lineal del sistema en la metodología de diseño de controladores de altas prestaciones. Estas formulaciones permiten tener en cuenta de forma natural aspectos tan relevantes en el control de sistemas electromecánicos como son la precisión de ejecución de movimientos, que está intrínsecamente asociada a controladores de altas prestaciones y por tanto poco conservativos, y la robustez, aspecto este último muy importante si como es habitual el sistema trabaja en una variedad de condiciones de operación (por ejemplo, transportando cargas y/o herramientas de diversas masas y geometrías). Las metodologías de diseño lineal clásicas no permiten incorporar de forma satisfactoria estos dos requerimientos, debido a la aproximación imperfecta del modelo lineal considerado. Este aspecto ha sido formulado en esta Tesis en términos de una estrategia de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  no lineal que permite incorporar las especificaciones de comportamiento asociadas al problema de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  mientras que la estrategia  $\mathcal{H}_{\infty}$  da cuenta de la robustez del control y rechazo de perturbaciones.

Otro aspecto muy relevante en el control de sistemas electromecánicos, es la accesibilidad de las señales involucradas en el control. Es bien sabido en mecánica clásica, que para determinar sin ambigüedades la evolución futura de un sistema EL, es necesario

conocer en el instante considerado el conjunto de posiciones y velocidades generalizadas que describen el sistema. Es por tanto éste (o una combinación de ellas) el conjunto mínimo de variables que forman parte del vector de estados de un sistema EL.

Como se ha mencionado, la mayoría de las técnicas de control no lineal disponibles inciden en la representación de espacio de estados del sistema, y proporcionan por lo general leyes de control que requieren del conocimiento del vector de estados completo para su aplicación (*control de realimentación de estados*). Es más, incluso una simple ley de control lineal tipo PD, requiere del conocimiento de las posiciones y velocidades articulares para su aplicación.

En la práctica, sin embargo, es frecuente que los sistemas electromecánicos incorporen únicamente *encoders* digitales de posición que, si bien proporcionan unas medidas extraordinariamente precisas y limpias de la posición de los grados de libertad del sistema, no proporcionan de forma directa la medida de velocidad. Esta medida debe ser estimada o calculada mediante métodos de derivación numérica de las señales de *encoder* para poder incorporarla a ley de control, lo que con frecuencia conduce a señales ruidosas que degradan el comportamiento de los controladores (los valores de las ganancias de control están limitados por la presencia de ruido en las señales de realimentación).

Es más, en los contados casos en los que los sistemas electromecánicos cuentan con tacómetros para medir de forma directa la velocidad, éstos por su tecnología de fabricación suelen proporcionar también señales ruidosas que requieren ser filtradas. Pero, la incorporación de filtros en la cadena de control incorpora dinámicas adicionales en la realimentación que degradan el comportamiento del sistema y por tanto estas soluciones distan de ser del todo satisfactorias.

Para tratar de proporcionar una solución adecuada a este problema, en esta Tesis se plantea una estructura de observador del vector de estados que permite la aplicación de una ley de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal tomando únicamente medidas de posición del sistema. Esta estructura de observador se haya embebida en la propia formulación del control de modo que podemos garantizar, supuesto un nivel moderado de incertidumbres en el modelo del sistema, la estabilidad asintótica global del conjunto verificando los niveles de atenuación  $L_2$  requeridos por la filosofía de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

## 1.4. Estructura de la Tesis

Esta Tesis consta de siete capítulos complementados con dos apéndices. Este *primer capítulo* es una introducción al resto de los capítulos donde se ha situado históricamente las diferentes contribuciones que sirven de base al desarrollo de esta Tesis y

donde se ha dado una perspectiva general de la motivación y los objetivos de la misma.

El *segundo capítulo* está destinado a introducir nociones de control óptimo y robusto  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal, formulando las nociones y conceptos básicos que serán requeridos en posteriores desarrollos de esta Tesis.

En el *tercer capítulo* se exponen brevemente nociones relacionadas con el control y la estabilidad de sistemas no lineales, haciendo hincapié en aquellos aspectos especialmente relevantes para el desarrollo de esta Tesis, especialmente, en la demostraciones de ciertos resultados de capítulos posteriores.

En el *cuarto capítulo*, se describe brevemente la estructura matemática de los sistemas EL, así como las propiedades más relevantes desde le punto de vista de control, propiedades éstas que serán empleadas para la formulación de ciertas estructuras de control.

En el *quinto capítulo* se describen metodologías de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida, proporcionando soluciones explícitas para los sistemas EL objeto de estudio. Se formula asimismo la estructura híbrida de control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  que constituye la principal contribución de este capítulo, mostrándose el comportamiento de la misma en un conjunto de plataformas, tanto teóricas como experimentales.

En el *sexto capítulo* se aborda la problemática asociada a la formulación de las leyes de control planteadas en el capítulo quinto, en el caso de disponer únicamente de medidas de posición del sistema a controlar. Se plantea así una estructura de observador, que permite garantizar la estabilidad asintótica del sistema verificando las restricciones de optimalidad asociadas a los problemas  $\mathcal{H}_2$  y/o  $\mathcal{H}_\infty$ .

En el *séptimo capítulo*, y adoptando un enfoque distinto para el problema de control de sistemas electromecánicos, se trata el problema de estabilización de oscilaciones para estos sistemas, empleando para ello el marco de la teoría de control  $\infty$  no lineal desarrollada en el capítulo 3. Para ello se propone un método numérico basado en una adaptación para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del conocido método de Galerkin. La solución proporcionada por este método tiene naturaleza local y se muestran resultados tanto de simulación como experimentales que validan la metodología propuesta.

En el *octavo y último capítulo* se realiza una exposición de las conclusiones de esta Tesis y se propondrán futuras líneas de investigación como continuación del trabajo realizado en la misma.

Concluimos el documento con dos apéndices, el primero de los cuales está dedicado a recopilar y recopilar algunos conceptos relevantes empleados en el desarrollo de esta

Tesis. El segundo apéndice contiene una descripción de las rutinas de Maple empleadas para el cálculo de los controladores desarrollados en el capítulo 7.

# Capítulo 2

## El problema de Control Óptimo

### 2.1. Introducción

La historia del control óptimo tiene sus raíces en la más lejana antigüedad, con necesarias alusiones a Dido, la primera reina de Cartago a quien le fue propuesta el dilema de encerrar la mayor cantidad de superficie de tierra que le fuera posible con una piel de buey. Cuenta la historia que la piel fue cortada en finas tiras y con todas ellas se conformó un círculo. El terreno en su interior pasó a ser la histórica ciudad de Cartago<sup>1</sup>.

Este dilema tendría hoy día una fácil solución en el marco de la teoría del *Cálculo de Variaciones*, precursora a su vez de la teoría de *Control Óptimo* dentro de la moderna Ingeniería de Control. Problemas isoperimétricos del tipo de los que dieron a Dido su reino, fueron tratados allá por el siglo XVI, extensa y exhaustivamente por *Tonelli* en primer lugar y por *Euler* más tarde, ambos fundadores de la rama de las matemáticas conocida hoy como *Cálculo de Variaciones*.

De este modo, el cálculo de variaciones ha desempeñado durante los últimos tres siglos un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas y la física. Ambos, Euler y Lagrange fundaron las bases de su formulación de la mecánica clásica sobre principios de cálculo variacional. Newton empleó también métodos variacionales para

---

<sup>1</sup>El problema óptimo aquí es encontrar la geometría de la curva que encierra la mayor superficie posible para un longitud de la curva dada (*Problemas Isoperimétricos*)

determinar la forma de cuerpo que minimice la resistencia al movimiento en un seno fluido, así como Bernouilli formuló su famoso *Problema de la Braquistócrona*, que también atrajo la atención de Newton y L'Hôpital. Todo este bagaje intelectual fue revitalizado y generalizado ya en el siglo XX en los notables trabajos de Bellman (Bellman 1957) en el contexto de la *Programación Dinámica* y por Pontryagin (Pontryagin *et al.* 1962) y su escuela en el marco del conocido como *Principio del Máximo de Pontryagin* para control óptimo.

Los resultados sobre *optimización* así establecidos, resultaron notablemente atractivos en el contexto de la Ingeniería de Control, ya que permitían dar respuesta a cuestiones intuitivas del tipo *¿Cuál es la “mejor”<sup>2</sup> ley de control aplicable a un cierto sistema dinámico para obtener un determinado comportamiento?*. De este modo surgió la llamada *Teoría de Control Óptimo* que permite obtener leyes de control para sistemas dinámicos en los que un *determinado índice de comportamiento*.

Dos de las múltiples derivaciones de la teoría de control óptimo son las técnicas de control  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_{\infty}$  que, empleando diferentes criterios de optimización, han experimentado un notable auge en las dos últimas décadas desde los puntos de vista teórico y de implementación práctica.

El objetivo principal de esta Tesis es estudiar y desarrollar métodos de control no lineal óptimo y robusto  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_{\infty}$  para sistemas electromecánicos descritos según el formalismo de Euler-Lagrange (EL). Se ha creído por ello conveniente iniciar este capítulo proporcionando una rápida, y necesariamente breve, descripción de las ideas principales en las que se asientan las contribuciones de esta Tesis, aspectos que se desarrollan en los siguientes apartados de este capítulo.

## 2.2. Resultados previos en control no lineal

Con el propósito de crear un texto lo más autocontenido posible, el presente apartado está destinado a recopilar una serie de bien conocidos resultados en control no lineal, que serán necesarios en posteriores capítulos de esta Tesis.

Las demostraciones de estos resultados serán omitidas en la medida de que no contribuyan a clarificar o no sean necesarios para el desarrollo de aspectos concretos de esta Tesis. El lector interesado puede encontrar una completa descripción de los mismos en (Isidori 1989) y (Khalil 1991) entre otros.

---

<sup>2</sup>Según un determinado criterio naturalmente

## 2.2.1. Estabilidad de sistemas no lineales

### 2.2.1.1. Estabilidad de sistemas autónomos

Consideremos el sistema dinámico variante en el tiempo descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f(x, t)$  es localmente continua en el sentido de Lipschitz, lo cual implica la existencia y unicidad de soluciones para el sistema.

**Definición 2.1 (Estabilidad de Sistemas no lineales variantes en el tiempo).** Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de (2.1), es decir,  $f(x_0) = 0$ . Así, decimos que el equilibrio es

- (a) estable, si para todo  $\epsilon \geq 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) \geq 0$  tal que

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

- (b) asintóticamente estable, si es estable y existe  $c > 0$  tal que

$$\|x(t_0) - x_0\| < c \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x(t_0)) = x_0$$

- (c) exponencialmente estable, si para cada  $c > 0$ , existen  $k > 0$  y  $\gamma > 0$  tal que

$$\|x(t) - x_0\| < k \|x(t) - x_0\| e^{-\gamma(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0) - x_0\| < c$$

- (d) globalmente asintóticamente estable, si es asintóticamente estable para toda condición inicial  $x(t_0)$ .

Una herramienta clásica que permite establecer condiciones suficientes para determinar la estabilidad de sistemas dinámicos del tipo (2.1) es la siguiente

**Teorema 2.1 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov).** Sea  $x_0$  un punto de equilibrio del sistema (2.1) y sea  $V(x, t)$  una función escalar  $C^1$  definida positiva<sup>3</sup>, tal que

$$\frac{dV(x, t)}{dt} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) \leq 0, \quad \forall x$$

<sup>3</sup> Consideraremos que una función  $V(x, t)$  variante en el tiempo es definida positiva en torno a  $x_0$ , si  $V(x, t) > V_0(x)$  para todo  $t$ , siendo  $V_0(x)$  alguna función definida positiva, es decir,  $V_0(x) > 0$  para todo  $x \neq x_0$  y  $V_0(x_0) = 0$

entonces  $x_0$  es un equilibrio estable. Adicionalmente, si

$$\frac{dV(x, t)}{dt} < 0, \quad \forall x \neq x_0$$

entonces  $x_0$  es un equilibrio asintóticamente estable. Si  $V(x, t)$  es radialmente no acotada<sup>4</sup>, entonces el equilibrio es globalmente asintóticamente estable.

Las condiciones de estabilidad asintótica establecidas en el teorema anterior pueden sin embargo relajarse ligeramente para el caso en que la función de Lyapunov no exhiba un comportamiento estrictamente decreciente a lo largo de las trayectorias del sistema. Este resultado se establece a continuación en el conocido como *Principio de Invariancia de La Salle*

**Teorema 2.2 (Principio de Invariancia de La Salle).** *Sea  $V(x, t)$  una función escalar,  $C^1$ , definida positiva tal que*

$$\frac{dV(x, t)}{dt} \leq 0, \quad \forall x \neq x_0$$

*Sea  $x(t, x_0)$ ,  $t \geq 0$  una solución de  $\dot{x} = f(x, t)$  y supongamos que existe un conjunto compacto  $B$  tal que  $x(t, x_0) \in B$ ,  $\forall t \geq 0$ . Entonces  $x(t, x_0)$  converge al mayor subconjunto de  $\{x | V(x, t) = 0\} \cap B$  que es invariante de  $\dot{x} = f(x, t)$ .*

### 2.2.1.2. Estabilidad asintótica de sistemas conectados en cascada

El estudio de los sistemas no lineales conectados en cascada ha proporcionado en los últimos años interesantísimas herramientas de análisis y diseño de controles no lineales para aquellos sistemas que adoptan o pueden ser trasformados en esta particular estructura. Presentaremos a continuación un resultado sobre este tipo de sistemas, de especial interés para posteriores capítulos de esta Tesis.

Supongamos un sistema no lineal en cascada de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z) \\ \dot{z} &= g(z)\end{aligned}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$  y  $f(0, 0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ , con  $f(x, z)$  y  $g(z)$  son funciones localmente continuas en el sentido de Lipschitz en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente. Así podemos enunciar

---

<sup>4</sup>equivale a exigir que  $V(x, t)$  sea una función propia

**Teorema 2.3 (Estabilidad asintótica de sistemas en cascada).** Supongamos que el equilibrio  $\bar{x} = 0$  de  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, 0)$  es localmente asintóticamente estable. Sea  $\mathbb{S}$  un conjunto con la propiedad de que para cualquier condición inicial  $\bar{x}_0 = \bar{x}(0) \in \mathbb{S}$  las trayectorias del sistema  $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, 0)$  verifican

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = 0$$

Análogamente, sea  $z_0 = z(0)$  tal que las trayectorias del sistema  $\dot{z} = g(z)$  que pasan por  $z(0)$  satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

entonces, si las trayectorias de  $\dot{x} = f(x, z_0)$  que pasan por  $x_0 = x(0)$  son acotadas y tales que  $x(t) \in \mathbb{S} \quad \forall t \geq 0$ , se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

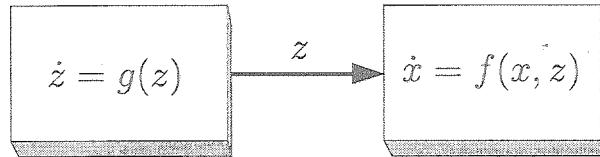


Figura 2.1: Disposición de dos sistemas no lineales en cascada

### 2.2.2. Pasividad y disipatividad

Los conceptos que a continuación se presentan son las piedras angulares en las que descansan algunos de los resultados más sólidos y fructíferos de la teoría de control no lineal moderna. Para mayor detalle de los mismos se recomienda consultar (Van der Schaft 1996) y (Khalil 1991).

**Definición 2.2 (Espacios  $\mathcal{L}_q$ ).** Para cada  $q \in \{1, 2, \dots\}$  se define  $\mathcal{L}_q[0, \infty) = \mathcal{L}_q$  como el conjunto de funciones<sup>5</sup>  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen

$$\int_0^\infty |f(t)|^q dt < \infty$$

por extensión, diremos que  $\mathcal{L}_\infty$  es el conjunto de funciones  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  acotadas que satisfacen

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)| < \infty$$

<sup>5</sup>Supondremos de ahora en adelante que estamos hablando de *funciones medibles*, es decir, funciones que son el límite punto por punto de una secuencia de funciones constantes a trozos, excepto para un conjunto de medida cero.

Es bien sabido que estos espacios  $\mathcal{L}_q$  son *espacios de Banach* (es decir, espacios lineales completamente normados), donde es posible definir las siguientes normas

**Definición 2.3 (Norma  $L_q$ ).** Para toda función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  perteneciente a  $\mathcal{L}_q$  se definen las normas

$$\begin{aligned}\|f\|_q &= \left( \int_0^\infty |f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad q = 1, 2, \dots \\ \|f\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)| < \infty\end{aligned}$$

Es posible además definir en  $\mathcal{L}_2$  el *producto interior* de dos funciones  $f, g$  en  $\mathcal{L}_2$  como

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)dt$$

de donde comprobamos que  $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ . En adelante denotaremos  $\|\cdot\|$  por defecto como la norma  $L_2$ , es decir  $\|\cdot\|_2$ .

Existe una extensión de estos conceptos para funciones no acotadas pero sin tiempo de escape finito, como se detalla a continuación

**Definición 2.4 (Espacios  $\mathcal{L}_{qe}$ ).** Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces para cualquier  $T \in \mathbb{R}^+$ , definimos la función truncada  $f_T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad 0 \leq t < T \\ 0 & , \quad t \geq T \end{cases}$$

Para cada  $q \in \{1, 2, \dots\}$  se define  $\mathcal{L}_{qe}[0, T] = \mathcal{L}_{qe}$  como el conjunto de funciones  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_T \in \mathcal{L}_q$  para todo  $T$  con  $0 \leq T < \infty$ . Así llamaremos a  $\mathcal{L}_{qe}$  espacio extendido de  $\mathcal{L}_q$ .

Todos los conceptos presentados en este apartado admiten una generalización para el caso de  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow U$ , con  $U \in \mathbb{R}^n$  un espacio lineal normado, con norma  $\|\cdot\|_U$ .

En este caso,  $\mathcal{L}_q(U)$  se define como el conjunto de todas las funciones medibles en  $U$  tal que

$$\int_0^\infty \|f(t)\|_U^q dt < \infty; \quad q = 1, 2, \dots, \infty$$

De forma análoga al caso anterior,  $\mathcal{L}_q(U)$  son espacios de Banach donde se pueden definir las normas

$$\begin{aligned}\|f\|_q &= \left( \int_0^\infty \|f(t)\|_U^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad q = 1, 2, \dots \\ \|f\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|f(t)\| < \infty\end{aligned}$$

Como norma general para el resto de los capítulos de esta Tesis, asumiremos en el caso de no especificar subíndice en el operador de norma,  $\|\cdot\|$ , que  $q = 2$ , es decir suponemos la *norma-2*.

Para representar la dinámica de un sistema, es usual el concepto de *aplicación de entrada-salida*. Si  $U$  es un espacio lineal  $m$ -dimensional con norma  $\|\cdot\|_U$ , e  $Y$  otro espacio lineal  $n$ -dimensional con norma  $\|\cdot\|_Y$ , junto con la aplicación de entrada-salida

$$\begin{aligned} G : \mathcal{L}_{qe}(U) &\rightarrow G(u) \in \mathcal{L}_q(Y) \\ u &\mapsto y = G(u) \end{aligned}$$

**Definición 2.5 (Estabilidad  $\mathcal{L}_q$ ).** *Sea un sistema representado por una aplicación  $G : \mathcal{L}_{qe}(U) \rightarrow \mathcal{L}_{qe}(Y)$ . Entonces se dice que  $G$  es  $\mathcal{L}_q$ -estable si*

$$u \in \mathcal{L}_q(U) \rightarrow G(u) \in \mathcal{L}_q(Y)$$

es decir,  $G$  aplica el subconjunto  $\mathcal{L}_q(U) \subset \mathcal{L}_{qe}(U)$  en el subconjunto  $\mathcal{L}_q(Y) \subset \mathcal{L}_{qe}(Y)$ .

Con esta definición resulta evidente que la estabilidad  $\mathcal{L}_\infty$  es equivalente a la estabilidad BIBO (Bounded Input Bounded Output) tan empleada en el contexto de control lineal.

**Definición 2.6 (Ganancia  $L_q$ ).** *Un sistema representado por una aplicación  $G : \mathcal{L}_{qe}(U) \rightarrow \mathcal{L}_{qe}(Y)$ , se dice que tiene ganancia finita  $L_q$  si existen constantes  $\gamma_q$  y  $b_q$  tal que para todo  $T \geq 0$*

$$\|(G(u))_T\|_q \leq \gamma_q \|u_T\|_q + b_q$$

donde las señales con subíndice  $T$ , son las correspondientes señales truncadas según la definición 2.4.

Se dice que la ganancia es  $L_q$  sin desviación (zero bias en inglés), si el término  $b_q$  puede ser tomado igual a cero.

### 2.2.3. Pasividad y ganancia $L_2$

La *Pasividad* es en esencia la generalización, y posterior aplicación a sistemas dinámicos genéricos, del conocido fenómeno físico de la *dissipación energética*. Si imaginamos un sistema físico como una *caja negra* que interactúa con el entorno en términos de aporte y dissipación de energía (ver figura 2.2), la evolución dinámica del mismo vendrá determinada por la energía aportada y dissipada por el sistema en cada instante de tiempo. La pasividad permite establecer interesantes propiedades para aquellos sistemas en los cuales el balance energético *aporte - dissipación* es negativo, es decir, los

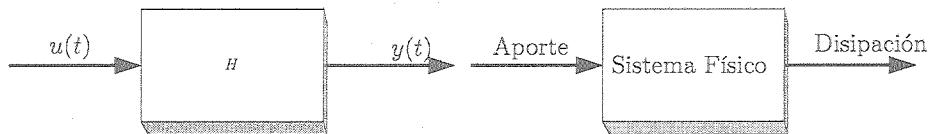


Figura 2.2: Esquema entrada salida del sistema y balance energético

sistemas que pierden energía con el tiempo, y por tanto son susceptibles de alcanzar eventualmente el estado de mínima energía (punto de equilibrio dinámico del sistema).

Consideremos un sistema dinámico no lineal genérico de la forma

$$H : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & , \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x, u) & , \quad u \in U, y \in Y \end{cases} \quad (2.2)$$

Contemplaremos el caso en que el estado  $x(t)$  es una función del tiempo que está únicamente determinada por el estado inicial del sistema,  $x(t_0)$ , y la evolución temporal de la señal de control  $u(t)$ . Asumimos además que  $u \in \mathcal{L}_{qe}(U)$ .

**Definición 2.7 (Disipatividad).** Supongamos que asociada al sistema dinámico  $H$ , existe una función  $s : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  denominada tasa de aporte (supply rate en inglés), que es localmente integrable para cada  $u \in U$ , esto es, verifica que  $\int_{t_0}^{t_1} |s(u(t), y(t))| dt < \infty$  para todo  $t_1 \geq t_0$ . Sea  $X$  un subconjunto conexo de  $\mathbb{R}^n$  que contiene el origen.

En estas condiciones, decimos que el sistema  $H$  es disipativo en  $X$  con tasa de aporte  $s(u, y)$ , si existe una función  $S(x)$ ,  $S(0) = 0$ , tal que para cada  $x \in X$ , se verifica

$$S(x) \geq 0 \quad y \quad S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^T s(u(t), y(t)) dt \quad (2.3)$$

para todo  $u \in U$  y para todo  $T \geq 0$  tal que  $x(t) \in X$  para todo  $t \in [0, T]$ . La función  $S(x)$  se denomina función de almacenamiento (storage function en inglés).

La desigualdad (2.3) es conocida a menudo en la literatura como *desigualdad de disipación*.

Una elección corriente para la *tasa de aporte* es la forma bilineal

$$s(u, y) = \langle y | u \rangle$$

donde  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  denota el *producto dual*<sup>6</sup> entre los espacios  $U$  y su dual  $U^*$  ( $U^* = Y$ , espacio imagen de  $H$ ).

<sup>6</sup>Es interesante notar que en muchas aplicaciones físicas, el *producto dual* representa la potencia instantánea aportada al sistema. Por ejemplo, en sistemas eléctricos, las componentes  $u$  e  $y$  son tensiones y corrientes, mientras que en sistemas electromecánicos representan las fuerzas y velocidades generalizadas.

**Definición 2.8 (Pasividad).** Un sistema dinámico  $H$  como en (2.2) se dice que es pasivo, si es disipativo con respecto a la tasa de aporte  $s(u, y) = u^T y$ .

Adicionalmente, se dice que  $H$  es estrictamente pasivo a la entrada (strict input passive en inglés) si existe  $\delta > 0$  tal que  $H$  es disipativo con respecto a la tasa de aporte  $s(u, y) = u^T y - \delta \|u\| - U^2$ .

Y se dice que  $H$  es estrictamente pasivo a la salida (strict output passive en inglés) si existe  $\delta > 0$  tal que  $H$  es disipativo con respecto a la tasa de aporte  $s(u, y) = u^T y - \delta \|y\| - Y^2$ .

Finalmente diremos que  $H$  es conservativo si la desigualdad de disipación (2.3) se verifica con el signo de igualdad.

La noción de ganancia  $L_q$  expuesta en la definición 2.6 admite una interpretación para el caso  $q = 2$  de la siguiente forma

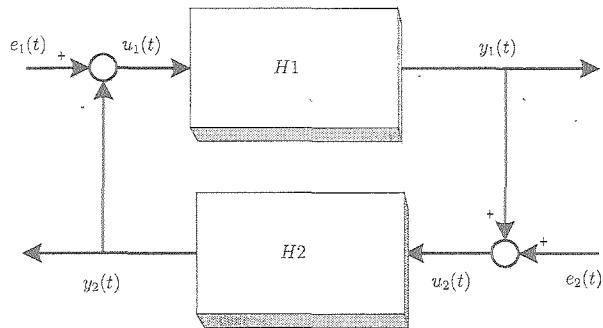


Figura 2.3: Interconexión por realimentación de sistemas pasivos

**Definición 2.9 (Ganancia  $L_2$ ).** Un sistema dinámico  $H$  como en (2.2) se dice que tiene ganancia  $L_2 \leq \gamma$  si es disipativo con respecto a la tasa de aporte  $s(u, y) = \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|_U^2 - \frac{1}{2}\|y\|_Y^2$ .

Del mismo modo, se define la ganancia  $L_2$  de  $H$ , que denotaremos como  $\gamma(H)$  a

$$\gamma(H) = \inf\{\gamma | H \text{ tiene ganancia } L_2 \leq \gamma\}$$

Los sistemas pasivos presentan interesantes propiedades, de las que subrayaremos dos que será de especial interés en futuros apartados de esta Tesis.

**Proposición 2.1 (Relación Pasividad-Ganancia  $L_2$ ).** Un sistema  $H$  como en (2.2) que sea estrictamente pasivo a la salida, entonces tiene ganancia  $L_2$  finita y es por tanto estable  $L_2$ .

**Proposición 2.2 (Interconexión de sistemas pasivos).** *Dos sistemas pasivos  $H_1$  y  $H_2$  interconectados según la estructura de realimentación de la figura 2.3, preservan la propiedad de pasividad. Más aún, si  $H_1$  y  $H_2$  son sistemas estrictamente pasivos a la salida, entonces el bucle cerrado resultante de la interconexión de realimentación tiene ganancia  $L_2$  finita y es por tanto estable en el sentido  $L_2$ .*

Para la demostración de estos resultados se refiere al lector a (Van der Schaft 1996).

## 2.3. El Problema del control óptimo

Consideremos un sistema no lineal variante en el tiempo dado por

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estados del sistema, y  $u \in \mathbb{R}^m$  es la señal de control aplicada al mismo.

Consideremos el problema de calcular la señal de control  $u^*(t)$  que minimiza el índice de comportamiento

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (2.5)$$

donde  $t_0$  es el instante inicial considerado,  $t_f$  el instante final,  $L(x(t), u(t), t)$  es la función de coste integral, y  $\phi(x(t_f), t_f)$  el coste final. Asumimos asimismo una condición inicial  $x(t_0) = x_0$  con  $t_0$  fijo y  $t_f$  posiblemente variable.

En teoría de control óptimo, los problemas que involucran únicamente costes en los instantes inicial y/o final ( $L = 0$ ), se denominan *Problemas de Mayer*, en los que intervienen únicamente el coste integral ( $\phi = 0$ ) son los que conocidos como *Problemas de Lagrange*, y los problemas genéricos que incluyen ambos costes se denominan *Problemas de Bolza*.

Es usual incluir también condiciones sobre el estado terminal del sistema de la forma

$$\varphi(x(t_f), t_f) = 0 \quad (2.6)$$

con  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  una función suficientemente suave

Figuran en la literatura dos aproximaciones principales a la solución del problema de control óptimo planteado.

1. Cálculo de variaciones (haciendo uso del principio del máximo de Pontryagin)
2. Programación dinámica (haciendo uso del principio de optimalidad de Bellman)

Ambas aproximaciones se basan en la idea de transformar el problema de minimización sobre el intervalo temporal considerado, en un problema de minimización diferencial haciendo uso de un par de principios de partida, en cada caso:

1. Para el **Cálculo de variaciones**, el principio de optimización se basa en imponer que trayectorias próximas a la óptima buscada deban incurrir necesariamente en valores de la función de costes mayores que el valor del coste para la trayectoria óptima. Dicho de otro modo, la variación infinitesimal de la función de costes  $J$  en torno a la trayectoria óptima, debe ser cero. Esta idea conduce a una formulación diferencial del problema que admite solución bajo ciertas condiciones.
2. Para la **Programación dinámica** empleamos el *Principio de Optimalidad de Bellman*, que se puede resumir como: “Dada una trayectoria óptima entre los instantes inicial,  $t_0$ , y un instante intermedio,  $t$ , podemos calcular la trayectoria óptima entre  $t_0$  y un instante final  $t_f > t$ , yuxtaponiendo la trayectoria inicial a la calculada entre  $t$  y  $t_f$  tomando como estados y controles iniciales de esta trayectoria, los estados y controles finales de la trayectoria previamente calculada entre  $t_0$  y  $t$ ”.

Describiremos a continuación las ideas principales asociadas a cada formulación sin entrar en los detalles asociados a los teoremas, que pueden encontrarse en la numerosa bibliografía disponible sobre el tema.

### 2.3.1. Cálculo de variaciones

Consideremos un sistema dinámico no lineal genérico como en (2.4), para el cual queremos calcular la ley de control  $u(t)$  tal que el índice  $J$  en (2.5) sea mínimo.

Para derivar las condiciones necesarias para el óptimo, aplicamos el cálculo de variaciones a la función de costes (2.5) sujeta a las restricciones dadas por (2.4) y (2.6). Para ello modificamos la función de costes usando los multiplicadores de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  (también conocido como *coestado*),

$$\tilde{J} = \phi(x(t_f), t_f) + \lambda^T \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [L(x(t), u(t), t) + p^T(f(x(t), u(t), t) - \dot{x})] dt \quad (2.7)$$

Definiendo el *Hamiltoniano*  $H(x, u, t)$  usando la bien conocida *transformación de Legendre*

$$H(x, p, u, t) = L(x, u, t) + p^T f(x, u, t)$$

La variación de (2.7) puede calcularse entonces, asumiendo que una variación infinitesimal  $\delta u(\cdot)$  produce una variación  $\delta x(\cdot)$ ,  $\delta p(\cdot)$  y  $\delta \lambda(\cdot)$  tal que

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J} &= (D_1\phi + D_1\varphi^T \lambda)\delta x|_{t_f} + (D_2\phi + D_2\varphi^T \lambda)\delta t|_{t_f} + \varphi^T \delta \lambda + (H - p^T \dot{x})\delta|_{t_f} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} [D_1 H \delta x + D_3 H \delta u - p^T \delta \dot{x} + (D_2 H^T - \dot{x})\delta p] dt \end{aligned}$$

donde la notación  $D_i H$  hace referencia a la derivada de  $H$  respecto al  $i$ -ésimo argumento. Así, por ejemplo

$$D_3 H(x, p, u, t) = \frac{\partial H}{\partial u} \quad D_1 H(x, p, u, t) = \frac{\partial H}{\partial x}$$

Así, integrando por partes  $\int p^T \delta \dot{x} dt$  obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J} &= (D_1\phi + D_1\varphi^T \lambda - p^T)\delta x(t_f) + (D_2\phi + D_2\varphi^T \lambda + H)\delta T + \varphi^T \delta \lambda + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} [(D_1 H + \dot{p}^T)\delta x + D_3 H \delta u + p^T \delta \dot{x} + (D_2 H^T - \dot{x})^T \delta p] dt \end{aligned}$$

De este modo, alcanzaremos un extremo para  $\tilde{J}$  cuando  $\delta \tilde{J} = 0$  para todas las posibles variaciones independientes de  $\delta \lambda$ ,  $\delta x$ ,  $\delta u$ ,  $\delta p$ . Estas condiciones se verifican si

- Para  $\delta \lambda$

$$\varphi(x(T), T) = 0$$

- Para  $\delta p$

$$\dot{x} = \frac{\partial^T H}{\partial p}$$

- Para  $\delta x$

$$\dot{p} = -\frac{\partial^T H}{\partial x}$$

- Para  $\delta u$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

- Para  $\delta x(t_f)$

$$D_1\phi - p^T = -D_1\varphi^T \lambda|_{t_f}$$

- Para  $\delta t_f$

$$H + D_2\phi = -D_2\varphi^T \lambda|_{t_f}$$

Las condiciones anteriores junto con las impuestas en los instantes inicial y final,  $x(t_0) = 0$  y  $\varphi(x(t_f), t_f) = 0$  constituyen las condiciones necesarias para la optimalidad.

Las condiciones sobre obtenidas sobre las variaciones del estado y tiempo finales,  $\delta x(t_f)$  y  $\delta t_f$

$$D_1\phi - p^T = -D_1\varphi^T \lambda|_{t_f}$$

$$H + D_2\phi = -D_2\varphi^T \lambda|_{t_f}$$

son referidas a menudo como *condiciones de transversalidad*.

Podemos escribir las condiciones de optimalidad de forma explícita como

$$\delta x = \frac{\partial^T H}{\partial p}(x, u^*, p, t) \quad (2.8)$$

$$\delta p = -\frac{\partial^T H}{\partial x}(x, u^*, p, t) \quad (2.9)$$

con la llamada *condición estacionaria* como

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u^*, p, t) = 0 \quad (2.10)$$

más la restricción sobre el estado final  $\varphi(x(t_f), t_f)$ .

Las condiciones recién expuestas componen un *problema de contorno* con condiciones en ambos extremos. La condición inicial para  $x$  está dada para el instante inicial  $t_0$ , mientras que la condición inicial para  $p$  viene dada para el instante final,  $t_f$ . Por tanto este problema así formulado no puede ser resuelto en general de forma directa mediante métodos de integración numérica. Además la solución proporcionada por esta formulación viene dada en “bucle abierto” como función de  $p(t)$ , lo cual relativiza su interés desde el punto de vista de la ingeniería de control, ya que en esta disciplina habitualmente se prefieren soluciones de realimentación.

Estas condiciones constituyen además un conjunto de condiciones necesarias, pero no suficientes para optimalidad. Es decir, estas condiciones permiten obtener la solución óptima del problema, en tanto en cuanto ésta exista. Ignorar este hecho puede llevar a la formulación de erróneas aseveraciones como la constatada de modo sorprendentemente simple por la *Paradoja de Perrón*<sup>7</sup>.

En el supuesto de que este óptimo exista, para determinar si el óptimo calculado a partir de las condiciones anteriores es efectivamente un mínimo debemos tomar segundas variaciones en las expresiones. Así, una *condición suficiente* para garantizar la

<sup>7</sup>La paradoja postula que el mayor de todos los números enteros es la unidad. El razonamiento se realiza por reducción al absurdo: Si 1 no es el mayor número entero, entonces existe  $N > 1$  que lo es. Pero ello no es posible ya que para cualquier  $N > 1$ , se verifica que  $N^2 > N$ . Con lo que pretendidamente se prueba el resultado. La falacia reside en suponer por hipótesis la existencia del máximo buscado.

optimalidad local de una determinada trayectoria óptima  $x^*(\cdot)$ ,  $u^*(\cdot)$  y  $p^*(\cdot)$  es que la matriz Hessiana

$$D_2^2 H(x^*, u^*, p^*, t) = 0$$

sea definida positiva a lo largo de la trayectoria

Es interesante notar que el punto clave para la obtención de las condiciones necesarias de optimalidad ha sido el empleo de la transformación de Legendre para transformar un problema de minimización funcional en términos del Lagrangiano,  $L$ , del problema, en un problema de optimización estática sobre el Hamiltoniano  $H(x, u, p, t)$ .

Adicionalmente, en el caso de incluir restricciones sobre la acción de control,  $u \in U$ , podemos formular el problema sustituyendo la *condición estacionaria* (2.10) por

$$H^*(x, p) = \min_{u \in U} H(x, p, u)$$

con la ley de control óptima como

$$u^*(x, p) = \arg \min_{u \in U} H(x, p, u)$$

### 2.3.2. Programación dinámica

El problema de minimización planteado en el apartado anterior, admite solución también en términos de la formulación denominada *Programación Dinámica*.

Para ello introducimos previamente el concepto de *función de coste residual* (*Cost-to-go function* en su denominación en inglés), como

$$J^*(x, t) = \min_{u(\cdot)} \{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} [L(x(t), u(t), t)] dt \} \quad (2.11)$$

Si asumimos que  $J^*$  es continuamente diferenciable como función de  $x$  y  $t$ , podemos aplicar el principio de optimalidad de Bellman como:

- Supongamos que el sistema tiene por estado inicial  $x$  en el instante  $t$  y evoluciona durante  $\Delta t$  con una cierta acción de control  $u$ .
- para  $t + \Delta t$  el estado es  $x'$ .
- si desde  $x'$  evolucionamos según la trayectoria óptima hasta el instante final  $t_f$ , el coste acumulado en ese trayecto será  $J^*(x', t + \Delta t)$ .
- para  $\Delta T \rightarrow 0$  podemos aproximar  $x' \approx x + f(x, u, t)\Delta t$ .

- si llamamos ahora  $J'(x, t)$  al coste asociado a la evolución desde el estado  $x$  en  $t$  hasta el punto final pasando por  $x'$  en  $t_0$ , tendremos

$$J'(x, t) = J^*(x', t + \Delta t) + L(x, u)\Delta t$$

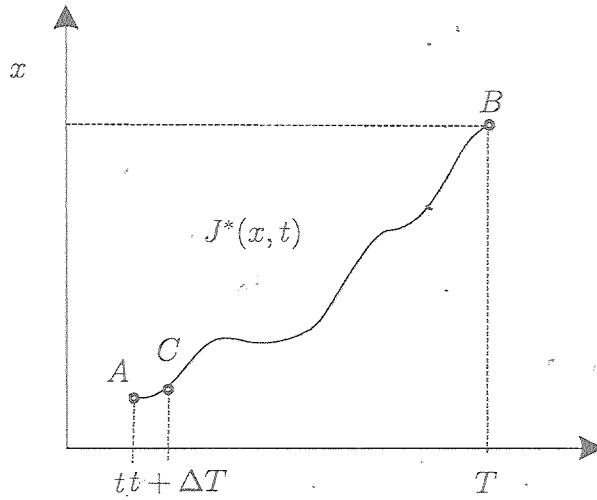


Figura 2.4. Ilustración gráfica del principio de optimidad.

Dado que  $J^*(x, t) \leq J'(x, t)$ , ya que  $J^*(x, t)$  es, por hipótesis, el mínimo correspondiente a la trayectoria óptima, tendremos

$$\begin{aligned} J^*(x, t) &= \min_{u \in U} \{J^*(x', t + \Delta t) + L(x, u)\Delta t\} = \\ &= \min_{u \in U} \{J^*(x + f(x, u, t)\Delta t, t + \Delta t) + L(x, u)\Delta t\} = \end{aligned}$$

si consideramos  $\Delta t$  suficientemente pequeño

$$= \min_{u \in U} \{J^*(x, t) + \frac{\partial J^*}{\partial x} f(x, u, t)\Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t + L(x, u)\Delta t\}$$

luego

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t = - \min_{u \in U} \left\{ \frac{\partial J^*}{\partial x} f(x, u, t)\Delta t + L(x, u)\Delta t \right\}$$

si tomamos el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  obtenemos

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = - \min_{u \in U} \left\{ \frac{\partial J^*}{\partial x} f(x, u, t) + L(x, u) \right\} \quad (2.12)$$

que constituye la denominada *ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB), con la condición de contorno  $J^*(x, t_f) = \phi(x)$  donde los valores de  $x$  que verifican  $\varphi(x) = 0$ .

De este modo, si existe una solución continuamente diferenciable para la ecuación HJB, el control óptimo puede expresarse como

$$u^*(x, t) = \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{\partial J^*}{\partial x} f(x, u, t) + L(x, u) \right\}$$

o bien empleando la notación compacta del *Hamiltoniano óptimo*

$$H(x, \frac{\partial^T J}{\partial x}, u) = L(x, u) + \frac{\partial J^*}{\partial x} f(x, u, t)$$

podemos expresar la ecuación HJB como

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = -H^*(x, \frac{\partial^T J}{\partial x}, u) \quad H^* = \min_u H$$

Es interesante observar que la ecuación HJB así obtenida requiere asumir que la función  $J$  es continuamente diferenciable. Sin embargo esta hipótesis no es necesaria para la aplicación del principio del máximo.

Es difícil no obstante, garantizar la *diferenciabilidad* de la solución obtenida, incluso cuando los “datos” del problema son suaves. Existen ejemplos notables por su simplicidad, que muestran que problemas con funcionales y dinámicas continuas y diferenciables, obtienen soluciones óptimas discontinuas y/o no diferenciables (Ej. soluciones *bang-bang*<sup>8</sup>).

Existen sin embargo aproximaciones a la solución de ecuaciones HJB para el caso no diferenciable, tal como son las llamadas *soluciones de viscosidad*. Crandall y Lions (Crandall and Lions 1983) formularon por primera vez este tipo de soluciones para ecuaciones HJB. Una completa obra de referencia para este tipo de soluciones la encontramos en (Bardi and Capuzzo-Dolcetta 1997).

Es necesario comentar que ambas formulaciones emplean de uno u otro modo la noción de perturbación local de la solución óptima, si bien para ciertos problemas singulares esta hipótesis de perturbación infinitesimal en torno a la trayectoria óptima puede no ser posible. Por ejemplo, podemos querer conectar los puntos extremos de una trayectoria, pero no existen trayectorias próximas a la dada. Esto conduce a soluciones óptimas singulares que deben ser tratadas con una formulación específica.

Existe además una interesante conexión entre las aproximaciones de cálculo variacional y programación dinámica expuestas, ya que el término  $\frac{\partial J^*}{\partial x}$  juega en programación dinámica el papel que juega en coestado  $p$  en la formulación del cálculo de variaciones.

---

<sup>8</sup>Reciben este nombre porque el control comuta alternativamente entre los extremos admitidos para el mismo

Por otro lado, es interesante destacar que la formulación de programación dinámica conduce de forma natural a una estructura de control realimentado, en la que la señal de control a aplicar en cada instante, depende del estado del sistema e instante considerado. Esta formulación es por tanto preferible desde el punto de vista de ingeniería de control, y será la adoptada en esta Tesis.

La principal dificultad asociada a la formulación de programación dinámica del control óptimo reside en el hecho de que encontrar soluciones explícitas para la ecuación HJB es un problema complejo en general. En la literatura aparecen por tanto, dos corrientes en este sentido: aquella que trata de formular soluciones a las ecuaciones empleando métodos de resolución numérica, y otra que trata de encontrar soluciones explícitas restringiéndose al estudio de sistemas con una estructura muy determinada. Los resultados presentados en esta Tesis se encuadran dentro de esta última corriente.

### 2.3.3. Teoría de Juegos diferencial

La *Teoría de Juegos* es una rama de las matemáticas que estudia el comportamiento dinámico de una serie de actores (*jugadores*) que, de acuerdo con unas reglas establecidas, interactúan tratando cada uno de ellos de alcanzar objetivos totales o parcialmente contrapuestos a los de sus contrincantes, y con la posible intervención del azar en el resultado de sus acciones.

Con esta definición, el nombre surge de forma natural, ya que los juegos generalmente responden a esta definición: un número de jugadores tratan de alcanzar un objetivo (ganar el juego), siguiendo unas reglas. En esta situación la victoria de un jugador implica la derrota de todos o parte de sus contrincantes (objetivos contrapuestos).

Este tipo de problemas fueron estudiados por primera vez por el matemático húngaro John von Neuman formulando su *Teorema fundamental de la Teoría de Juegos* en 1936. En un libro, ya clásico, von Neuman y Morgenstern (von Neumann and Morgenstern 1947) sentaron las bases de la conexión entre la teoría de juegos y el comportamiento económico, aplicación que ha resultado notablemente fructífera.

Más tarde, Nash, von Stackelberg y otros extendieron el trabajo a N-jugadores con estrategias no cooperativas. En 1969, Isaacs formuló la versión diferencial de la teoría, abriendo la puerta para la aplicación a la teoría de control moderna.

Son muchas las formulaciones de la teoría de juegos en control. Una de las más corrientes es formular problemas de optimización en términos de lo que en teoría de juegos se conoce como juegos de *dos jugadores y suma nula* (*two person zero sum games* en inglés). Un juego se dice de suma nula, si uno de los jugadores busca minimizar y

el otro maximizar una misma función de costes (el beneficio de un jugador implica el perjuicio del otro).

Para concretar ideas consideremos un sistema dinámico como en 2.4 sobre el que admitimos adicionalmente la actuación de una señal de perturbaciones  $\omega \in \mathbb{R}^p$ , y que como tal, no es predecible.

$$\dot{x} = f(x, u, \omega, t) \quad (2.13)$$

En esta expresión, al igual que en 2.4,  $x \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estados del sistema, y  $u \in \mathbb{R}^m$  es la señal de control aplicada al mismo.

Consideremos el problema de calcular la señal de control  $u^*(t)$  que minimiza el índice de comportamiento

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (2.14)$$

donde, por simplicidad hemos omitido<sup>9</sup> la condición sobre el estado final del sistema que hacíamos en (2.6).

Este problema puede expresarse en términos de la teoría de juegos, si consideramos dos hipotéticos jugadores: un *jugador 1* que manipula la acción de control  $u$  y cuyo objetivo es conducir la evolución dinámica del sistema de modo que se minimice el valor de la función de costes  $J$ , y un *jugador 2* que controla la señal de perturbaciones sobre el sistema,  $\omega$ , y cuyo objetivo es maximizar el valor de  $J$ .

Decimos además que el problema es de *información completa* (*full information* en inglés) si ambos “jugadores” tienen acceso al estado del sistema,  $x$ .

Decimos que el problema tiene una solución de *punto de silla*, si existe  $u^* \in U$  y  $\omega^* \in \Omega$ , tal que

$$J(x, u, \omega^*, t) \leq J(x, u^*, \omega^*, t) \leq J(x, u^*, \omega, t)$$

donde  $U$  y  $\Omega$  son los dominios de definición de la señal de control y las perturbaciones respectivamente.

La solución de este problema puede formularse en términos de un Hamiltoniano análogo al empleado en programación dinámica

$$H(x, u, \omega, p, t) = L(x, u, \omega, t) + p^T f(x, u, \omega, t)$$

la idea ahora es, en vez de buscar un mínimo absoluto para  $H$  como función de  $u$ , decimos que el problema admite una solución de *punto de silla* si para un cierto par,  $u$

---

<sup>9</sup>La inclusión de esta condición conduce a la formulación de un grupo de problemas conocidos en teoría de juegos como *problemas de persecución y evasión* (*pursuit and evasion games* en la literatura inglesa)

y  $\omega$ , se verifica

$$\min_u \max_{\omega} H(x, u, \omega, p, t) = \max_{\omega} \min_u H(x, u, \omega, p, t)$$

Si este punto de silla existe, los valores óptimos de  $u$  y  $\omega$  vienen dados por

$$u^*(t) = \arg \min_u \left( \max_{\omega} H(x, u, \omega, p, t) \right)$$

y

$$\omega^*(t) = \arg \max_{\omega} \left( \min_u H(x, u, \omega, p, t) \right)$$

también es posible demostrar que si la función de coste óptimo <sup>10</sup>  $J^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es continuamente diferenciable <sup>11</sup> entonces la condición de punto de silla puede expresarse

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial t}(x, t) &= - \max_{\omega} \min_u \left( H(x, u, \omega, \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t), t) \right) \\ &= - \min_u \max_{\omega} \left( H(x, u, \omega, \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t), t) \right) \\ &= -H(x, u^*, \omega^*, \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t), t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde  $(u^*, \omega^*)$  constituyen una solución de punto de silla del problema planteado.

Es interesante observar como, al igual que en el caso de programación dinámica, la clave para la formulación de la solución del problema se encuentra en la aplicación de la transformación de Legendre para, por medio de una función hamiltoniana  $H$ , transformar una problema de optimización dinámica en términos de  $J$ , en un problema de optimización estática en términos de  $H$ .

La expresión (2.15) será muy referenciada en capítulos subsiguientes de esta Tesis, por constituir como veremos la base de la formulación del problema de rechazo de perturbaciones  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

Es interesante comentar sin embargo, que la teoría de juegos admite generalizaciones para el caso de  $N$  jugadores, que empleen estrategias no cooperativas, parcialmente cooperativas o totalmente cooperativas, problema este último que admite solución en el marco del control óptimo estándar. Así por ejemplo, la solución más simple para el caso de  $N$  jugadores no cooperativos, conduce al conocido como *equilibrio de Nash no cooperativo* (*Non-cooperative Nash Equilibrium*), o bien si tenemos cooperación parcial o por equipos, estaremos en el marco de las conocidas como *soluciones de Stackelberg*. Estas generalizaciones en el contexto de la teoría de control permiten tener en

<sup>10</sup> Esta función es a menudo referenciada en la literatura como *cost-to-go value function* o función de costes residual

<sup>11</sup> es posible relajar esta condición recurriendo a las soluciones de viscosidad mencionadas en el contexto de la programación dinámica.

cuenta múltiples “actuaciones” (controles, perturbaciones u otras acciones) sobre el sistema admitiendo además incluir en la formulación el grado de conocimiento del estado dinámico del sistema por parte de cada una de las actuaciones (Control con información completa o parcial).

### 2.3.4. Control óptimo $\mathcal{H}_2$ de sistemas no lineales

La filosofía de control conocida en ingeniería de control como *Control Óptimo  $\mathcal{H}_2$* , puede ser formulada como una particularización de algunos de los resultados que acabamos de recopilar en este capítulo.

Así, si tomamos el integrando de la función de costes  $J$  en (2.14) adopta la forma cuadrática en  $u$

$$L(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2}l(x) + \frac{1}{2}u^T R u \quad (2.16)$$

donde  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz constante definida positiva,  $l(x) \geq 0$  con  $l(0) = 0$ , y no consideramos penalizaciones sobre el coste terminal ( $\phi = 0$ ). Diremos que el problema de optimización así planteado es un *problema de control óptimo  $\mathcal{H}_2$* <sup>12</sup>.

Si adicionalmente restringimos el tipo de sistemas no lineales aquellos que presentan dependencia afín en la actuación, es decir

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (2.17)$$

tendremos que el problema de optimización  $\mathcal{H}_2$  se traduce en el cálculo de  $u$  tal que se minimice

$$\min_u \frac{1}{2} \int_0^\infty (u^T R u + l(x)) dt \quad (2.18)$$

Este problema así planteado admite solución mediante la ecuación HJB en (2.12).

De este modo, la siguiente proposición permite obtener una formulación del problema planteado

**Proposición 2.3 (Ecuación HJB para el problema  $\mathcal{H}_2$ ).** *El sistema dinámico (2.17) admite una solución,  $u_0(\dot{x}, t)$ , para el problema de optimización (2.18) de la forma*

$$u_0(x, t) = -R^{-1}g^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} \quad (2.19)$$

---

<sup>12</sup>Es posible encontrar en la literatura formulaciones ligeramente más generales que ésta. En particular es frecuente considerar la existencia de términos cruzados en  $x$  y  $u$ , si bien no aporta ventajas esenciales en el diseño del control y complica innecesariamente las expresiones

donde  $V(x, t)$  es una función escalar definida positiva y suficientemente suave que verifica la ecuación HJB

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} g(x, t) R g^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} + \frac{1}{2} l(x) = 0 \quad (2.20)$$

Demostración:

La prueba de este resultado se realiza tomando como base la ecuación HJB obtenida en (2.12), que particularizada para el caso que nos ocupa resulta

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = - \min_u \left\{ \frac{\partial J^*}{\partial x} (f(x, t) + g(x, t)u) + \frac{1}{2}(u^T R u + l(x)) \right\} \quad (2.21)$$

Esta ecuación se resuelve formulando en primer lugar la solución para el problema de optimización del segundo miembro. Así, teniendo en cuenta que el funcional a optimizar es una función cuadrática en  $u$ , podemos calcular el mínimo absoluto diferenciando respecto a  $u$  e igualando a cero, para obtener

$$g^T(x, t) \frac{\partial^T J^*}{\partial x} + R u = 0$$

Si llamamos al valor óptimo de la función de costes  $V(x, t) = J^*(x, t)$ , obtenemos de la expresión anterior el valor del control óptimo,  $u_0(x, t)$  expresado en (2.19).

Sustituyendo ahora esta ley de control óptima en la expresión (2.21) y reordenando términos, es fácil comprobar que se obtiene la ecuación HJB en (2.20).

Ahora bien, el resultado así establecido, sin más restricciones, no garantiza que la ley de control  $u_0(x, t)$  formulada estabilice el sistema a lazo cerrado. Para garantizar este hecho, es condición suficiente que la función  $V(x, t)$  sea una función de Lyapunov para el sistema a lazo cerrado, es decir que sea definida positiva y con  $\dot{V}(x, t) < 0$  a lo largo de las trayectorias del sistema. En efecto, a partir de la expresión (2.20), deducimos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (f(x, t) + g(x, t)u_0(x, t)) = -\frac{1}{2}u_0(x, t)^T R u_0(x, t) - \frac{1}{2}l(x) < 0$$

luego, aplicando el teorema 2.1 de estabilidad de Lyapunov, concluimos el resultado.

q.o.d.

**Observación 2.1 (Valor del coste óptimo  $\mathcal{H}_2$ ).** Es interesante observar a partir de la demostración del teorema anterior que el valor óptimo (mínimo) del índice de comportamiento  $J$ , para el problema  $\mathcal{H}_2$  planteado coincide con el valor de  $V(x(0), 0) = J^*(x(0), 0)$ , resultado que se concluye de la propia definición de  $J^*$ .

# Capítulo 3

## Control óptimo $\mathcal{H}_\infty$ y robustez de sistemas no lineales

### 3.1. Introducción

Uno de los campos de trabajo teóricos más activos en las últimas dos décadas en el marco de la ingeniería de control, ha sido la llamada *Teoría de Control Óptimo  $\mathcal{H}_\infty$* .

Las primeras aproximaciones al problema fueron realizadas por Zames a principios de los años ochenta (Zames and Francis 1981),(Zames 1981), en el contexto de la reducción de la *sensibilidad* en plantas lineales, tomando el operador de norma  $\mathcal{H}_\infty$  como herramienta matemática para cuantificar dicha sensibilidad. La formulación original del problema se realizó en el dominio frecuencial<sup>1</sup> empleando como herramientas esenciales la *Teoría de Operadores y Aproximaciones*, *Factorización Espectral*, y la *Parametrización (de Youla)*.

Diferentes aproximaciones al problema fueron formuladas con posterioridad entre los que cabe destacar por su relevancia para algunos resultados de esta Tesis

- *Teoría de Juegos diferenciales* (Doyle *et al.* 1989, Basar and Bernhard 1991), de

---

<sup>1</sup>No en vano, el símbolo matemático  $\mathcal{H}_\infty$  hace referencia al *espacio de Hardy* de todas las funciones de variable compleja que son analíticas y acotadas en semiplano derecho abierto.

la cual se han esbozado las ideas principales en el capítulo 2, y que se basa en la observación de que la formulación frecuencial del problema  $\mathcal{H}_\infty$  es equivalente en el dominio temporal a un problema de optimización *min-max*. De hecho, y como veremos en este capítulo, el problema  $\mathcal{H}_\infty$  puede interpretarse en el marco de la teoría de juegos como un *problema de dos jugadores y suma nula*.

- *Teoría de Sistemas Disipativos*, (Van der Schaft 1996) también comentada brevemente en el capítulo 2. Esta teoría emplea las nociones de *dissipatividad* y *ganancia*  $L_2$ , explotando la bien conocida equivalencia en sistemas lineales entre la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia del sistemas (dominio frecuencial), y la ganancia  $L_2$  (ver definición 2.9) de la aplicación  $u \mapsto y$  (dominio temporal), donde  $u \in \mathcal{L}_2$  e  $y \in \mathcal{L}_2$  representan un par entrada-salida admisible para el sistema.

Como veremos a continuación, ambas aproximaciones al problemas tienen la ventaja de proporcionar un marco apropiado (dominio temporal) para la extensión de los resultados lineales en el dominio de la frecuencia, a sistemas no lineales.

## 3.2. Formulación general del problema

Consideremos un sistema dinámico no lineal,  $G$ , de la forma

$$G : \begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u \\ z = h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u \\ y = h_2(x, t) + k_{21}(x, t)\omega \end{cases} \quad (3.1)$$

donde la primera ecuación de (3.1), describe la dinámica de la planta no lineal en  $\mathbb{R}^n$  con vector de estados  $x(t)$  y señal de control  $u(t) \in \mathbb{R}^{m_u}$ . Las perturbaciones que afectan al sistemas están representadas por el término  $\omega \in \mathbb{R}^{m_\omega}$ . La segunda ecuación en (3.1) define la variable de comportamiento asociada al problema de optimización  $\mathcal{H}_\infty$ , y la tercera representa la salida del sistema.

Asumiremos además, que  $f(0, t) = 0$ ,  $h_1(0, t) = 0$ ,  $\forall t$  condiciones suficientes para que  $x = 0$  sea un punto de equilibrio del sistema (en ausencia de perturbaciones), y que las funciones  $f(x, t)$ ,  $g_1(x, t)$ ,  $g_2(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $k_{12}(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$  y  $k_{21}(x, t)$  son funciones suficientemente suaves.

El problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal así planteado consiste en encontrar un *controlador admisible*, es decir, debe ser una función causal de la salida

$$K : y(\cdot) \mapsto u(\cdot)$$

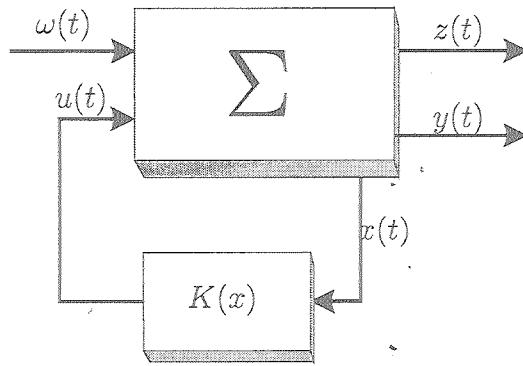


Figura 3.1: Esquema de control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de estados

tal que el bucle cerrado resultante sea estable y verifique la relación de atenuación en norma  $L_2$  en el canal  $\omega \mapsto z$  dada por

$$J_\infty(u, \gamma) = \int_0^\infty \|z(x, u, t)\|^2 dt - \gamma^2 \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt \leq 0 \quad (3.2)$$

El problema así planteado es un problema de optimización en el que el objetivo consiste en formular una ley de control estabilizante que minimice la ganancia  $L_2$  de la aplicación de entrada-salida no lineal  $\omega \mapsto z$ , para la peor perturbación admisible sobre el sistema.

La relación de atenuación de perturbaciones permite capturar de forma simple la noción de *desempeño* para sistemas no lineales. Así, si como es frecuente, formulamos el canal  $z$  como una función que pondere el esfuerzo de control,  $u$ , frente a error de seguimiento o regulación<sup>2</sup> estaremos determinando en cierta medida las exigencias de comportamiento planteadas para al problema.

Mientras que la noción de desempeño puede ser capturada por la relación de atenuación (3.2), otra cuestión es la estabilidad del lazo cerrado ante la estructura de control  $\mathcal{H}_\infty$ . Así, diremos que el bucle cerrado del sistema controlado es *débilmente internamente estables* (*weakly internally stable* en inglés), si para  $G$  inicializado en el estado  $x_0$  y las perturbaciones  $\omega(t) \in \mathcal{L}_2$ , todas las señales,  $u(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  y  $z(\cdot)$  así como  $x(\cdot)$  convergen a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ .

<sup>2</sup>Por ejemplo, es frecuente adoptar para  $z^T z$  una estructura cuadrática, esto es  $z^T z = x^T Q x + u^T R u \geq 0$ , con  $Q$  y  $R$  matrices definidas positivas de dimensiones apropiadas, que ponderan el error de seguimiento/regulación y el esfuerzo de control respectivamente.

Por otro lado, diremos que el sistema a lazo cerrado es *internamente estable*, si es débilmente internamente estable y adicionalmente el controlador admite una representación interna tal que su estado tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.2.1. Conexiones del Control $\mathcal{H}_\infty$

El problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal planteado en el apartado anterior, presenta como se ha mencionado, interesantes conexiones con dos formalismos de la teoría de control que permiten interpretar de forma complementaria los resultados que obtendremos sobre el mismo.

#### 3.2.1.1. Control $\mathcal{H}_\infty$ y sistemas disipativos

La relación de atenuación (3.2) en norma  $L_2$  que caracteriza el problema  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal, está íntimamente relacionado con la teoría de sistemas disipativos, brevemente perfilada en el capítulo 2 de esta Tesis.

Es fácil comprobar a la luz de aquellos resultados, que la relación de atenuación en norma  $L_2$ , (3.2), es equivalente a imponer que el sistema a lazo cerrado con entrada  $\omega$  y salida  $z$  es *disipativo* respecto a la tasa de aporte

$$s(z, \omega) = \frac{1}{2}\gamma^2\|\omega\|^2 - \frac{1}{2}\|z\|^2 \quad (3.3)$$

Así, diremos que

**Definición 3.1 (Sistema  $\gamma$ -disipativo).** *Un sistema  $G$  es  $\gamma$ -disipativo si existe un valor de  $\gamma > 0$  tal que es disipativo respecto a la tasa de aporte (3.3).*

Otra conexión relevante es la existente entre *disipatividad y estabilidad*, (Willem 1972, Hill and Moylan 1976, Hill and Moylan 1977, Van der Schaft 1996). Es posible demostrar los sistemas disipativos que disfrutan de las propiedades de *detectabilidad* u *observabilidad*<sup>3</sup>, también son estables. Es decir, si el par *sistema + controlador*,  $(G, K)$ , es *z-detectable*<sup>4</sup>, y  $\gamma$ -*disipativo*, entonces el sistema es débilmente internamente estable (ver teorema 2.1.3 de (Helton 1999)).

---

<sup>3</sup>Entenderemos por sistema *z-observable* aquel que para  $\omega(\cdot) = 0, z(\cdot) = 0$ , implica  $x(\cdot) = 0$

<sup>4</sup>Es decir,  $\omega(\cdot) \in \mathcal{L}_2$  y  $z(\cdot) \in \mathcal{L}_2$ , implica que  $x \in \mathcal{L}_2$  y  $x(t) \rightarrow 0$

### 3.2.1.2. Control $\mathcal{H}_\infty$ y la teoría de juegos

El marco teórico de la teoría de juegos, también se ha demostrado eficaz para tratar el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal.

En esta metodología, el problema  $\mathcal{H}_\infty$  se formula en términos de un problema de optimización *min-max* para la peor de las posibles perturbaciones que actúen sobre el sistema, y adopta su realización en el marco de la teoría de juegos como un problema de *dos jugadores y suma nula (two-players zero sum game)*. Así, podemos imaginar que uno de los *jugadores* está encarnado por la acción de control  $u$ , con objetivo de minimizar un índice de comportamiento, y el otro *jugador*, hace las veces de las perturbaciones que actúan sobre el sistema  $\omega$ , y con el objetivo contrapuesto, es decir, maximizar el índice de comportamiento. El *juego* consistirá entonces en calcular la acción de control  $u$  que logra minimizar el índice de comportamiento para la peor de todas las posibles combinaciones de perturbaciones que actúan sobre el sistema, preservando la estabilidad de lazo cerrado del mismo.

## 3.3. Solución del control $\mathcal{H}_\infty$ no lineal

El problema  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal admite solución empleando cualquiera de las dos formulaciones presentadas en el apartado anterior, resultando como no podía ser de otro modo, soluciones equivalentes.

Cabe distinguir sin embargo dos tipos de problemas. Si el estado dinámico del sistema está disponible para formular la ley de control, entonces estaremos en el marco de las soluciones de *realimentación de estados (state feedback control)*. Este tipo de soluciones admiten una fácil formulación, si bien presentan la limitación de que en la práctica no todos los sistemas presentan el estado accesible. En estos casos hay que plantear la solución en el marco de las soluciones de *realimentación de la salida (output feedback control)*, que como veremos, hace intervenir una nueva dinámica, denominada *estado de información (information state)* que permite “reconstruir” el estado del sistema para los propósitos de control.

### 3.3.1. Solución de realimentación de estados

Por su simplicidad, abordaremos el problema de la formulación de la solución del problema  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal desde el marco de la teoría de juegos. Un resultado equivalente es posible obtenerlo a partir de la teoría de sistemas disipativos, si bien, el planteamiento

y la argumentación es por lo general más extensa.

Consideremos el sistema dinámico (3.1) y un índice de comportamiento

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt$$

El problema  $\mathcal{H}_\infty$  puede entonces plantearse como un *juego* que tiene un índice de comportamiento asociado

$$L_\gamma = \frac{1}{2}L(x(t), u(t), t) - \frac{1}{2}\gamma^2\|\omega\|^2 \quad (3.4)$$

donde la acción de control *juega* a minimizar dicho índice y las perturbaciones tratan de maximizarlo, es decir, perturbar en la mayor medida posible el comportamiento del sistema.

Obsérvese que el índice (3.2) es equivalente a considerar el caso particular  $L(x(t), u(t), t) = z^T z$ .

Entonces, siguiendo argumentos similares a los planteados en el capítulo 2 referidos a la teoría de juegos, es fácil comprobar que el problema  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal admite una solución si existe una función diferenciable  $V(x, t)$  tal que se verifica el siguiente problema *min-max*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = -\max_{\omega} \min_u \left( \frac{\partial V}{\partial x}(f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u) + L_\gamma(x, u, t) \right) \quad (3.5)$$

Esta es la llamada *ecuación de Hamilton-Jacobi-Isaacs* (HJI). Si este problema admite solución, entonces la solución de realimentación de estados del problema  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal planteado puede expresarse como

$$u^*(t) = \arg \min_u \left( \max_{\omega} \left( \frac{\partial V}{\partial x}(f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u) + L_\gamma(x, u, t) \right) \right)$$

Para el caso particular, y por otro lado frecuente, en que  $L(x, u, t)$  presente una dependencia funcional cuadrática en  $u$ , el problema *min-max* expuesto admite solución única y explícita. Por ejemplo en la formulación original del problema

$$\begin{aligned} L(x, u, t) &= z^T z = (h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u)^T(h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u) \\ &= h_1^T(x, t)h_1(x, t) + u^T k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t)u + 2h_1^T(x, t)k_{12}(x, t)u \end{aligned}$$

Así, tomando primeras derivadas en  $u$  y  $\omega$  para la expresión a optimizar en (3.5), e igualando a 0, tendremos el punto de silla buscado para

$$u^*(x, t) = -E^{-1}(h_1^T k_{12} - g_2^T \frac{\partial^T V}{\partial x}) \quad (3.6)$$

y la peor de las perturbaciones admisibles

$$\omega^*(x, t) = \frac{1}{\gamma^2} g_1^T \frac{\partial^T V}{\partial x} \quad (3.7)$$

donde se han omitido las dependencias funcionales por compacidad y se ha tomado  $E = k_{12}^T k_{12}$ .

Sustituyendo estas expresiones en (3.5) obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (f - g_2 E^{-1} k_{12} h_1^T) + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma^2} g_1^T g_1 - g_2 E^{-1} g_2^T \right) \frac{\partial^T V}{\partial x} + \frac{1}{2} h_1^T (I - k_{12} E^{-1} k_{12}^T) h_1 \leq 0 \quad (3.8)$$

que es la *desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs* para el caso particular considerado, que como puede observarse adopta la forma de una ínequación diferencial en derivadas parciales no lineal.

Todos los problemas tratados en esta Tesis pueden ajustarse a la formulación dada en este apartado, y encontrarán solución como particularización de la ecuación (3.8).

### 3.3.2. El estado de información

En los problemas de control de índole práctica, es frecuente no disponer de medidas del estado dinámico del sistema a controlar, bien porque algunos de estos estados no sean técnicamente medibles, bien porque el dispositivo controlado no incorpora la sensorización apropiada para extraer ciertas magnitudes del vector de estados.

Para este tipo de sistemas, no son apropiadas las leyes de realimentación de estados que proporcionan buena parte de las técnicas de control que se basan en la representación interna de la dinámica del sistema. Es necesario reformular el control para tener en cuenta la información parcial proporcionada por las magnitudes medibles del sistema (salida).

En el problema que nos ocupa, la salida viene dada por la expresión en (3.1) como

$$y = h_2(x, t) + k_{21}(x, t)\omega$$

La ley de control,  $K$ , ahora consistirá en una aplicación causal  $y \mapsto u$  que obviamente no puede depender del estado  $x$  que no es accesible. En estos casos, podemos construir un estado adicional del controlador que denominaremos *estado de información* (*information state* en inglés) definido como

**Definición 3.2 (Estado de Información).** *Dado un tiempo  $t \geq 0$ , un conjunto de medidas pasadas de la salida del sistema  $y \in L_2[0, t]$ , y un conjunto de señales de*

control pasadas  $u \in L_2[0, t]$ , definimos el estado de información  $p_t(x) = p(x, t)$  como

$$p_t(x) = \sup_{\omega} \{ p_0(\xi(0)) + \frac{1}{2} \int_0^t [\|z(\tau)\|^2 - \gamma^2 \|\omega(\tau)\|^2] d\tau : \xi(t) = x \}, \quad (3.9)$$

$$y(\tau) = h_2(\xi(\tau), \tau) + k_{21}(\xi(\tau), \tau) \omega(\tau), 0 \leq \tau \leq t \}$$

y donde  $\xi(\cdot)$  satisface la ecuación de la dinámica del sistema, es decir

$$\dot{\xi} = f(\xi, t) + g_1(\xi, t) \omega + g_2(\xi, t) u$$

El valor de  $p_t$  se interpreta como el peor valor del coste *min-max* que es consistente con la *información medida* hasta el instante  $t$  considerado, con la dinámica de la planta y el estado terminal del sistema,  $x$  en el instante  $t$ .

El *estado de información* admite una interpretación esclarecedora si nos fijamos en el segundo sumando del término *min-max* de la definición de  $p_t$

$$E_{[0,t]} = \int_0^t [\|z(\tau)\|^2 - \gamma^2 \|\omega(\tau)\|^2] d\tau$$

es la energía consumida por el sistema en la evolución de 0 a  $t$ . De este modo la forma de calcular  $p_t(x)$  consiste en hacer evolucionar el sistema hacia atrás en el tiempo desde  $t$  a 0, partiendo del estado  $\xi(t) = x$ , y observar en qué estado  $\xi(0)$  incidimos, estado al que asociamos el nivel energético  $p_0(\xi(0))$ . Adicionalmente, en la evolución dinámica se toma en todo momento la peor perturbación admisible, para garantizar que el sistema es  $\gamma$ -dissipativo. Una observación clave en este contexto es que el sistema es  $\gamma$ -dissipativo si y sólo si  $p_T \leq 0$  para todo  $T$  e  $y \in \mathcal{L}_2[0, T]$ .

Intuitivamente resulta evidente que el *estado de información* reúne toda la información del pasado dinámico del sistema, relevante para la futura evolución del sistema con realimentación de la salida.

Sin embargo, es conveniente disponer de una representación en términos diferenciales del estado de información. Si asumimos que  $p_t$  es suficientemente suave<sup>5</sup>, podemos expresar el estado de información como

$$\dot{p}_t = F(p, u, y, t) \quad (3.10)$$

con

$$\begin{aligned} F(p, u, y, t) = \sup_{\omega} \{ & -\frac{\partial p}{\partial x} (f + g_1 k_{21}^T E_2^{-1} (y - h_2) + g_2 u) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial p}{\partial x} g_1 (I - g_{21}^T E_2^{-1} k_{21}) g_1^T \frac{\partial^T p}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{2} \|g_1 + k_{12} u\|^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 (y - h_2)^T E_2^{-1} (y - h_2) \} \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Admitimos una interpretación *viscosa* de la ecuación diferencial que lo describe

con  $E_2 = k_{21}k_{21}^T$

la figura 3.2 presenta una descripción esquemática de la estructura de control de realimentación de la salida empleando el estado de información descrito El estado de

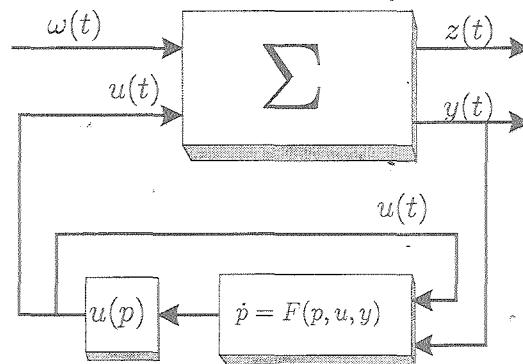


Figura 3.2: Esquema de control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida (*Estado de Información*)

información permite formular un estado dinámico para el controlador basado en la realimentación de la salida que adopta la forma  $u_t = K(p_t)$ .

Para determinar la estructura concreta de este controlador definimos la *función de valor*,  $W(p, t_1)$ , asociada al estado de información como:

$$W(p, t_1) = \inf_K \sup_{t_2 \geq t_1, y \in L_2[t_1, t_2]} \{p_{t_2} : p_{t_1} = p\}$$

Esta función escalar debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) y de dimensión infinita <sup>6</sup> en general

$$\frac{\partial}{\partial t} W(p, t) + \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \sup_{y \in \mathbb{R}^p} \left\{ \frac{\partial W(p, t)}{\partial p} F(p, u, y, t) \right\} \quad (3.11)$$

Esta ecuación diferencial, sin embargo, no es aún bien entendida en el contexto de la teoría de soluciones de viscosidad para EDP de dimensión infinita, y son muchos los aspectos que permanecen abiertos sobre la existencia de dichas soluciones.

La ecuación (3.11) puede interpretarse también en el contexto de la teoría de juegos, como una EDP de Hamilton-Jacobi-Isaacs, donde  $p_t$  juega el papel de estado, y  $u$  e  $y$

<sup>6</sup>para ciertos sistemas, por ejemplo, sistemas lineales o bilineales, la EDP es de dimensión finita

hacen las veces de *jugadores* que tratan de minimizar y maximizar respectivamente la función de coste.

De este modo, y si asumimos que es posible encontrar una solución suave  $W(p, t)$  para la EDP (3.11), así como algunas condiciones técnicas apropiadas, la más relevante de las cuales es la conocida como *condición de acoplamiento* dada por

$$p_t(x(t)) \leq \sup_x \{p_t(x)\} \leq W(p_t) < +\infty \quad (3.12)$$

es posible construir el conocido como *controlador central*,  $K^*(p_t)$ , del sistema mediante realimentación de la salida de un modo similar a como se obtuvo el controlador en el caso de la realimentación del vector de estados. Para ello tomamos la *función de valor*,  $W(p, t)$ , de forma análoga a la función  $V(x, t)$  para el caso de realimentación de vector de estados, y obtenemos

$$\begin{aligned} u^*(p) &= \arg \min_{u \in \mathbb{R}^m} \left\{ \sup_{y \in \mathbb{R}^p} \left\{ \frac{\partial W(p, t)}{\partial p} F(p, u, y, t) \right\} \right\} \\ &= \frac{\partial W(p, t)}{\partial p} [E_2^{-1} (-k_{12}^T g_1 + g_2^T \frac{\partial^T p}{\partial x})] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Un modo de eludir el problema asociado a la dimensión infinita de la EDP (3.11) es, bajo ciertas condiciones (Whittle 1981), emplear el llamado *Principio de Equivalencia Cierta* que formula una estructura de control  $u = K(\hat{x}(t))$ , donde  $\hat{x}(t)$  es una estimación del estado no accesible del sistema  $x(t)$ , y  $K$  es el controlador obtenido mediante realimentación de estados.

El *Principio de Equivalencia Cierta* permite formular una ley de control

$$u_{ec}(t) = K^*(\bar{x}(t))$$

donde el subíndice *ec* hace referencia a *equivalencia cierta*, y

$$\bar{x}(t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{p_t(x) + V(x, t)\} \quad (3.14)$$

con  $V(x, t)$  la función escalar asociada a problema de realimentación de la salida.

Esta solución equivale a adoptar  $\hat{W}(p) = p + V$  como solución para la EDP en (3.11).

Adicionalmente, si el valor de  $\bar{x}$  es único según la definición (3.14), entonces el controlador  $u_{ec}(t)$  y el controlador central de estado de información coinciden.

### 3.4. El control $\mathcal{H}_\infty$ lineal desde la formulación no lineal

Es un hecho deseable y esperable que el marco teórico expuesto en este capítulo para sistemas no lineales, admita una particularización para sistemas lineales que proporcione soluciones de control equivalente a la formulación clásica lineal del control  $\mathcal{H}_\infty$ .

Efectivamente, supongamos un sistema dinámico con la estructura (3.1) en la que las funciones  $f, h_1$  y  $h_2$  presenta dependencia funcional lineal en  $x$ , y el resto de funciones son constante, es decir, adoptando la notación habitual en la literatura para el problema lineal

$$\dot{x} = Ax + B_1\omega + B_2u \quad (3.15)$$

$$z = C_1 + D_{12}u \quad (3.16)$$

$$y = C_2 + D_{21}\omega \quad (3.17)$$

Así, podemos encontrar una solución para el problema de realimentación de estados, postulando un función escalar

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T X x$$

con  $X = X^T > 0$ , que particularizada en la ecuación (3.8) resulta

$$\begin{aligned} &x^T(A - B_2E^{-1}D_{12}^TC_1)^TXx + x^TX(A - B_2E^{-1}D_{12}^TC_1)x + x^TX\left(\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2E^{-1}B_2^T\right)Xx + \\ &x^TC_1^T(I - D_{12}E^{-1}D_{12}^T)C_1x \leq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Esta ecuación puede transformarse en la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} &(A - B_2E^{-1}D_{12}^TC_1)^TX + X(A - B_2E^{-1}D_{12}^TC_1) + X\left(\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2E^{-1}B_2^T\right)X + 0 \\ &+ C_1^T(I - D_{12}E^{-1}D_{12}^T)C_1 \leq \end{aligned} \quad (3.19)$$

que se corresponde con la primera de las ecuaciones clásicas de la formulación  $\mathcal{H}_\infty$  lineal en (Doyle *et al.* 1989). La segunda de las ecuaciones surge, como no podía ser de otro modo, asociada al *estado de información* para el sistema lineal.

Así, tendremos que la *función de valor* asociada al *estado de información* para sistemas lineales vendrá dada por

$$W(p) = \max_x\{p(x) + \frac{1}{2}x^T X x\}$$

Con esta definición tendremos para la forma integral de (3.13)

$$\max_x \{p_t(x)\} \leq W(p_t) = \max_x \left\{ p_t(x) + \frac{1}{2}x^T X x \right\} \leq W(p_0) = \max_x \left\{ p_0(x) + \frac{1}{2}x^T X x \right\}$$

que es equivalente a exigir que  $W(p)$  sea finita (ver condición de acoplamiento (3.12)), y  $X$  semidefinida positiva tal como exige la solución lineal (Doyle *et al.* 1989).

Para el estado de información de sistemas lineales podemos postular una solución para la ecuación (3.10) como

$$p_t(x) = -\frac{1}{2\gamma^2}(x - \hat{x})^T Y^{-1}(t)(x - \hat{x}) + \phi(t)$$

donde

$$\dot{\hat{x}} = (A - B_1 C_2 + Y(\frac{1}{\gamma^2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2))\hat{x} + (B_1 + Y C_2^T)y + (B_2 + \frac{1}{\gamma^2} Y C_1^T D_{12})u$$

y  $Y(t)$ , supuesta invertible, verifica

$$\dot{Y} = (A - B_1 C_2)Y + Y(A - B_1 C_2)^T + Y(\frac{1}{\gamma^2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y$$

Para la ecuación diferencial de Riccati anterior podemos, por simplicidad, adoptar la solución de equilibrio  $Y(t) = Y$  constante, con lo que obtenemos

$$(A - B_1 C_2)Y + Y(A - B_1 C_2)^T + Y(\frac{1}{\gamma^2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y = 0$$

que se corresponde con la segunda ecuación de Riccati asociada al problema  $\mathcal{H}_\infty$  lineal según (Doyle *et al.* 1989).

De este modo tendremos que el valor del *estado de información en el equilibrio* vendrá dado por

$$p_e(x) = -\frac{1}{2\gamma^2}x^T Y^{-1}x$$

y por tanto la condición de acoplamiento (3.12), para este caso, es decir la condición de que  $W(p_e)$  sea finita, equivale imponer

$$-\frac{1}{\gamma^2}Y^{-1} + X \leq 0$$

que es exactamente la condición de acoplamiento entre las soluciones de las ecuaciones de Riccati asociadas al problema lineal en (Doyle *et al.* 1989).

Con lo que queda mostrada la necesaria equivalencia entre las formulaciones frecuencial para el caso lineal, y temporal para la generalización no lineal.

# Capítulo 4

## Sistemas Euler-Lagrange en Ingeniería de Control

### 4.1. Introducción

En este capítulo presenta algunos conceptos previos relacionados con la descripción de sistemas electromecánicos en general, así como las particularizaciones pertinentes que serán de aplicación en posteriores capítulos de esta Tesis. Concretamente, hacemos una breve descripción la descripción Euler-Lagrange (EL) de este tipo de sistemas, así como ciertas referencias necesarias por completitud, a la descripción Hamiltoniana de los mismos. Se presenta asimismo una distinción entre sistemas EL *completamente actuados* y *sistemas subactuados*, una bien conocida clasificación de estos sistemas que resultará relevante para encuadrar el tipo de sistemas considerados en este trabajo de Tesis. Concluiremos el capítulo presentando una descripción de espacio de estados de la que llamaremos *dinámica de error*, así como algunas consideraciones sobre eventuales incertidumbres de modelado que puedan ser incluidas en el sistema.

## 4.2. Descripción Euler-Lagrange de Sistemas Electromecánicos

En este apartado se presenta la descripción clásica de sistemas electromecánicos según su formulación de Euler-Lagrange, e introducimos la bien conocida *Forma Normal de Legendre*, muy empleada para la descripción de este tipo de sistemas en Ingeniería de Control.

Un sistema mecánico simple puede describirse en términos de la función *Lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q) \quad (4.1)$$

donde  $q \in Q$  denota el vector de configuración del sistema definido en el espacio  $n$ -dimensional de las configuraciones.

$M(q)$  es la *Matriz de Inercia*, definida positiva verificando una relación

$$0 < M_m \leq \|M(q)\| \leq M_M \quad \text{para todo } q \in Q \quad (4.2)$$

$K(q, \dot{q})$  representa la energía cinética del sistema y  $V(q)$  es la energía potencial. Sea  $f_i(q) : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \{1, \dots, m\}$  un conjunto de  $m$  vectores n-dimensionales linealmente independientes de fuerzas externas aplicadas sobre el sistema. La ecuación de Euler-Lagrange que describe el comportamiento del sistema adopta en este caso la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F(q)\tau + \omega \quad (4.3)$$

donde  $\tau \in \mathbb{R}^m$  denota la acción de control y  $F(q) = (f_1(q), \dots, f_m(q))$  es la *matriz de fuerzas externas*, y  $\omega \in \mathbb{R}^n$  es un vector de perturbaciones externas que actúan sobre el sistema.

Las ecuaciones de movimiento para este sistema mecánico pueden expresarse también como

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(q) = e_k^T F(q)\tau + \omega, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

donde  $e_k$  es el  $k$ -ésimo vector del sistema de referencia estándar de  $\mathbb{R}^n$ ,  $g_k(q) = \partial V(q)/\partial q_k$ , y  $\Gamma_{ij}^k(q)$  son los llamados *Símbolos de Christoffel*, que pueden ser definidos como

$$\Gamma_{ij}^k(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \quad (4.5)$$

En forma matricial compacta, las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico en (4.4) pueden expresarse (Spong and Vidyasagar 1989)

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q)\tau + \omega \quad (4.6)$$

con  $C(q, \dot{q})$  definido como

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{kj}^i(q) \dot{q}_k \quad (4.7)$$

De este modo, el término  $M(q)\ddot{q}$  representa la contribución de las *Fuerza de Inercia* al sistema, y  $G(q)$  representa los términos gravitatorios.

Por su parte, el término  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  involucra dos tipos de términos: aquellos que involucran términos  $\dot{q}_i \dot{q}_i$ , llamados términos de *Fuerzas Centrífugas*, y aquellos que contienen términos de la forma  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  con  $i \neq j$ , llamados términos de *Fuerzas de Coriolis*.

Respecto al términos de Fuerzas de Coriolis-Centrífugas,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$ , pueden enunciarse un grupo de bien conocidas e interesantes propiedades estructurales que serán de utilidad en posteriores apartados de esta Tesis, a saber

■ P1: La matriz

$$N(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{M}(q) \quad (4.8)$$

es antisimétrica<sup>1</sup>, y por tanto se verifica  $x^T N(q, \dot{q})x = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

En efecto, es fácil comprobar según las definiciones (4.5) y (4.7) que la matriz  $N(q, \dot{q})$  se puede expresar como

$$N_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial m_{ik}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \quad (4.9)$$

de modo que la propiedad de antisimetría se obtiene por inversión de los índices  $i, j$  en (4.9).

Aplicando esta propiedad, es además fácil comprobar que el término  $N(q, \dot{q})\dot{q}$  representa la contribución al par de las fuerzas que no realizan trabajo en la evolución dinámica del sistema. Así, aplicando la definición (4.8), podemos transformar la expresión (4.6) como

$$F(q)\tau = M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q})\dot{q} + N(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (4.10)$$

de este modo, el trabajo,  $W$ , realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema,  $\tau$ , puede calcularse como

$$W = \int \tau^T \dot{q} \, dt = \int \dot{q}^T (M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q})\dot{q} + N(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) dt \quad (4.11)$$

expresión en la que se anula el término  $\dot{q}^T N(q, \dot{q})\dot{q}$  en virtud de la propiedad de antisimetría expuesta.

---

<sup>1</sup>Es interesante notar que la definición de  $C(q, \dot{q})$  a partir de (4.1) no es única. Si  $\bar{C}(q, \dot{q})$  es tal que  $C(q, \dot{q})\dot{q} = \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q}; \forall q, \dot{q}$ , entonces  $\dot{q}^T \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} = 0$  pero en general  $\dot{M}(q) - 2\bar{C}(q, \dot{q})$  no tiene por qué ser antisimétrica.

- P2: La matriz  $C(q, \dot{q})$  es acotada respecto a  $\dot{q}$ .

La propiedad se deriva fácilmente a la vista de las expresiones (4.5) y (4.7), y teniendo en cuenta que, de acuerdo con (4.2), las derivadas parciales de  $M(q)$  respecto a  $q$  son magnitudes acotadas.

- P3: Dados dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , se verifica

$$C(q, x)y = C(q, y)x \quad (4.12)$$

La propiedad puede derivarse a partir de la definición (4.7), que muestra que  $C(q, \dot{q})$  es afín en  $\dot{q}$ , y por la relación  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , que se deduce de la definición (4.5).

Es igualmente sencillo comprobar que se verifica

$$C(q, \alpha x + y)q = \alpha C(q, x)q + C(q, y)q \quad (4.13)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  un escalar arbitrario y  $x, y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vectores cualesquiera.

- P4: Se verifica la relación

$$\| C(q, \dot{q}) \| \leq k_c \| \dot{q} \| \quad (4.14)$$

donde  $\| \cdot \|$  representa cualquier norma inducida, y  $k_c$  es una constante definida como

$$k_c = \max_{q \in \mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^n \| C_k(q) \| \quad (4.15)$$

donde  $C_k = [\Gamma_{kj}^i] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es decir la matriz formada fijando el índice  $k$  en los términos de Christoffel del sistema.

Existen en la literatura diversas representaciones del sistema dinámico (4.6), que permiten expresar la dinámica en la forma estándar afín en la actuación,  $\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u$ . Expresar la dinámica del sistema mediante una ecuación diferencial de primer orden es especialmente conveniente desde el punto de vista de control, ya que buena parte de las herramientas matemáticas de análisis de sistemas dinámicos y diseño de controladores, hacen uso de esta formulación.

Así podemos distinguir diversas formas estándar de representación de sistemas electromecánicos, tal como son:

- *Forma normal directa*

Definiendo el vector  $x(t) = (x_1^T \ x_2^T)^T = (q^T(t) \ q^T(t))^T; x \in \mathbb{R}^{2n}$ , y teniendo en cuenta que la matriz de inercias,  $M(q)$ , es invertible por (4.2), podemos expresar el sistema (4.6) como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -M^{-1}(x_2)(C(x_2, x_1)x_1 + G(x_2)) + M^{-1}(x_2)(F(x_2)\tau + \omega) \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

expresión que presenta la dinámica del sistema como una cascada de integradores, lo cual es interesante dado que existen diversas técnicas de control no lineal que permiten explotar esta estructura (Sepulchre *et al.* 1996).

- *Forma normal de Legendre*

La *Transformada de Legendre* respecto a  $\dot{q}$  se define como

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = M(q)\dot{q} \quad (4.17)$$

relación que es invertible en virtud de la propiedad (4.2).

Si tenemos en cuenta que  $M(q)$  es una matriz simétrica, y la propiedad (P1), podremos concluir que  $M(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q})$ .

Empleando esta última relación podemos expresar el sistema (4.6) en su *forma normal de Legendre* como

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1}(q)p \\ \dot{p} &= C^T(q, M^{-1}(q)p)M^{-1}(q)p - G(q) + F(q)\tau + \omega \end{aligned} \quad (4.18)$$

La utilidad de la forma normal de Legendre es que resulta especialmente apropiada desde el punto de vista de análisis de controlabilidad de sistemas mecánicos, (Olfati-Saber 2001).

- *Forma Normal Hamiltoniana*

Si se define el *Hamiltoniano* de un sistema mecánico como

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + V(q) \quad (4.19)$$

la forma normal de Legendre en (4.18) puede ser expresada como el sistema Hamiltoniano equivalente

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} + F(q)\tau + \omega \end{aligned} \quad (4.20)$$

La formulación Hamiltoniana de sistemas EL ha sido frecuentemente empleada en ingeniería de control desde el punto de vista del diseño de controladores no lineales. En particular la generalización del concepto de sistemas Hamiltonianos, conocida como *PCH* (*Port-Controlled Hamiltonian Systems*) o *Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puertos* (ver (Van der Schaft 1996)), junto con la noción de *Pasividad*, ha permitido recientemente formular exitosas técnicas de control basadas en el *moldeo de energía e inyección de amortiguamiento*, (Van der Schaft 1996, Gómez-Estern 2002, A. *et al.* 2003, Gordillo *et al.* 2003),

### 4.3. Tipos de Sistemas electromecánicos

De acuerdo con la descripción (4.6), podemos clasificar los sistemas electromecánicos atendiendo al *grado de actuación* de los mismos, es decir, al número de grados de libertad sobre los que tenemos control directo, y así distinguir

- Sistemas completamente actuados

Son aquellos sistemas para los que el  $rango(F(q)) = n$ , es decir,  $F(q)$  es invertible. En estos sistemas, el número de acciones de control disponibles, coincide con la dimensión del *Espacio de las Configuraciones* del sistema.

Es sabido además que estos sistemas son linealizables mediante realimentación, es decir, no presentan *dinámica cero* (*Zero Dynamics*),(Isidori 1985). Por ello, estos sistemas pueden, en principio, reducirse a una estructura lineal y ser controlados mediante estrategias de control lineal. En la práctica, sin embargo, aparecen problemas asociados a la presencia de incertidumbres en el sistema que invalidan las cancelaciones de términos asociadas a la linealización.

Otra dificultad de índole práctico que dificulta el uso de las estrategias de linealización, está relacionado con la presencia de saturaciones en la acción de control o en su derivada,

- Sistemas Subactuados

Un sistema mecánico de la forma (4.6) se dice subactuado si,  $m = rango(F(q)) < n = \dim(Q)$ . Es decir, si el sistema presenta un número de actuadores menor que la dimensión de sus espacio de configuraciones. De este modo, en general un sistema subactuado es susceptible de ser dividido en dos subsistemas. Por un lado tenemos el *subsistema actuado* de dimensión  $m$ , y el *subsistema subactuado* de dimensión  $n-m$ . Este último subsistema puede además representarse sin pérdida de generalidad de la forma  $\varphi(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$ , expresión que puede ser altamente no lineal, e incluir variables dinámicas del *subsistema actuado*.

La presencia de un *subsistema subactuado* limita la aplicabilidad de las técnicas de linealización por realimentación. En particular, si  $F(q) = (0 \ I_m)^T$ , se muestra en (Spong 1996) que el sistema puede ser parcialmente linealizado mediante un cambio de variable invertible en el control. Sin embargo, después de este cambio, el *subsistema subactuado*, aún es altamente no lineal y acoplado con el *subsistema lineal actuado*. En (Olfati-Saber 2001) se presenta una metodología que, aplicando una transformación no lineal del espacio de estados y un cambio de variable apropiado, permite desacoplar los subsistemas actuado y subactuado respecto a la acción de control. Si bien este desacoplo constituye una simplificación considerable del problema desde el punto de vista del control, no resulta simple encontrar para el caso general la transformación no lineal que permite el

desacoplo, ni tampoco es general fácil de tratar la forma no lineal resultante para el subsistema actuado transformado.

Algunos sistemas destacables que corresponden a esta categoría podrían ser los bien conocidos sistemas de la *bola en la viga* o sistemas de péndulo como el *péndulo en carrito* o *péndulo de Furuta* (Gordillo *et al.* 2003, Vivas and Rubio 2003).

#### 4.4. Descripción de espacio de estados de la dinámica de error

En este apartado introducimos una descripción de espacio de estados de la dinámica de error de un sistema mecánico Euler-Lagrange. Esta descripción, presentada originalmente en (Johansson 1990) junto con posteriores extensiones en (Ortega Linares 2001), constituye la base de la formulación de las estrategias de control de sistemas Euler-Lagrange presentadas en esta Tesis.

Para centrar ideas, supongamos que el objetivo de control de nuestro sistema mecánico, es el seguimiento de una trayectoria<sup>2</sup> en el espacio de las configuraciones  $Q$ . De este modo la trayectoria deseada vendrá dada por un vector posiciones generalizadas  $q_r(t) \in \mathbb{R}^n$ , y sus derivadas  $\dot{q}_r(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $\ddot{q}_r(t) \in \mathbb{R}^n$ , magnitudes que, por hipótesis, satisfacen las restricciones físicas y cinemáticas del sistema mecánico considerado. De este modo, podemos definir los vectores

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \\ \int q \end{pmatrix}; \quad x_r(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}_r \\ q_r \\ \int q_r \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

vectores que incluyen las variables del espacio de configuraciones  $q(t)$ , la correspondientes variables de referencia  $q_r(t)$ , así como sus primeras integrales y derivadas.

Las integrales en (4.21) se suponen extendidas desde  $t = 0$  hasta el instante actual considerado. En lo sucesivo se empleará la misma notación compacta para representar la integral del error en las variables del espacio de configuraciones.

---

<sup>2</sup>Los problemas de regulación y rechazo de perturbaciones, pueden estudiarse como particularizaciones de éste, suponiendo que la trayectoria de referencia no varía con el tiempo.

Así, las correspondientes variables de error se definen como

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_r(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) - \dot{q}_r(t) \\ q(t) - q_r(t) \\ \int (q(\tau) - q_r(\tau)) d\tau \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

De este modo, podemos expresar la dinámica de error del sistema (4.16) en su *forma normal directa* como

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_r(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}}(t) \\ \tilde{q}(t) \\ \int \tilde{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M^{-1}(q)(\frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q}) + N(q, \dot{q})) & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \\ &+ \begin{pmatrix} -\ddot{q}_r - M^{-1}(q)(G(q) + C(q, \dot{q})\dot{q}_r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} M^{-1}(q)(F(q)\tau + \omega) \quad (4.23) \end{aligned}$$

definiendo ahora el cambio de variable de estado

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \end{pmatrix} = T_0 \tilde{x} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & I & T_{23} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \\ \int \tilde{q} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

donde  $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{23} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices arbitrarias con la única restricción de que  $T_{11}$  sea invertible.

La correspondiente transformación inversa de (4.24) puede calcularse como

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \\ \int \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} & T_{11}^{-1}(T_{12}T_{23} - T_{13}) \\ 0 & I & -T_{23} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

El tipo de problemas de control que generalmente se plantean para sistemas electromecánicos como los tratados en este apartado, usualmente se refieren a los problemas de *seguimiento de trayectorias* o *regulación de posición*. En los primeros el objetivo consiste el hacer que los grados de libertad del sistema describan una trayectoria prestablecida lo más fielmente posible, con independencia de posibles perturbaciones externas, en los segundos se pretende mantener un determinada configuración del sistema minimizando de nuevo las posibles perturbaciones externas.

Si entendemos cualquiera de los dos problemas anteriores en un contexto de control óptimo como el que nos ocupa, parece lógico pensar que el conjunto de *fuerzas*

generalizadas,  $\tau$ , que actúan sobre el sistema, forme parte del conjunto de magnitudes a optimizar. Estas fuerzas permiten introducir en la *optimización*, conceptos como “seguimiento de trayectorias con mínimo esfuerzo de control” o “mínimo consumo energético”.

No tiene sin embargo sentido incluir en el índice de optimización las componentes de fuerzas generalizadas que inciden en la variación de la energía potencial del sistema (Por Ej: Fuerzas gravitatorias), ya que el incremento de energía potencial viene determinado por la trayectoria y no puede ser alterado por ninguna estrategia de control. Lo mismo sucede con las componentes de fuerzas generalizadas que no realizan trabajo en la evolución dinámica del sistema. Es decir los términos de la forma  $N(q, \dot{q})\dot{q}$ , según se discutió en la propiedad (P1) de los sistemas Euler-Lagrange. Por tanto las componentes de fuerzas generalizadas que tiene sentido incluir en una estrategia de optimización,  $\tau_o$ , serán

$$\tau_o = M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q})\dot{q}$$

Teniendo estas ideas en cuenta, definimos un cambio de variable en la acción de control

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} M(q) & \frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{pmatrix} = \\ &= M(q)T_1\dot{\tilde{x}} + C(q, \dot{q})T_1\tilde{x} \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde  $T_1 = (T_{11} \ T_{12} \ T_{13})$

La expresión (4.26) se justifica si tenemos en cuenta que la nueva variable de control  $u$ , adopta la forma de una combinación ponderada de las componentes de las fuerzas generalizadas que es necesario tener en cuenta en la optimización<sup>3</sup>, es decir, aquellas que afectan a la energía cinética del sistema.

Si adicionalmente particularizamos la matriz  $T_{11} = \rho I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , podremos expresar la *dinámica de error* del sistema (4.6) en la forma

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, t) + g_1(\tilde{x}, t)\omega + g_2(\tilde{x}, t)F(q)u \quad (4.27)$$

donde

$$f(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{pmatrix} -M^{-1}(q)(\frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q}) + N(q, \dot{q})) & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho}I & -\frac{1}{\rho}T_{12} + T_{23} & \frac{1}{\rho}(T_{12}T_{23} - T_{13}) - T_{23}^2 \\ 0 & I & -T_{23} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \quad (4.28)$$

---

<sup>3</sup>Notemos que  $u$  representa exactamente las *fuerzas generalizadas objeto de optimización*,  $\tau_o$ , si hacemos  $T_0 = I \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$

y

$$g_1(\tilde{x}, t) = g_2(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{pmatrix} M^{-1}(q) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

la forma de las expresiones (4.28) y (4.29) convierten al sistema (4.27) en un sistema no lineal variante en el tiempo y afín en la actuación,  $u$ , y las perturbaciones que actúan sobre el sistema,  $\omega$ .

Es también interesante destacar que la dependencia funcional explícita del tiempo en las expresiones de (4.27) es debida a la presencia implícita de la variable de referencia,  $q_r(t)$  que es variante en el tiempo.

La relación entre el par  $\tau$ , aplicado al sistema, y la variable de control,  $u$ , viene dada de forma implícita por la expresión (4.26). Si expandimos apropiadamente la expresión para  $\dot{\tilde{x}}$  en dicha expresión, es posible obtener la relación explícita

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \frac{1}{\rho}M(q) \left( T_{12}\dot{\tilde{q}} + T_{13}\tilde{q} + T_{13}T_{23} \int \tilde{q} \right) - \frac{1}{\rho}C(q, \dot{q})T_1\tilde{x} + \frac{1}{\rho}u \quad (4.30)$$

Es interesante observar como la expresión anterior adopta una forma similar a la estructura de linealización por realimentación asociada a la técnica clásica de *par calculado*<sup>4</sup>.

Con esta idea en mente, podemos interpretar la acción de control  $u$ , como un *exceso de fuerza (generalizada)* de control que es necesario aplicar al sistema una vez compensadas las *fuerzas* que no realizan trabajo y las que contribuyen a la variación de la energía potencial (recordemos que  $u$ , agrupa las componentes de fuerza que afectan únicamente a la energía cinética).

## 4.5. Incertidumbres de modelado

La estructura de la ley de control (4.30) asume un conocimiento perfecto del modelo dinámico del sistema. En la práctica esta hipótesis no puede ser satisfecha, ya que necesariamente existen incertidumbres de modelado asociadas a un imperfecto conocimiento de los parámetros físicos que caracterizan el sistema (*incertidumbre paramétrica*), dinámicas no modeladas asociadas a los actuadores, sensores o vibraciones mecánicas estructurales, fenómenos de fricción, ruidos eléctricos en las señales, etc.

<sup>4</sup>es exactamente par calculado para el caso particular  $T_0 = I$

Es por este motivo más realista plantear leyes de control que tengan en cuenta estas incertidumbres y permitan obtener un comportamiento aceptable para el sistema controlado en el caso de un conocimiento imperfecto de su dinámica.

Así, supondremos por hipótesis, que se dispone de un *modelo nominal* aproximado del sistema descrito por  $\hat{M}(q)$ ,  $\hat{C}(q, \dot{q})$  y  $\hat{G}(q)$ , que representan respectivamente los términos de Inercia, Coriolis/centrífugos y gravitatorios asociados al mismo.

De este modo, redefinimos el cambio (4.26) empleando la información asociada al modelo nominal como

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} \hat{M}(q) & \frac{1}{2}\dot{\hat{M}}(q, \dot{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{pmatrix} = \\ &= \hat{M}(q)T_1\dot{\tilde{x}} + \hat{C}(q, \dot{q})T_1\tilde{x} \end{aligned} \quad (4.31)$$

con esta definición, es fácil obtener una relación explícita entre  $\tau$  y  $u$  complementaria a la obtenida en (4.30), como

$$\tau = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) - \frac{1}{\rho}\hat{M}(q) \left( T_{12}\dot{\tilde{q}} + T_{13}\tilde{q} + T_{13}T_{23} \int \tilde{q} \right) - \frac{1}{\rho}\hat{C}(q, \dot{q})T_1\tilde{x} + \frac{1}{\rho}u + \eta \quad (4.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \eta &= \Delta_M \frac{1}{\rho}u - \Delta_M \hat{M}(q)\ddot{q}_r - \Delta_C \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} - \Delta_G \hat{G}(q) - \Delta_M \frac{1}{\rho}\hat{M}(q) \left( T_{12}\dot{\tilde{q}} + T_{13}\tilde{q} + T_{13}T_{23} \int \tilde{q} \right) \\ &\quad - \Delta_C \frac{1}{\rho}\hat{C}(q, \dot{q})T_1\tilde{x} \end{aligned} \quad (4.33)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta_M &= M(q)\hat{M}^{-1}(q) - I \\ \Delta_C &= C(q, \dot{q})\hat{C}^{-1}(q, \dot{q}) - I \\ \Delta_G &= G(q)\hat{G}^{-1}(q) - I \end{aligned}$$

representan los términos de incertidumbre de modelado de los términos de inercia, centrífugos/coriolis y gravitatorios respectivamente. Es evidente que, en caso de modelado perfecto del sistema, tendremos que  $\eta = 0$  y los términos de incertidumbre  $\Delta_{(.)}$  serán todos nulos.

Por otro lado es fácil comprobar que el valor  $\|\eta\| < \infty$  si  $u$  es finito, ya que cada uno de los sumandos que componen su expresión es finita. Esto es fácil de comprobar si tenemos en cuenta la expresión (4.2) y la propiedad (P4) (4.14) que muestra que los términos  $\hat{M}(q)$  y  $\hat{C}(q, \dot{q})$  son acotados para todo  $q, \dot{q}$ . El término de fuerzas gravitatorias es evidentemente acotado por construcción, y si suponemos además que  $\|\ddot{q}_r(t)\| \leq$

$Q_R < \infty$ , es decir, el generador de trayectorias del sistema no proporciona referencias de aceleración infinita, hipótesis bastante razonable en el caso de aplicaciones de control reales, tendremos que todos los términos a excepción de  $u$  son finitos.

# Capítulo 5

## Un enfoque paramétrico para Control Híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

### 5.1. El Paradigma del Control Híbrido

Los problemas de control  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  han sido abundantemente tratados en la literatura técnica. Si bien la formulación matemática de ambos problemas es bien conocida para el caso no lineal genérico, la obtención de soluciones explícitas para estos problemas es en general compleja por las dificultades que implica la resolución de las ecuaciones asociadas a estos problemas.

La formulación lineal de ambos problemas, sin embargo, permite obtener soluciones explícitas para las que se conocen, bien soluciones cerradas como en el problema  $\mathcal{H}_2$  lineal (*Problemas LQR/LQG*), o bien algoritmos que permiten obtener una solución subóptima en un número limitado de iteraciones, como en el problema  $\mathcal{H}_\infty$  lineal.

Cada una de estas metodologías de control plantean objetivos de diseño diferentes, aunque, como se ha visto en los capítulos tres y cuatro, comparten un formulación matemática similar.

Así, tal como se mencionó en el capítulo dos, el objetivo de la metodología de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  es obtener una ley de control que minimice la *energía* (norma  $L_2$ ) de una determinada variable de comportamiento que sirve de medida del comportamien-

to del sistema. Es también bien sabido que este objetivo de control está íntimamente relacionado con la formulación clásica del control óptimo donde un índice de comportamiento integral cuadrático es optimizado sujeto a una restricción diferencial que describe la dinámica del sistema.

La filosofía de diseño asociada al control  $\mathcal{H}_\infty$  es diferente. En este problema el objetivo es optimizar la ganancia  $L_2$  entre las perturbaciones (de tipo  $\mathcal{L}_2$ ) que actúan en el sistema y un determinado índice de comportamiento, siendo esta formulación equivalente en este caso, a un problema de optimización robusta del tipo *caso más desfavorable*<sup>1</sup>.

Una diferencia esencial entre ambas metodologías es la hipótesis sobre la estructura de las perturbaciones que actúan sobre el sistema. El problema de control  $\mathcal{H}_2$  está formulado bajo la hipótesis de un conocimiento perfecto del comportamiento estadístico de las perturbaciones que intervienen en el sistema (perturbaciones de naturaleza estocástica generalmente). Esta hipótesis es ciertamente restrictiva y es bien sabido que a menudo no es demasiado apropiada para describir el comportamiento de las perturbaciones que aparecen en aplicaciones prácticas. Para el control  $\mathcal{H}_\infty$  en cambio, la hipótesis sobre las perturbaciones es menos restrictiva. El requerimiento en este caso es que las perturbaciones sean de clase  $\mathcal{L}_2$ , es decir, perturbaciones de energía finita, resultando esta descripción más apropiada para representar las perturbaciones de índole práctica.

Estas diferencias en la formulación teórica de ambos problemas tiene importantes implicaciones en lo referente al comportamiento y robustez de las leyes de control obtenidas con una y otra metodología. De este modo, las leyes de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  no presentan en general buenas propiedades de robustez ante perturbaciones genéricas (perturbaciones mantenidas o de media no nula, por ejemplo), mientras que el control  $\mathcal{H}_\infty$  conduce por lo general a leyes de control que, si bien exhiben un comportamiento robusto y unas buenas características de rechazo de perturbaciones, muestran un comportamiento inferior al óptimo obtenido con la filosofía  $\mathcal{H}_2$  (suponiendo ausencia de perturbaciones). Este hecho puede justificarse de un modo intuitivo si tenemos en cuenta que el control  $\mathcal{H}_\infty$ , por su propia filosofía de diseño, debe acomodarse a conjunto más amplio de posibles perturbaciones que actúen sobre el sistema, conduciendo en general a diseños de control más conservativos.

Otra problemática asociada a las leyes de control de control, tanto en los problemas  $\mathcal{H}_2$  como  $\mathcal{H}_\infty$ , es que las soluciones óptimas, aún en el caso de que sean calculables, pueden no resultar efectivas desde el punto de práctico por su difícil implementación. Por ejemplo, en (Megretski 1995), se muestra que incluso para el caso lineal, la solución óptima del problema  $H_2/H_\infty$  es de dimensión infinita y no estabiliza el sistema exponencialmente como sería deseable. Por este motivo, se recurre habitualmente a

---

<sup>1</sup>Traducción del término *worst case control*

la formulación de soluciones subóptimas más eficaces desde el punto de vista de implementación práctica. Recurrir a soluciones subóptimas implica sin embargo perder la *unicidad* asociada a la solución óptima, por lo cual tendremos en general una *familia de controladores subóptimos* que exhiben el mismo valor para el índice de comportamiento del sistema controlado.

Los hechos expuestos motivan el estudio del llamado control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  en el cual el objetivo es resolver un problema de optimización  $\mathcal{H}_2$  sujeto a una restricción en términos de desigualdad tipo  $\mathcal{H}_\infty$ . Es decir, el objetivo de control para el problema híbrido consiste en seleccionar aquel controlador de la familia de controles subóptimos  $\mathcal{H}_2$  anteriormente mencionada, que verifica simultáneamente la restricción de atenuación de perturbaciones asociada al problema  $\mathcal{H}_\infty$ . Con esta estrategia de diseño, recuperamos en general la *unicidad* del control a la vez que aunamos de forma ponderada las virtudes de una y otra metodología de control. Dicho de otro modo, la metodología híbrida permite obtener el “*mejor*” controlador en términos de rechazo de perturbaciones de todos aquellos controladores subóptimos que resuelven el problema  $\mathcal{H}_2$  planteado.

En el caso lineal el problema híbrido ha sido abundantemente estudiado, ya sea empleando técnicas optimización convexa, ((Sznaier 1994), (Khargonekar and Rotea 1991)), o técnicas de Teoría de Juegos (Limebeer *et al.* 1994). Para el caso no lineal sin embargo, son escasos los resultados genéricos que pueden encontrarse en la literatura (Lin 1996, Astolfi and Colaneri 2001), y resultan aún más escasas si cabe las aplicaciones a sistemas concretos (Johansson 1990, Georges 1997). Precisamente es en este aspecto, el de las aplicaciones, en el que se pretende incidir en este trabajo de Tesis, formulando una aplicación de una estrategia de control híbrido para sistemas no lineales Euler-Lagrange (Vivas *et al.* June 2004).

La aproximación teórica al problema sigue las líneas formuladas en (Astolfi and Colaneri 2001), donde se propone una solución subóptima al problema del control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  basada en la construcción de una familia de controladores parametrizada por un índice  $\lambda$ . Esta familia, como veremos, exhibe la propiedad de que el índice de comportamiento asociado al problema  $\mathcal{H}_2$ , depende monótonamente del parámetro  $\lambda$ . Esta propiedad permite formular la solución al problema híbrido, encontrando aquel valor del parámetro que, minimizando el índice de comportamiento  $\mathcal{H}_2$ , logra verificar la restricción asociada al problema  $\mathcal{H}_\infty$  con el signo de igualdad.

Frente a otras soluciones aportadas en la literatura, por ejemplo (Georges 1997), la metodología propuesta aporta las siguientes ventajas:

1. Permite incorporar en la formulación índices de comportamiento de estructura genérica (en (Georges 1997) es necesario que los índices de comportamiento guarden una determinada relación).

2. La ley de control obtenida permite rechazar perturbaciones mantenidas en el tiempo, al incorporar un término integral no lineal de compensación.

## 5.2. Formulación General del Problema de Control Híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Mostraremos en este apartado una descripción formal del problema planteado en este capítulo. La formulación del control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  que se presenta en este apartado constituye una generalización y posterior aplicación no trivial a sistemas Euler-Lagrange, inspirada en los trabajos (Astolfi and Colaneri 2001), (Colaneri *et al.* 1997).

Consideremos el siguiente sistema dinámico no lineal variante en tiempo

$$\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u \quad (5.1)$$

$$z_2 = h_2(x, t) + k_2(x, t)u \quad (5.2)$$

$$z_\infty = h_\infty(x, t) + k_\infty(x, t)u \quad (5.3)$$

donde la primera ecuación (5.1), describe la planta no lineal en  $\mathbb{R}^n$  con vector de estados  $x(t)$  y señal de control  $u(t) \in \mathbb{R}^{m_u}$ . Las perturbaciones que afectan al sistema están representadas por el término  $\omega(t) \in \mathbb{R}^{m_\omega}$ .

La segunda y tercera ecuaciones, (5.2) y (5.3) definen las variables de comportamiento asociadas a los problemas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  respectivamente. Nótese que ambas variables no presentan, por hipótesis, dependencia funcional del término de perturbaciones,  $\omega(t)$ , que actúa sobre el sistema.

Supondremos asimismo que se verifican ciertas condiciones matemáticas, así como algunas hipótesis sobre el sistema, que serán necesarias para los desarrollos matemáticos que se describen en el presente y posteriores apartados. De este modo, asumimos sin pérdida de generalidad que  $x(t) = 0$  constituye un punto de equilibrio para el sistema no lineal (5.1) para todo  $t \geq 0$ , en ausencia de perturbaciones y señal de control. Es decir,  $f(0, t) = 0$ ,  $h_2(0, t) = 0$  y  $h_\infty(0, t) = 0 \forall t \geq 0$ . Del mismo modo supondremos que las funciones  $f(x, t)$ ,  $g_1(x, t)$ ,  $g_2(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$ ,  $k_2(x, t)$ ,  $h_\infty(x, t)$  y  $k_\infty(x, t)$  son funciones suficientemente suaves<sup>2</sup>.

En cuanto a las hipótesis mencionadas, asumiremos que se verifica:

---

<sup>2</sup>Funciones continuas y derivables en la medida que lo exijan las expresiones en las que estén involucradas

- (H1)  $h_2^T(x, t)k_2(x, t) = 0$ <sup>3</sup>
- (H2) El par  $\{f(x, t), h_2(x, t)\}$  es localmente detectable en el origen.

En lo que resta de este capítulo, diremos que una ley de control mediante realimentación de estados,  $u = u(x)$ , es *admisible* si estabiliza asintóticamente el sistema (5.1) para  $\omega = 0$ . Asimismo, diremos que  $u(x)$  es la solución del problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  asociado al sistema (5.1) con función de coste (5.2), si  $u(x)$  es una ley de control *admisible*, y además minimiza el funcional:

$$J_2(u, t) = \int_0^\infty \|z_2(x, u, t)\|^2 dt \quad (5.4)$$

donde  $\gamma$  representa el *factor de atenuación* de perturbaciones en norma-2, que se supone un valor preestablecido<sup>4</sup>.

De forma similar diremos que  $u(x)$  es solución del problema de optimización  $\mathcal{H}_\infty$  asociado al sistema (5.1) con función de pesos (5.3) si es *admisible* y verifica la relación funcional:

$$J_\infty(u, \gamma, t) = \int_0^\infty \|z_\infty(x, u, t)\|^2 dt - \gamma^2 \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt \leq 0 \quad (5.5)$$

Es interesante recordar que, como se mostró en el capítulo 3, la relación (5.5) representa un nivel de atenuación  $\gamma$  en norma  $L_2$  para la aplicación  $\omega \mapsto z$ , o equivalentemente el sistema (5.1) es  $\gamma$ -dissipativo respecto a la tasa de aporte  $s_\infty(z, \omega) = \frac{1}{2}\gamma^2\|\omega\|^2 - \frac{1}{2}\|z\|^2$  (ver definición 3.1).

### Formulación del problema híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Con estas definiciones, podemos enunciar el problema de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  como:

**Definición 5.1 (Problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ).** Una ley de control de realimentación de estados,  $u(x)$ , se dice que es solución del problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para el sistema

---

<sup>3</sup>Esta hipótesis es fácilmente eliminable en la formulación del problema. Se ha adoptado para simplificar las expresiones matemáticas que aparecerán en desarrollos posteriores.

<sup>4</sup>No se considera en este trabajo ningún procedimiento de optimización de la relación de atenuación  $\gamma$ . El problema planteado puede pues presentar o no una solución admisible, dependiendo del nivel de exigencia de atenuación de perturbaciones expresado mediante este parámetro.

(5.1)-(5.3), si  $u(x)$  es una ley de control admisible y es solución del problema de optimización con restricciones

$$\min_u J_2(u, t) \quad \text{sujeto a} \quad J_\infty(u, \gamma, t) \leq 0 \quad (5.6)$$

con las definiciones de  $J_2(u, t)$  y  $J_\infty(u, \gamma, t)$  según (5.4) y (5.5) respectivamente.

Resulta evidente que el problema así planteado, admite una solución trivial que coincide con la solución del problema de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones (la denotaremos  $u_0(x, t)$  de ahora en adelante), siempre y cuando se verifique que  $J_\infty(u_0, t, \gamma) \leq 0$ .

Dicho de otro modo, si  $\gamma_2$  es tal que  $J_\infty(u_0, \gamma_2) = 0$ , el problema de control híbrido tiene solución no trivial si, y sólo si  $\gamma < \gamma_2$ . En caso contrario, la solución del problema híbrido coincide con  $u_0(x, t)$ .

El caso, mucho más rico e interesante, en que  $u_0(x, t)$  no sea solución del problema híbrido, es el que ocupa buena parte de este capítulo de Tesis. En el siguiente apartado se muestran algunos resultados que permiten formular una solución para el problema de control híbrido que acabamos de describir.

### 5.3. Una aproximación paramétrica al control híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Este apartado describe los resultados genéricos que conducen a una solución subóptima del problema de control híbrido descrito en el apartado anterior.

La formulación planteada está basada en los resultados de (Astolfi and Colaneri 2001), los cuales han sido generalizados y ampliados para adaptarse a la descripción de sistemas dinámicos Euler-Lagrange a los que se aplicará la metodología propuesta en el apartado 5.4.

Antes de describir en detalle la metodología, es necesario introducir el que llamaremos *Problema Óptimo  $\mathcal{H}_2$  Auxiliar*, así como un resultado fundamental para la formulación híbrida planteada en este capítulo (teorema 5.1).

**Definición 5.2 (Problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  auxiliar).** Definimos el problema de optimización auxiliar asociado al sistema (5.1) como

$$\dot{x} = f_\lambda(x, t, \lambda) + g_{2\lambda}(x, t, \lambda)\alpha(x, t, \lambda) \quad (5.7)$$

con  $\alpha(x, t, \lambda) \in \mathbb{R}^{m_u}$ , y donde el objetivo es hallar  $\alpha(x, t, \lambda)$  que minimice

$$\min_{\alpha} \int_0^{\infty} (h_{2\lambda}(x, t, \lambda) h_{2\lambda}^T(x, t, \lambda) + \alpha(x, t, \lambda)^T k_2^T(x, t, \lambda) k_2(x, t, \lambda) \alpha(x, t, \lambda)) dt$$

donde los términos con el subíndice  $\lambda$  se definen como

$$f_\lambda(x, t, \lambda) = f(x, t) + \lambda^2 g_2(x, t) u(x) \quad (5.8)$$

$$g_{2\lambda}(x, t, \lambda) = \sqrt{1 - \lambda^2} g_2(x, t) \quad (5.9)$$

$$h_{2\lambda}(x, t, \lambda) = h_2(x, t) + \lambda k_2(x, t) u(x) \quad (5.10)$$

El problema auxiliar (5.7) así definido consiste en un problema de optimización  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones planteado sobre un sistema parametrizado por un parámetro  $\lambda \in (-1, 1)$ , que como veremos, permitirá construir una familia de controladores con interesantes propiedades sobre problema general planteado.

Es interesante observar que el problema auxiliar en (5.7)-(5.8) coincide con el problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones en el caso de que  $\lambda = 0$ .

Supongamos ahora, que la expresión (5.2) puede expresarse de modo que se verifique

$$\|z_2\|^2 = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_2 \tilde{x} + \frac{1}{2} u^T R_2 u \quad (5.11)$$

donde las matrices  $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $R_2 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$  son matrices simétricas definidas positivas.

Como se comentará en más detalle más adelante, esta última restricción para  $z_2$  es común en teoría de control óptimo clásico, ya que permite ponderar en el índice de comportamiento el peso del error de seguimiento (matriz  $Q_2$ ) y el esfuerzo de control (matriz  $R_2$ ).

Con estas particularizaciones, el teorema 5.1 que se enuncia a continuación proporciona una herramienta fundamental para hallar la solución del problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  planteado en este capítulo.

**Teorema 5.1 (Ecuación HJBI para control híbrido).** *Sea  $V^\lambda(x, t, \lambda)$  una función escalar  $C^1$  definida positiva que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$\begin{aligned} V_t^\lambda(x, t, \lambda) + V_x^\lambda(x, t, \lambda) f_\lambda(x, t, \lambda) - \frac{1}{2} V_x^\lambda(x, t) g_{2\lambda}(x, t, \lambda) R_2 g_{2\lambda}^T(x, t, \lambda) V_x^{\lambda T}(x, t) + \\ + h_{2\lambda}^T(x, t) h_{2\lambda}(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Entonces se verifica:

1. Si  $u(x)$  es cualquier ley de control que estabiliza asintóticamente el sistema (5.1), la ley de realimentación de estados

$$u_\lambda(x, \lambda) = \lambda u(x) + (\lambda - 1) R_2^{-1} g_2^T(x, t) V_x^{\lambda T}(x, t, \lambda) \quad (5.13)$$

estabiliza asintóticamente el sistema 5.1 para todo  $\lambda \in (-1, 1)$ , supuesto el sistema libre de perturbaciones ( $\omega = 0$ ).

2. Se verifica la relación

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} V^\lambda(x, t, \lambda) \geq 0 \quad \forall x, t \quad (5.14)$$

Demostración:

Por motivos de compacidad en la notación, en ésta y algunas otras demostraciones de esta Tesis, se omitirán las dependencias funcionales en las expresiones siempre y cuando éstas resulten obvias en su contexto.

- (i) Para demostrar que  $u_\lambda$  estabiliza asintóticamente el sistema 5.1, tomamos  $V^\lambda$  como función de Lyapunov del sistema.

Si calculamos la variación temporal de  $V^\lambda$  a lo largo de las trayectorias del sistema (5.1) con  $u_\lambda$  como ley de control tendremos

$$\frac{dV^\lambda}{dt} = V_t^\lambda + V_x^\lambda(f + g_2 u_\lambda) = V_t^\lambda + V_x^\lambda(f + g_2(\lambda u + (\lambda - 1) R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T}))$$

Así, sumando y restando  $\frac{1}{2} u_\lambda^T R_2 u_\lambda$  en la expresión anterior y separando términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dV^\lambda}{dt} &= V_t^\lambda + V_x^\lambda f + \lambda V_x^\lambda g_2 u + (\lambda - 1) V_x^\lambda g_2 R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 u^T R_2 u + \frac{1}{2} (\lambda - 1)^2 V_x^\lambda g_2 R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T} + \lambda(\lambda - 1) V_x^\lambda g_2 u - \frac{1}{2} u_\lambda^T R_2 u_\lambda \end{aligned}$$

Haciendo uso de las definiciones en (5.8)-(5.10), y agrupando términos tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dV^\lambda}{dt} &= V_t^\lambda + V_x^\lambda(f + \lambda^2 g_2 u) - \frac{1}{2}(1 - \lambda^2) V_x^\lambda g_2 R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T} + \frac{1}{2} \lambda^2 u^T R_2 u - \\ &\quad - \frac{1}{2} u_\lambda^T R_2 u_\lambda = V_t^\lambda + V_x^\lambda f_\lambda - \frac{1}{2} V_x^\lambda g_{2\lambda} R_2^{-1} g_{2\lambda}^T V_x^{\lambda T} + h_{2\lambda}^T h_{2\lambda} - h_2^T h_2 - \frac{1}{2} u_\lambda^T R_2 u_\lambda \end{aligned}$$

Los cuatro primeros términos de la expresión anterior son nulos en virtud de la relación (5.12), con lo que se obtiene finalmente

$$\frac{dV_\lambda}{dt} = -h_2^T h_2 - \frac{1}{2} u_\lambda^T R_2 u_\lambda \leq 0 \quad (5.15)$$

Luego, en virtud de teorema 2.1 de estabilidad de Lyapunov, la expresión (5.15) garantiza la estabilidad del sistema (5.1) con la acción de control  $u_\lambda$ .

Además, es fácil comprobar que el par  $\{f + g_2 u_\lambda, h_2 + k_2 u_\lambda\}$  es detectable en el origen en virtud de la hipótesis (H2). Por tanto, y empleando el principio de invariancia de La Salle (teorema 2.2), podemos concluir que  $u_\lambda$  estabiliza asintóticamente (5.8) para  $\lambda \in (-1, 1)$ , tal como enuncia la primera parte del teorema.

- (ii) Derivando la expresión (5.12) respecto a  $\lambda$  podemos obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t^\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_x^\lambda}{\partial \lambda} f_\lambda + 2\lambda V_x^\lambda g_2 u - \frac{\partial V_x^\lambda}{\partial \lambda} g_{2\lambda} R_2^{-1} g_{2\lambda}^T V_x^{\lambda T} + \\ + \lambda V_x^\lambda g_2 R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T} + \lambda u^T R_2 u = 0 \end{aligned}$$

agrupando algunos términos convenientemente tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t^\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_x^\lambda}{\partial \lambda} (f_\lambda - g_{2\lambda} R_2^{-1} g_{2\lambda}^T V_x^{\lambda T}) + \\ + \lambda (u + R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T})^T R_2 (u + R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T}) = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Por otro lado, es fácil comprobar (ecuación (2.19) de la proposición 2.3) que la solución del Problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  auxiliar, según la definición 5.2, adopta la forma

$$\alpha(x, t, \lambda) = -R_2^{-1} g_{2\lambda}^T V_x^{\lambda T} \quad (5.17)$$

Por tanto, sustituyendo la expresión anterior en (5.7), tendremos que el sistema

$$\dot{x} = f_\lambda - g_2 R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T} \quad (5.18)$$

es localmente asintóticamente estable. Luego, en virtud de la expresión (5.16), se verifica a lo largo de las trayectorias del sistema (5.18)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V^\lambda}{\partial \lambda} + \lambda (u + R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T})^T R_2 (u + R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T}) = 0$$

Si integramos la expresión anterior respecto al tiempo en intervalo  $[0, t]$

$$\frac{\partial V^\lambda(x(t), t, \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial V^\lambda(x(0), 0, \lambda)}{\partial \lambda} = -\lambda \int_0^t ((u + R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T})^T R_2 (u + R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T})) d\tau$$

Dado que el sistema (5.18) es asintóticamente estable, la integral en el segundo miembro de la expresión anterior es acotada para todo  $t$ . Luego teniendo en cuenta que el integrando es cuadrático, es posible extender el límite superior de integración hasta infinito, y multiplicando ambos lados de la igualdad por  $\lambda$ , obtener

$$\lambda \frac{\partial V^\lambda(x(0), 0, \lambda)}{\partial \lambda} = \lambda^2 \int_0^\infty (u + R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T})^T R_2 (u + R_2^{-1} g_2^T V_x^{\lambda T}) d\tau \geq 0 \quad (5.19)$$

donde la desigualdad se deriva teniendo en cuenta que el integrando en la expresión anterior es siempre positivo, al ser  $R_2$  definida positiva por hipótesis.

q.o.d.

**Observación 5.1** ( $V^\lambda$  es función par en  $\lambda$ ). Es fácil comprobar sustituyendo las expresiones (5.8)-(5.10) en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada al problema híbrido, (5.12), que la expresión resultante es par en  $\lambda$ . Por tanto, dado que la relación se verifica para todo  $\lambda$ , tendremos

$$V^\lambda(x, t, \lambda) = V^\lambda(x, t, -\lambda)$$

Es interesante notar sin embargo que, en general,  $u_\lambda(x, \lambda) \neq u_\lambda(x, t, -\lambda)$ .

**Observación 5.2 (Cuasiconvexidad de  $V^\lambda$ )**. El teorema 5.1 puede reinterpretarse en virtud de la teoría de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  del siguiente modo. Para cada valor de  $\lambda \in (-1, 1)$ , el valor de  $V^\lambda(x(0), 0, \lambda)$  es el coste óptimo del funcional  $J_2(u_\lambda, x, t, \lambda)$  (ver observación 2.1), asociado al Problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  auxiliar descrito en la definición (5.2).

Por otro lado tenemos que, según (5.14),  $V^\lambda$  es una función monótona no decreciente para  $\lambda \in [0, 1]$  y monótona no creciente para  $\lambda \in (-1, 0]$ . Es decir, la función  $V^\lambda$  presenta un mínimo absoluto en  $\lambda = 0$ . Luego tenemos

$$J_2^*(u_\lambda(x, t, \lambda_1)) \geq J_2^*(u_\lambda(x, t, \lambda_2)) \quad \text{si} \quad -1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 0 \quad (5.20)$$

$$J_2^*(u_\lambda(x, t, \lambda_1)) \leq J_2^*(u_\lambda(x, t, \lambda_2)) \quad \text{si} \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1 \quad (5.21)$$

### 5.3.1. Procedimiento de resolución del problema híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

A la vista de los resultados expuestos, resulta evidente que el parámetro  $\lambda$  parametriza una familia de controladores,  $u_\lambda(x, \lambda)$ , que estabilizan asintóticamente el sistema original, (5.1), para  $\lambda \in (-1, 1)$ . Además, según las expresiones (5.20) y (5.21), el valor del funcional óptimo asociado,  $J_2^*(u_\lambda)$ , para esta familia de controladores, es cuasiconvexo<sup>5</sup> en  $\lambda$ , presentando un mínimo absoluto para  $\lambda = 0$ , o equivalentemente, para el problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones. Es decir, a medida que variamos el valor de  $\lambda$  entre  $-1$  y  $1$ , la ley de control  $u_\lambda$  asociada induce un índice de comportamiento óptimo asociado,  $J_2^*(u_\lambda)$ , de una forma genérica como la mostrada en la figura 5.1.

Para la función de costes,  $J_\infty^*(u_\lambda, \gamma)$ , asociada al problema  $\mathcal{H}_\infty$ , no es posible en general, en la medida que se ha podido comprobar, extraer ninguna propiedad relevante de comportamiento a la vista de los resultados anteriores. Una forma para este funcional  $J_\infty^*(u_\lambda, \gamma)$ , podría ser de la forma mostrada en la figura 5.1.

<sup>5</sup>Se dice que una función  $f(x)$  es cuasiconvexa en  $x$ , si y sólo si, para todo par de puntos  $x_1$  y  $x_2$  en el dominio de definición de la función y para todo  $\sigma \in [0, 1]$  se verifica  $f(\sigma x_1 + (1 - \sigma)x_2) \leq$

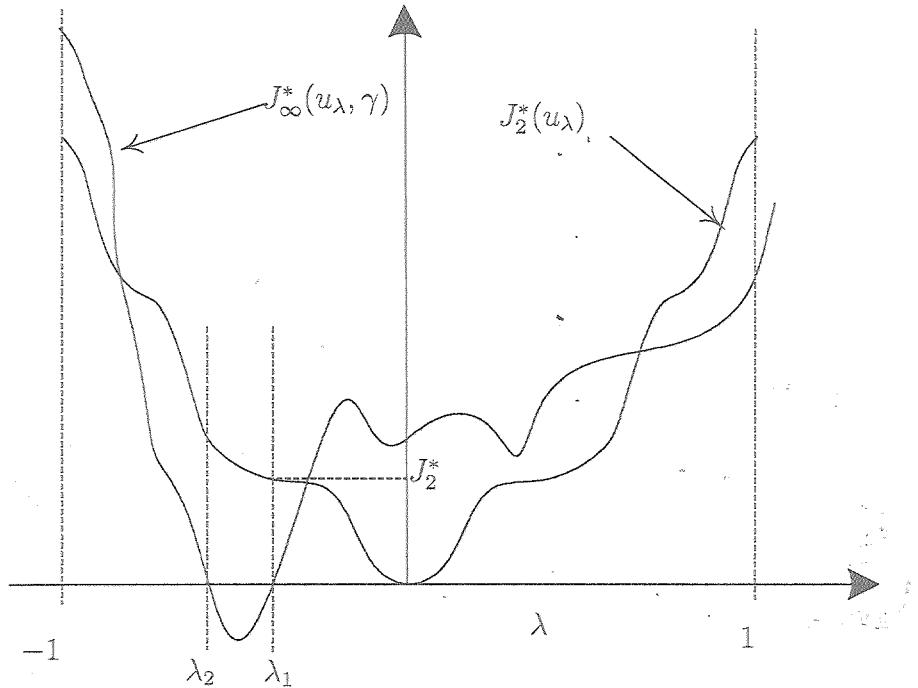


Figura 5.1: Ejemplo de comportamiento de curvas  $J_2^*(u_\lambda)$  y  $J_\infty^*(u_\lambda, \gamma)$  frente a  $\lambda$

Basándonos en figura 5.1 y recordando el objetivo de control asociado al problema híbrido planteado en 5.6: “*obtener una ley de control estabilizante que minimice el coste  $J_2(u)$  sujeto a la restricción  $J_\infty(u, \gamma, t) \leq 0$* ”, podemos idear un procedimiento para la obtención de una solución subóptima de este problema. El razonamiento es el siguiente:

*Es fácil observar que, únicamente los valores  $\lambda \in [\lambda_2, \lambda_1]$  verifican la restricción  $J_\infty^*(u_{\lambda,\gamma}) \leq 0$ . Ahora bien, de estos valores de  $\lambda$ , aquel más próximo a  $\lambda = 0$  será el que proporcione el menor valor de  $J_2^*(u_\lambda)$  en virtud de la cuasiconvexidad de este índice con  $\lambda$ . Por tanto, según la gráfica 5.1, será el valor  $\lambda^* = \lambda_1$  el valor que proporcione la solución subóptima más apropiada para el problema planteado en este caso.*

Este razonamiento, ha inspirado el algoritmo que se presenta a continuación para la obtención de la solución subóptima del problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  planteado.

**Algoritmo 5.1 (Solución subóptima del Problema Híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ).** Los resultados obtenidos según el Teorema 5.1 permiten enunciar el siguiente algoritmo para la solución del problema de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  no lineal.

1. Calcular  $u_0 = u_\lambda(x, \lambda) |_{\lambda=0}$  según (5.13)
  2. Calcular  $J_\infty(u_0, \gamma)$
  3. Si  $J_\infty(u_0, \gamma) \leq 0$  entonces
    - 3.1  $u_0$  es trivialmente la solución del problema híbrido planteado
  4. Si no
    - 4.1 calculamos el conjunto  $\Omega = \{\lambda \in (-1, 1) \text{ tal que } J_\infty(u_\lambda, \gamma) = 0\}$ .
    - 4.2 Calculamos
- (5.22)
- 4.3 Se determina la ley de control híbrida óptima como  $u_\lambda^* = u_\lambda(x, t, \lambda^*)$ .

La interpretación del algoritmo (5.1) resulta evidente a la luz de los resultados anteriormente expuestos. En primer lugar, en los *Pasos 1-3*, determinamos si el problema híbrido requiere una solución distinta de la trivial,  $u_0$ . Si es así, determinamos ésta como el control  $u_\lambda$  con parámetro  $\lambda$  más próximo a cero (*Pasos 4.1-4.3*) y que verifique la restricción en norma  $\mathcal{H}_\infty$ , (5.4), con el signo de igualdad. O dicho de otro modo, aquel valor de  $\lambda$  que, minimizando el valor del funcional  $J_2(u_\lambda)$ , verifica la restricción en  $J_\infty(u_\lambda, \gamma)$ .

Resulta conveniente mencionar en este punto que la etapa del algoritmo más compleja de evaluar *a priori*, es sin duda el *paso 4.1*. Este aspecto es sin embargo resuelto mediante la propiedad expuesta en el teorema 5.66 como veremos en su momento.

La motivación de este algoritmo está inspirado en el hecho de que, como es bien sabido para el caso lineal (Colaneri *et al.* 1997, Sznajer 1994), la solución óptima para el control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  se obtiene para un control  $u = u_{opt}(x, t)$ , tal que la restricción en  $L_\infty$  se verifica con signo de igualdad ( $J_\infty(u_{opt}, \gamma) = 0$ ). Si bien, extender esta aseveración para el caso no lineal carece de fundamento, es indudable que el algoritmo propuesto proporciona una solución que satisface las restricciones del problema planteado. Es importante resaltar por tanto, que esta solución no será en general, por el motivo expuesto, la solución óptima, sino una posible solución subóptima. En otras palabras, pueden existir soluciones no parametrizadas por la familia de controladores  $u_\lambda$  que permitan obtener un menor índice de comportamiento  $J_2(u)$  a la vez que verifican la restricción  $J_\infty(u, \gamma, t) \leq 0$ .

## 5.4. Control Híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas Euler-Lagrange

En este apartado, y como principal contribución de este capítulo, se describe una aplicación de la metodología de control híbrido previamente detallada a sistemas dinámicos Euler-Lagrange.

El problema planteado puede pues resumirse en los siguientes términos: *Dado un sistema EL descrito según la formulación dada en (5.1), calcular una ley de control de realimentación de estados  $u(\tilde{x})$  que estabilice asintóticamente el sistema minimizando el índice de comportamiento*

$$J_2(u, t) = \int_0^\infty \left( \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_2 \tilde{x} + \frac{1}{2} u^T R_2 u \right) dt \quad (5.23)$$

sujeto a la restricción de atenuación  $\mathcal{H}_\infty$

$$J_\infty(u, \gamma, t) = \int_0^\infty \left( \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_\infty \tilde{x} + \frac{1}{2} u^T R_\infty u \right) dt - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt \leq 0 \quad (5.24)$$

donde impondremos que  $Q_\infty \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $R_\infty \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$  sean matrices simétricas definidas positivas, al igual que se hizo para las matrices homólogas  $Q_2$  y  $R_2$ .

Como se verá posteriormente, el planteamiento de la ley de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas EL, requiere del conocimiento de una solución para el problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones. Por este motivo, comenzaremos describiendo en el apartado 5.4.1 una solución subóptima para el problema de control óptimo  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones. A continuación, en el apartado 5.4.2, se describe una parametrización de controladores estabilizantes que toma como base los resultados obtenidos para el problema  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones, proporcionándose a continuación una expresión explícita para control óptimo  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones en el apartado 5.4.3. Finalmente, en el apartado 5.4.4, se presenta la solución propuesta para el control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  de sistemas Euler-Lagrange.

### 5.4.1. Control $\mathcal{H}_2$ sin restricciones para sistemas Euler-Lagrange

En este apartado se presenta una solución para el problema de control  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones para sistemas Euler-Lagrange.

Según la formulación de la solución del problema híbrido planteado en el teorema 5.1, la expresión de la ley de control híbrido se requiere el conocimiento de la solución

del problema sin restricciones<sup>6</sup>, que fue obtenida en (5.13).

Para el cálculo de esta solución se plantea el problema en términos de la representación de espacio de estados para el *modelo de error* de sistemas Euler-Lagrange presentada en el capítulo 4 en las expresiones (4.27) y (4.28)-(4.29), considerando en esta ocasión el sistema libre de perturbaciones externas ( $\omega(t) = 0$ ). A continuación reproducimos por comodidad de lectura estas expresiones:

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, t) + g_2(\tilde{x}, t)u \quad (5.25)$$

donde

$$f(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{pmatrix} -M^{-1}(q)(\frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q}) + N(q, \dot{q})) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} + T_{23} \\ 0 & I \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \quad (5.26)$$

y

$$g_2(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{pmatrix} M^{-1}(q) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Es interesante observar que esta formulación del modelo de error incluye la integral del error de seguimiento como variable de estado del sistema. Este hecho constituye una extensión de los resultados en (Johansson 1990) ya que, como se verá, al incorporar la acción integral en la ley de control, se permite el rechazo de perturbaciones mantenidas que actúen sobre el sistema.

El problema planteado en este apartado puede ser enunciado como sigue: *Dado el sistema Euler-Lagrange definido en (5.25) junto con (5.26)-(5.27), encontrar una ley de control de realimentación de estados  $u(\tilde{x})$  que estabilice asintóticamente el sistema y minimice el funcional*

$$J_2(u) = \int_{t_0}^{\infty} L(\tilde{x}, u) dt \quad (5.28)$$

donde la función Lagrangiana,  $L(\tilde{x}, u)$ , se define como

$$L(\tilde{x}, u) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T Q_2 \tilde{x} + \frac{1}{2}u^T R_2 u \quad (5.29)$$

expresión en la que  $Q_2 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ , y  $R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas, definidas positivas.

La definición del funcional (5.29) permite ponderar, como es habitual en control óptimo, los errores de seguimiento a través del término  $\tilde{x}^T Q_2 \tilde{x}$ , mientras que la acción

<sup>6</sup>En realidad, sería suficiente con disponer de una ley de control  $u(\tilde{x})$  que estabilice asintóticamente el origen del sistema sin restricciones (ver apartado (i) del teorema 5.1). Se ha particularizado esta solución como la correspondiente al problema  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones por conveniencia de la formulación.

de control queda ponderada por el término  $u^T R_2 u$ , proporcionando suavidad en la operación del sistema. Además, las condiciones  $Q_2 = Q_2^T > 0$  y  $R_2 = R_2^T > 0$  son necesarias, ya que permiten garantizar que  $L(\tilde{x}, u) \geq 0 \quad \forall \tilde{x}, u$ , o de otro modo, el funcional presenta un mínimo absoluto para el punto de equilibrio del sistema,  $u = 0$  y  $\tilde{x} = 0$ .

De este modo, y siguiendo los planteamientos descritos en el capítulo 2, la solución del problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones, puede calcularse a partir de la función de Bellman  $V(\tilde{x}, t)$  que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f(\tilde{x}, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} g_2(\tilde{x}, t) R_2 g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial V(\tilde{x}, t)^T}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_2 \tilde{x} = 0 \quad (5.30)$$

La expresión de la ley de control óptimo,  $u_0(\tilde{x}, t)$ , vendrá dada entonces por

$$u_0(\tilde{x}, t) = -R_2^{-1} g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial V(\tilde{x}, t)^T}{\partial \tilde{x}} \quad (5.31)$$

El Teorema que se enuncia a continuación propone una estructura para la función de Bellman,  $V(\tilde{x}, t)$ , que permite obtener una solución subóptima para la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (5.30).

**Teorema 5.2 (Control  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones).** *Sea  $V(\tilde{x}, t)$  la siguiente función escalar definida positiva:*

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \quad (5.32)$$

donde  $M(q)$  es la matriz de inercias del sistema, y  $T_0$  corresponde a la expresión de la ecuación (4.24),  $K_{11}, K_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , son matrices constantes simétricas, y  $K_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante, que verifican además las condiciones

$$K_{11} > 0 \quad (5.33)$$

$$K_{22} - K_{12}^T K_{11}^{-1} K_{12} > 0 \quad (5.34)$$

Si estas matrices son tales que verifican la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & K_{11}^T & Y \\ K_{11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} - T_1^T R_2^{-1} T_1 + Q_2 = 0 \quad (5.35)$$

donde

$$Y = K_{11} T_{23} + K_{12} \quad (5.36)$$

$$Z = K_{12}^T T_{23} + K_{22} \quad (5.37)$$

y  $T_1 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \end{pmatrix}$  la matriz extraída de la primera fila por bloques de  $T_0$

Entonces, la función  $V(\tilde{x}, t)$  satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (5.30)

Demostración:

En primer lugar señalaremos la necesidad de las condiciones (5.33) y (5.34) para garantizar que la función escalar  $V(\tilde{x}, t)$  es definida positiva. Estas condiciones se obtienen al transformar la condición  $V(\tilde{x}, t) \geq 0$  mediante el *Complemento de Schur* (ver lema A.3 del apéndice A) de los bloques que la integran.

Por otro lado, para demostrar que (5.32) satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, se calculará por separado cada uno de los términos de la ecuación (5.30) para ser sumados posteriormente.

Así, eliminando por compacidad de notación las dependencias funcionales en los términos de las ecuaciones, tenemos

- Para la derivada temporal de  $V(\tilde{x}, t)$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M}{\partial q_k} \dot{q}_{rk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}$$

- El gradiente de  $V(\tilde{x}, t)$  viene dado por

$$\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix}$$

donde

$$\Omega = \left( \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^T M}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}, \dots, \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^T M}{\partial q_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \right)$$

Además tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} (g_2(\tilde{x}, t) u) = \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \left( -g_2(\tilde{x}, t) R_2^{-1} g_2^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{-1}R_2^{-1}M^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} = 0$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f &= \left( \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \right) f = \\ &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 f + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} (g_2 u) = \\ &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 f + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $\dot{\tilde{x}}$  en (5.26), la expresión anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 f = \\ &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M^{-1}(\frac{1}{2}\dot{M} + N) & 0 & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} + T_{23} & T_{11}^{-1}(T_{12}T_{23} - T_{13}) - T_{23}^2 \\ 0 & I & -T_{23} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \\ &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} -(\frac{1}{2}\dot{M} + N) & 0 & 0 \\ K_{11}T_{11}^{-1} & -K_{11}(T_{11}^{-1}T_{12} - T_{23}) + K_{12} & K_{11}T_{11}^{-1}(T_{12}T_{23} - T_{13}) - K_{11}T_{23}^2 - K_{12}T_{23} \\ K_{12}T_{11}^{-1} & -K_{12}(T_{11}^{-1}T_{12} - T_{23}) + K_{22} & K_{12}T_{11}^{-1}(T_{12}T_{23} - T_{13}) - K_{12}T_{23}^2 - K_{22}T_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mientras que el segundo término puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{e} \\ \dot{e} \\ e \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega \dot{e} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial M}{\partial q_k} (\dot{q}_k - \dot{q}_{rk}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \end{aligned}$$

Así, la suma de los resultados obtenidos hasta este punto:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f = \\
 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 f + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} = \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_{rk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} + \\
 &+ \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 f + \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial M}{\partial q_k} (\dot{q}_k - \dot{q}_{rk}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \\
 &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 f + \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \\
 &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} -(\frac{1}{2}M + N) & 0 & 0 \\ K_{11} T_{11}^{-1} & -K_{11}(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{12} & K_{11} T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{11} T_{23}^2 - K_{12} T_{23} \\ K_{12}^T T_{11}^{-1} & -K_{12}^T(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{22} & K_{12}^T T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{12}^T T_{23}^2 - K_{22} T_{23} \end{pmatrix} \cdot \\
 &\quad \cdot T_0 \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \\
 &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} -N & 0 & 0 \\ K_{11} T_{11}^{-1} & -K_{11}(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{12} & K_{11} T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{11} T_{23}^2 - K_{12} T_{23} \\ K_{12}^T T_{11}^{-1} & -K_{12}^T(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{22} & K_{12}^T T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{12}^T T_{23}^2 - K_{22} T_{23} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}
 \end{aligned}$$

En la expresión anterior, y en virtud de la propiedad (P1) en (4.8) que muestra que  $N$  es antisimétrica, se puede eliminar  $N$ , obteniendo

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f = \\
 &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{11} T_{11}^{-1} & -K_{11}(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{12} & K_{11} T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{11} T_{23}^2 - K_{12} T_{23} \\ K_{12}^T T_{11}^{-1} & -K_{12}^T(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{22} & K_{12}^T T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{12}^T T_{23}^2 - K_{22} T_{23} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} =
 \end{aligned}$$

$$= \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{11} & K_{11}T_{23} + K_{12} & 0 \\ T_{23}^T K_{11} + K_{12}^T & T_{23}^T K_{11}T_{23} + T_{23}^T K_{12}^T + K_{12}^T T_{23} + K_{22} & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} =$$

$$\tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{11} & Y & 0 \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{11} & Y & 0 \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} +$$

$$\frac{1}{2} \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & K_{11}^T & Y \\ 0 & Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & K_{11} & Y \\ K_{11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} \quad (5.38)$$

• Cálculo de  $g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}}$

$$\begin{aligned} g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} &= (M^{-1} \ 0 \ 0) (T_0^{-1})^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \\ &= (I \ 0 \ 0) T_0 \tilde{x} = T_1 \tilde{x} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Finalmente, sustituyendo cada uno de los términos anteriores en la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.35), se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & K_{11}^T & Y \\ K_{11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} - T_1^T R_2^{-1} T_1 + Q_2 = 0$$

Ésta es la expresión que figura en el enunciado del teorema y para la cual se propone una metodología de resolución en el teorema 5.35.

q.o.d.

#### 5.4.2. Una familia de controladores asintóticamente estabilizantes

Los resultados expuestos en el apartado anterior, y más concretamente en la demostración del teorema (5.2), permiten determinar una familia de controladores asintóticamente estabilizantes para sistemas Euler-Lagrange totalmente actuados. El teorema que se describe a continuación describe dicha familia de controladores.

**Teorema 5.3 (Parametrización de controladores asintóticamente estabilizantes).**  
*Sea  $V(\tilde{x}, t)$  la función escalar definida positiva:*

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}$$

donde  $M(q)$  es la matriz de inercias del sistema, y  $T_0$  corresponde a la expresión de la ecuación (4.24),  $K_{11}, K_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , son matrices constantes simétricas, y  $K_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante, que verifican además las condiciones

$$\begin{aligned} K_{11} &> 0 \\ K_{22} - K_{12}^T K_{11}^{-1} K_{12} &> 0 \end{aligned}$$

Si estas matrices son tales que verifican la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & K_{11}^T & Y \\ K_{11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} - T_1^T R^* T_1 + Q^* = 0 \quad (5.40)$$

donde

$$\begin{aligned} Y &= K_{11} T_{23} + K_{12} \\ Z &= K_{12}^T T_{23} + K_{22} \end{aligned}$$

y  $R^*$ ,  $Q^*$  son matrices definidas positivas arbitrarias, entonces la ley de control

$$u = -\frac{1}{2} R^* g_2^T \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} = -\frac{1}{2} R^* T_1 \tilde{x} \quad (5.41)$$

estabiliza asintóticamente el sistema (5.25).

#### Demostración:

El teorema se demuestra fácilmente tomando la función  $V(\tilde{x}, t)$  como función de Lyapunov para el sistema (5.25) con la ley de control (5.41).

Así calculando la derivada temporal de la función  $V(\tilde{x}, t)$  a lo largo de las trayectorias del sistema (5.25), podemos expresar

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} f + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_2 u = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} f - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_2 R^* g_2^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} \quad (5.42)$$

Como ya se mostró, los dos primeros sumandos tienen la forma expresada en (5.38), y el último término puede expandirse a partir de la expresión (5.39) para obtener

$$\frac{dV}{dt} = \tilde{x}^T \left[ \begin{pmatrix} 0 & K_{11}^T & Y \\ K_{11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} - T_1^T R^* T_1 \right] \tilde{x}$$

De este modo y teniendo en cuenta que las matrices  $R^*$  y  $Q^*$  son, por hipótesis, definidas positivas, tenemos que la expresión (5.40) garantiza que  $\dot{V}$  es estrictamente negativa para todo  $\tilde{x}$  y  $t$ , salvo para  $\tilde{x} = 0$ . Así, la estabilidad asintótica se sigue por aplicación del teorema de estabilidad de Lyapunov.

**Observación 5.3.** La ley de control (5.41) es una particularización de la conocida como ley de control de Jurdjevic-Quinn, (Jurdjevic and Quinn 1978), también conocida como control de amortiguamiento (Damping Control en inglés). La denominación deriva del hecho de que el término  $-\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_2 R^* g_2^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}}$  en (5.42) puede interpretarse como un amortiguamiento que disipa la “energía del sistema”,  $V(\tilde{x}, t)$ .

**Observación 5.4.** Es interesante observar que, si la ley de control (5.41) estabiliza asintóticamente el sistema (5.25), entonces también es solución del problema de optimización  $\mathcal{H}_2$  con funcional

$$J(\tilde{x}, u) = \int_0^\infty (l(\tilde{x}) + u^T R^{*-1} u) dt \quad (5.43)$$

con

$$l(\tilde{x}) = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} f + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_2 R^* g_2^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} \geq 0$$

### 5.4.3. Una solución para el control $\mathcal{H}_2$ sin restricciones

En esta sección proponemos una forma cerrada para la solución de la ecuación (5.35) planteada en el teorema 5.2 de la sección anterior. El teorema que se enuncia a continuación recoge la estructura de la solución propuesta.

**Teorema 5.4 (Solución de la ecuación (5.35)).** Sean las matrices de pesos  $Q$ ,  $R$  tales que

$$Q_2 = Q_2^T = \begin{pmatrix} Q_{1c}^T Q_{1c} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^T & Q_{2c}^T Q_{2c} & Q_{23} \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{3c}^T Q_{3c} \end{pmatrix} \quad R = R^T = R_{2c}^T R_{2c}$$

donde las matrices  $Q_{ic}$  y  $R_{2c}$  son los factores de Cholesky de la factorizaciones de  $Q_{ii}$  y  $R_2$ .

Entonces, se verifica que el siguiente conjunto de matrices constituye una solución

de (5.35)

$$\begin{aligned} T_{11} &= R_{2c}Q_{1c} \\ T_{12} &= R_{2c}X \\ T_{13} &= R_{2c}Q_{3c} \\ K_{11} &= \frac{1}{2}(Q_{1c}^T X + X^T Q_{1c}) - \frac{1}{2}(Q_{12} + Q_{12}^T) \\ Y &= \frac{1}{2}(Q_{1c}^T Q_{3c} + Q_{3c}^T Q_{1c}) - \frac{1}{2}(Q_{13}^T + Q_{13}) \\ Z &= \frac{1}{2}(X^T Q_{3c} + Q_{3c}^T X) - \frac{1}{2}(Q_{23}^T + Q_{23}) - \frac{1}{2}(T_{23}^T Y + Y^T T_{23}) \end{aligned}$$

con  $X$  verificando (factorización de Cholesky)

$$X^T X = (Q_{1c}^T Q_{3c} + Q_{3c}^T Q_{1c}) + Q_{2c}^T Q_{2c} - (Q_{13}^T + Q_{13})$$

y

$$T_{23}^T Y = Y^T T_{23}$$

### Demostración:

El teorema puede demostrarse por sustitución directa de la expresiones de  $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{23}, Y$  y  $Z$  en (5.35).

**Observación 5.5.** Es interesante destacar que la forma de la solución propuesta en el teorema (5.4) no es única. Pueden obtenerse soluciones alternativas sin más que sumar cualquier matriz antisimétrica a una o más de las matrices  $K_{11}, Y$  y  $Z$ . Sin embargo, sólo son admisibles las matrices que garantizan un comportamiento estable de lazo cerrado para el sistema (4.27), junto con (4.28)-(4.29), para una ley de control (5.31).

Un subconjunto de matrices que garantizan esta condición, son aquellas que hacen que la función de Bellman  $V(\tilde{x}, t)$  sea definida positiva. Esta cualidad se comprueba mediante las condiciones (5.33) y (5.34).

Como ejemplo, mostraremos que una elección particularmente simple que permite obtener una solución explícita para el problema  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones objeto de estudio, es la que ilustra el siguiente lema.

**Lema 5.1 (Elección de  $Q_2$  y  $R_2$  diagonales).** Sean las matrices  $Q_2$  y  $R_2$  tales que

$$Q_2 = Q_2^T = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{pmatrix}; \quad Q_{ii} = \text{diag}\{q_{i1}^2, \dots, q_{in}^2\} \quad i = \{1..,3\} \quad (5.44)$$

$$R_2 = R_2^T = \text{diag}\{r_i^2\} \quad i = \{1..n\} \quad (5.45)$$

Entonces la solución del problema  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones, adopta la forma

$$u_0(\tilde{x}, t) = -q_{1i}\dot{\tilde{q}} - \sqrt{2q_{1i}q_{3i} + q_{2i}^2} - q_{3i} \int_0^t \tilde{q} d\tau \quad (5.46)$$

con

$$\begin{aligned} T_{11} &= \text{diag}\{r_i q_{1i}\} \quad i = \{1 \dots n\} \\ T_{12} &= \text{diag}\{r_i \sqrt{2q_{1i}q_{3i} + q_{2i}^2}\} \quad i = \{1 \dots n\} \\ T_{13} &= \text{diag}\{r_i q_{3i}\} \quad i = \{1 \dots n\} \end{aligned}$$

donde adicionalmente se verifica la relación

$$(2q_{1i} + q_{2i})\sqrt{2q_{1i}q_{3i} + q_{2i}^2} > q_{1i}q_{3i}; \quad i = \{1 \dots n\} \quad (5.47)$$

#### Demostración:

De nuevo la demostración es sencilla y puede comprobarse mediante la sustitución en (5.35) de las expresiones proporcionadas.

La ley de control  $u_0(\tilde{x}, t)$  se obtiene por sustitución en la expresión genérica

$$u_0(\tilde{x}, t) = -R_2^{-1}g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial V(\tilde{x}, t)^T}{\partial \tilde{x}} = -R_2^{-1}[T_{11} \quad T_{12} \quad T_{13}]\tilde{x} \quad (5.48)$$

La condición adicional (5.47) es necesaria para asegurar que la función del Bellman sea definida positiva (condiciones (5.33)-(5.34)).

**Observación 5.6** (Control  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones como PID no lineal). *Las expresiones obtenidas en esta sección permiten una interesante particularización por la que la estructura final de control adopta la bien conocida forma en ingeniería de control, de PID no lineal. Para ello es necesario simplificar un poco más las expresiones anteriores suponiendo que  $Q_{ii}$  en (5.44) adopta la forma*

$$Q_{ii} = q_i I_{n \times n} \quad (5.49)$$

Con esta simplificación, las matrices  $T_{1i}$  toman la forma

$$\begin{aligned} T_{11} &= \rho I_{n \times n} = r q_1 I_{n \times n} \\ T_{12} &= \kappa I_{n \times n} = r \sqrt{2q_1 q_3 + q_2^2} I_{n \times n} \\ T_{13} &= \mu I_{n \times n} = r q_3 I_{n \times n} \end{aligned}$$

De este modo, y haciendo uso de las expresiones (4.23) y (4.26) podemos expresar

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + K_d \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} + K_i \int_0^t \tilde{q}(s) ds \quad (5.50)$$

donde las matrices  $K_d$ ,  $K_p$  y  $K_i$  se definen como

$$\begin{aligned} K_d &= -\frac{1}{\rho}(\kappa M(q) + \rho(C(q, \dot{q}) + R_2^{-1})) \\ K_p &= -\frac{1}{\rho}(\mu M(q) + \kappa(C(q, \dot{q}) + R_2^{-1})) \\ K_i &= -\frac{\mu}{\rho}(C(q, \dot{q}) + R_2^{-1}) \end{aligned}$$

La ley de control establecida en (5.50) responde a la forma de una linealización por realimentación más un PID no lineal de ganancias no lineales  $K_d$ ,  $K_p$  y  $K_i$  para los términos derivativo, proporcional e integral respectivamente.

Esta estructura de control ya fue establecida previamente en (Ortega Linares 2001) donde se deriva una ley de control equivalente aplicada a la síntesis de un controlador  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal. Las expresiones obtenidas en dicho trabajo pueden reducirse a las presentadas en este capítulo recalculándolas para un factor de atenuación de perturbaciones,  $\gamma$ , tendiendo a infinito.

#### 5.4.4. Solución de control Híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas Euler-Lagrange

En este apartado presentamos una particularización de los resultados obtenidos en la sección 5.4 que permite formular una solución subóptima para el problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas Euler-Lagrange.

De este modo, el teorema que se enuncia a continuación, formula una solución para el ecuación de Hamilton-Jacobi (5.12) asociada al problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

**Teorema 5.5 (Solución EHJB para problema híbrido Euler-Lagrange).** Sea  $V^\lambda(\tilde{x}, t)$  la siguiente función escalar:

$$V^\lambda(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda)M(q) & 0 & 0 \\ 0 & K_{\lambda 11} & K_{\lambda 12} \\ 0 & K_{\lambda 12}^T & K_{\lambda 22} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \quad (5.51)$$

con

$$\varphi(\lambda) = \frac{-\lambda^2 + \sqrt{4 - 3\lambda^2}}{2(1 - \lambda^2)} \quad (5.52)$$

una función escalar dependiente de  $\lambda$  (ver figura 5.4.4), y  $M(q)$  es la matriz de inercias del sistema, y  $T_0$  corresponde a la expresión de la ecuación (4.24),  $K_{\lambda 11}, K_{\lambda 22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

son matrices constantes simétricas, y  $K_{\lambda 12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante, que verifican además las condiciones

$$K_{\lambda 11} > 0 \quad (5.53)$$

$$K_{\lambda 22} - K_{\lambda 12}^T K_{\lambda 11}^{-1} K_{\lambda 12} > 0 \quad (5.54)$$

entonces  $V^\lambda(\tilde{x}, t)$  satisface la Ecuación de Hamilton-Jacobi (5.12) asociada al problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  si se verifica

$$\begin{pmatrix} 0 & K_{\lambda 11}^T & Y \\ K_{\lambda 11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} - T_1^T R_2^{-1} T_1 + Q_2 = 0 \quad (5.55)$$

donde

$$Y = K_{11} T_{23} + K_{12} \quad (5.56)$$

$$Z = K_{12}^T T_{23} + K_{22} \quad (5.57)$$

y  $T_1 = (T_{11} \ T_{12} \ T_{13})$  la matriz extraída de la primera fila por bloques de  $T_0$

#### Demostración:

La demostración de este teorema puede plantearse de forma muy similar a la del teorema 5.2, ya desarrollado en este mismo capítulo. Por este motivo, seguiremos un esquema de demostración similar al de aquel, del que omitiremos sin embargo el desarrollo de ciertas expresiones que pueden derivarse fácilmente según los resultados ya mostrados en la demostración del teorema 5.2.

De este modo, desarrollaremos cada uno de los términos de la expresión (5.12) tomando la expresión de  $V^\lambda(\tilde{x}, t)$  en (5.51) como función de Bellman asociada.

Así, y eliminando por compacidad de notación las dependencias funcionales en los términos de las ecuaciones, tenemos:

- La derivada temporal de  $V^\lambda(\tilde{x}, t)$ :

$$\frac{\partial V^\lambda}{\partial t} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \frac{\partial M}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M}{\partial q_k} \dot{q}_{rk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}$$

- El gradiente de  $V^\lambda(\tilde{x}, t)$  viene dado por

$$\frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda)M & 0 & 0 \\ 0 & K_{\lambda 11} & K_{\lambda 12} \\ 0 & K_{\lambda 12}^T & K_{\lambda 22} \end{pmatrix} T_0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix}$$

donde

$$\Omega = \varphi(\lambda) \left( \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^T M}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}, \dots, \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^T M}{\partial q_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \right)$$

Como ya se demostró se verifica la relación:

$$\begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} (g_2(\tilde{x}, t) u) = 0$$

De este modo, introduciendo  $u^*$  en (5.31), como la solución del problema  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones analizado en la sección 5.4.1 y teniendo en cuenta las definiciones (5.8)-(5.10) podemos calcular:

$$\frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f_\lambda = \frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} (f + \lambda^2 g_2 u^*) = \frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f - \lambda^2 \frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} g_2 R_2^{-1} g_2^T \frac{\partial V^T(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \quad (5.58)$$

expresión en la que podemos analizar cada sumando por separado

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f &= \left( \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda)M & 0 & 0 \\ 0 & K_{\lambda 11} & K_{\lambda 12} \\ 0 & K_{\lambda 12}^T & K_{\lambda 22} \end{pmatrix} T_0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \right) f = \\ &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda)M & 0 & 0 \\ 0 & K_{\lambda 11} & K_{\lambda 12} \\ 0 & K_{\lambda 12}^T & K_{\lambda 22} \end{pmatrix} T_0 f + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $\dot{\tilde{x}}$  en (5.26), el primer término de la expresión anterior puede escribirse como:

$$\tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda)M & 0 & 0 \\ 0 & K_{\lambda 11} & K_{\lambda 12} \\ 0 & K_{\lambda 12}^T & K_{\lambda 22} \end{pmatrix} T_0 f =$$

$$\tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} -\varphi(\lambda)(\frac{1}{2}\dot{M} + N) & 0 & 0 \\ K_{\lambda 11} T_{11}^{-1} & -K_{\lambda 11}(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{\lambda 12} & K_{\lambda 11} T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{\lambda 11} T_{23}^2 - K_{\lambda 12} T_{23} \\ K_{\lambda 12} T_{11}^{-1} & -K_{\lambda 12}(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{\lambda 22} & K_{\lambda 12} T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{\lambda 12} T_{23}^2 - K_{\lambda 22} T_{23} \end{pmatrix} \cdot T_0 \tilde{x}$$

mientras que el segundo término puede expresarse como:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \sum_{k=1}^n \frac{\partial M}{\partial q_k} (\dot{q}_k - \dot{q}_{rk}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}$$

Si realizamos la suma parcial de resultados obtenidos hasta este punto, tendremos:

$$\frac{\partial V^\lambda}{\partial t} + \frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f =$$

$$\tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} -N & 0 & 0 \\ K_{\lambda 11} T_{11}^{-1} & -K_{\lambda 11}(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{\lambda 12} & K_{\lambda 11} T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{\lambda 11} T_{23}^2 - K_{\lambda 12} T_{23} \\ K_{\lambda 12} T_{11}^{-1} & -K_{\lambda 12}(T_{11}^{-1} T_{12} - T_{23}) + K_{\lambda 22} & K_{\lambda 12} T_{11}^{-1} (T_{12} T_{23} - T_{13}) - K_{\lambda 12} T_{23}^2 - K_{\lambda 22} T_{23} \end{pmatrix} \cdot T_0 \tilde{x}$$

expresión en la que se han cancelado las expresiones dependientes de la derivada temporal de  $M(q)$ , en virtud de las relaciones vistas en la demostración del teorema 5.2. Del mismo modo, e igual que hicimos entonces, en la expresión anterior podemos eliminar el término  $N(q, \dot{q})$  por la antisimetría de esta matriz (propiedad (P1) en (4.8)). Así tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^\lambda}{\partial t} + \frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f &= \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{\lambda 11} & Y & 0 \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{x}^T \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{\lambda 11} & Y & 0 \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K_{11}^T & Y \\ 0 & Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \tilde{x} = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & K_{\lambda 11} & Y \\ K_{\lambda 11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} \end{aligned}$$

Por otra parte, el segundo sumando de (5.58) puede calcularse a partir de las expresiones:

$$g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} (T_0^{-1})^T T_0^T \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) M & 0 & 0 \\ 0 & K_{\lambda 11} & K_{\lambda 12} \\ 0 & K_{\lambda 12}^T & K_{\lambda 22} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \varphi(\lambda) T_1 \tilde{x}$$

y además:

$$u^* = -R_2^{-1}g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = -R_2^{-1} \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} (T_0^{-1})^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & K_{\lambda 11} & K_{\lambda 12} \\ 0 & K_{\lambda 12}^T & K_{\lambda 22} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}$$

o bien desarrollando:

$$u^* = -R_2^{-1}T_1\tilde{x}$$

Luego, agrupando ambas expresiones obtenemos:

$$\lambda^2 \frac{\partial V^\lambda(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} g_2 R_2^{-1} g_2^T \frac{\partial V^{\lambda T}(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = \lambda^2 \varphi(\lambda) \tilde{x}^T T_1^T R_2^{-1} T_1 \tilde{x}$$

Finalmente podemos calcular los términos:

$$V_x^\lambda(x, t) g_{2\lambda}(x, t, \lambda) R_2^{-1} g_{2\lambda}^T(x, t, \lambda) V_x^{\lambda T}(x, t) = (1 - \lambda^2) \tilde{x}^T T_1^T R_2^{-1} T_1 \tilde{x}$$

y

$$h_{2\lambda}^T h_{2\lambda} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_2 \tilde{x} + \frac{1}{2} \lambda^2 u^{*T} Q_2 u^* = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_2 \tilde{x} + \frac{1}{2} \lambda^2 \tilde{x}^T T_1^T R_2^{-1} T_1 \tilde{x}$$

Por último, sustituyendo cada uno de los términos anteriores en la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.35), y simplificando puede comprobarse que se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & K_{\lambda 11}^T & Y \\ K_{\lambda 11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} - T_1^T R_2^{-1} T_1 + Q_2 = 0$$

expresión en la que se pone de manifiesto como la función  $\varphi(\lambda)$  ha sido escogida para eliminar la dependencia funcional de  $\lambda$  de la ecuación resultante.

q.o.d.

**Observación 5.7.** Resulta interesante destacar que en el teorema anterior aparecen involucradas dos funciones de Bellman complementarias:  $V$  asociada al problema óptimo sin restricciones, y  $V^\lambda$  asociada al problema de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

La inclusión de dos funciones de Bellman asociadas a sendas ecuaciones de Hamilton-Jacobi, lleva implícito el cálculo de dos matrices de transformación  $T_0$ , distintas en el caso general. Dado que, en la formulación que se ha adoptado, las matrices de transformación intervienen directamente en la expresión de la dinámica del sistema (ecuaciones (4.28) y (4.29)) la inclusión de dos matrices distintas complicaría notablemente la obtención de las expresiones cerradas presentadas en el teorema anterior.

Es la elección apropiada de las funciones  $V$  y  $V^\lambda$  la que permite obtener una única matriz de transformación, ya que las expresiones que han de satisfacer ambas funciones son idénticas para el problema  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones, (5.35), y para el problema híbrido, (5.55).

**Observación 5.8.** La función  $V^\lambda$  en (5.51), verifica, como no podía ser de otro modo, las propiedades expuestas la formulación general de la solución del problema híbrido, a saber:

- Segundo la expresión (5.14), la función  $\lambda \frac{\partial V^\lambda}{\partial \lambda} \geq 0$ . Para la expresión de  $V^\lambda$  en (5.51) tenemos efectivamente:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} V^\lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \geq 0$$

expresión que se verifica teniendo en cuenta que  $M(q)$  es definida positiva según la propiedad (4.2) y que  $\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}$  es positivo para  $\lambda \in (-1, 1)$ .

- La función  $V^\lambda$  es par en  $\lambda$  (simétrica respecto a  $\lambda = 0$ ), ya que se verifica  $\varphi(\lambda) = \varphi(-\lambda)$ .

El teorema 5.4 permite además obtener la expresión para la ley de control  $u_\lambda$  que estabiliza el sistema original para  $\lambda \in (-1, 1)$ .

Así, si tomamos la ley de control asintóticamente estabilizante que exige el teorema 5.1, como  $u = -\frac{1}{2}R_2^{-1}T_1\tilde{x}$  podemos calcular:<sup>7</sup>

$$u_\lambda(\tilde{x}, t, \lambda) = \lambda u(\tilde{x}, t) + (\lambda - 1)R_2^{-1}g_2^T(\tilde{x}, t)V_x^{\lambda T}(\tilde{x}, t, \lambda) = \phi(\lambda)R_2^{-1}T_1\tilde{x} \quad (5.59)$$

donde  $\phi(\lambda)$  se define como

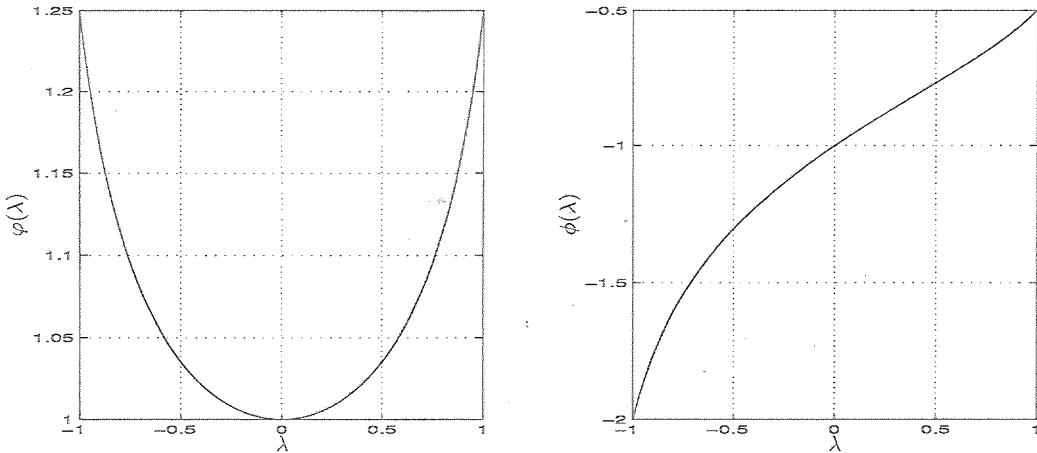
$$\phi(\lambda) = \frac{-\lambda - \sqrt{4 - 3\lambda^2}}{2(1 + \lambda)} \quad (5.60)$$

De este modo, una vez obtenida la ley de control  $u_\lambda$  podemos aplicar el algoritmo 5.1 para calcular la ley de control del problema híbrido.

Si asumimos que el problema planteado admite una solución distinta a la trivial, es decir, la solución del problema  $\mathcal{H}_2$  sin restricciones  $u_0 = \phi(0)R_2^{-1}T_1\tilde{x} = -R_2^{-1}T_1\tilde{x}$  es

---

<sup>7</sup>Un cálculo simple muestra que esta ley de control estabiliza asintóticamente el sistema (5.1) libre de perturbaciones ( $\omega(t) = 0$ ). Basta tomar  $V(\tilde{x}, t)$  en (5.32) como función de Lyapunov del sistema, y mostrar que  $\dot{V}(\tilde{x}, t) < 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0$  a lo largo de las trayectorias del sistema

Figura 5.2: Funciones  $\varphi(\lambda)$  y  $\phi(\lambda)$ 

tal que  $J_\infty(u_0, \gamma) > 0$ , entonces, de acuerdo con el algoritmo 5.1, el problema se reduce a encontrar  $\lambda^*$  como

$$\lambda^* = \min_{\lambda} \{ |\lambda| \quad \text{sujeto a} \quad J_\infty(u_\lambda, \gamma) = 0 \} \quad (5.61)$$

es decir, el valor de  $\lambda$  más próximo a cero, que permite verificar la restricción  $\mathcal{H}_\infty$  con el signo de igualdad.

Para la aplicación particular a sistemas EL que nos ocupa, la expresión (5.61) admite una formulación más conveniente que nos permite obtener una expresión cerrada para el cálculo de  $\lambda^*$ .

Así, recurriendo a los argumentos expuestos en el capítulo 2 la restricción  $J_\infty(u_\lambda, \gamma) = 0$  en (5.61) se satisface, si existe una función escalar  $V(\tilde{x}, t)$  tal que el siguiente problema admite solución para la peor perturbación admisible:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\omega} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} + L_\infty(\tilde{x}, u_\lambda, \gamma) \right\} \leq 0 \quad (5.62)$$

con

$$L_\infty(\tilde{x}, u_\lambda, \gamma) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_\infty \tilde{x} + \frac{1}{2} u_\lambda^T R_\infty u_\lambda - \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T \omega \quad (5.63)$$

Dado que (5.62) es una función cuadrática en el término de perturbaciones  $\omega(t)$ , el problema de maximización tiene una única solución para

$$\omega^*(t) = \frac{1}{\gamma^2} g_1^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} \quad (5.64)$$

Sustituyendo esta última expresión en (5.62) podemos obtener:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} f + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_1 g_1^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_2 u_\lambda + \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_\infty \tilde{x} + \frac{1}{2} u_\lambda^T R_\infty u_\lambda \leq 0 \quad (5.65)$$

Expresión similar a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman ya vistas en otros apartados de este mismo capítulo. Dicha ecuación admite una solución que se enuncia en el siguiente teorema.

**Teorema 5.6 (Cálculo de  $\lambda^*$ ).** *Dado el sistema EL (5.25)-(5.27) con ley de control estabilizante  $u_\lambda$  definida en (5.59), si se verifica la relación matricial*

$$\begin{aligned} T_1^T R_2^{-1} \left( R_2(\phi(\lambda) + 1) + \frac{1}{2}\phi(\lambda)^2 R_\infty \right) R_2^{-1} T_1 + \\ + \frac{1}{2\gamma^2} T_1^T T_1 + \frac{1}{2}(Q_\infty - Q_2) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

entonces, se cumple la restricción en norma  $\mathcal{H}_\infty$ :

$$J_\infty(u_\lambda, \gamma) \leq 0$$

Demostración:

La demostración del teorema anterior puede realizarse de forma análoga a teoremas previos presentados en este capítulo.

De este modo, si particularizamos la función escalar  $V$  como se hizo en teorema 5.2

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \quad (5.67)$$

podemos desarrollar cada uno de los términos que integran la expresión (5.65) de modo similar a como se hizo en la demostración del teorema 5.2 y así obtener

- De la expresión (5.38) obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f = \frac{1}{2} \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & K_{11} & Y \\ K_{11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}$$

con  $Y, Z$  definidas como en (5.36)

- Recordando ahora la expresión (5.39),  $u_\lambda = \phi(\lambda)R_2^{-1}T_1\tilde{x}$  y teniendo en cuenta que  $g_1(\tilde{x}, t) = g_2(\tilde{x}, t)$  según (4.29) podemos expresar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_1 g_1^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_2 u_\lambda + \frac{1}{2} u_\lambda^T R_\infty u_\lambda = \frac{1}{2\gamma^2} \tilde{x}^T T_1^T T_1 \tilde{x} + \phi(\lambda) \tilde{x}^T T_1^T R_2^{-1} T_1 \tilde{x} + \\ + \frac{1}{2} \phi^2(\lambda) \tilde{x}^T T_1^T R_2^{-1} R_\infty R_2^{-1} T_1 \tilde{x} = \tilde{x}^T T_1^T R_2^{-1} \left( \phi(\lambda) R_2 + \frac{1}{2} \phi^2(\lambda) R_\infty \right) R_2^{-1} T_1 \tilde{x} + \frac{1}{2\gamma^2} \tilde{x}^T T_1^T T_1 \tilde{x} \end{aligned}$$

agrupando las expresiones anteriores podemos expresar

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} f + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_1 g_1^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} g_2 u_\lambda + \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q_\infty \tilde{x} + \frac{1}{2} u_\lambda^T R_\infty u_\lambda = \\ \frac{1}{2} \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & K_{11} & Y \\ K_{11} & Y + Y^T & Y^T T_{23} + Z^T \\ Y^T & T_{23}^T Y + Z & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \tilde{x}^T T_1 R_2^{-1} \left( \phi(\lambda) R_2 + \frac{1}{2} \phi^2(\lambda) R_\infty \right) R_2^{-1} T_1^T \tilde{x}^T + \\ + \frac{1}{2\gamma^2} \tilde{x}^T T_1 T_1^T \tilde{x} \leq 0 \end{aligned}$$

Restando a la expresión anterior la identidad en (5.35), podemos obtener finalmente la expresión (5.66), como se quería demostrar.

q.o.d.

### Cálculo del valor de $\lambda^*$

La solución del problema híbrido así planteado, puede reducirse a encontrar una solución admisible a la inecuación (5.66), es decir, encontrar el valor  $\lambda^* \in (-1, 1)$  que verifique dicha ecuación con el menor módulo posible.

Por otro lado, a la vista de la gráfica 5.4.4, observamos que  $\phi(\lambda)$  es estrictamente creciente en el intervalo  $\lambda \in (-1, 1)$ ; y por tanto tenemos una correspondencia biunívoca entre los valores de  $\lambda$  y  $\phi(\lambda)$ . De este modo, la dependencia cuadrática en  $\phi(\lambda)$  de la ecuación (5.66), nos sugiere la idea plantear la solución del problema en términos de  $\phi(\lambda)$  para obtener en última instancia el valor de  $\lambda^*$ .

Con este planteamiento, podemos reescribir la ecuación (5.66) como:

$$A_1 + A_2 \phi(\lambda) + A_3 \phi(\lambda)^2 \leq 0 \quad (5.68)$$

donde las matrices  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  son todas matrices simétricas y adoptan la expresión:

$$\begin{aligned} A_1 &= T_1^T R_2^{-1} T_1 + \frac{1}{2\gamma^2} T_1^T T_1 + \frac{1}{2} (Q_\infty - Q_2) \\ A_2 &= T_1^T R_2^{-1} T_1 \\ A_3 &= \frac{1}{2} T_1^T R_2^{-1} R_\infty R_2^{-1} T_1 \end{aligned} \quad (5.69)$$

De este modo, y recurriendo a argumentos de álgebra lineal elemental, la desigualdad (5.68) tiene solución para aquel valor de  $\lambda \in (-1, 1)$ , si existe, tal que la matriz

$Q(\phi(\lambda)) = A_1 + A_2\phi(\lambda) + A_3\phi(\lambda)^2$  tiene todos sus autovalores negativos o cero, o bien, en términos matemáticos:

$$\lambda^* = \min_{\lambda} \{ |\lambda| < 1 \text{ tal que } \text{Eig}_i(Q(\phi(\lambda))) \leq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n \} \quad (5.70)$$

donde  $\text{Eig}_i(\cdot)$  denota el  $i$ -ésimo autovalor de la matriz correspondiente<sup>8</sup>.

Esta condición, aparentemente compleja, puede sin embargo evaluarse con un costo computacional moderado si atendemos al siguiente razonamiento: *a medida que  $\lambda$  cambia entre  $-1$  a  $1$ , la distribución de los autovalores de  $Q(\phi(\lambda))$  se modifica. Los únicos puntos en los que realmente nos interesa evaluar la condición (5.70) son aquellos valores de  $\lambda$  en los que se producen transiciones de autovalores del eje imaginario. Es decir, aquellos valores de  $\lambda$  para los que  $Q(\phi(\lambda))$  tiene al menos un autovalor igual a cero.*

Por otro lado, si  $\lambda$  es tal que  $Q(\phi(\lambda))$  tiene uno o más autovalores iguales a cero, entonces existe  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $x \neq 0$  tal que  $Q(\phi(\lambda))x = 0$ , o equivalentemente,  $\lambda$  es solución del problema de autovalores cuadráticos, (ver (Tisseur and Meerbergen 2000)), en  $\phi(\lambda)$ .

$$(A_1 + A_2\phi(\lambda) + A_3\phi(\lambda)^2)x = 0 \quad \text{con } x \neq 0 \quad (5.71)$$

Además, si definimos  $y = \lambda Ex$ , con  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz no singular arbitraria, podemos reescribir la ecuación (5.71) de una forma sencilla como:

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A_1 & -A_2 \end{pmatrix} - \phi(\lambda) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (5.72)$$

expresión con la que reducimos el problema de autovalores cuadráticos al bien conocido problema de *autovalores generalizados*, para el cual se dispone de eficientes y estables algoritmos computacionales (ver (Smith *et al.* 1976) y (Moler and Stewart 1973))<sup>9</sup>

Como es bien sabido, la ecuación (5.72) presenta en general  $2n$  soluciones en  $\phi$ , finitas o infinitas, que se corresponden con otros tantos autovectores por la derecha y por la izquierda.

Por otro lado, una atenta observación a la forma de la función  $\phi(\lambda)$  en la figura 5.4.4 nos indica que resolver el problema (5.71) para  $\lambda \in (-1, 1)$ , equivale a obtener una solución para (5.72) con  $-2 < \phi < -\frac{1}{2}$ .

<sup>8</sup>Los autovalores son todos reales en virtud de la simetría de la matriz  $Q(\phi(\lambda))$ .

<sup>9</sup>Estos algoritmos forman parte del código implementado en la función *polyeig* de MATLAB ©.

A la vista de estos resultados podemos desarrollar el siguiente algoritmo que permite obtener la solución para el problema planteado.

**Algoritmo 5.2 (Solución del problema (5.70)).** *El problema planteado en (5.70) admite una posible solución mediante el algoritmo que se enuncia a continuación.*

1. *Calcular el conjunto de soluciones del problema de autovalores generalizado*

$$\Phi = \{\phi_i \text{ tal que } \exists \xi \neq 0 \ (A - \phi_i B)\xi = 0 \quad i = 1..,2n\}$$

*con  $\phi_i \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  y  $A, B \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  definidas como*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_1 & -A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

*expresiones en las que, sin pérdida de generalidad, hemos particularizado  $E = I$  en (5.72).*

2. *Determinar el subconjunto  $\bar{\Phi} \subset \Phi$  definido como*

$$\bar{\Phi} = \{\phi_i \in \Phi \text{ tal que } -2 < \phi_i < -\frac{1}{2} \quad i = 1..,p\}$$

*es decir, el subconjunto de soluciones,  $\phi_i$ , admisibles para el problema planteado*

3. *Calculamos*

$$\lambda^* = \min_{\lambda} \{ |\phi^{-1}(\phi_i(\lambda))|; \quad \phi_i \in \bar{\Phi} \}$$

*expresión en la que  $\phi^{-1}$  denota la función inversa de  $\phi$  definida en (5.60)*

La metodología expuesta permite obtener el valor de  $\lambda^*$  que minimiza el valor del funcional  $J_2$  satisfaciendo simultáneamente la restricción  $J_\infty \leq 0$  con el signo de igualdad, tal como se ha comentado con anterioridad.

Este valor,  $\lambda^*$ , determina a su vez la ley de control óptima,  $u^*$ , solución del problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  planteado, que adopta la forma en (5.59):

$$u^* = u_\lambda(\tilde{x}, t, \lambda^*) = \phi(\lambda^*) R_2^{-1} T_1 \tilde{x} \quad (5.73)$$

Es interesante destacar que, si bien la metodología de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  presentada permite la obtención de soluciones subóptimas, el algoritmo propuesto no garantiza la existencia de dichas soluciones. Es por tanto posible que exista un controlador que verifique las restricciones del problema planteado y que no esté incluido en la familia de controladores parametrizada en este capítulo.

#### 5.4.4.1. Estructura del control híbrido $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas EL

La figura 5.3 muestra la estructura genérica del control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas Euler-Lagrange planteada en este capítulo.

En esta figura los términos  $V(q, \dot{q})$  y  $P(q, \dot{q})$  son respectivamente:

$$V(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

y

$$P(q, \dot{q}) = -\frac{1}{\rho}M(q) \left( T_{12}\ddot{q} + T_{13}\tilde{q} + T_{13}T_{23} \int_0^t \tilde{q} d\tau \right) - \frac{1}{\rho}C(q, \dot{q})T_1\tilde{x} + \frac{1}{\rho}u_\lambda^*$$

Este diagrama de bloques se obtiene de forma sencilla a partir de la expresión genérica (4.30), donde se ha sustituido el valor de  $u$ , por la solución,  $u_\lambda^*$ , asociada al problema híbrido planteado en este capítulo.

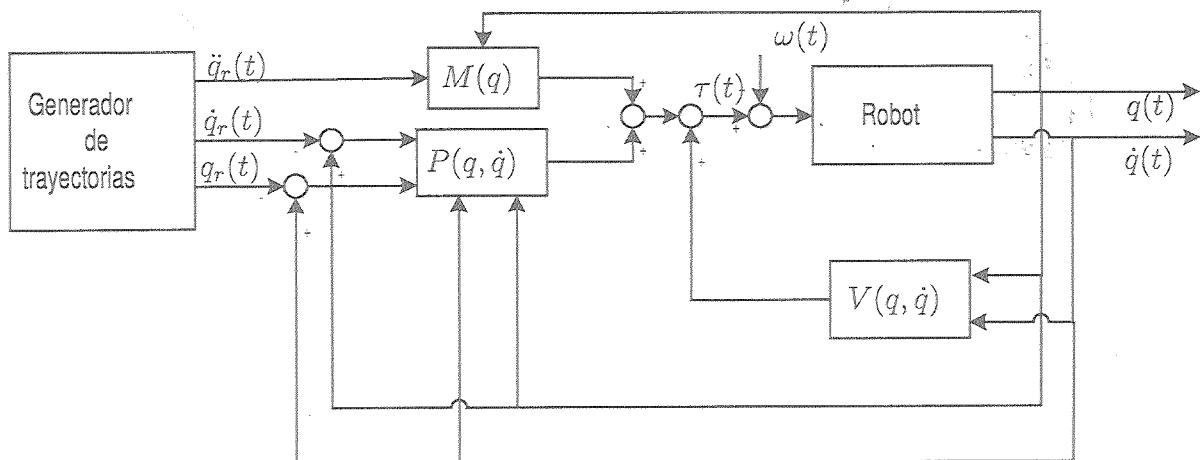


Figura 5.3: Esquema de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

## 5.5. Aplicaciones

Para validar la metodología teórica expuesta en este capítulo, se ha realizado una serie de experimentos que permiten poner de manifiesto los potenciales beneficios derivados de la técnica descrita.

Como es bien sabido en teoría de control, la dinámica no lineal fuertemente acoplada asociada al comportamiento de sistemas electromecánicos como los considerados en este

capítulo, se pone especialmente de manifiesto en el caso de que el sistema considerado sea de accionamiento directo. Es decir, si el mecanismo no presenta reductoras entre el eje del actuador y el eje del eslabón mecánico.

La inclusión de reductoras es sin embargo una solución tecnológica muy extendida en la fabricación de sistemas electromecánicos, ya que, siempre que no se requieran muy altas velocidades y/o precisiones de trabajo, permiten realizar diseños con actuadores de menor par/potencia al comportarse las reductoras como amplificadores de par a costa lógicamente de disminuir proporcionalmente la velocidad.

Desde el punto de vista de control, la inclusión de reductoras tiene un efecto benéfico de desacople de la dinámica asociada a cada uno de los grados de libertad del sistema. No obstante, la inclusión de reductoras tiene importantes limitaciones en aquellas aplicaciones que requieran, bien altas velocidades o aceleraciones, o bien alta precisión de posicionamiento. Esta última limitación viene determinada por las holguras mecánicas de las reductoras que inevitablemente incluyen zonas muertas en la dinámica del sistema.

Por estos motivos, y parejo al desarrollo tecnológico de los actuadores electromecánicos, especialmente los motores de corriente continua sin escobillas o *Brushless*, son cada día más frecuentes los sistemas electromecánicos de accionamiento directo o sin reductoras. Es para estos sistemas para los que la aplicación de técnicas de control no lineal como las presentadas en este capítulo cobran sentido en toda su dimensión, ya que se manifiestan de forma notable los efectos asociados al comportamiento no lineal del sistema.

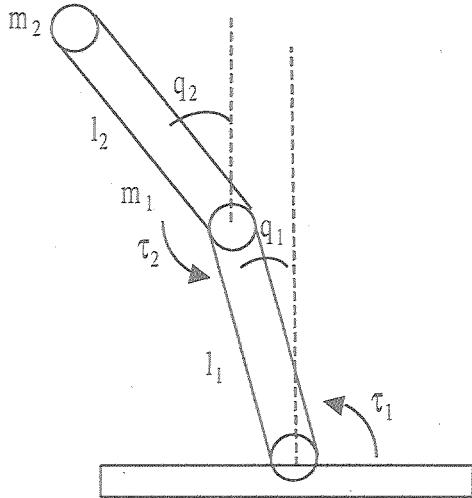
El departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla está desarrollando actualmente un robot de dos grados de libertad de accionamiento directo que aún se encuentra en etapas de diseño y desarrollo. Desafortunadamente, en el momento de la redacción de esta Tesis, dicha plataforma de experimentación no está disponible, no siendo por tanto posible realizar experimentación real en dicho sistema.

Por este motivo, se presentan a continuación resultados de simulación correspondientes al mencionado *robot de dos grados de libertad* de accionamiento directo, reservando los resultados experimentales a una *plataforma giroestabilizada*, presente en los laboratorios del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla. Adicionalmente, se presentan también resultados de simulación sobre *robot industrial de seis grados de libertad*, del que se dispone de un modelo contrastado y validado.

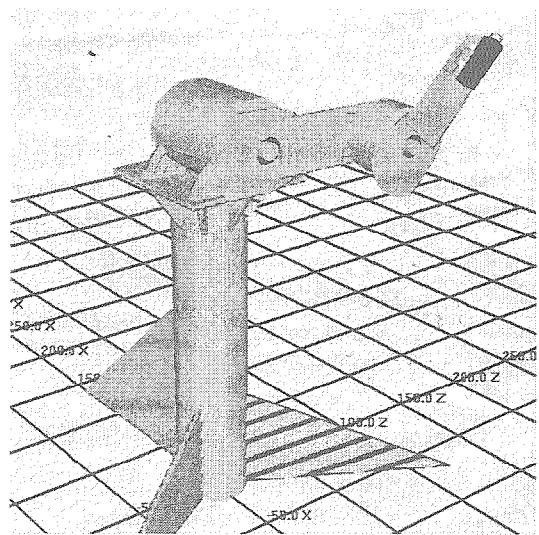
### 5.5.1. Aplicación a un robot de dos grados de libertad

Para comprobar la validez de los esquemas de control propuestos, en esta sección se van a presentar los resultados de simulación obtenidos al aplicarlos al modelo de un robot de dos grados de libertad.

En la figura 5.4 se muestra un esquema del robot considerado. Como se observa, es una estructura plana compuesta por dos eslabones y dos articulaciones de rotación. Las características de cada eslabón  $i$  ( $i = 1, 2$ ) son su masa ( $m_i$ ), su longitud ( $l_i$ ), la posición de su centro de gravedad ( $l_{ci}$ ) y su inercia ( $I_i$ ).



(a) Esquema



(b) Recreación

Figura 5.4: Robot de dos grados de libertad

El vector de coordenadas articulares en este brazo manipulador está compuesto por los ángulos  $q_1$  y  $q_2$  y a los pares aplicados en dichas articulaciones se les denominarán  $\tau_1$  y  $\tau_2$  respectivamente.

Las expresiones de las matrices de la ecuación matricial de Euler-Lagrange de la ecuación (4.6) en este robot en particular son las siguientes:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

$$V(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} -(2\dot{q}_2 \dot{q}_1 + \ddot{q}_2^2) \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = g \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) \cos q_1 + m_2 l_{c2} \cos (q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} \cos (q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

A partir de estas expresiones se pueden calcular las matrices  $\dot{M}(q, \dot{q})$  y  $N(q, \dot{q})$ , que adoptan la siguiente forma:

$$\dot{M}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 (\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, conociendo las expresiones de estas dos matrices se puede calcular el valor de  $C(q, \dot{q})$ :

$$C(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{M} + N = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores nominales que se han escogido para los distintos parámetros del robot son los siguientes

$$l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$$

$$l_{c1} = l_{c2} = 0,5 \text{ m}$$

$$m_1 = m_2 = 3 \text{ Kg}$$

$$I_1 = I_2 = 0,2536 \text{ Kg.m}^2$$

De este modo, y para ilustrar el comportamiento de la metodología de control propuesta, presentaremos a continuación los resultados de simulación sobre el robot de dos grados de libertad que nos ocupa.

Se mostrarán resultados comparativos mediante las técnicas de control de *Par calculado clásico*, control óptimo  $\mathcal{H}_2$  según la extensión del trabajo de Johansson en (Johansson 1990) presentadas en el apartado 5.4.3, control  $\mathcal{H}_{\infty}$  propuesto en (Ortega Linares 2001), y finalmente el control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  también desarrollado en el apartado 5.4.4 de esta Tesis.

Es interesante indicar que se ha escogido estas cuatro estrategias entre las disponibles, por que todas incluyen de uno u otro modo acción integral en su formulación, por lo que es de esperar que presenten características aceptables de rechazo de perturbaciones. Técnicas de control próximas a las presentadas, como la formulación de Feng (Feng and Postlethwaite 1994), no se han incluido al no considerar esta característica y por tanto no conducen a resultados comparables.

En todos ellos las referencias de las coordenadas articulares han sido calculadas por un generador de trayectorias mediante un polinomio de quinto orden. La trayectoria de referencia que nos servirá para poner de manifiesto las virtudes del control propuesto, consiste en un doble salto de referencia para ambas articulaciones, desde una posición inicial  $0 \text{ rad}$  para ambas articulaciones, hasta una posición final de  $\frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$  para el primer salto, y de  $\frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$  a  $\frac{\pi}{8} \text{ rad/s}$ , para el segundo. Se ha elegido esta trayectoria para poder incluir cambios de referencia que impliquen cambios en el sentido de movimiento, es decir, incluimos velocidades positivas y negativas en la referencia. La figura 5.5

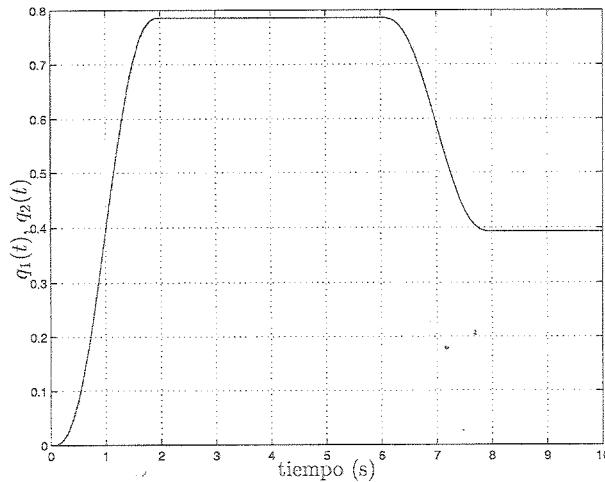


Figura 5.5: Trayectoria de referencia

muestra la forma de esta trayectoria. En el caso de no considerar errores de modelado ni perturbaciones actuando sobre el sistema, todas las estructuras de control que se ensayarán en este apartado presentan excelentes comportamientos para el problema. El error de seguimiento en simulación es virtualmente nulo para todas las técnicas de control y la capacidad de seguimiento de trayectorias sólo está limitado por el parámetro disponible para el control del sistema.

Es en el caso, por otro lado más realista e interesante, de incluir perturbaciones actuando sobre el sistema y/o errores de modelado, cuando el comportamiento de los diferentes controladores pone de manifiesto sus virtudes y deficiencias de cada uno de ellos. Por este motivo se presentan a continuación resultados comparativos de simulación para el robot de dos grados de libertad considerando perturbaciones mantenidas (perturbaciones  $\mathcal{L}_2$ ) en la carga, así como incertidumbres de modelado del sistema. Es necesario además comentar que con el objeto de hacer comparables los resultados, los controladores han sido *sintonizados* para las diferentes técnicas de control presentadas, considerando tiempos de establecimiento en el seguimiento de trayectorias similares en ausencia de perturbaciones.

Por otro lado, y para poner de manifiesto las propiedades de las estrategias de control, consideraremos índices de comportamiento como los asociados a este problema en (5.23) para el índice de comportamiento del problema óptimo  $\mathcal{H}_2$  y (5.24) para la relación de atenuación  $\mathcal{H}_{\infty}$ . A efectos prácticos, las integrales que figuran en estas expresiones se supondrán extendidas al intervalo temporal de evolución de la trayectoria considerado en cada caso.

Estos índices nos permitirán además cuantificar el comportamiento de las diferentes técnicas de control y realizar un análisis comparativo de cada una de ellas.

Para fijar ideas, concretaremos, las matrices de ponderación asociadas a estos índices como  $R_2 = 0,1I_{2 \times 2}$  y  $Q_2 = 1,5I_{6 \times 6}$  para el problema  $\mathcal{H}_2$ , indicando que pretendemos conceder más importancia a los errores de seguimiento que al esfuerzo de control  $u$ . Para el problema  $\mathcal{H}_\infty$  tomaremos  $R_\infty = 0,6I_{2 \times 2}$  y  $Q_\infty = I_{6 \times 6}$ , con un índice de atenuación de perturbaciones  $\gamma = 0,6$ .

Una vez realizadas estas necesarias puntualizaciones procederemos a mostrar los resultados anunciados, considerando en primer lugar la acción de perturbaciones de energía finita sobre el sistema, y más tarde el efecto de la incertidumbres de modelado sobre cada una de las técnicas de control comentadas.

- a) Perturbaciones  $\mathcal{L}_2$

Consideraremos en primer lugar el desempeño de controladores sometidos a perturbaciones de clase  $\mathcal{L}_2$ , es decir, perturbaciones de energía finita.

En estos resultados de simulación, las perturbaciones han sido obtenidas empleando un generador de señales pseudoaleatorias convenientemente filtradas para obtener una señal con componentes frecuenciales preferentemente localizadas en la parte baja del espectro. Con esto se pretende estudiar el comportamiento del sistema para perturbaciones de estructura no estocástica.

Este tipo de perturbaciones pueden modelar, por ejemplo en el caso de robots manipuladores, la influencia de cargas excéntricas en el efecto final del manipulador. Este tipo de cargas inducen en su movimiento acompañando al robot, fuerzas/pares de perturbación sobre el efecto final que se transmiten a todas las articulaciones, y por tanto pueden ser vistas como fuerzas/pares adicionales a las aplicadas por los actuadores del robot.

Por otro lado, la amplitud de las mencionadas perturbaciones ha sido seleccionada para constituir aproximadamente un 25 % de la energía de la señal total aplicada al sistema. Se trata por tanto de unas perturbaciones considerables para el sistema tratado.

- Control de Par Calculado

Comprobemos en primer lugar el comportamiento de la técnica clásica de Par Calculado, tal como refleja la figura 5.6.

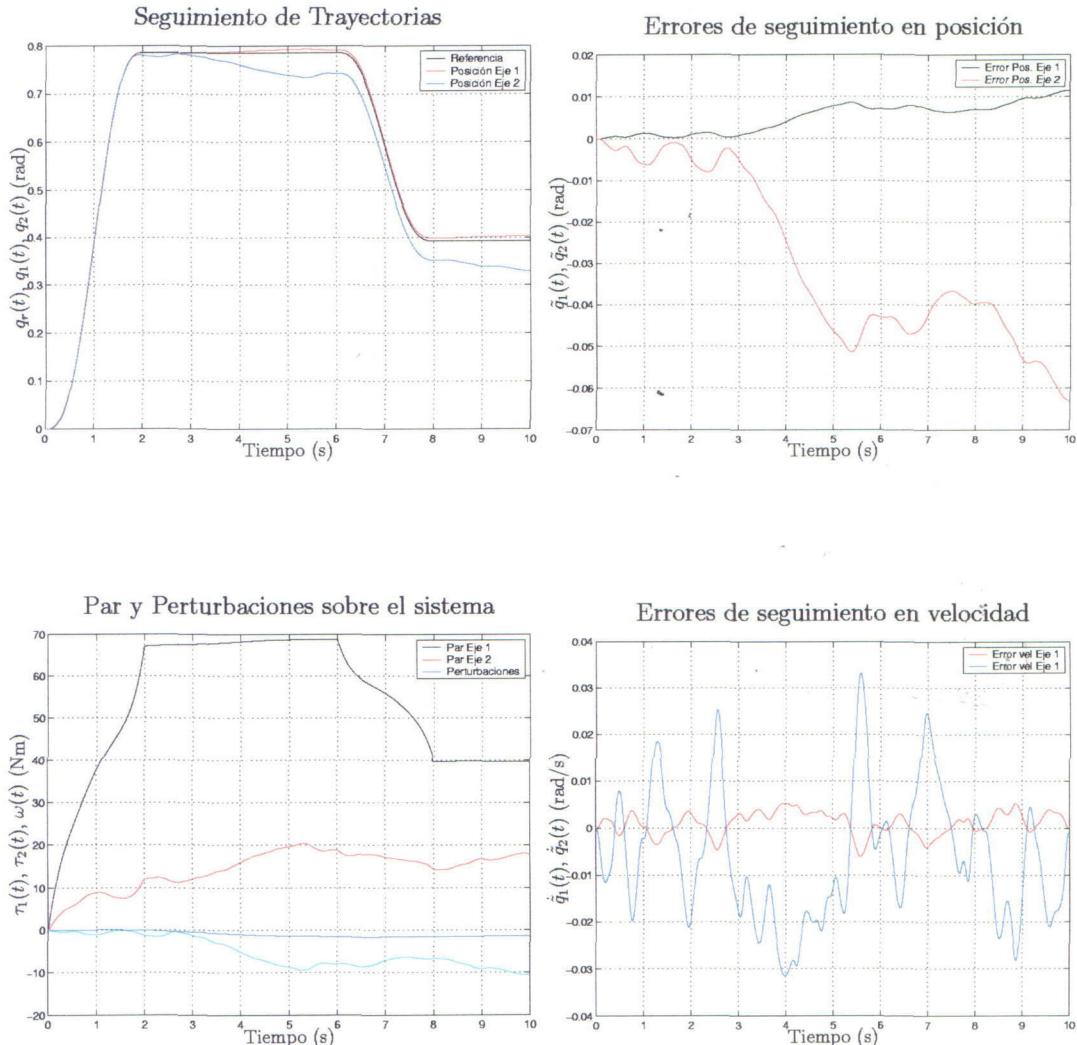


Figura 5.6: Comportamiento de la técnica de Par Calculado bajo perturbaciones de energía finita

La técnica clásica de control de Par Calculado no hace consideraciones de ninguna naturaleza acerca de las posibles perturbaciones que puedan actuar sobre el sistema. Por este motivo, las gráficas mostradas presentan un notable deterioro del control para el sistema perturbado induciendo errores de seguimiento tanto en posición como en velocidad considerables, especialmente en el eje 2 que el que presenta menor inercia efectiva y puede ser *a priori* el más sensible a la influencia de perturbaciones.

- Control óptimo  $\mathcal{H}_2$

A continuación, en la figura 5.7, mostramos el comportamiento del control óptimo  $\mathcal{H}_2$  según la extensión realizada en el apartado 5.4.3, para el robot de dos grados de libertad considerado.

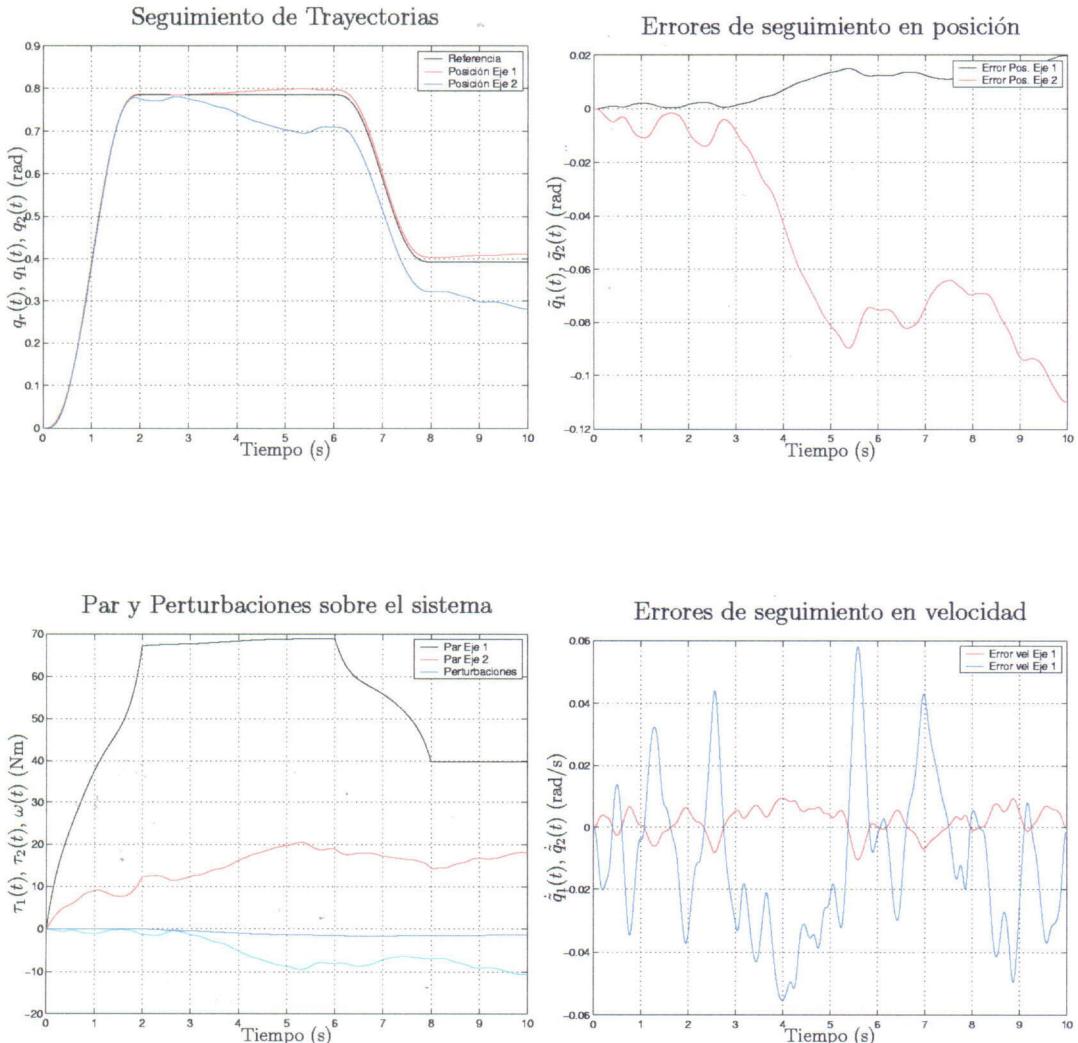


Figura 5.7: Comportamiento del control óptimo  $\mathcal{H}_2$  bajo perturbaciones de energía finita

El control  $\mathcal{H}_2$  considerado en estos resultados de simulación permite obtener una ley de control de realimentación de estados subóptimo respecto a un índice de comportamiento  $J_2$  de la forma expresada en (5.23), si bien presupone una estructura estocástica para las perturbaciones que actúan sobre el sistema. Es de esperar por tanto que el tipo de perturbaciones aplicado en esta simulación muestre deterioros de comportamiento del sistema significativos respecto al óptimo sin acción de perturbaciones, como así ponen de manifiesto las gráficas mostradas.

- Control óptimo  $\mathcal{H}_{\infty}$

A continuación, en la figura 5.8, mostramos el comportamiento para este mismo sistema del control óptimo  $\mathcal{H}_{\infty}$  puro tomando el índice de atenuación de perturbaciones  $\gamma = 0,6$  como se ha indicado.

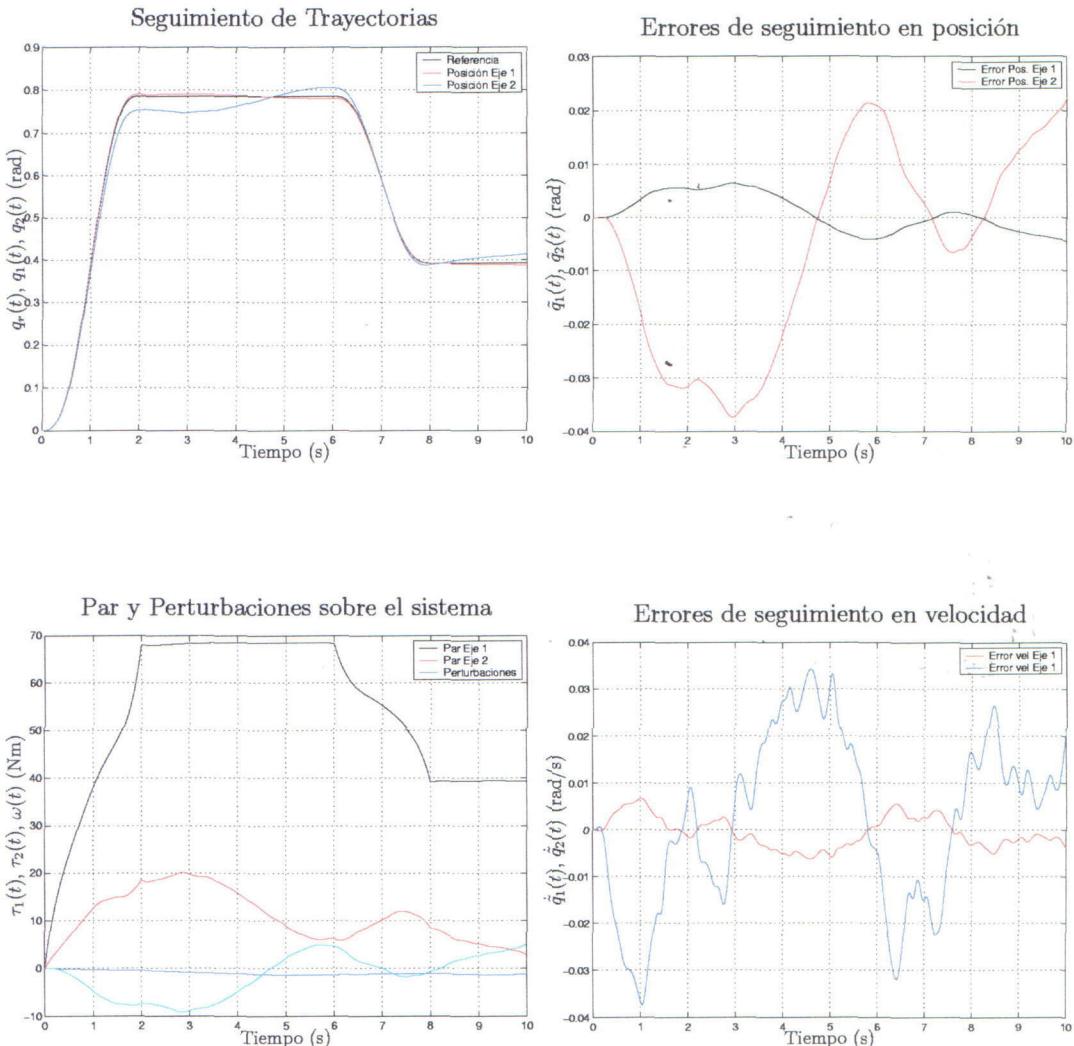


Figura 5.8: Comportamiento del control óptimo  $\mathcal{H}_{\infty}$  bajo perturbaciones de energía finita

La estrategia de control  $\mathcal{H}_{\infty}$  en cambio, no presupone una estructura determinada para las perturbaciones que actúan sobre el sistema. Es razonable por tanto pensar que esta estrategia de control sea la que mejore las cualidades de rechazo perturbaciones muestre para el caso particular considerado en estas simulaciones. Las gráficas mostradas ponen de manifiesto este hecho.

- Control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$

A continuación, en la figura 5.9, mostramos el comportamiento para este mismo sistema del control subóptimo  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  presentada en este capítulo.

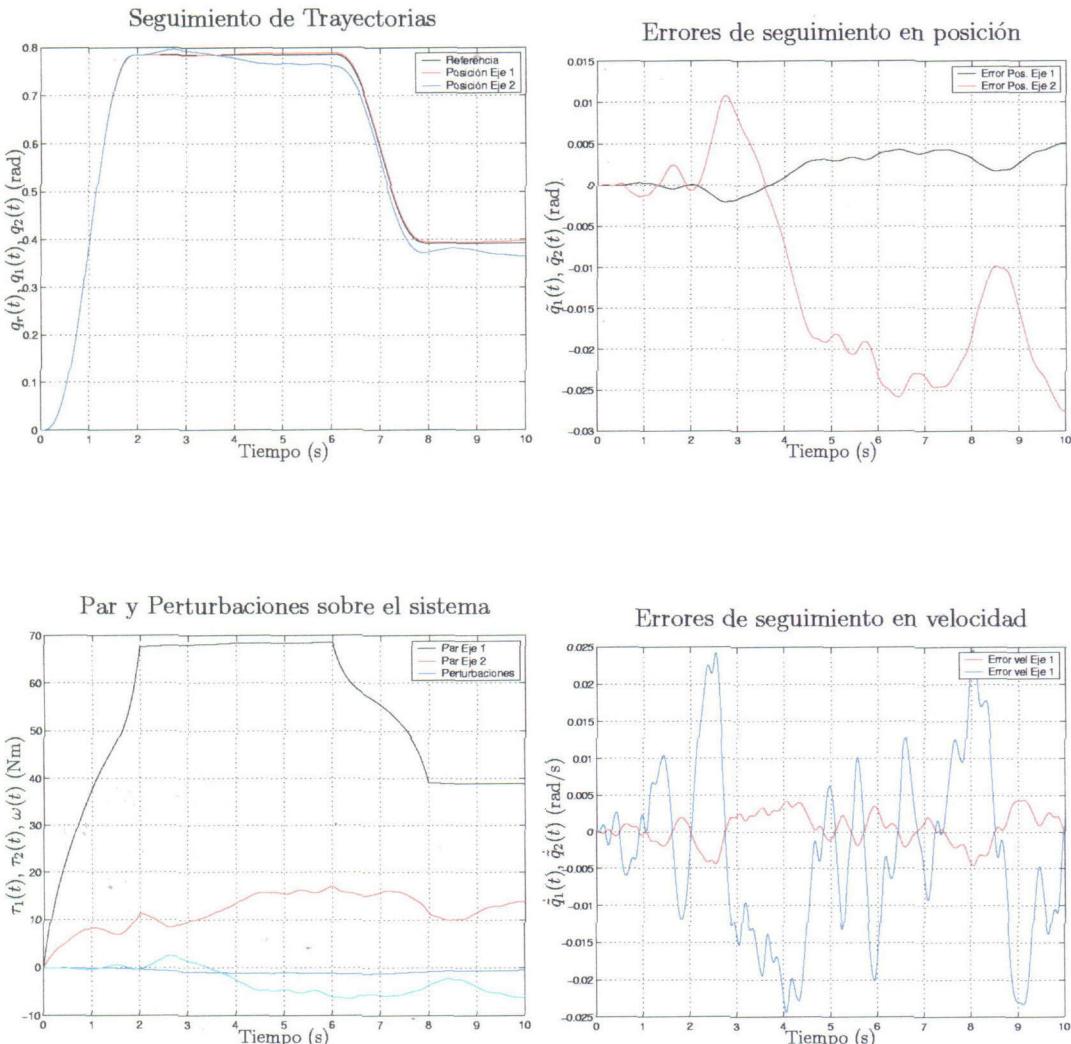


Figura 5.9: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  bajo perturbaciones de energía finita

La estrategia de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  permite ponderar las cualidades de rechazo de perturbaciones frente a comportamiento como muestran estos resultados. Como era de esperar, los errores de seguimiento tanto en posición como en velocidad, se sitúan en este caso a medio camino entre los resultados obtenidos con las técnicas de control  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_{\infty}$  puras.

Para facilitar la comparación y discusión de los resultados mostrados en las gráficas anteriores, se muestra a continuación en la tabla 5.1, el resultado obtenido sobre tres índices de comportamiento para cada una de las técnicas de control mencionadas.

Como *índices de comportamiento* significativos se han tomado el *error integral cuadrático* (*ISE* en inglés) de seguimiento en posición, el índice de comportamiento  $J_2$  asociado al problema  $\mathcal{H}_2$  según la expresión (5.23), así como un índice  $\gamma_e$  que denominaremos *relación de atenuación experimental*.

Este último índice, como sugiere su nombre, representa la relación de atenuación de perturbaciones obtenida para un ensayo concreto, y constituye una estimación de la relación de atenuaciones teórica  $\gamma$  fijada en el proceso de diseño.

Definimos pues  $\gamma_e$  como:

$$\gamma_e = \arg \min_{\gamma} \{ J_\infty(u, \gamma, t) = 0 \} \quad (5.74)$$

es decir, el mínimo valor de  $\gamma$  que hace que el índice de comportamiento  $J_\infty(u, \gamma, t)$  definido según (5.24) sea igual a cero. En el cálculo de la expresión (5.24) supondremos al igual que en para el funcional  $J_2$  que la integral está extendida al intervalo temporal del experimento considerado.

Control	Error ISE	$J_2$	$\gamma_e$
Control Par Calculado	$3,6 \times 10^{-2}$	-	1,12
Control $\mathcal{H}_2$	$8,1 \times 10^{-2}$	$8,2 \times 10^{-4}$	1,22
Control $\mathcal{H}_\infty$	$0,6 \times 10^{-2}$	$6,1 \times 10^{-3}$	0,64
Control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	$2,0 \times 10^{-2}$	$1,1 \times 10^{-3}$	0,61

Cuadro 5.1: Tabla comparativa de comportamiento de diferentes técnicas ensayadas para perturbaciones  $\mathcal{L}_2$ .

A la vista de las gráficas mostradas y los resultados numéricos de la tabla 5.1, podemos comprobar como la estrategia de control híbrido propuesta responde a las consideraciones teóricas que se postularon como motivación de esta metodología de control. Si bien los errores de seguimiento tanto en posición como en velocidad son considerablemente pequeños para el ejemplo de simulación mostrado, observamos que el menor índice de comportamiento<sup>10</sup>  $J_2$  se obtiene como no podía ser de otro modo para el control  $\mathcal{H}_2$  puro si bien el índice  $\gamma_e$  es relativamente alto. En el otro extremo tenemos el control  $\mathcal{H}_\infty$  puro con un valor para el índice  $J_2$  un orden de magnitud superior respecto al control  $\mathcal{H}_2$  puro, pero con un valor de  $\gamma_e$  la mitad que el de aquel. La estrategia de control híbrido propuesta permite obtener un equilibrio entre ambos comportamientos verificando de forma aproximada la relación de atenuación de perturbaciones impuesta en

<sup>10</sup>El índice de comportamiento  $J_2$  no se muestra en el caso del control por par calculado debido a que en su cálculo interviene la señal de *exceso de par*,  $u$ , que no tiene definición en esta estrategia de control.

el diseño ( $\gamma = 0,6$ ), con un índice de comportamiento  $J_2$  a medio camino entre las estrategias  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  puras.

- b) Incertidumbres de modelado

Consideremos a continuación otro caso de notable interés desde el punto de vista práctico, como son las *incertidumbres de modelado* del sistema controlado. Como se ha mencionado, una de las dificultades asociadas a las técnicas de control basado en modelo como las consideradas en este capítulo, es el conocimiento imperfecto del modelo matemático que describe el comportamiento del sistema controlado. Estas inexactitudes tienen su origen esencialmente en dos fuentes: por un lado *incertidumbres paramétricas* asociadas a las magnitudes físicas que describen el sistema, tales como masas, longitudes, etc, y por otro lado *incertidumbres de dinámicas no modeladas* que como su nombre indica tienen origen en aquellos fenómenos físicos no incluidos en la formulación matemática del problema, tal como pueden ser fenómenos de elasticidad de los enlaces mecánicos del sistemas, dinámicas de sensores o actuadores, etc.

Todas estas fuentes de incertidumbre alteran el comportamiento del sistema controlado respecto al ideal teórico basado en el modelo nominal del sistema y deben ser tenidas en cuenta para garantizar el buen comportamiento del control a lazo cerrado.

A continuación mostraremos resultados de simulación sobre el robot de dos grados de libertad considerado, tomando incertidumbres paramétricas aleatorias de hasta un 20 % en los valores correspondientes a masas y longitudes respecto al modelo nominal descrito al comienzo de este apartado.

Se mostrarán únicamente resultados gráficos sobre la estrategia de control híbrido, debido a que como veremos, los efectos de las incertidumbres de modelado sobre el sistema son considerablemente menos acusados que los obtenidos para las perturbaciones del apartado anterior, y resulta difícil apreciar diferencias de comportamiento esenciales entre las diferentes técnicas ensayadas.

- Control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$

La influencia de las incertidumbres de modelado (hasta un 20 % de incertidumbre paramétrica) sobre el robot de dos grados de libertad se muestra en la figura 5.10.

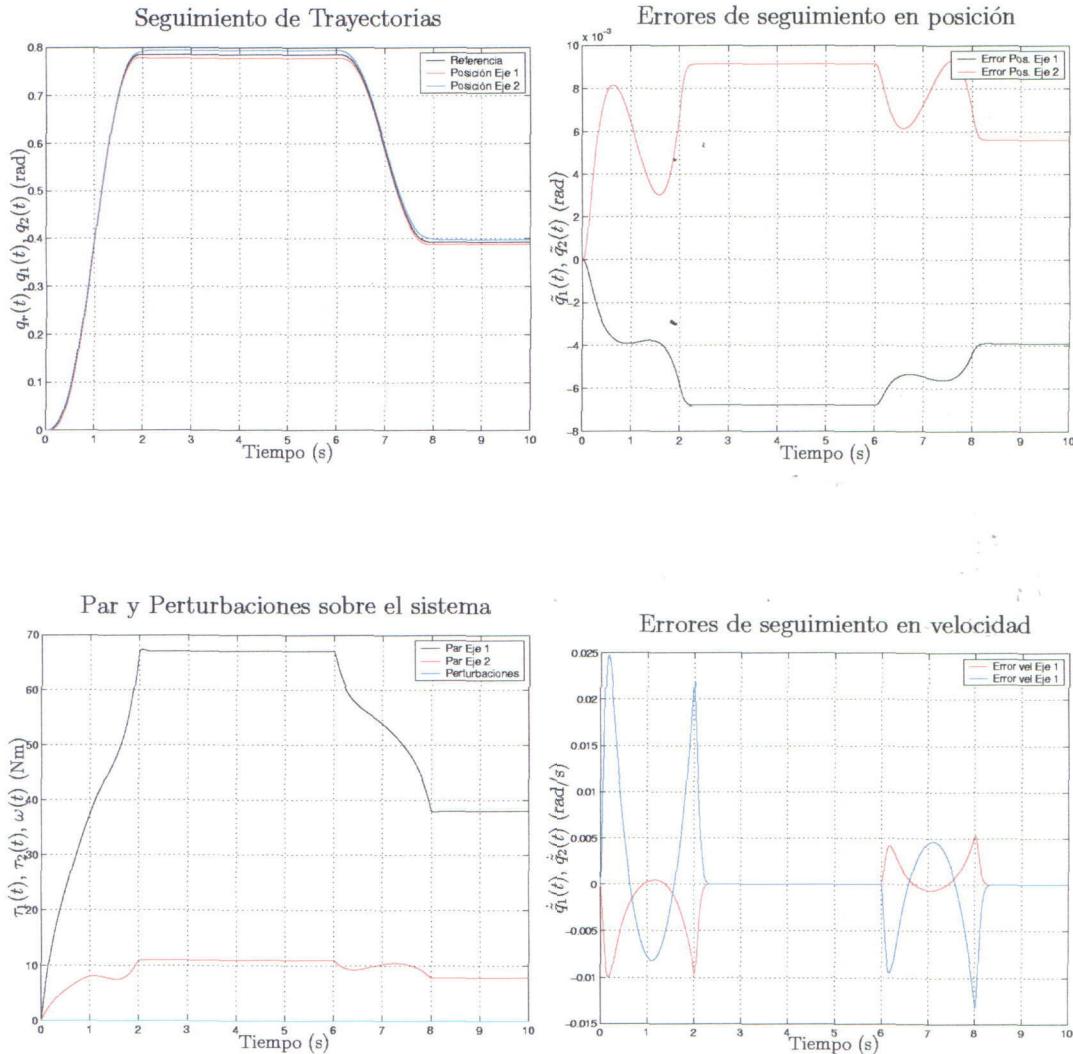


Figura 5.10: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  bajo incertidumbres de modelado

Al igual que hicimos en el caso anterior, en la tabla 5.2 se muestra el valor de los tres índices de comportamiento seleccionados, para las técnicas de control ensayadas.

Los resultados obtenidos, dejando a un lado las mejores características de seguimiento de trayectorias obtenidas en esta ocasión, permiten corroborar las conclusiones extraídas para el caso de rechazo de perturbaciones  $\mathcal{L}_2$ , pudiendo hacer por tanto razonamientos similares a los expuestos en aquella ocasión sobre las cifras de la tabla 5.2.

Control	Error ISE	$J_2$	$\gamma_e$
Control Par Calculado	$2,7 \times 10^{-5}$	-	1,21
Control $\mathcal{H}_2$	$6,1 \times 10^{-5}$	$8,2 \times 10^{-5}$	1,33
Control $\mathcal{H}_{\infty}$	$1,1 \times 10^{-5}$	$6,1 \times 10^{-4}$	0,70
Control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$	$3,2 \times 10^{-5}$	$1,1 \times 10^{-4}$	0,61

Cuadro 5.2: Tabla comparativa de comportamiento de diferentes técnicas ensayadas considerando incertidumbres de modelado.

### 5.5.2. Aplicación a un robot industrial

Como segunda aplicación, en esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar las distintas técnicas de control expuestas en este capítulo a un robot industrial.

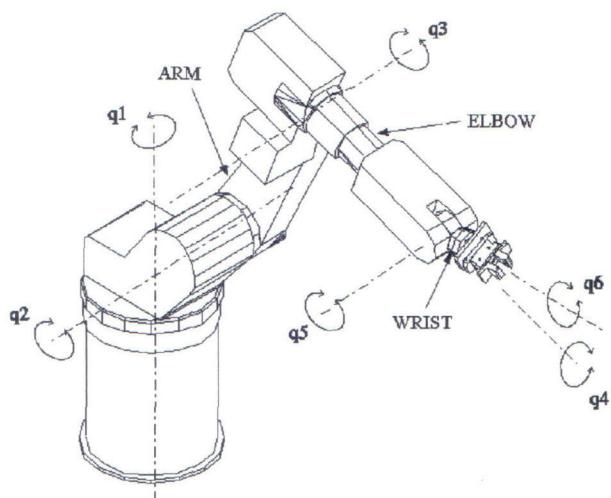
#### 5.5.2.1. Descripción del robot

El robot sobre el que centramos los ensayos es el robot industrial RM-10 ((System Robot. 1991)), cuya apariencia se muestra en la figura 5.11 junto con un esquema del mismo. El robot consiste en un brazo manipulador de seis grados de libertad, siendo todas sus articulaciones de revolución. El par de control en cada uno de sus ejes es proporcionado por un motor de corriente continua sin escobillas (*brushless*) de pequeña inercia.

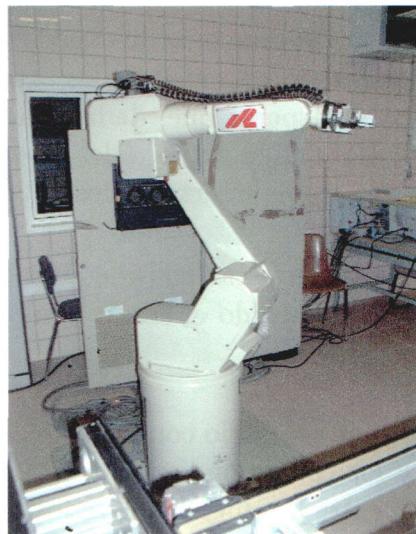
Estos motores son capaces de aplicar un par elevado en cada una de las articulaciones, permitiendo así un control donde se requiera grandes picos en los valores del par solicitado. Los motores están acoplados a los ejes del brazo manipulador a través de reductoras de engranajes, siendo por tanto un robot de accionamiento indirecto.

La medida de la posición del brazo manipulador se obtiene a partir de unos sensores inductivos de dos polos acoplados a cada motor. El robot no proporciona medida directa de la velocidad articular del robot, siendo necesario por tanto derivar esta medida numéricamente a partir de la medida de posición antes mencionada. Este aspecto resultará de especial relevancia en el capítulo 6, donde se muestra un estrategia de control  $\mathcal{H}_{\infty}$  que requiere únicamente de la medidas de posición articular.

Como idea representativa del peso del robot, en la tabla 5.3 se exponen las masas de cada uno de los eslabones del robot. Una descripción exhaustiva de las características mecánicas y dimensionales del robot puede encontrarse en (Perez, C. 1999).



(a) Esquema



(b) Fotografía

Figura 5.11: Robot manipulador RM-10.

Nº Eslabón	Masa (Kg)
1	38,65
2	51,80
3	84,10
4	33,89
5	7,36
6	5,00

Cuadro 5.3: Distribución de masas de los grados de libertad del Robot industrial RM10.

### 5.5.2.2. Resultados de simulación

Mostraremos a continuación algunos resultados de simulación, obtenidos sobre un modelo bien conocido y validado del robot RM10, para la estrategia de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  propuesta en este trabajo de Tesis.

En el robot RM10, como es por otro lado frecuente en muchos robots industriales, las características de posicionamiento y orientación del efecto final del robot están sensiblemente desacopladas, de modo que los tres primeros grados de libertad (en adelante el *cuerpo del robot*) permiten posicionar las coordenadas  $x, y, z$  del extremo del robot, y los tres últimos grados de libertad (en adelante la *muñeca del robot*), permiten fijar la orientación del efecto final.

Además, el cuerpo del robot engloba las articulaciones de mayor masa del robot y son las que se mueven a más altas velocidades. Por ello, son en estas articulaciones en las que los efectos asociados a posibles dinámicas no lineales son más acusadas, ya que

por ejemplo, los términos de fuerzas de Coriolis/Centrífugas son tanto mayores cuanto mayor es la masa y velocidad de las articulaciones involucradas en el movimiento. Por todo ello, es de esperar que, dadas las reducidas dimensiones y masas de los enlaces que forman parte de la muñeca del robot, no exista un acoplamiento dinámico sensible entre estos grados de libertad y los del cuerpo del robot.

De acuerdo con estas consideraciones, y para simplificar la representación de resultados, se ha centrado el control únicamente en las tres primeras articulaciones del robot.

Asimismo es necesario comentar que la presencia de reductoras entre los actuadores del robot y las correspondientes articulaciones, incide en un importante desacople de la dinámica entre los diferentes grados de libertad del sistema y una atenuación importante de los efectos no lineales asociados a la naturaleza dinámica del sistema. Estos efectos habrán de ser tenidos en cuenta a la hora de realizar una correcta interpretación de los resultados obtenidos.

Las trayectorias empleadas para la generación de movimientos en los ensayos que se muestran a continuación, han sido generadas empleando de nuevo un generador de trayectorias que emplea procedimientos estándar de interpolación mediante polinomios de quinto orden, adoptando como condiciones de contorno velocidades y aceleraciones nulas tanto en el origen como en el destino del movimiento. En cuanto a las posiciones de referencia iniciales, éstas han sido  $[ q_1 \ q_2 \ q_3 ] = [ 0 \ 0 \ 0 ]$  rad, mientras que las finales fueron  $[ q_1 \ q_2 \ q_3 ] = [ \frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{4} \ -\frac{\pi}{4} ]$  rad.

Adicionalmente, y para verificar el comportamiento de los distintos controladores y su habilidad para rechazar las perturbaciones que actúan sobre el sistema, se han introducido unos pares de distorsión aleatorios con saltos cada 0,5s con una amplitud máxima de 30 Nm.

Mostraremos resultados empleando las técnicas de control de par calculado clásico y control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Para hacer comparables los resultados, los controladores han sido sintonizados para exhibir tiempos de respuesta en el seguimiento de trayectorias similares.

Concretamente, en lo que se refiere al diseño del control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  se han tomado en esta ocasión como matrices de ponderación  $R_2 = 0,1I_{3 \times 3}$  y  $Q_2 = 2,5I_{9 \times 9}$  para el problema  $\mathcal{H}_2$ . Para el problema  $\mathcal{H}_\infty$  tomaremos  $R_\infty = 0,05I_{3 \times 3}$  y  $Q_\infty = I_{9 \times 9}$ , con un índice de atenuación de perturbaciones  $\gamma = 0,4$ . Estos índices así escogidos, conceden de nuevo más importancia a los errores de seguimiento que al esfuerzo de control  $u$ .

- Control de par calculado para el robot RM10

La gráfica 5.12 muestra los resultados del ensayo del controlador de par calculado sobre el robot.

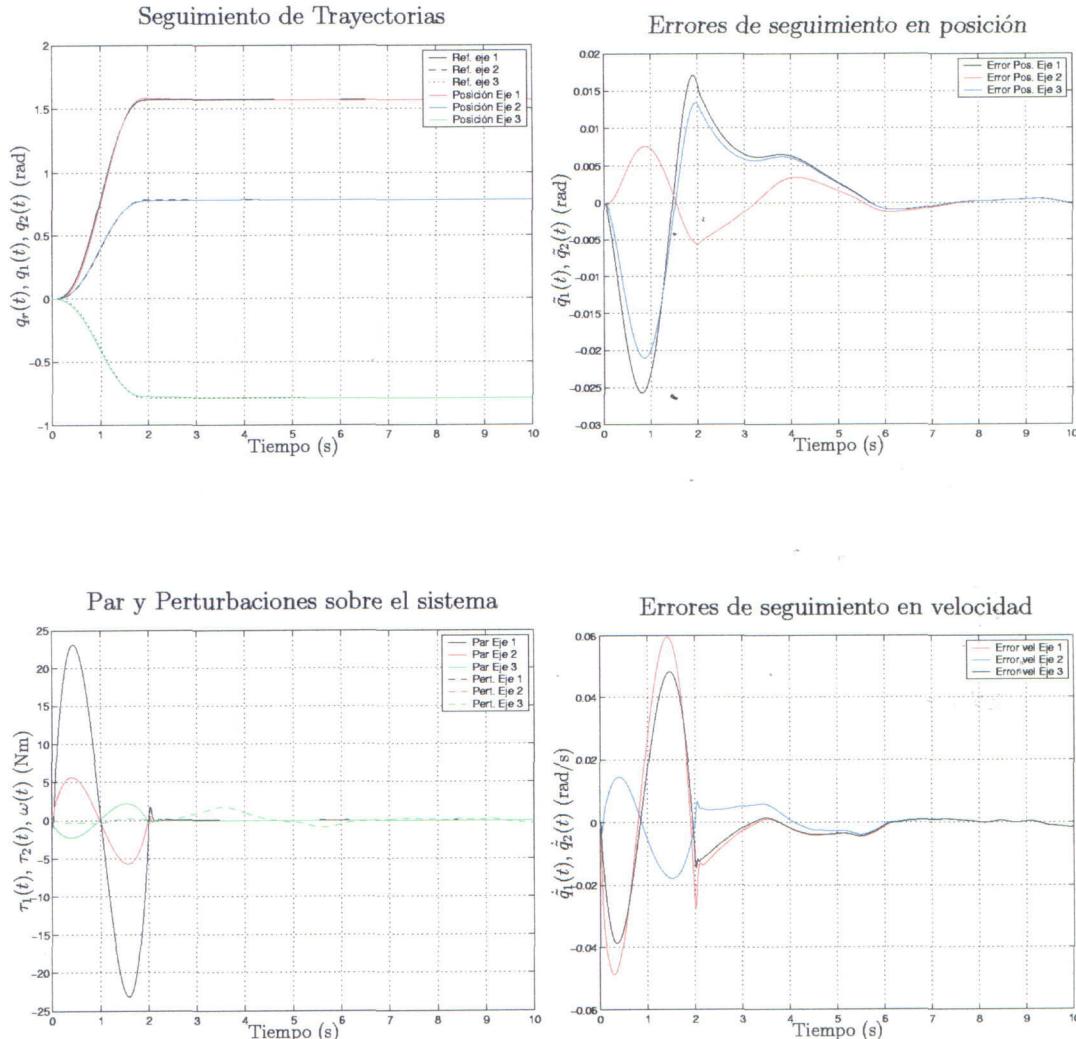


Figura 5.12: Comportamiento del control de par calculado para el robot RM10

- Control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para el robot RM10

La gráfica 5.13 muestra los resultados del ensayo del controlador híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  sobre el robot.

A la vista de los resultados anteriores comprobamos que el comportamiento de ambas estrategias de control es muy similar, no apreciándose ventajas significativas en esta ocasión para la metodología híbrida propuesta.

El motivo para este comportamiento podemos encontrarlo en la naturaleza del sistema dinámico controlado. Como se ha mencionado, el robot industrial RM10 es, como

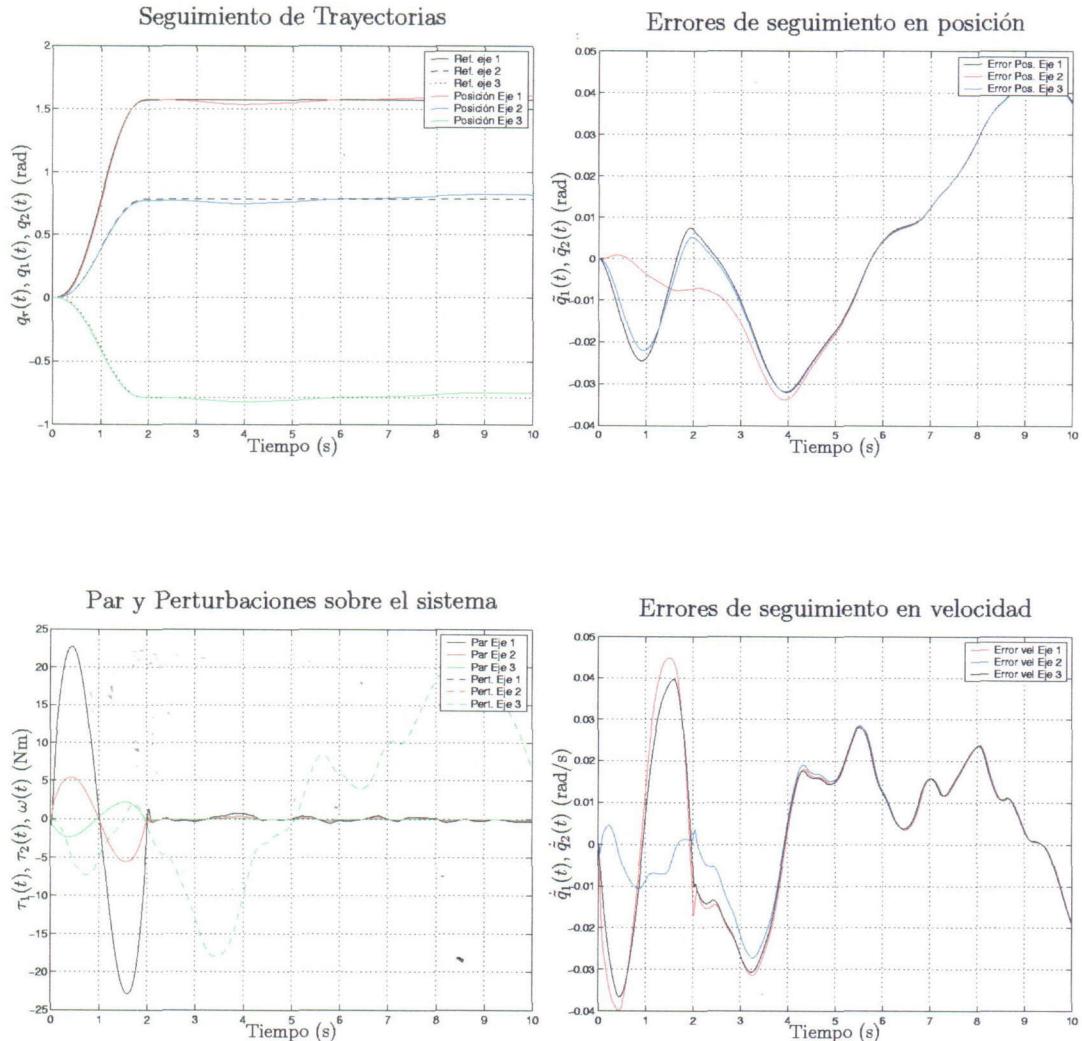


Figura 5.13: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para el robot RM10

la mayoría de los robots de su categoría, un robot de accionamiento indirecto, y por tanto presenta una dinámica fuertemente desacoplada. Las metodologías de control  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_{\infty}$  y su variante híbrida, explotan las características no lineales y acopladas del robot para mejorar el comportamiento del sistema especialmente en lo que a rechazo de perturbaciones se refiere. Ahora bien, si estas características no lineales están considerablemente atenuadas por la presencia de reductoras, poco o nada pueden aportar estas técnicas respecto a las metodologías de control lineales clásicas, que es exactamente lo que se observa en los ensayos.

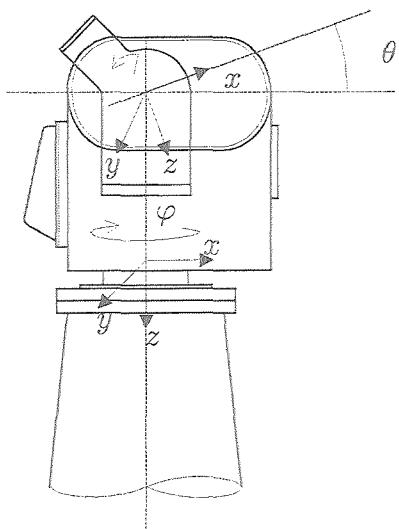
### 5.5.3. Aplicación a una plataforma giroestabilizada

Mostramos a continuación los resultados experimentales obtenidos en una plataforma giroestabilizada de dos grados de libertad, como se describe en la figura 5.14

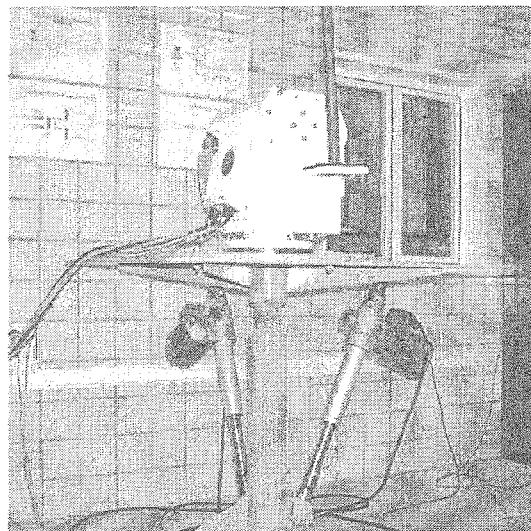
#### 5.5.3.1. Descripción de la plataforma

El sistema sobre el que se ensayaron en esta ocasión los controladores desarrollados en este capítulo es una plataforma de dos grados de libertad compuesta de dos elementos principales: La base que contiene dos motores de corriente continua sin escobillas que proporcionan el movimiento de rotación o *azimut* (ángulo  $\varphi$ ) de la plataforma, y la cabeza del pedestal que gira solidariamente con la base y está dotada de un movimiento adicional de *elevación* (ángulo  $\theta$ ) según un eje perpendicular al movimiento de azimut.

La cabeza del pedestal está además dotada de un conjunto de sensores iniciales consistente en dos giróscopos ópticos orientados de forma que puedan medir de modo incremental la variación de los dos grados de libertad del pedestal anteriormente descritos. La disposición de los elementos mecánicos y de sensorización así descritos, sugieren una aplicación de este sistema al seguimiento o regulación en coordenadas iniciales de la orientación de un elemento solidario a la cabeza del pedestal. En concreto, la plataforma está diseñada originalmente para ser instalada a bordo de barcos u otros medios de transporte, de modo que pueda fijarse de forma solidaria a la cabeza del pedestal una antena, cámara de observación u otro dispositivo técnico para el que se requiera fijar una orientación determinada. El objetivo de control más habitual en estas aplicaciones consiste por tanto en regular la elevación y azimut del pedestal de modo que éstos permanezcan fijos respecto a un sistema de referencia inercial con independencia de los movimientos del vehículo sobre el que vaya instalado el sistema.



(a) Esquema



(b) Fotografía

Figura 5.14: Representación esquemática de la plataforma giroestabilizada.

Este objetivo de control puede ser fácilmente reinterpretado en términos de un control de rechazo de perturbaciones, en el que el objetivo prioritario del control es atenuar en la mayor medida posible el efecto de las perturbaciones externas (movimientos del vehículo) sobre la orientación de la antena u otro dispositivo orientable.

### 5.5.3.2. Modelo de la Plataforma

Las ecuaciones de movimiento de la plataforma pueden obtenerse fácilmente a partir de la teoría general de mecánica Lagrangiana, conocidas las expresiones correspondientes a las energía cinéticas y potenciales del sistema. Es fácil comprobar, que con la disposición mecánica descrita en el apartado anterior, la expresión correspondiente a la energía cinética del pedestal viene dada por la expresión

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\varphi} \cdot \dot{\theta}) \begin{pmatrix} \Gamma(\theta) & 0 \\ 0 & I_{yy2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

donde

$$\Gamma(\theta) = I_{zz1} + I_{xx2} \operatorname{sen}^2 \theta + I_{zz2} \operatorname{cos}^2 \theta$$

donde  $I_{zz1}$  es el momento de inercia de la base con respecto al eje z, mientras que  $I_{xx2}$ ,  $I_{yy2}$ ,  $I_{zz2}$  representan los momentos de inercia respecto a los ejes x, y, y z respectivamente.

La plataforma presenta por construcción una compensación interna mediante resortes del par gravitatorio que afecta al eje de elevación. Es decir, en ausencia de cualquier par en el eje de elevación, cualquier posición es una posición de equilibrio del sistema. Esta solución mecánica es frecuente en este tipo de sistemas, ya que contribuye a reducir el tamaño de los motores en la fase de diseño y el consumo de éstos en la fase de explotación del sistema. De este modo, la energía potencial es invariante en el tiempo y desaparece de la formulación de las ecuaciones del sistema. Este hecho lleva sin embargo aparejado una mayor inexactitud en el modelado del sistema, ya que la compensación de par por medio de resortes introduce incertidumbres en el par efectivo que se está aplicando al sistema.

A la vista de la discusión anterior, y dado que podemos tomar sin pérdida de generalidad la energía potencial del sistema a lo largo de la evolución dinámica del mismo como  $V = 0$ , tendremos que la función *Lagrangiana* (y por extensión la *Hamiltoniana*) coincide con la expresión para la energía cinética en (5.75).

De este modo, aplicando la identidad en (4.3), podemos obtener las ecuaciones dinámicas del sistema como:

$$\begin{aligned}\tau_o &= \ddot{\varphi}(I_{zz1} + \sin^2\theta I_{xx2} + \cos^2\theta I_{zz2}) + \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta(I_{xx2} - I_{zz2}) \\ \tau_e &= \ddot{\theta}I_{yy2} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\sin 2\theta(I_{xx2} - I_{zz2})\end{aligned}$$

donde  $\tau_e$  y  $\tau_o$  representan respectivamente los *pares de elevación y orientación* respectivamente. Si, para completar el modelo, se agrega a estas ecuaciones amortiguamiento mecánico, por ejemplo por efecto de la fricción viscosa de las articulaciones, se convierten en:

$$\begin{aligned}\tau_o &= \ddot{\varphi}(I_{zz1} + \sin^2\theta I_{xx2} + \cos^2\theta I_{zz2}) + \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta(I_{xx2} - I_{zz2}) + b_1\dot{\varphi} \\ \tau_e &= \ddot{\theta}I_{yy2} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\sin 2\theta(I_{xx2} - I_{zz2}) + b_2\dot{\theta}\end{aligned}$$

donde  $b_1$  y  $b_2$  representan respectivamente los *coeficientes de amortiguamiento viscoso* de los ejes de orientación y elevación. Estas ecuaciones pueden expresarse también en la forma estándar (4.6)

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) = \tau + \omega \quad (5.76)$$

para obtener las matrices de Inercia y Coriolis-Centrífugos (los términos gravitatorios se han anulado) como

$$\begin{aligned}M(\theta) &= \begin{pmatrix} \Gamma(\theta) & 0 \\ 0 & I_{yy2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \\ C(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &= \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta(I_{xx2} - I_{zz2}) \\ -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\sin 2\theta(I_{xx2} - I_{zz2}) \end{pmatrix} & \tau &= \begin{pmatrix} \tau_o \\ \tau_e \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Esta formulación será finalmente la empleada para la consideración del modelo dinámico de la plataforma en los ensayos que se presentan a continuación.

### 5.5.3.3. Resultados experimentales

Mostraremos a continuación los resultados derivados de la implementación de la metodología de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  sobre la plataforma giroestabilizada descrita en el apartado anterior.

Tomaremos las matrices de ponderación asociadas a los índices de comportamiento  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_{\infty}$  como  $R_2 = 0,1I_{2 \times 2}$  y  $Q_2 = 1,5I_{6 \times 6}$  y  $R_{\infty} = 0,6I_{2 \times 2}$  y  $Q_{\infty} = I_{6 \times 6}$ , con un índice de atenuación de perturbaciones  $\gamma = 0,6$ .

Es necesario comentar que la plataforma giroestabilizada presenta fenómenos de fricción de manera acusada tanto en el eje de elevación como en el de orientación. Por este motivo, y para evitar que los fenómenos de fricción no modelados en el diseño del control, perturben en exceso los experimentos, se ha incluido un compensador de fricción de Coulomb y viscosa para cada grado de libertad.

- Resultados sin perturbaciones

En la gráfica 5.15 pueden verse los resultados obtenidos sobre el eje de elevación para el sistema considerando que no hay perturbaciones externas actuando sobre el sistema. Del mismo modo, la gráfica 5.16 muestra los resultados sobre el eje de orientación, para el que se obtienen resultados similares.

Podemos observar en estos resultados que el seguimiento de trayectorias es notable en ambos ejes presentando igualmente buenas características de rechazo de perturbaciones.

Podemos observar asimismo el efecto del compensador de fricción especialmente en los puntos de transición de velocidad cero, ya que es aquí donde el pico de par de compensación de la fricción estática se vuelve más evidente.

- Resultados con perturbaciones

La metodología de control propuesta resulta especialmente interesante para el caso de control con presencia de perturbaciones externas. Para realizar los ensayos que se muestran a continuación, se han aplicado pares de perturbación aditivos al par de control, de modo que representen hasta un 15 % del par de control.

Las figuras 5.17 y 5.18 muestran los resultados obtenidos para los ejes de elevación y orientación respectivamente, donde podemos observar un comportamiento de rechazo de perturbaciones notable, si se tiene en cuenta los problemas asociados a una imperfecta compensación de los efectos de fricción.

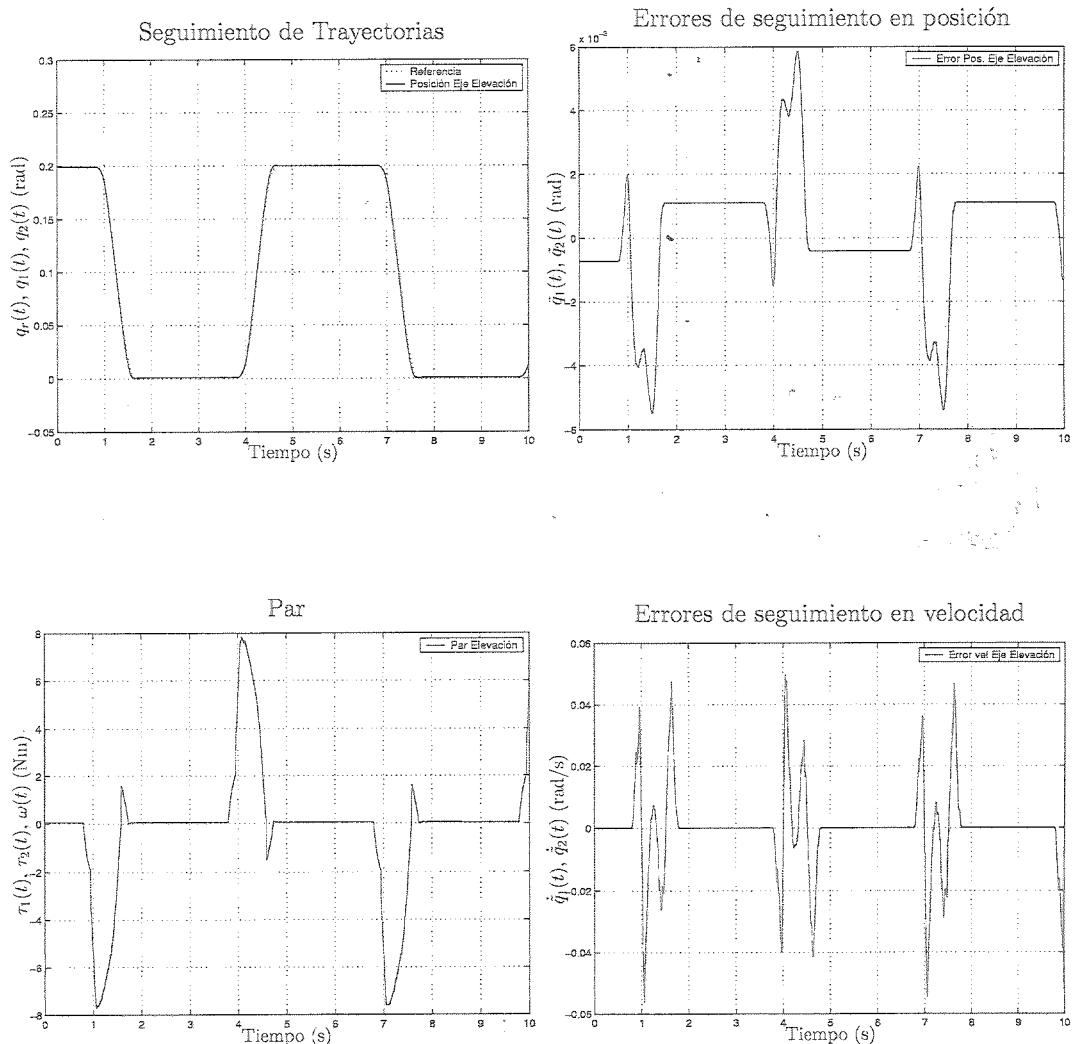


Figura 5.15: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  para el eje de elevación

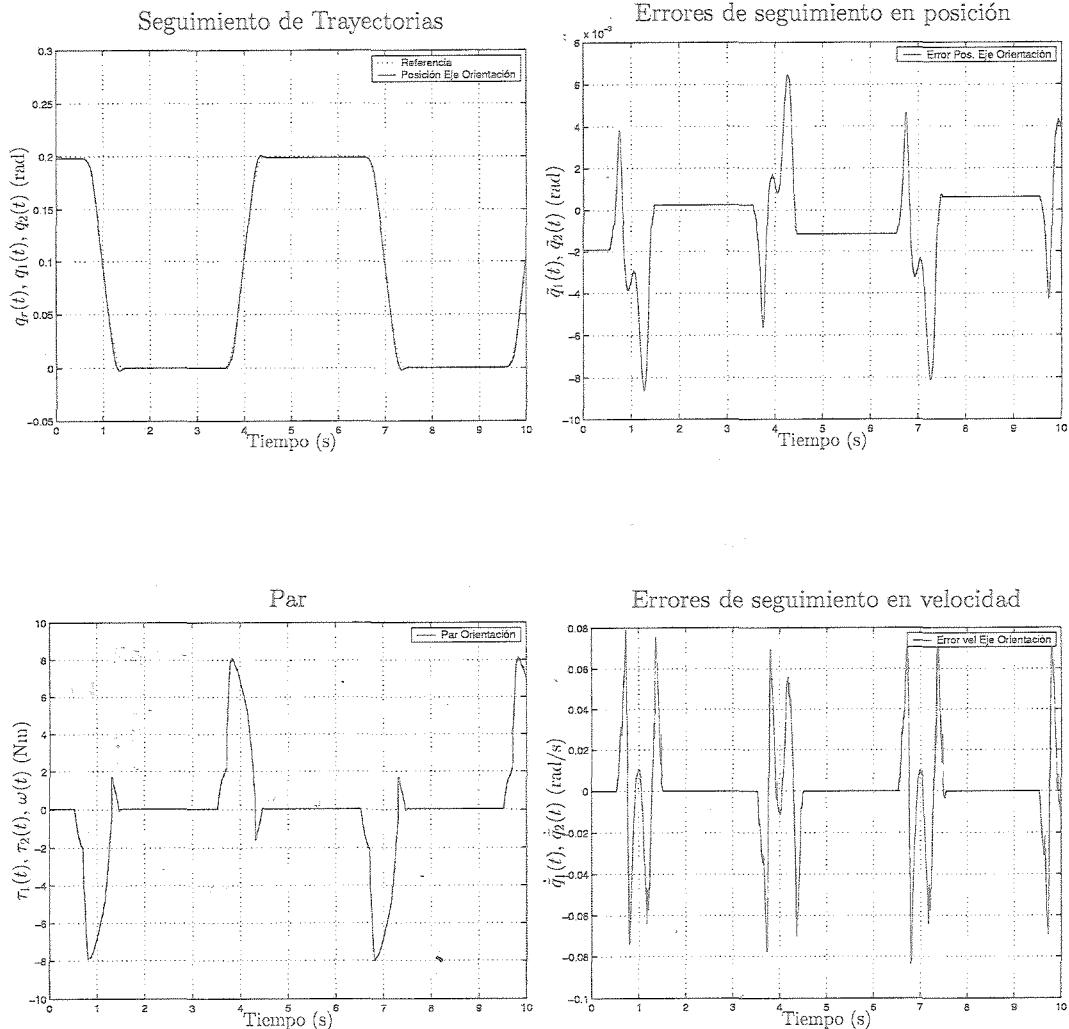


Figura 5.16: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  para el eje de orientación

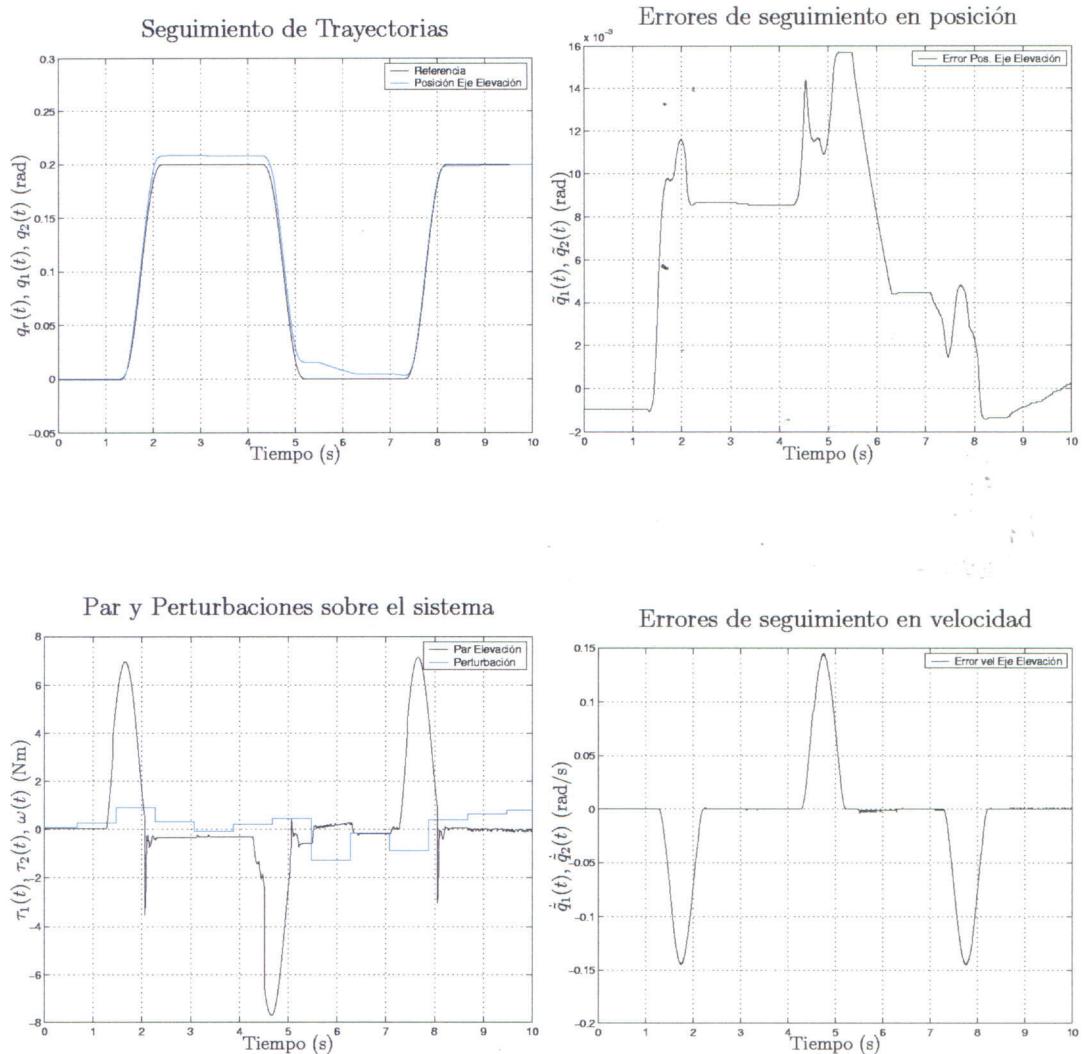


Figura 5.17: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para el eje de elevación con perturbaciones.

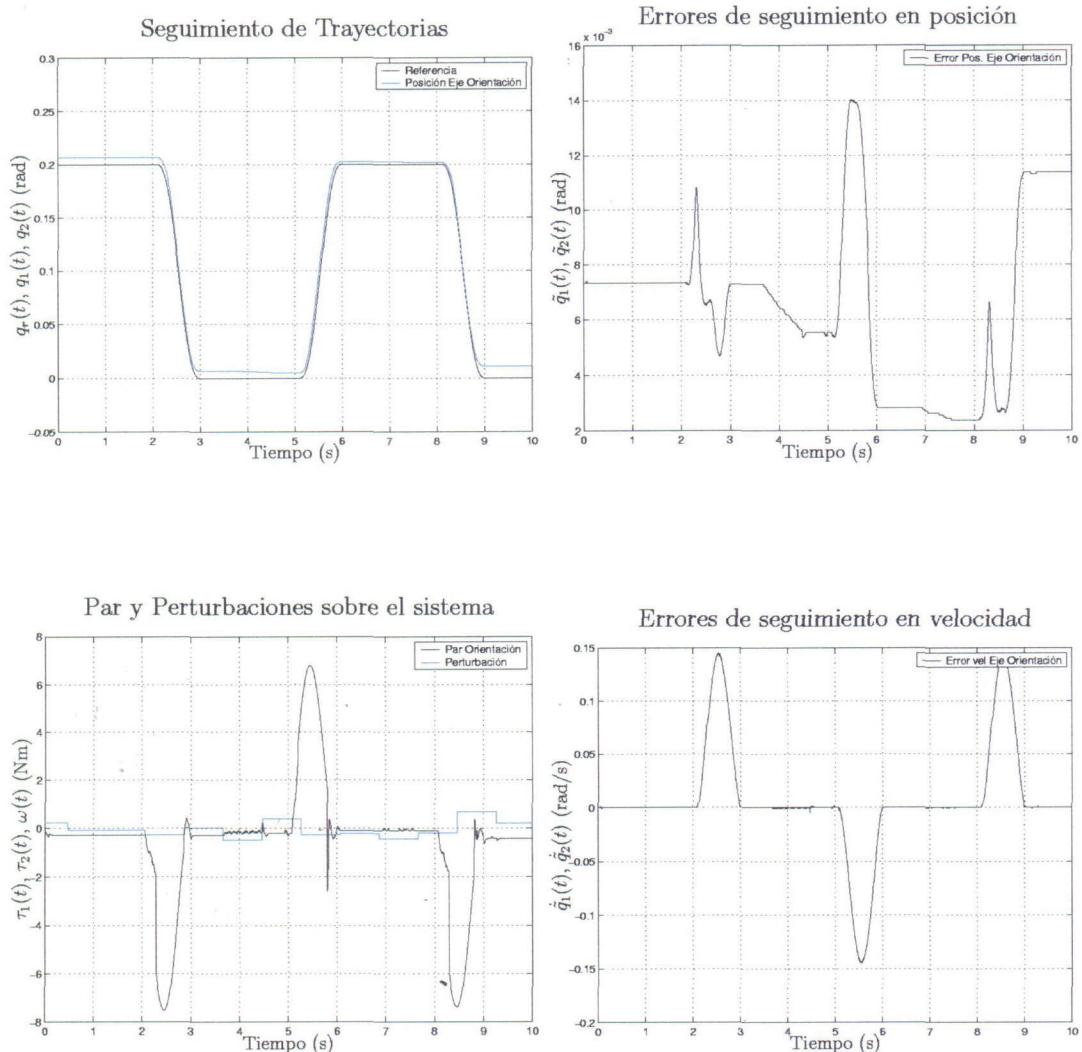


Figura 5.18: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para el eje de orientación con perturbaciones.

# Capítulo 6

## Contribuciones al Control $\mathcal{H}_\infty$ no lineal mediante realimentación de la salida

### 6.1. Introducción

Un aspecto especialmente relevante en el control de sistemas electromecánicos, es la accesibilidad de las señales involucradas en el control. Es bien sabido en mecánica clásica, que para determinar sin ambigüedades la evolución futura de un sistema EL, es necesario conocer en el instante considerado el conjunto de posiciones y velocidades generalizadas que describen el sistema.

Son por tanto las posiciones y la velocidades generalizadas (o una combinación de ellas) el conjunto mínimo de variables que forman parte del vector de estados de un sistema EL.

Como continuación de los resultados expuestos en el capítulo anterior, en el presente capítulo se describe una aproximación al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ - $\mathcal{H}_2$  no lineal mediante *realimentación de la salida* (*measurement feedback*<sup>1</sup> en su denominación en inglés) del

---

<sup>1</sup>Estrictamente hablando el término *measurement feedback*, traducible como *realimentación de me-*

sistema. Tal como mencionamos en el capítulo 3, entenderemos por *salida* el conjunto magnitudes accesibles y medibles susceptibles de ser empleadas como información para controlar el sistema.

La motivación de esta aproximación al problema viene dada por el hecho de que, con frecuencia los sistemas electromecánicos de uso industrial incorporan únicamente sensores de precisión para determinar la posición de los grados de libertad del sistema, debido al considerable ahorro coste, peso y volumen que ello involucra. La medida de velocidad para la realimentación no es directamente accesible en este tipo de dispositivos. Esta medida es sin embargo necesaria incluso para la implementación de las más elementales técnicas de control (pensemos en un control PD lineal), y por supuesto imprescindible para la implementación de leyes de control de realimentación de estados que proporcionan la mayoría de métodos de diseño no lineal avanzados.

La solución más común a este problema suele consistir en la estimación de la medida de velocidad a partir de las medidas de posición recurriendo a métodos de derivación numérica o similares. Estas estimaciones sin embargo suelen incorporar una cantidad considerable de ruidos e imprecisiones de la medida que deterioran el comportamiento de las estrategias de control implementadas (Bélanger 1992). Otro efecto a tener en cuenta es la cuantización inherente a las medidas digitales de los *encoders* (*codificadores digitales*) de posición, que pueden inducir oscilaciones no deseadas en el comportamiento del sistema o incluso provocar la inestabilización del sistema controlado (Bélanger 1992).

Además, esta metodología de estimación no está integrada dentro de la filosofía de control del sistema, lo cual no permite establecer resultados acerca de la estabilidad o comportamiento del sistema como resultado de la aproximación inherente a la estimación de velocidad. O dicho de otro modo, tener una medida de velocidad que se asemeje a la real, no garantiza que una cierta ley de control de realimentación de estados funcione correctamente al incorporar la medida de velocidad reconstruida al vector de estados.

Es más, en los contados casos en los que los sistemas electromecánicos cuentan con tacómetros para medir de forma directa la velocidad, éstos, por su tecnología de fabricación, suelen proporcionar también señales muy ruidosas que requieren ser filtradas como paso previo a su uso como señal de realimentación. La incorporación de estos filtros en la cadena de control es un asunto delicado, ya que añaden dinámicas adicionales en la realimentación que pueden degradar notablemente el comportamiento del sistema. Las soluciones distan por tanto de ser del todo satisfactorias.

---

didas, hace referencia a un concepto ligeramente más general que la *realimentación de la salida* recogida en este apartado, ya que aquél incluye implícitamente la posibilidad de realizar el control con información parcial de la salida o magnitudes medibles del sistema y no con el vector de medidas completo.

Para tratar de proporcionar una solución adecuada a este problema, en este capítulo se plantea una estructura de observador de vector de estados que permite la aplicación de una ley de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal tomando únicamente medidas de posición del sistema. Esta estructura de observador se haya embebida en la propia formulación del control de modo que podemos garantizar, supuesto un nivel moderado de incertidumbres en el modelo del sistema, la estabilidad asintótica global del conjunto verificando los niveles de atenuación  $L_2$  requeridos por la filosofía de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

## 6.2. Una breve perspectiva histórica

El problema de diseño de observadores para sistemas electromecánicos es considerablemente complejo debido a la estructura no lineal y acoplada de la dinámica asociada a los mismos.

Son muchos los intentos que ha habido en este sentido. Algunos resultados relevantes acerca del diseño de observadores no lineales para robótica podemos encontrarlos en (Krener, A.J. and Isidori, A. 1983, Walcott, B.L. and Corless, M.J. and Zak, S.H. 1987) o empleando la aproximación de modos de deslizantes en (Slotine, J.J.E. and Hedrick, J.K. and Misawa, E.A. 1987, Canudas de Wit and Fixot 1991). La mayoría de estas aproximaciones proporcionan condiciones bajo las cuales el sistema original puede ser transformado mediante un cambio de coordenadas no lineales en ciertas formas canónicas en las que resulta simple el diseño de un observador para el sistema, recurriendo por ejemplo a estrategias inspiradas en el diseño de observadores lineales. Estas condiciones de transformación sin embargo no se verifican en el caso de sistemas robóticos o sistemas EL en general.

Algunas condiciones menos restrictivas pueden obtenerse si se considera únicamente la estimación de estados en torno a un punto de operación (Baumann, W.T. and Rugh, W.J. 1986, Nicosia, S. and Tomei, P. and Tornambe, A. 1989). La validez de estas estimaciones está limitada a un entorno del punto de operación considerado, y lo que es peor, se requieren complejas transformaciones matemáticas para recuperar el vector de estados estimado en coordenadas físicas.

Estos observadores son en cierto modo universales desde el punto de vista de que son diseñados sin tener en cuenta la estrategia de control bajo la que se implementaran. Sin embargo, tener un observador que reconstruya asintóticamente el estado del sistema, no garantiza que una cierta ley de control de realimentación de estados funcione correctamente al incorporar el estado estimado a la ley de control.

Este problema de estabilidad ha motivado la aparición de estrategias de control combinado *observador-controlador* para robótica empleando únicamente la medida de

posición. Por ejemplo en (Canudas de Wit, C. and Fixot, N. and Åström, K.J. 1992) se propone una estructura modificada del clásico par calculado que incorpora un observador no lineal embebido en el diseño del control. En (Tomei, P. 1989, Nicosia, S. and Tomei, P. 1990) se presenta una estructura de observador no lineal para robots de articulaciones flexibles que tiene en cuenta la dinámica del observador en la estructura de control, proporcionando resultados de estabilidad para el conjunto, supuesto que las ganancias del observador satisfacen ciertas restricciones matemáticas. Otra ventaja de esta aproximación, es que las magnitudes observadas vienen dadas directamente en coordenadas físicas, y no es necesario por tanto recurrir complejas transformaciones matemáticas para reconstruir el estado del sistema. La principal debilidad de este enfoque reside en el hecho de que si bien, la estabilidad del conjunto queda garantizada, no hay ninguna medida que permita fijar el comportamiento o robustez del conjunto ya que se asume un conocimiento perfecto del modelo del sistema.

Más recientemente han surgido otras aproximaciones relevantes encuadradas dentro del formalismo de la pasividad (Ortega, R. and Spong, M.W. 1993). La idea que subyace en esta filosofía de control es el dar forma a la función de energía del sistema, de modo que el objetivo de control se satisface. Esto se consigue construyendo un controlador que la función de energía deseada para el lazo cerrado y añadir amortiguamiento mediante la realimentación de velocidad para lograr la estabilización asintótica del sistema. Ya que con este procedimiento se preserva las propiedades de pasividad del sistema, la metodología ha sido designada como *control de pasividad*. Basándose en esta filosofía, Takegaki y Arimoto (Takegaki, M. and Arimoto, S. 1981) proponen una elegante solución de realimentación de estados para el problema de regulación en el control de posición de robots manipuladores, solución que fue extendida para el problema de seguimiento de trayectorias por Paden y Panja en (Paden, B. and Panja, R. 1988).

La solución de realimentación de la salida basada en pasividad, que incorpora una estructura de observador no lineal, viene de la mano de Berguis y Nijmeijer en (Berguis, H. and Nijmeijer, H. 1992, Berguis, H. and Nijmeijer, H. 1993, Berguis, H. and Nijmeijer, H. 1994). En estos trabajos se modifica la estructura de realimentación de estados de Paden y Panja en (Paden, B. and Panja, R. 1988) para contemplar el caso de realimentación de la salida. Otra idea interesante puesta de manifiesto por Berghuis es la necesidad de sintonizar apropiadamente el controlador y el observador del sistema para obtener comportamientos apropiados.

Otras aproximaciones más recientes el problema abordan el diseño de observadores mediante técnicas recursivas (Shim and Seo 2000, Skjetne and Shim 2001) o haciendo uso del *principio de separación* expuesto en (Loria and Panteley 1990), perfeccionado en (Aamo *et al.* 2001, Besançon 2000).

En el caso que nos ocupa, el diseño de estrategias de control  $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$  para sistemas

EL, mediante realimentación de la salida, podemos encontrar diseños que explotan la formulación  $\mathcal{H}_\infty$  para el diseño de observadores no lineales (Reif *et al.* 1999, Kiriakidis 2002) o aplicaciones en el marco lineal (Souza *et al.* 1993) de esta misma formulación, si bien son escasas las aplicaciones de diseño integrado *sistema + observador* en el marco del control.

En este capítulo presentamos un diseño de observador no lineal para sistemas EL empleando únicamente medidas de posición de los grados de libertad del sistema. El diseño del observador está integrado en la dinámica del sistema, de modo que el conjunto global *sistema + observador* exhibe estabilidad asintótica garantizando un nivel preestablecido  $\gamma$  de rechazo de perturbaciones como es consustancial con la metodología  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 6.3. Formulación general del problema

Consideremos un sistema dinámico no lineal afín en la actuación de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u \quad (6.1)$$

$$z = h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u \quad (6.2)$$

$$y = h_2(x, t) \quad (6.3)$$

donde la primera ecuación (6.1), describe la dinámica de planta no lineal en  $\mathbb{R}^n$  con vector de estados  $x(t)$  sobre la que actuamos con señal de control  $u(t) \in \mathbb{R}^{m_u}$ . Además, tenemos un término de perturbaciones aditivo representado por  $\omega \in \mathbb{R}^{m_\omega}$ .

La segunda ecuación, (6.2), define una señal de medida del comportamiento del sistema,  $z \in \mathbb{R}^{m_z}$ , como se describirá más adelante, y (6.3) define el término de *señales accesibles*,  $y \in \mathbb{R}^{m_p}$ , del sistema (la salida).

Adicionalmente supondremos que se verifican ciertas condiciones técnicas: asumimos sin pérdida de generalidad que  $x = 0$  constituye un punto de equilibrio para el sistema no lineal (6.1) en ausencia de perturbaciones y señal de control, es decir,  $f(0, t) = 0$ ,  $h_1(0, t) = 0$  y  $h_2(0, t) = 0$ . Del mismo modo supondremos que las funciones  $f(x, t)$ ,  $g_1(x, t)$ ,  $g_2(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$  y  $k_{12}(x, t)$  son funciones suficientemente suaves<sup>2</sup>.

En el problema de realimentación de la salida planteado, la señal de control  $u(x, t)$ , se genera como función de las señales accesibles del sistema,  $y(t) \in L_2[0, t]$ , y la propia señal de control  $u(x, t) \in L_2[0, t]$ , extendidas a todo el pasado dinámico anterior al instante de tiempo considerado,  $t$ .

<sup>2</sup>Entendemos como *suficientemente suaves*, funciones de clase  $C^k$ , para cierto  $k \geq 1$

En particular consideraremos una estructura dinámica para el controlador de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta(\xi, y) \\ u &= \theta(\xi)\end{aligned}\tag{6.4}$$

donde  $\xi$  representa el estado del controlador definido en un entorno  $\Xi$  del origen en  $\mathbb{R}^v$  y  $\eta : \Xi \times \mathbb{R}^{m_p} \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$ ,  $\theta : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^{m_u}$  son funciones suficientemente suaves. Adicionalmente, se satisface  $\eta(0, 0) = 0$  y  $\theta(0) = 0$ , condiciones que garantizan que el sistema tiene un punto de equilibrio en el origen.

Además, con el propósito simplificar el análisis y diseño del control propuesto, imponemos las siguientes condiciones <sup>3</sup> en la estructura de las funciones que describen el sistema:

- (H1)  $h_1^T(x, t)k_{12}(x, t) = 0$
- (H2)  $k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t) = R = R^T \geq 0$
- (H3) El par  $\{f(x, t), h_1(x, t)\}$  es localmente detectable en el origen.

Con estas definiciones, el objetivo de control que proponemos resolver en este apartado puede expresarse como:

*Dado un sistema dinámico (6.1)-(6.3), obtener una ley de realimentación de la salida, o equivalentemente un par de funciones  $\eta$  y  $\theta$  como en (6.4), que estabilice localmente asintóticamente el sistema en el punto de equilibrio  $(x, \xi) = (0, 0)$ , satisfaciendo una relación de atenuación  $L_2$  de perturbaciones,  $\omega(t)$ , sobre una variable de comportamiento  $z$ .*

La atenuación mencionada se entenderá como *atenuación en norma-2* tal como se definió en el capítulo 3, es decir, se verifica la relación:

$$J_\infty(u, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \|z(x, u, t)\|^2 dt - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt \leq 0\tag{6.5}$$

A continuación se exponen una serie de resultados que presentan condiciones suficientes para el planteamiento de una solución (funciones  $\eta$  y  $\theta$ ) para el problema de realimentación de la salida presentado en este capítulo.

---

<sup>3</sup>Relajar estas condiciones es perfectamente posible, si bien el álgebra involucrada complica en exceso las expresiones y no será considerado en este trabajo de Tesis.

La estructura de los resultados que se describen a continuación es la siguiente: En primer lugar, y como paso previo a la solución del problema planteado, el *teorema 6.1* muestra un conocido resultado que proporciona una condición suficiente para formular la solución del problema planteado en términos de realimentación del estado del sistema, es decir, supuesto el vector de estados completo es accesible. A continuación, el teorema 6.2 presenta como contribución fundamental de este capítulo una estructura para el control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida, proporcionando condiciones suficientes para la existencia de dicha solución. Posteriormente el apartado 6.4 muestra una particularización de estos resultados para el caso de sistemas EL completamente actuados, que constituyen el principal interés de este trabajo de Tesis.

### 6.3.1. Solución para el caso de estado accesible

**Teorema 6.1 (Control  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentación de estados).** *Dada una función escalar semidefinida positiva,  $V(x, t)$ , definida en un entorno de  $x = 0$  tal que se satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) - \frac{1}{2} u^{*T}(x, t) R u^*(x, t) + \frac{\gamma^2}{2} \omega^{*T}(x, t) \omega^*(x, t) + \\ + \frac{1}{2} h_1^T(x, t) h_1(x, t) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde

$$\omega^*(x, t) = \frac{1}{\gamma^2} g_1^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} \quad u^*(x, t) = -R^{-1} g_2^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} \quad (6.7)$$

entonces la ley de realimentación estados  $u(x, t) = u^*(x, t)$  estabiliza el sistema (6.1)-(6.3) verificándose la relación de atenuación  $\omega \mapsto z$  en (6.5)

#### Demostración:

La demostración del teorema, en sus diferentes versiones, es bastante bien conocida en la literatura (ver por ejemplo (Van der Schaft 1996)). Por completitud, daremos una breve descripción de la misma a continuación

La desigualdad (5.30) puede reescribirse empleando las definiciones (6.7) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} (f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u) + \\ + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} g_1(x, t) g_1^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} - \frac{1}{2} (u^{*T}(x, t) R u^*(x, t) + h_1^T(x, t) h_1(x, t)) \leq 0 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} (f(x, t) + g_1(x, t)\omega + g_2(x, t)u) \leq \frac{1}{2} \|z(x, t)\|^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 \|\omega^*\|^2 \quad (6.8)$$

expresión que muestra que la función escalar  $V(x, t) \geq 0$  es una *función de almacenamiento* con *tasa de aporte*  $\gamma^2\|\omega\|^2 - \|z(x, t)\|^2$  (ganancia  $L_2$ ), para el bucle cerrado de (6.1) con  $u(x, t) = u^*(x, t)$ .

La estabilidad del sistema a lazo cerrado (libre de perturbaciones,  $\omega(t) = 0$ ), se comprueba fácilmente tomando  $V(x, t)$  como función de Lyapunov, ya que a partir de la expresión (6.8), comprobamos que  $\dot{V}(x, t) = -\|z(x, t)\|^2 \leq 0$  y por tanto el sistema es estable.

q.o.d.

El teorema anterior proporciona condiciones suficientes para construir una ley de control mediante realimentación de estados que estabilice el sistema (6.1) verificando la relación de disipación (6.5).

En el caso que nos ocupa en este capítulo, en el que el vector de estados no es completamente accesible, la ley de control anterior no es directamente aplicable. El resultado que se muestra a continuación permite obtener condiciones suficientes para la existencia de un control mediante realimentación parcial del vector de estados, o realimentación de la salida.

### 6.3.2. Solución general mediante realimentación de la salida

En este apartado emplearemos el *Principio de Equivalencia Cierta* descrito en la introducción de este capítulo, para obtener condiciones suficientes para la existencia de un control mediante realimentación parcial del vector de estados, o realimentación de la salida.

La estructura de control propuesta, se estructura por tanto como un *observador de vector de estados* no lineal, más una ley de control expresada en términos del estado estimado y la salida del sistema.

La notación que emplearemos en este apartado resulta bastante estándar en el contexto que acabamos de introducir: Definiremos el *error de observación de la salida* como  $\tilde{y} = y - \hat{y}$ , donde  $y$  es la salida medida del sistema según la expresión (6.3), y  $\hat{y}$  es la estimación de dicha salida proporcionada por el observador. Del mismo modo, consideraremos que la dinámica del sistema a controlar está expresado en términos de un vector de estados,  $x$ , para el cual el observador proporciona una *estimación del vector de estados* que denotaremos,  $\hat{x}$ . De este modo, la *dinámica de error del observador de estados* vendrá dada por un conjunto de variables de estado  $\xi = x - \hat{x}$ .

Con estas definiciones, e inspirados en la formulación algo más restrictiva dada en (Isidori and Astolfi 1992a), procedemos a presentar el siguiente resultado que constituye la principal contribución de este capítulo, junto con la posterior aplicación a sistemas Euler-Lagrange.

**Teorema 6.2 (Estructura del control  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentación de salida).** *Sea un sistema dinámico de la forma (6.1)-(6.3), y sean las funciones escalares,  $V(x, t)$ , definida en un entorno de  $x = 0$ , semidefinida positiva y  $W(x, \xi, t)$ , definida en un entorno de  $(x, \xi) = (0, 0)$ , también semidefinida positiva.*

*Si se verifican las siguientes condiciones:*

- (i)  $V(x, t)$  verifica la ecuación (6.6)
- (ii)  $W(x, \xi, t)$  verifica la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, \xi, t)}{\partial t} + \frac{\partial W(x, \xi, t)}{\partial x} f_{e1}(x, \xi, t) + \frac{\partial W(x, \xi, t)}{\partial \xi} f_{e2}(x, \xi, t) + \frac{1}{2} h_e^T(x, \xi, t) h_e(x, \xi, t) + \\ + \frac{\gamma^2}{2} \Phi^T(x, \xi, t) \Phi(x, \xi, t) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde

$$\begin{aligned} f_e(x, \xi, t) &= \begin{pmatrix} f_{e1}(x, \xi, t) \\ f_{e2}(x, \xi, t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f(x, t) + g_1(x, t) \omega^*(x, t) + g_2(x, t) v^*(\xi, t) \\ f_o(\xi, t) + g_o(\xi, \hat{y}, u, t, \Gamma) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$h_e(x, \xi, t) = v^*(\xi, t) - u^*(x, t) \quad (6.11)$$

$$\Phi(x, \xi, t) = \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\partial W(x, \xi, t)}{\partial x} g_1(x, t) \right)^T \quad (6.12)$$

donde  $\omega^*(x, t)$  viene dada según (6.7) y  $v^*(\xi, t)$ , es una aproximación realizable al control  $u^*(x, t)$  en (6.7).  $\Gamma$  es un cierto vector matricial por determinar.

- (iii) El subsistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) \\ \dot{\xi} &= f_o(\xi, t) + g_o(\xi, \hat{y}, 0, t, \Gamma) \end{aligned}$$

es localmente asintóticamente estable

Entonces, la ley de control  $u$  dada por la estructura dinámica

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f_o(\xi, t) + g_o(\xi, \hat{y}, u, t, \Gamma) \\ u &= v^*(\xi, t) \end{aligned} \quad (6.13)$$

estabiliza asintóticamente el sistema (6.1) verificando la relación de atenuación de perturbaciones (6.5).

Demostración:

Con objeto de simplificar la escritura de las expresiones que intervienen en esta demostración, se omitirán, como en ocasiones anteriores, las dependencias funcionales siempre y cuando éstas resulten obvias por el contexto.

Definamos la función

$$H(x, t, \omega, u) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (f + g_1 \omega + g_2 u) + \frac{1}{2} h_1^T h_1 + \frac{1}{2} u^T R u - \frac{\gamma^2}{2} \omega^T \omega \quad (6.14)$$

Si atendemos a la expresión (6.8) es inmediato comprobar que

$$H^* = H(x, t, \omega^*, u^*) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (f + g_1 \omega^* + g_2 u^*) + \frac{1}{2} h_1^T h_1 + \frac{1}{2} u^{*T} R u^* - \frac{\gamma^2}{2} \omega^{*T} \omega^* \leq 0$$

Sustituyendo ahora en la expresión anterior los términos,  $\frac{\partial V}{\partial x} g_1 = \gamma^2 \omega^{*T}$  y  $\frac{\partial V}{\partial x} g_2 = -u^{*T} R$  extraídos a partir de la identidad (6.7), y sumando en ambos miembros los términos  $\frac{\partial V}{\partial x} g_1 \omega$  y  $\frac{\partial V}{\partial x} g_2 u$ , podemos obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (f + g_1 \omega + g_2 u) &= \gamma^2 \omega^{*T} \omega - u^{*T} R u - \frac{1}{2} h_1^T h_1 - \frac{1}{2} u^{*T} R u^* + \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^{*T} \omega^* - \frac{\partial V}{\partial x} g_1 \omega^* - \\ - \frac{\partial V}{\partial x} g_2 u^* &= -\frac{1}{2} \gamma^2 \|\omega - \omega^*\|^2 + \frac{1}{2} (u - u^*)^T R (u - u^*) - \frac{1}{2} \|h_1\|^2 - \frac{1}{2} u^T R u + \frac{1}{2} \gamma^2 \|\omega\|^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Así, si cerramos el lazo introduciendo la ley de control (6.13) en (6.1), podemos obtener el sistema ampliado

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = f_e(x, \xi, t) + g_e(x, \xi, t)(\omega - \omega^*)$$

donde

$$g_e(x, \xi, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si definimos ahora la función  $H_e$  como el hamiltoniano del bucle cerrado

$$\begin{aligned} H_e(x, \xi, r, t) &= \frac{\partial W}{\partial t} + \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial \xi} \end{array} \right) (f_e(x, \xi, t) + g_e(x, \xi, t)r) + \frac{1}{2} (v^*(\xi) - u^*(x))^T R (v^*(\xi) - u^*(x)) - \\ &- \frac{1}{2} \gamma^2 r^T r \end{aligned}$$

podemos observar que  $H_e(x, \xi, r, t)$  es cuadrático en  $r$ , y por tanto admite un mínimo absoluto único en

$$r^*(x, t) = \Phi(x, t) = \frac{1}{\gamma^2} g_1^T(x, t) \frac{\partial^T W}{\partial x} \quad (6.16)$$

Es además fácil comprobar en virtud de la ecuación (6.9) que  $H_e(x, \xi, \Phi, t) \leq 0$ , o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial \xi} \end{array} \right) (f_e(x, \xi, t) + g_e(x, \xi, t)\Phi) + \frac{1}{2} (v^*(\xi) - u^*(x))^T R (v^*(\xi) - u^*(x)) -$$

$$-\frac{1}{2}\gamma^2\Phi^T\Phi \leq 0$$

Sumando ahora  $g_e(\omega(x) - \omega^*(x))$  en ambos miembros de la igualdad anterior y reordenando términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial \xi} \end{array} \right) (f_e(x, \xi, t) + g_e(\omega(x) - \omega^*(x))) &= -\frac{1}{2}(v^*(\xi) - u^*(x))^T R(v^*(\xi) - u^*(x)) + \\ + \frac{1}{2}\gamma^2\Phi^T\Phi - \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial \xi} \end{array} \right) g_e(\Phi - \omega(x) + \omega^*(x)) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial \xi} \end{array} \right) g_e = \gamma^2\Phi^T$  según (6.16), podemos reescribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial \xi} \end{array} \right) (f_e(x, \xi, t) + g_e(\omega(x) - \omega^*(x))) &= -\frac{1}{2}\gamma^2\|\omega(x) - \omega^*(x) - \Phi\|^2 - \\ - \frac{1}{2}(v^*(\xi) - u^*(x))^T R(v^*(\xi) - u^*(x)) + \frac{1}{2}\gamma^2\|\omega(x) - \omega^*(x)\|^2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Con estos resultados, la estabilidad del lazo cerrado del sistema puede probarse tomando la siguiente función de Lyapunov

$$U(x, \xi, t) = V(x, t) + W(x, \xi, t)$$

Así, si calculamos la evolución temporal de  $U(x, \xi, t)$ , considerando  $\omega(t) = 0$ , a lo largo de las trayectorias del sistema a lazo cerrado, tendremos

$$\frac{dU(x, \xi, t)}{dt} = \dot{V}(x, t) + \dot{W}(x, \xi, t)$$

donde, si tenemos en cuenta (6.15), podemos expresar

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &\leq -\frac{1}{2}\gamma^2\|\omega^*(x)\|^2 + \frac{1}{2}(v^*(\xi, t) - u^*(x, t))^T R(v^*(\xi, t) - u^*(x, t)) - \frac{1}{2}\|h_1(x)\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}v^{*T}(\xi, t)Rv^*(\xi, t) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Y del mismo modo, empleando la expresión (6.17)

$$\dot{W}(x, \xi, t) \leq -\frac{1}{2}\gamma^2\|\omega^*(x) + \Phi\|^2 - \frac{1}{2}(v^*(\xi, t) - u^*(x, t))^T R(v^*(\xi, t) - u^*(x, t)) + \frac{1}{2}\gamma^2\|\omega^*(x)\|^2$$

Luego, sumando las dos expresiones anteriores

$$\frac{dU(x, \xi, t)}{dt} \leq -\frac{1}{2}\|h_1(x)\|^2 - \frac{1}{2}v^{*T}(\xi, t)Rv^*(\xi, t) - \frac{1}{2}\gamma^2\|\omega^*(x) + \Phi\|^2 \leq 0 \quad (6.19)$$

expresión de la que concluimos que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov (Teorema 2.1).

Adicionalmente, si se verifica la condición (ii), la estabilidad tiene naturaleza asintótica. El resultado se comprueba teniendo en cuenta que todos los posibles invariantes del sistema, es decir las trayectorias que verifican  $\dot{U}(x, \xi, t) = 0 \quad \forall t$  necesariamente implican que  $h_1(x, t) = 0$  y  $v^*(\xi, t) = 0$ . Estas trayectorias coinciden con las del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) \\ \dot{\xi} &= f_o(\xi, t) + g_o(\xi, \hat{y}, 0, t, \Gamma)\end{aligned}$$

Dado que, por hipótesis  $\{f(x, t), h_1(x, t)\}$  es localmente detectable en el origen, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Empleando (ii) el subsistema en  $\xi$  es también asintóticamente estable, o equivalentemente  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ , luego concluimos la estabilidad asintótica buscada.

Para comprobar que la estructura de control propuesta verifica la relación de atenuación de perturbaciones, recuperamos la identidad

$$\frac{dU(x, \xi, t)}{dt} \leq -\frac{1}{2}\|h_1\|^2 - \frac{1}{2}u^T Ru + \frac{1}{2}\gamma^2\|\omega\|^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\|\omega(t) - \omega^*(x, t) - \Phi\|^2$$

expresión que se corresponde con la igualdad de disipación con *función de almacenamiento*  $U(x, \xi, t)$  y *tasa de aporte*  $\frac{1}{2}(\|z(t)\|^2 - \gamma^2\|\omega(t)\|^2)$ . Equivalentemente, podemos expresar la identidad anterior integrando entre 0 y  $T$  como

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{1}{2}(\gamma^2\|\omega(t)\|^2 - \|z(t)\|^2) dt &= \frac{\gamma^2}{2} \int_0^T \|\omega(t) - \omega^*(x, t) - \Phi(x, \xi, t)\|^2 + \\ &+ U(T) - U(0) \geq 0\end{aligned}$$

resultado que completa la prueba

q.o.d.

Estos resultados permiten establecer una estructura de control mediante realimentación de la salida que estabiliza asintóticamente el sistema considerado, verificando la condición de atenuación de perturbaciones en (6.5).

Es interesante comentar que la ley de control de realimentación de la salida presentada en (6.13), adopta la forma de un observador no lineal para el sistema considerado. De hecho es fácil comprobar que, para el caso lineal, la estructura de control propuesta adopta la forma del *controlador central* presentado en (Doyle *et al.* 1989). Por este motivo, llamaremos a la estructura de control en (6.13) *controlador central  $H_\infty$  no lineal* mediante realimentación de la salida.

## 6.4. Aplicación a sistemas Euler-Lagrange

Tal como se describió en la introducción de este capítulo, en el caso de sistemas dinámicos Euler-Lagrange, el problema de síntesis de una ley de control de realimentación de la salida se traduce en formular dicha ley de control empleando únicamente la información relativa a las posiciones articulares,  $q$ , del sistema. Se supone por tanto que la información de velocidades,  $\dot{q}$ , y aceleraciones,  $\ddot{q}$ , del sistema no está disponible, siendo necesaria su estimación mediante una estructura dinámica apropiada (*estimador de estados*).

El objetivo de este capítulo es, haciendo uso de los resultados mostrados en la sección anterior, formular una ley de control de realimentación de la salida dentro del marco de la teoría de control óptimo  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal que sirve de base a esta Tesis.

La presente sección se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, en el apartado 6.4.1 se introduce la representación de la *dinámica de error* que emplearemos para la descripción de sistema EL en el caso de realimentación de la salida. Esta descripción es una versión simplificada de la introducida en el capítulo 4, sección 4.4. A continuación en el apartado 6.4.2 formularemos una estructura para el *observador de estados* del sistema, presentando para finalizar la estructura del control mediante realimentación de la salida en el apartado 6.4.3.

### 6.4.1. Dinámica del sistema

Para el análisis de los sistemas dinámicos EL emplearemos una representación similar a la presentada en el capítulo 4, sección 4.4, en la cual eliminaremos el estado correspondiente a la integral del error. El motivo de esta simplificación atiende a razones de compacidad en las expresiones que derivaremos posteriormente.

Empleando argumentos análogos a los presentados en capítulo 4, es fácil comprobar que esta simplificación conduce a una representación de la *dinámica de error* de sistemas dinámicos EL de la forma (6.1) como

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, t) + g_1(\tilde{x}, t)\omega + g_2(\tilde{x}, t)u \quad (6.20)$$

donde

$$f(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{pmatrix} -M^{-1}(q)(\frac{1}{2}\dot{M}(q, \dot{q}) + N(q, \dot{q})) & 0 \\ \frac{1}{\rho}I & -\frac{1}{\rho}T_{12} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \quad (6.21)$$

y

$$g_1(\tilde{x}, t) = g_2(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{pmatrix} M^{-1}(q) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

con

$$T_0 = \begin{pmatrix} \rho I & T_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

En estas expresiones  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  representa el *error de seguimiento* del sistema dado por

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} - \dot{q}_r \\ q - q_r \end{pmatrix}$$

y  $u \in \mathbb{R}^{m_u}$  es el *exceso de control* aplicado al sistema (ver sección 4.4).

Para esta representación, tendremos además una relación análoga a la expresión (4.30) dada por

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \frac{1}{\rho}M(q)T_{12}\dot{\tilde{q}} - \frac{1}{\rho}C(q, \dot{q})T_1\tilde{x} + \frac{1}{\rho}u \quad (6.24)$$

donde  $T_1 = (\rho I \quad T_{12})$ .

Sin embargo, es necesario tener en cuenta que la relación (6.24) así expresada, no constituye una ley de control directamente aplicable en el caso de realimentación de la salida, ya que ésta depende explícitamente del vector de *velocidades generalizadas*,  $\dot{q}$ , que, por hipótesis, no es accesible para el control.

Por este motivo, emplearemos un versión modificada de la ley de control (6.24), en la que sustituiremos el vector de *velocidades generalizadas*,  $\dot{q}$ , por su estimación,  $\hat{\dot{q}}$ , de la forma

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \hat{\dot{q}})\dot{q}_r + G(q) - \frac{1}{\rho}M(q)T_{12}\dot{\tilde{q}} - \frac{1}{\rho}C(q, \hat{\dot{q}})T_{12}\tilde{q} + \frac{1}{\rho}u \quad (6.25)$$

donde aplicando un ligero abuso de notación entenderemos que  $\dot{\tilde{q}} = \hat{\dot{q}} - \dot{q}_r$ .

Esta modificación implica que la dinámica de error del sistema viene ahora descrita por la expresión

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, t) + g_1(\tilde{x}, t)\omega + g_2(\tilde{x}, t)(u + u_r) \quad (6.26)$$

expresión en la que es fácil comprobar que  $u_r$  viene dado por

$$u_r = (\rho C(q, \dot{q}_r) - M(q)T_{12} - C(q, T_{12}\tilde{q}))\dot{\tilde{y}} \quad (6.27)$$

Es interesante mencionar a la vista de la expresión anterior, que  $u_r$  puede expresarse como  $u_r = \mu(q, q_r, \dot{q}_r)\dot{\tilde{y}}$ , donde  $\mu(\cdot)$  depende únicamente de variables accesibles, propiedad que nos resultará útil posteriormente.

Para completar el modelo, las ecuaciones (6.2) y (6.3) serán particularizadas adoptando la forma

$$z(\tilde{x}, u) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T Q \tilde{x} + \frac{1}{2}u^T R u$$

e

$$y = q - q_r = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \tilde{x}$$

respectivamente, donde  $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  y  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices reales definidas positivas que garantizan a su vez que  $z(\tilde{x}, u) \geq 0$ , para todo  $\tilde{x}$  y  $u$ .

Esta definición de  $z$  se corresponde con una particularización en (6.2) para  $h_1$  y  $k_{12}$  como

$$h_1(\tilde{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{x} \quad k_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

donde  $Q^{\frac{1}{2}}$  y  $R^{\frac{1}{2}}$  son matrices tales que  $Q = Q^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}$  y  $R = R^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}$  respectivamente <sup>4</sup>. Es fácil comprobar que con estas definiciones se satisfacen las restricciones (H1) y (H2).

#### 6.4.2. Estructura del observador de estados

Propondremos en este apartado una estructura de *observador de estados* para sistemas EL la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1}(q) \left( -C(q, \hat{x}_1) \hat{x}_1 - G(q) + \tau + \frac{1}{\rho} C(q, \hat{x}_1) T_{12} \tilde{y} + \Gamma_2 \tilde{y} \right) \\ \hat{x}_1 - \frac{1}{\rho} T_{12} \tilde{y} + \gamma_1 \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

$$\hat{q} = \hat{x}_2 \quad (6.29)$$

donde supondremos que  $\Gamma_1 = \gamma_1 I_{n \times n}$  y  $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica definida positiva.

Es interesante notar que, como no podía ser de otro modo, este observador hace uso únicamente de la información accesible del sistema (posiciones generalizadas,  $q$ , y trayectoria de referencia,  $q_r$  y  $\dot{q}_r$ ), así como el par final aplicado al sistema,  $\tau$ .

Definamos la *salida estimada* como  $\hat{y} = \hat{q} = \hat{x}_2$ . Si derivamos respecto al tiempo la segunda de las ecuaciones de (6.28) y sustituimos en la primera, podemos expresar la dinámica del observador como

$$M(q)\ddot{\hat{y}} + C(q, \dot{\hat{y}})\dot{\hat{y}} + G(q) = \tau + \frac{1}{\rho} C(q, \hat{x}_1) T_{12} \tilde{y} + \Gamma_2 \tilde{y} + \gamma_1 M(q)\dot{\hat{y}} + \frac{1}{\rho} T_{12} \dot{\tilde{y}} \quad (6.30)$$

Restando ahora de esta ecuación la dinámica original del sistema, es decir

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

---

<sup>4</sup>Es un resultado de álgebra elemental que toda matriz simétrica definida positiva admite dicha descomposición

obtenemos la que llamaremos *dinámica de error del observador* de la forma

$$M(q)\ddot{\tilde{y}} + C(q, \dot{q})\dot{\tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}C(q, \hat{x}_1)T_{12}\tilde{y} - \Gamma_2\tilde{y} - \gamma_1 M(q)\dot{\tilde{q}} + \frac{1}{\rho}T_{12}\dot{\tilde{y}} - C(q, \dot{q})\dot{\tilde{y}} \quad (6.31)$$

Alternativamente, si definimos  $\tilde{\xi} = (\dot{\tilde{y}}^T \quad \tilde{y}^T)^T$ , podemos expresar la *dinámica de error del observador* en la forma  $\dot{\tilde{\xi}} = f_o(\tilde{\xi}, t) + g_o(\tilde{\xi}, \Gamma, t)$  como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} &= T_0^{-1} \begin{pmatrix} -M^{-1}(q)C(q, \dot{q}) & 0 \\ \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho}T_{12} \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi} + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}M^{-1}(q)C(q, \dot{y})T_{12}\tilde{y} - M^{-1}(q)\Gamma_2\tilde{y} - \gamma_1\dot{\tilde{y}} - M^{-1}C(q, \dot{q})\dot{\tilde{y}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.32)$$

con definiciones obvias de  $f_o(\tilde{\xi}, t)$  y  $g_o(\tilde{\xi}, \Gamma, t)$  y  $\Gamma = (\Gamma_1 \quad \Gamma_2)$ .

Ésta será finalmente la estructura del observador que emplearemos en los desarrollos que se muestran a continuación.

### 6.4.3. Estructura del control mediante realimentación de la salida

La estructura del control de realimentación de la salida propuesto en este capítulo emplea una formulación basada en el *Principio de Equivalencia Cierta*. Por este motivo y como paso previo a la formulación de la ley de control de realimentación de la salida, se presenta una solución al problema para el caso de realimentación de estados.

#### 6.4.3.1. Control $\mathcal{H}_\infty$ de realimentación de estados

Así, el teorema que se presenta a continuación es una aplicación del teorema 6.1 a sistemas descritos según la formulación (6.20)-(6.22).

**Teorema 6.3 ( $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de estados Euler-Lagrange).** Sea el sistema dinámico definido en (6.1)-(6.3) y  $V(\tilde{x}, t)$  la siguiente función escalar definida positiva:

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \quad (6.33)$$

donde  $M(q)$  es la matriz de inercias del robot, y  $T_0$  corresponde a la expresión

$$T_0 = \begin{pmatrix} \rho I & T_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

y  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante definida positiva.

Si se verifica la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} - T_1^T (R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I) T_1 + Q \leq 0 \quad (6.34)$$

Entonces, la función  $V(\tilde{x}, t)$  satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs (6.6) para el sistema considerado.

Demostración:

La demostración de este teorema se basa en argumentos similares a los presentados en el teorema 5.2 del capítulo 5. Si tomamos en consideración la identidad  $g_1(\tilde{x}, t) = g_2(\tilde{x}, t)$  en (6.22) es sencillo comprobar que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} f = \frac{1}{2} \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}$$

Para los términos  $g_1^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}}$  tenemos

$$g_1^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = (M^{-1} \ 0) (T_0^{-1})^T T_0^T \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}$$

o bien simplificando

$$g_1^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} = (I \ 0) T_0 \tilde{x} = T_1 \tilde{x} \quad (6.35)$$

Finalmente, sustituyendo cada uno de los términos anteriores en la ecuación (6.6) y reordenando las expresiones se obtiene la identidad (6.37) del teorema, tal como se quería demostrar.

q.o.d.

**Observación 6.1.** El teorema anterior proporciona una forma explícita para una solución subóptima del problema  $\mathcal{H}_\infty$  de atenuación de perturbaciones mediante realimentación de estados. Esta ley de control, según el teorema 6.1, adopta la forma

$$u(x, t) = -R^{-1} g_2^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} = -R^{-1} T_1 \tilde{x} \quad (6.36)$$

**Observación 6.2.** Es interesante observar que la estructura de la identidad (6.37) es similar, si exceptuamos la ausencia del término de integral de error en el vector de estados, a la obtenida para el control  $\mathcal{H}_2$  en (5.35). Si hacemos  $R_2^{-1} = R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}I$  en aquel problema tendremos la ecuación equivalente para el problema  $\mathcal{H}_\infty$ <sup>5</sup>. Es por tanto posible hacer consideraciones análogas a las realizadas en el apartado 5.4.3 para la solución del problema  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentación de estados.

Con esta solución, y siguiendo la línea argumental presentada en el desarrollo del teorema 6.2, podemos desarrollar los resultados que se muestran a continuación, donde se presenta un solución para la expresión (6.9) en el citado teorema, así como una ligera reformulación de la dinámica del sistema para generar una ley de control realizable mediante realimentación de la salida.

Esta solución permitirá, como se verá, establecer una estructura de control mediante realimentación de la salida, basado en el *Principio de Equivalencia Cierta*, que garantice la estabilidad asintótica del sistema, verificando la relación de atenuación de perturbaciones propia del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

#### 6.4.3.2. Control $\mathcal{H}_\infty$ de realimentación de la salida

La solución para el problema en el caso de realimentación de la salida será planteado como aplicación del teorema 6.2 de la sección 6.3.2, tomando como base las expresiones (6.26) y (6.32), para las dinámicas del sistema EL y el observador de estados respectivamente.

De este modo, el teorema que se enuncia a continuación propone una solución para el problema  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida basada en los resultados genéricos mostrados en el teorema 6.2.

**Teorema 6.4 ( $\mathcal{H}_\infty$  de realimentación de la salida Euler-Lagrange).**

Dado un sistema dinámico de la forma (6.20) junto con (6.21)-(6.22), si se verifican las identidades

■ (i)

$$\begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ K_1 & 0 \end{pmatrix} - T_1^T(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}I)T_1 + Q \leq 0 \quad (6.37)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante definida positiva.

---

<sup>5</sup>Es interesante notar a la vista de las ecuaciones que el problema  $\mathcal{H}_\infty$  se reduce al  $\mathcal{H}_2$  haciendo que el factor de atenuación  $\gamma$  tienda a infinito.

■ (ii)

$$A_1 = \begin{pmatrix} \rho^2 \bar{R} I & \frac{1}{2} K_1 + \rho \bar{R} T_{12} \\ \frac{1}{2} K_1 + \rho \bar{R} T_{12}^T & \bar{R} T_{12}^T T_{12} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\text{con } \bar{R} = \frac{1}{\gamma^2} I - R^{-1}, \quad y$$

■ (iii)

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &> \frac{T_{12M}^2 k_c \|\dot{\tilde{y}}\|}{\rho T_{12m}} I \\ \gamma_1 &> \frac{k_c k_r}{M_m} \end{aligned}$$

donde  $\|\dot{q}_r(t)\| \leq k_r \quad \forall t \geq 0$ , entonces, la ley de control

$$v^*(\xi, t) = \rho \dot{\tilde{y}} + T_{12} \tilde{y}$$

estabiliza localmente asintóticamente el sistema considerado, verificando la relación de atenuación de perturbaciones (6.5).

Adicionalmente es posible dar una estimación de la cuenca de atracción en este caso que viene dada por

$$S = \left\{ \|\chi\| < \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L_m}{L_M}} \min\left\{ \frac{1}{k_c} (\rho^2 (M_m \gamma_1 - k_c k_r)), \frac{\rho T_{12m} k_{pm}}{T_{12M}^2 k_c} \right\} \right\}$$

$$\text{con } \chi = \begin{pmatrix} \tilde{x}^T & \tilde{\xi}^T \end{pmatrix}^T$$

Demostración:

La demostración del teorema se basa en los desarrollos previamente expuestos en los teoremas 6.3 y 6.2.

Así la condición (i) establece una relación que permite calcular los términos de la ley de control,  $\rho$  y  $T_{12}$ , tal como se mostró en el teorema 6.3, para la cual ya se mostró una breve demostración.

Las condiciones (ii) y (iii) son suficientes para la existencia de una estructura de observador de la forma (6.28)-(6.29). Es decir, permite determinar el valor del escalar  $\gamma_1$  y la matriz  $\Gamma_2$  que determinan las ganancias del observador.

Para demostrar la suficiencia de las condiciones (ii) y (iii), nos apoyaremos en los resultados mostrados para el teorema 6.2. Así tomaremos como función escalar  $W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)$  de este teorema, la siguiente:

$$W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi} \quad (6.38)$$

o bien en forma compacta

$$W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t) = \frac{1}{2} \chi^T L(q) \chi \quad (6.39)$$

con  $\chi = (\tilde{x}^T \quad \tilde{\xi}^T)^T$  y  $L(q) = \text{diag}\{M(q), K_1, M(q), K_2\}$ .  $M(q)$  es la matriz de inercias del sistema, y  $T_0$  corresponde a la expresión de la ecuación (6.23).  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , son matrices constantes simétricas definidas positivas, de las cuales  $K_1$  está determinada por condición (i).

Al igual que hicimos en la demostración del teorema 6.2, para comprobar la estabilidad asintótica del sistema, consideremos la función de Lyapunov

$$U(x, \xi, t) = V(x, t) + W(x, \xi, t)$$

En aquella ocasión, se obtuvo una expresión explícita, ecuación (6.19), que permitió establecer la estabilidad del sistema en el sentido de Lyapunov. En el caso particular de sistemas EL que nos ocupa, la dinámica del sistema a lazo abierto viene descrita por la relación (6.26), en la cual incorporamos un término adicional  $u_r$  para permitir la obtención de una ley de control *realizable* únicamente en términos de las magnitudes accesibles del sistema. Es fácil comprobar que la inclusión de este término modifica la expresión (6.19) como:

$$\frac{dU(x, \xi, t)}{dt} \leq -\frac{1}{2} \|h_1(x)\|^2 - \frac{1}{2} v^{*T}(\xi, t) R v^*(\xi, t) - \frac{1}{2} \gamma^2 \|\omega^*(x) + \Phi\|^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}} \right) g_1 u_r + \frac{\partial W}{\partial \tilde{\xi}} g_o \quad (6.40)$$

Esta última identidad puede hacerse definida negativa si forzamos a que los términos adicionales introducidos sean definidos negativos. En efecto

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}} \right) g_1 u_r + \frac{\partial W}{\partial \tilde{\xi}} g_o \leq 0 \quad (6.41)$$

Para obtener una forma más conveniente para esta expresión, desarrollaremos los términos que intervienen en las ecuaciones (6.9) y (6.41) particularizando  $V(\tilde{x}, t)$  y  $W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)$  como en (6.33) y (6.38) respectivamente. Así tenemos:

- Para la derivada temporal de  $W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial M(q)}{\partial t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial M(q)}{\partial t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi} =$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M(q)}{\partial q_k} \dot{q}_{rk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M(q)}{\partial q_k} \dot{q}_{rk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi}$$

- El gradiente de  $W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)$  viene dado por

$$\frac{\partial W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{x}} = \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} T_0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\Omega_1 = \left( \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^T M(q)}{\partial q_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}, \dots, \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^T M(q)}{\partial q_n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \right)$$

y

$$\Omega_2 = \left( \tilde{\xi}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^T M(q)}{\partial q_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi}, \dots, \tilde{\xi}^T T_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^T M(q)}{\partial q_n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi} \right)$$

Además, teniendo en cuenta la definición (6.7), es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} (0_{1 \times n} \quad \Omega_i) (g_2(\tilde{x}, t) u^*(\tilde{x}, t)) &= (0_{1 \times n} \quad \Omega_i) \left( -g_2(\tilde{x}, t) R_2^{-1} g_2^T \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} \right) = \\ (0_{1 \times n} \quad \Omega_i) \left( \begin{matrix} M(q)^{-1} R_2^{-1} M(q)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right) \frac{\partial^T V}{\partial \tilde{x}} &= 0 \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{x}} f &= \left( \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} T_0 + \frac{1}{2} (0_{1 \times n} \quad \Omega_1) + \frac{1}{2} (0_{1 \times n} \quad \Omega_2) \right) f = \\ \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} T_0 f + \frac{1}{2} (0_{1 \times n} \quad \Omega_2) f + \frac{1}{2} (0_{1 \times n} \quad \Omega_2) (g_2 u^*(\tilde{x}, t)) &= \\ + \frac{1}{2} (0_{1 \times n} \quad \Omega_1) f + \frac{1}{2} (0_{1 \times n} \quad \Omega_1) (g_2 u^*(\tilde{x}, t)) &= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} T_0 f + \\ \frac{1}{2} (0_{1 \times n} \quad \Omega_1) \dot{\tilde{x}} + \frac{1}{2} (0_{1 \times n} \quad \Omega_2) \dot{\tilde{x}} & \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la relación para  $\dot{\tilde{x}}$  en (6.21), podemos desarrollar los términos de la expresión anterior como:

$$\tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} T_0 f =$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M(q)^{-1}(\frac{1}{2}\dot{M} + N) & 0 \\ \frac{1}{\rho}I & -\frac{1}{\rho}T_{12} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = \\
&= \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} -(\frac{1}{2}\dot{M} + N) & 0 \\ \frac{1}{\rho}K_1 & -\frac{1}{\rho}K_1 T_{12} \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}
\end{aligned}$$

mientras que el segundo y tercer término pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega_1 \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{e} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \Omega_1 \dot{e} = \frac{1}{2} \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial M(q)}{\partial q_k} (\dot{q}_k - \dot{q}_{rk}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega_2 \end{pmatrix} \dot{\tilde{x}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{e} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \Omega_2 \dot{e} = \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial M(q)}{\partial q_k} (\dot{q}_k - \dot{q}_{rk}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi}
\end{aligned}$$

De forma análoga es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{\xi}} f_o(\tilde{\xi}, t) &= \tilde{\xi}^T T_0^T \begin{pmatrix} -(\frac{1}{2}\dot{M} + N) & 0 \\ \frac{1}{\rho}K_2 & -\frac{1}{\rho}K_2 T_{12} \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi} + \\
&\quad \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T T_0^T \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial M(q)}{\partial q_k} (\dot{q}_k - \dot{q}_{rk}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_0 \tilde{\xi}
\end{aligned}$$

Así, agrupando los términos obtenidos hasta el momento tenemos

$$\frac{\partial W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{x}} f(\tilde{x}, t) + \frac{\partial W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{\xi}} f_o(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ K_1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T \begin{pmatrix} 0 & K_2 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\xi}$$

expresión que ha sido simplificada empleando la relación  $\dot{M}(q) = \frac{\partial M(q)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k$ ,

y la propiedad de antisimetría de  $\dot{N}(q, \dot{q})$  (Propiedad P1 (4.8)).

- Otro término que aparece en las expresiones es  $g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{x}}$

$$g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{x}} = (M(q)^{-1} \ 0) (T_0^{-1})^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} = T_1 \tilde{x}$$

- Junto con los términos

$$\frac{1}{2}h_e(\tilde{\xi}, t)^T h_e(\tilde{\xi}, t) = \frac{1}{2}(v^*(\tilde{\xi}, t) - u^*(\tilde{x}, t))^T(v^*(\tilde{\xi}, t) - u^*(\tilde{x}, t)) = \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T \begin{pmatrix} \rho^2 R^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\xi}$$

$$\frac{\gamma^2}{2}\Phi^T(\tilde{x}\tilde{\xi}, t)\Phi(\tilde{x}\tilde{\xi}, t) = \frac{1}{2\gamma^2} \left( g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{x}} \right)^T \left( g_2^T(\tilde{x}, t) \frac{\partial^T W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{x}} \right) = \frac{1}{2\gamma^2} \tilde{x}^T T_1^T T_1 \tilde{x}$$

- Por otro lado tenemos que

$$\frac{\partial W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{\xi}} g_o(\xi, \dot{y}, u, t, \Gamma) = \tilde{\xi}^T T_1^T \left( C(q, \dot{y}) T_{12} \ddot{y} - \rho \Gamma_2 \ddot{y} - \rho M(q) \gamma_1 \ddot{y} - \rho C(q, \dot{q}) \dot{\ddot{y}} \right)$$

- Finalmente necesitaremos evaluar la expresión

$$\left( \frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t)}{\partial \tilde{x}} \right) g_1(\tilde{x}, t) u_r = (T_1 \tilde{x})^T (\rho C(q, \dot{q}_r) \dot{\ddot{y}} - M(q) T_{12} \ddot{y} - C(q, \dot{y}) T_{12} \ddot{q})$$

Agrupando los términos que acabamos de desarrollar de acuerdo con la expresión (6.9), podemos expresar

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^T & \tilde{\xi}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (6.42)$$

donde estas matrices  $A_1$  y  $A_2$ <sup>6</sup> tienen la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} \rho^2 \bar{R} I & \frac{1}{2} K_1 + \rho \bar{R} T_{12} \\ \frac{1}{2} K_1 + \rho \bar{R} T_{12}^T & \bar{R} T_{12}^T T_{12} \end{pmatrix}$$

con  $\bar{R} = \frac{1}{\gamma^2} I - R^{-1}$ , y

$$A_2 = \begin{pmatrix} \rho^2 \left( \frac{1}{2} R^{-2} - M(q) \gamma_1 - C(q, \dot{q}) \right) & \frac{1}{2} K_2 + \rho C(q, \dot{y}) T_{12} - \rho^2 \Gamma_2 \\ \frac{1}{2} K_2 - \rho T_{12}^T M(q) \gamma_1 - \rho T_{12}^T C(q, \dot{q}) & T_{12}^T C(q, \dot{y}) T_{12} - \rho T_{12}^T \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

Aplicando el complemento de Schur (ver lema A.3 del apéndice A), la expresión (6.42) puede hacerse semidefinida negativa, si se verifica que  $A_1 \leq 0$  y  $A_2 \leq 0$ .

La primera condición,  $A_1 \leq 0$ , figura impuesta como condición (ii) del teorema. La segunda condición,  $A_2 \leq 0$ , puede elaborarse un poco más si recurrimos a las

---

<sup>6</sup>No detallaremos la expresión de  $A_3$ , ya que ésta es irrelevante en los desarrollos posteriores

propiedades, (A.2) de la *norma-2* inducida, así como las propiedades (4.12) y (4.14) de la matriz  $C(\cdot, \cdot)$  y (4.2) de la matriz de inercias  $M(\cdot)$ , de la siguiente manera

$$\xi^T A_2 \xi \leq - \begin{pmatrix} \|\dot{\tilde{y}}\| & \|\tilde{y}\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^2(M_m \gamma_1 - k_c \|\dot{\tilde{q}}\|) & \rho K^* \\ 0 & \rho T_{12m} k_{pm} - T_{12M} k_c \|\dot{\tilde{y}}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\dot{\tilde{y}}\| \\ \|\tilde{y}\| \end{pmatrix}$$

donde  $K^* = \max\{\|T_{12}^T M(q)\gamma_1 + T_{12}^T C(q, \dot{q}) + \rho \Gamma_2 - C(q, \dot{y}) T_{12}\|, \|T_{12}^T M(q)\gamma_1 + T_{12}^T C(q, \dot{q}) + \rho \Gamma_2 - C(q, \dot{y}) T_{12}\|\}$ , y  $T_{12M}$ ,  $T_{12m}$  denotan respectivamente los autovalores máximo y mínimo de  $T_{12}$ .

Del mismo modo podemos escribir

$$\xi^T A_2 \xi \leq - \begin{pmatrix} \|\dot{\tilde{y}}\| \\ \|\tilde{y}\| \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \rho^2(M_m \gamma_1 - k_c \|\dot{\tilde{q}}_r\| - k_c(\|\dot{\tilde{q}}\| + \|\dot{\tilde{y}}\|)) & \rho K^* \\ 0 & \rho T_{12m} k_{pm} - T_{12M} k_c \|\dot{\tilde{y}}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\dot{\tilde{y}}\| \\ \|\tilde{y}\| \end{pmatrix}$$

expresión ésta en la que si hacemos uso de la hipótesis  $\|\dot{q}_r(t)\| \leq k_r \forall t \geq 0$ , podemos concluir que una condición suficiente para que  $\xi^T A_2 \xi \leq 0$  es que

$$\|\dot{\tilde{q}}\| + \|\dot{\tilde{y}}\| < \kappa = \min\left\{\frac{1}{k_c}(\rho^2(M_m \gamma_1 - k_c k_r)), \frac{\rho T_{12m} k_{pm}}{T_{12M}^2 k_c}\right\}$$

condición que también se verifica si

$$\|\chi\| < \frac{\kappa}{\sqrt{2}}$$

Por otro lado, a partir de (6.39) y la propiedad (4.2) podemos escribir

$$\frac{1}{2} L_M \|\chi\|^2 \leq W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t) \leq \frac{1}{2} L_m \|\chi\|^2$$

donde  $L_M$  y  $L_m$  son los autovalores máximo y mínimo de  $L(q)$  para todo el rango de valores de  $q$ .

De este modo tendremos que, si se verifica

$$\|\chi(0)\| < \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L_m}{L_M}} \kappa$$

entonces

$$W(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t) \leq W(\tilde{x}(0), \tilde{\xi}(0), 0) \quad \forall t \geq 0$$

y

$$\dot{W}(\tilde{x}, \tilde{\xi}, t) \leq -\beta \left\| \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} \right\|^2 \quad \forall t \geq 0$$

con  $\beta$  una cierta constante positiva.

Con este resultado y aplicando el teorema de La Salle sobre la expresión (6.40) podemos concluir la estabilidad asintótica del conjunto *sistema + observador*.

q.o.d

El teorema que se acaba de presentar permite formular una solución particular a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi planteadas (6.2) para el caso de sistemas Euler-Lagrange que nos ocupa.

Para completar la construcción del control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida que se propone en este capítulo, se presenta a continuación una estructura de implementación práctica la ley de control para sistemas Euler-Lagrange. Como se ha visto, la estructura de control propuesta logra, empleando los resultados del teorema 6.3, estabilizar localmente asintóticamente conjunto *sistema + observador*, verificando una relación de atenuación de perturbaciones en norma 2.

#### 6.4.4. Ley de control

Los teoremas 6.2 y su particularización para sistemas EL, el teorema 6.3, permiten formular una ley de control de realimentación de la salida según la estructura de observador dada en (6.13).

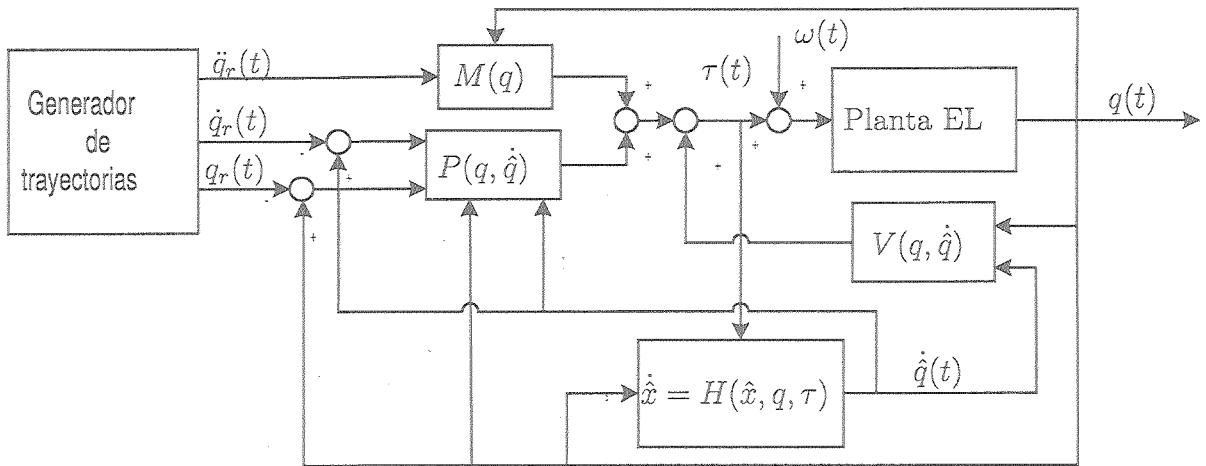


Figura 6.1: Esquema de control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida.

La figura 6.1 muestra la estructura de control  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentación de la salida propuesta, en la cual  $\dot{x} = H(\hat{x}, q, \tau)$  representa la estructura dinámica del observador

propuesto (ecuaciones (6.28) y (6.29)) y

$$V(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q)$$

$$P(q, \dot{q}) = -\frac{1}{\rho}M(q)T_{12}\dot{\tilde{q}} - \frac{1}{\rho}C(q, \dot{q})T_{12}\tilde{q} + \frac{1}{\rho}v^*$$

La ley de control establecida en la figura 6.1 equivale por tanto a

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) - \frac{1}{\rho}M(q)T_{12}\dot{\tilde{q}} - \frac{1}{\rho}C(q, \dot{q})T_{12}\tilde{q} - R^{-1}(\dot{\tilde{y}} + \frac{1}{\rho}T_{12}\tilde{y})$$

## 6.5. Aplicaciones

### 6.5.1. Introducción

En esta sección se presentan algunos resultados obtenidos de la aplicación de la técnica anteriormente descrita de control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida a algunos sistemas sistemas EL. Al igual que hicimos en el capítulo 5, se presentarán resultados de simulación aplicados al robot de dos grados de libertad, y al robot industrial RM10. Asimismo se presentarán resultados experimentales aplicados a la plataforma de dos grados de libertad. Para más detalles sobre estos sistemas, véase el capítulo 5.

### 6.5.2. Aplicación a un robot de dos grados de libertad

Los resultados presentados en este caso corresponden a simulaciones sobre el robot de dos grados de libertad de accionamiento directo, que se describió en el apartado 5.5.1.

Mostraremos en primer lugar el comportamiento de la técnica de control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida en ausencia de perturbaciones. El problema planteado a consistido en el seguimiento de una trayectoria en coordenadas articulares. La trayectoria de referencia adoptada ha sido la misma que fue empleada en el capítulo 5, es decir la representada en la figura 5.5.

Para poner de manifiesto el comportamiento del observador de estados que subyace en la estructura de control propuesta en este capítulo, se ha supuesto que las simulaciones incorporan un cierto grado de incertidumbre en el conocimiento de las condiciones de la posiciones y velocidades articulares de partida. Con ello se pretende observar el comportamiento de convergencia de los parámetros articulares reales y estimados.

Para el diseño del controlador se ha adoptado un nivel de rechazo de perturbaciones  $\gamma = 0,6$  con unas matrices de ponderación para el índice de comportamiento  $R = 0,6I_{2 \times 2}$  y  $Q = 0,9I_{4 \times 4}$ .

La figura 6.2 muestra los resultados de simulación obtenidos en este caso en ausencia de perturbaciones. Los resultados de seguimiento muestran un buen comportamiento

para la estructura de observador, donde se muestra una convergencia gradual entre el estado estimado y el real. En ausencia de perturbaciones, una vez alcanzada la convergencia, el comportamiento del sistema exhibe un comportamiento excelente de seguimiento tanto en posición como en velocidad.

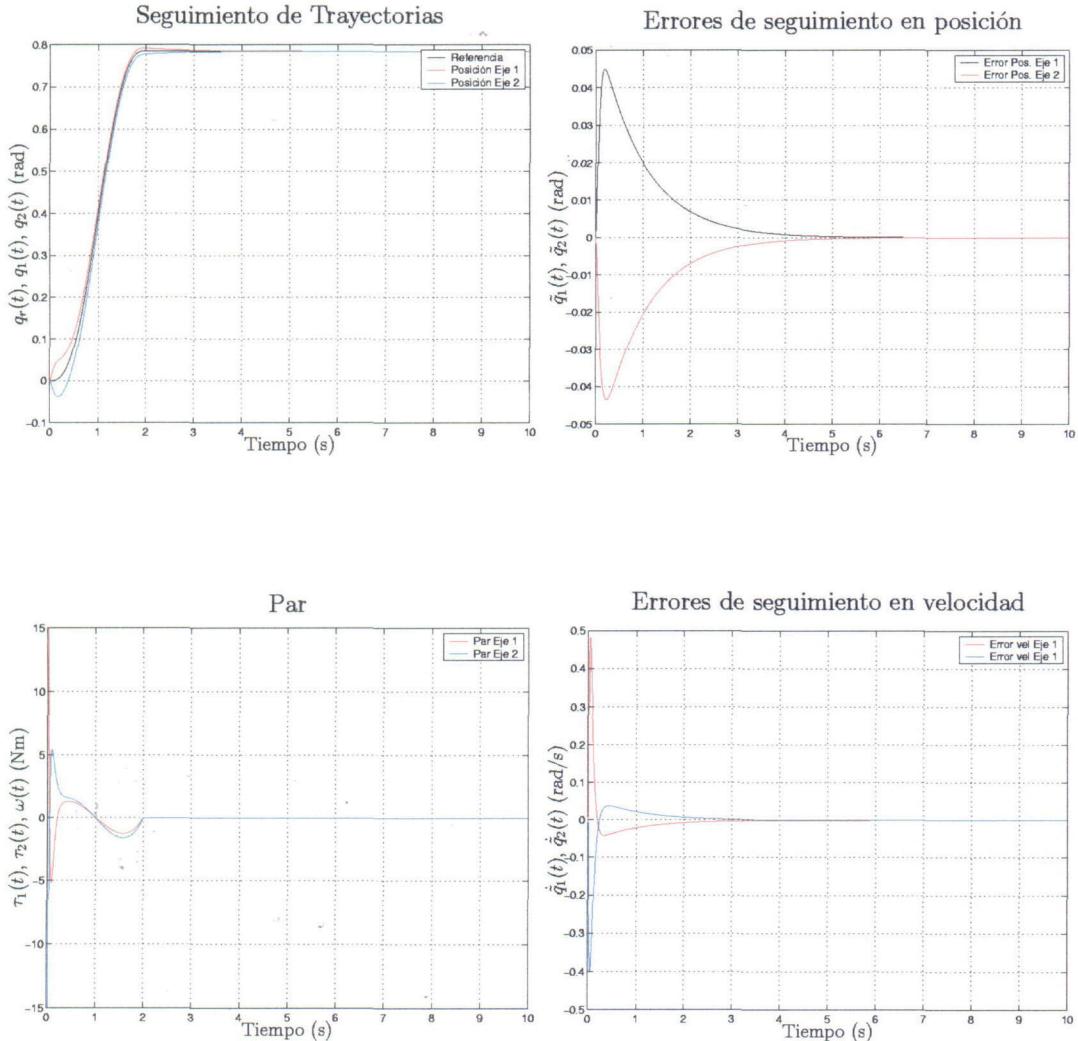


Figura 6.2: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentación de la salida en ausencia de perturbaciones

Los beneficios derivados de la aplicación de la técnica de control  $\mathcal{H}_\infty$  propuesta en este capítulo, se ponen de manifiesto en el caso de considerar perturbaciones actuando sobre el sistema.

Los resultados obtenidos en este caso se muestran en la figura 6.3. Las perturbaciones que se han considerado en este caso han sido de energía finita o  $\mathcal{L}_2$ . Las señales de perturbación han sido simuladas en este caso empleando un generador de señales pseudoaleatorias y han sido convenientemente filtradas para suavizar el perfil de evolución temporal de las mismas. Las perturbaciones constituyen en estos ejemplos de

simulación aproximadamente un 10 % de la energía de la señal de control aplicada.

El comportamiento de seguimiento de trayectorias, tanto en posición como en velocidad se muestra estable, si bien es en general peor que el obtenido en el caso de conocimiento perfecto del vector de estados.

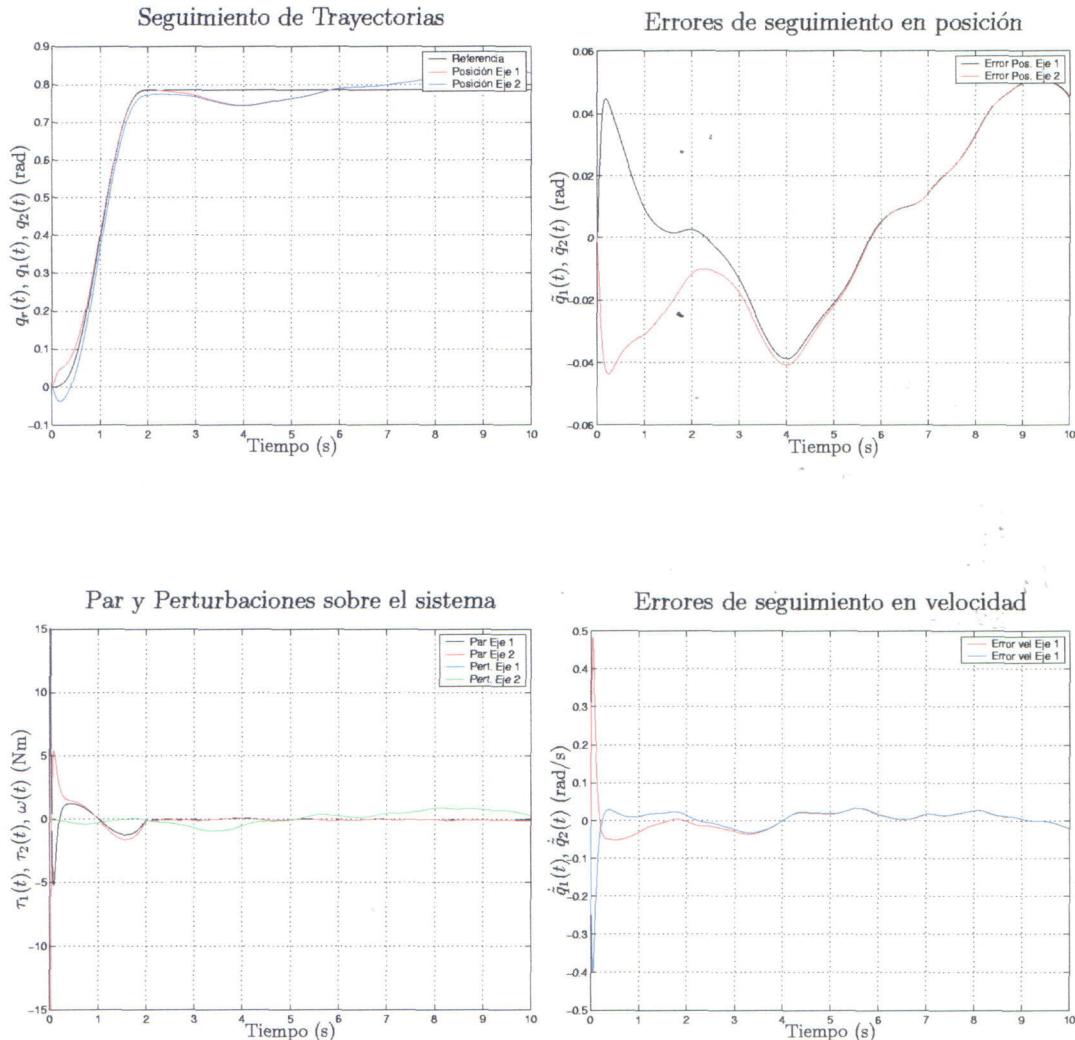


Figura 6.3: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentación de la salida con perturbaciones

Mostraremos a continuación una aplicación real sobre una plataforma giroestabilizada que servirá para validar los resultados aquí presentados.

### 6.5.3. Aplicación a una plataforma giroestabilizada

Presentamos en este apartado resultados experimentales de la aplicación de la técnica de control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida a la plataforma giroestabilizada descrita en el apartado 5.5.3 del capítulo 5.

Para el diseño del control se ha tomado en esta ocasión un nivel de rechazo de perturbaciones  $\gamma = 0,6$ , con unas matrices ponderación para el índice de comportamiento,  $R = 0,6I_{2 \times 2}$  y  $Q = 0,9I_{4 \times 4}$ .

La figura 6.4 presenta los resultados para este experimento sobre el eje de elevación de la plataforma, en la cual se muestran los errores de seguimiento en posición y velocidad, así como los pares aplicados.

Es necesario comentar que esta plataforma de experimentación presenta fenómenos de fricción acusados en sus articulaciones. Al igual que hicimos en el capítulo 5, y para evitar que este fenómeno perturbe el comportamiento del control propuesto, se ha incluido un compensador de fricción en la cadena de control. Podemos observar el comportamiento de este compensador de fricción especialmente en los pasos por velocidad cero, donde el compensador introduce un pequeño *pico de par* para contrarrestar la fricción estática.

El comportamiento en el seguimiento de trayectorias es notable en este caso, poniendo de manifiesto tanto la calidad del control propuesto.

La figura 6.4 muestra asimismo la *velocidad estimada* por la estructura de observador propuesta y una *velocidad medida*, que ha sido obtenida en este caso por derivación numérica directa de la señal de posición de los grados de libertad de la plataforma. Puede observarse como la *velocidad estimada* constituye en este caso una excelente estimación de la *velocidad medida* mucho más ruidosa, y menos apropiada por tanto para control.

Resultados análogos pueden obtenerse para el eje de orientación tal como muestra la figura 6.5

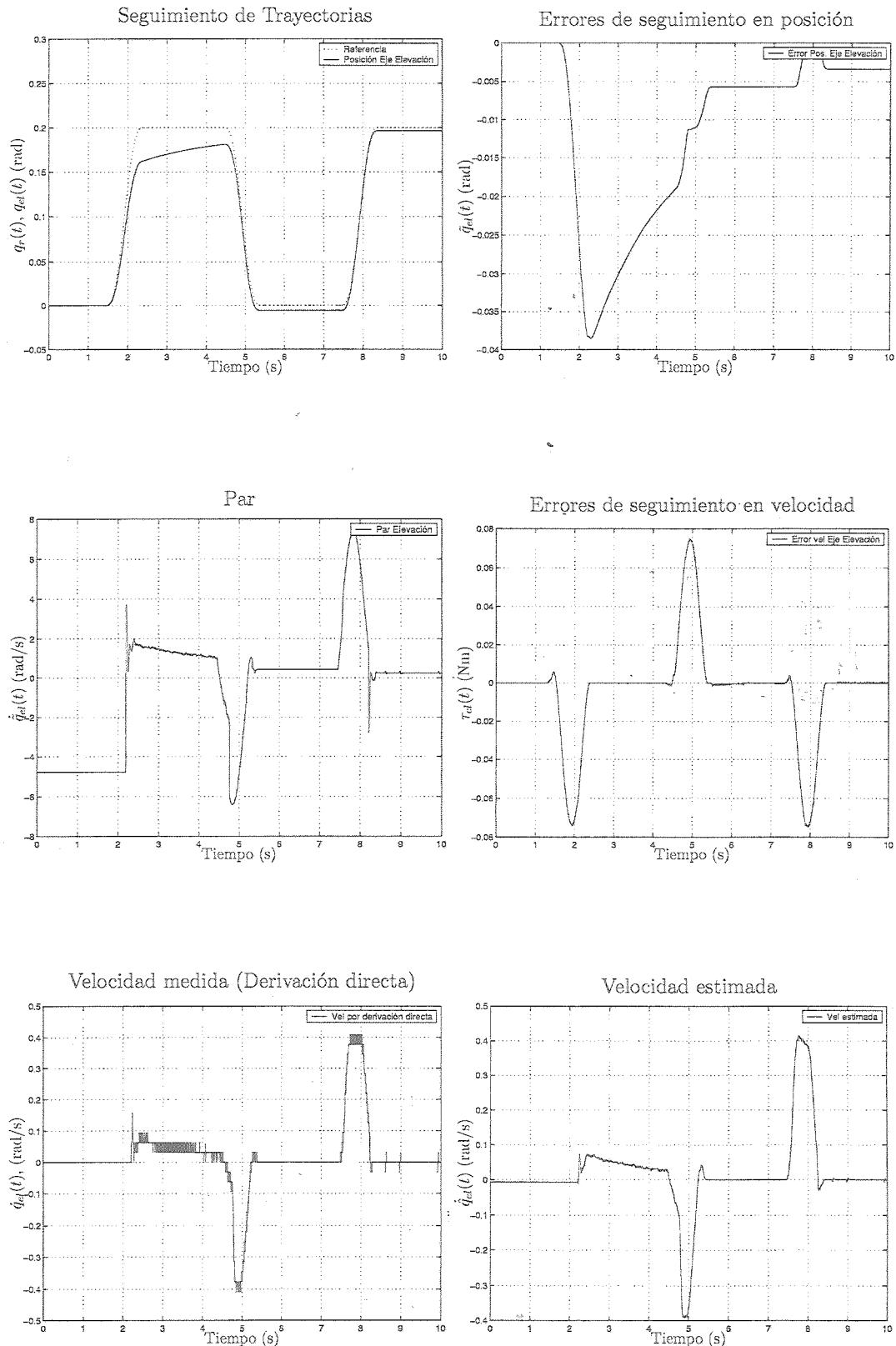


Figura 6.4: Comportamiento del eje de elevación para el control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida.

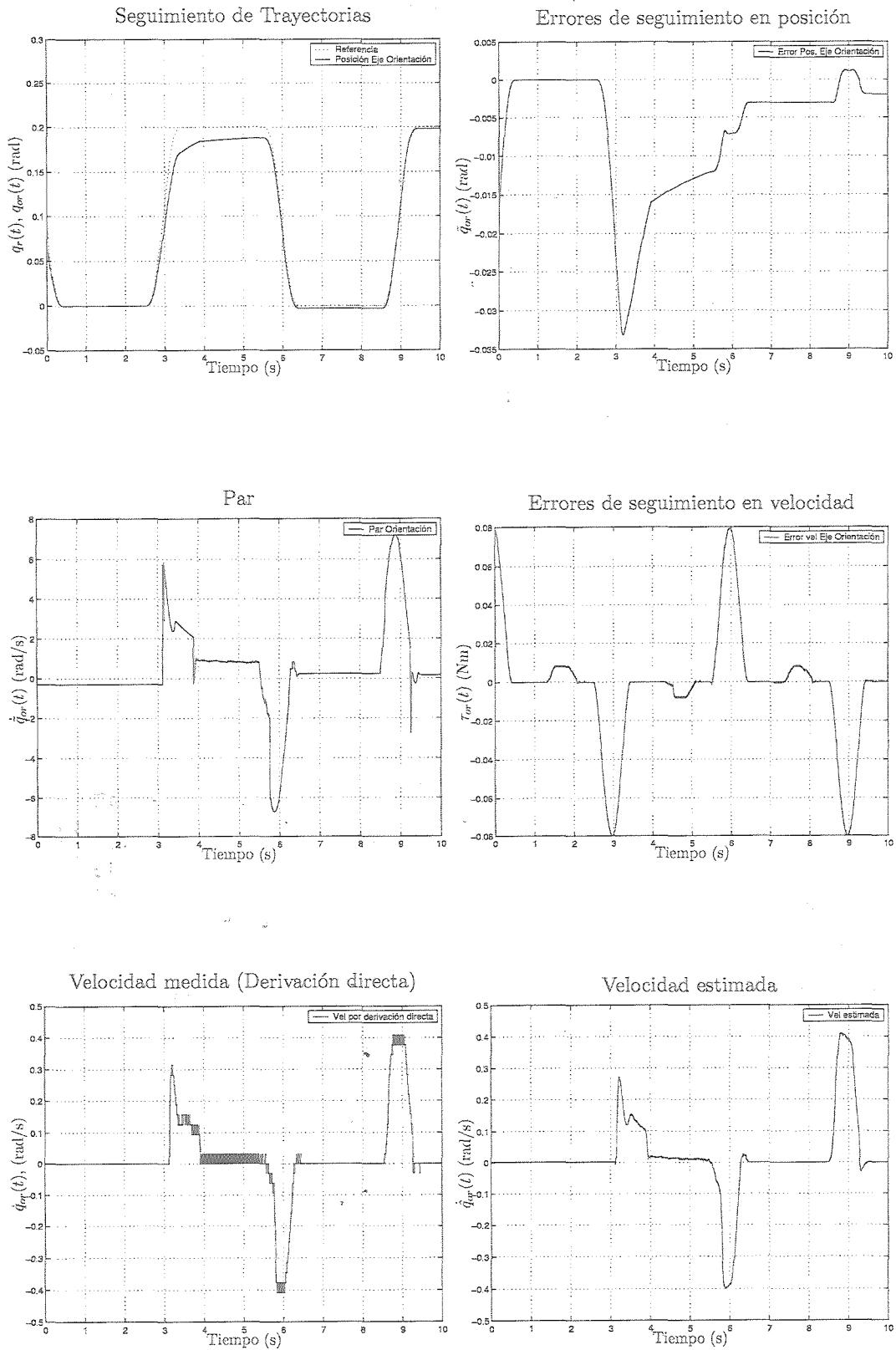


Figura 6.5: Comportamiento del eje de orientación para el control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida

### 6.5.4. Aplicación a un robot industrial de 6 grados de libertad

Mostraremos en este apartado resultados correspondientes a las simulaciones sobre el robot industrial RM10 que ya fue descrito en el apartado 5.5.2 del capítulo 5.

Al igual que hicimos en dicho capítulo, centraremos nuestra atención en el comportamiento de los tres primeros grados de libertad del robot correspondientes a lo que denominamos *cuerpo del robot*.

Las trayectorias consideradas en esta ocasión, han sido generadas empleando de nuevo un generador de trayectorias mediante polinomios de quinto orden, adoptando como condiciones de contorno velocidades y aceleraciones nulas tanto en el origen como en el destino del movimiento. En cuanto a las posiciones de referencia iniciales, éstas se han tomado como  $[ q_1 \ q_2 \ q_3 ] = [ 0 \ 0 \ 0 ]$  rad, mientras que las finales fueron  $[ q_1 \ q_2 \ q_3 ] = [ \frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{4} \ -\frac{\pi}{4} ]$  rad.

Para el diseño del control tomaremos en esta ocasión un nivel de rechazo de perturbaciones  $\gamma = 0,5$ , con unas matrices ponderación para el índice de comportamiento,  $R = 0,6I_{3 \times 3}$  y  $Q = I_{6 \times 6}$ .

En primer lugar mostraremos en la figura 6.6 los resultados sin considerar la influencia de perturbaciones sobre el sistema. Al igual que hicimos en el caso del robot de dos grados de libertad, se ha considerado una discrepancia inicial entre las posiciones y velocidades reales y las estimadas, discrepancia ésta que es satisfactoriamente corregida por la estructura de observador del sistema.

Los verdaderos beneficios de la técnica de control propuesta, se obtienen sin embargo en el caso de considerar la influencia de perturbaciones sobre el sistema. Supondremos que por tanto que el sistema es perturbado por una señal pseudoaleatoria de energía finita que constituye aproximadamente el 10% de la energía de la señal de par del sistema.

Podemos observar en la figura 6.7 las propiedades de rechazo de perturbaciones del control propuesto, así como la correcta estimación del vector de estados por parte del observador embebido en la estructura de control que se propone.

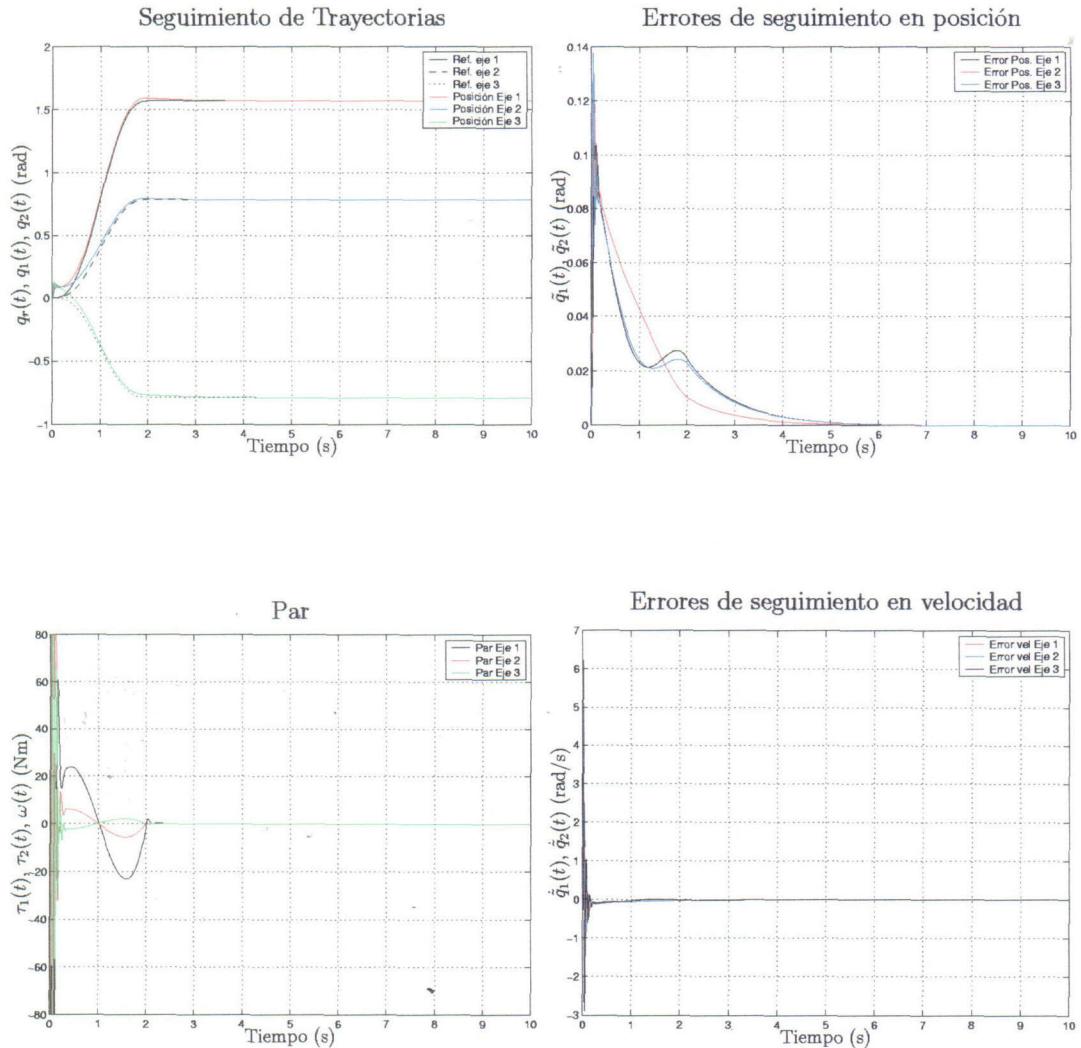


Figura 6.6: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_{\infty}$  de realimentación de la salida en ausencia de perturbaciones

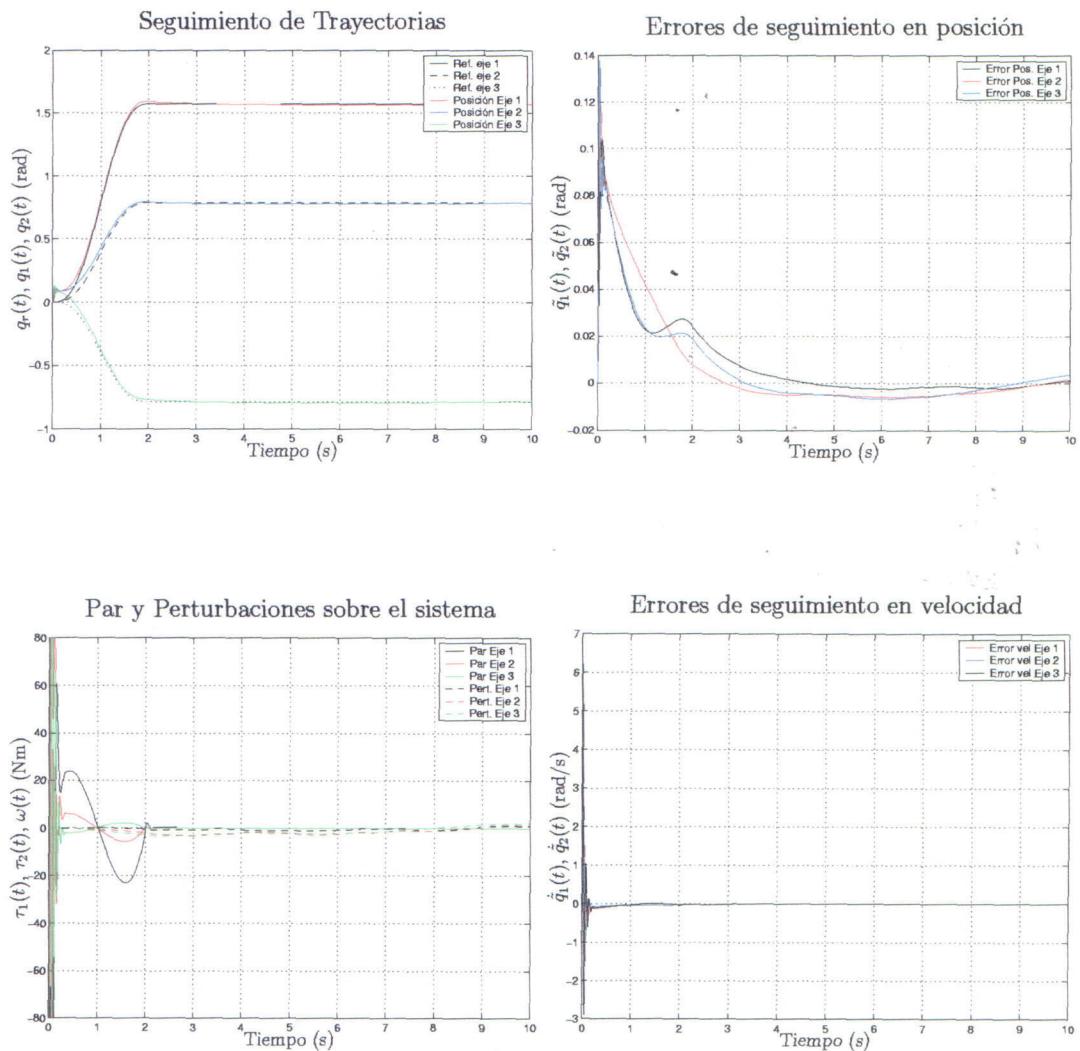


Figura 6.7: Comportamiento del control  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentación de la salida con perturbaciones

# Capítulo 7

## Control de oscilaciones $\mathcal{H}_\infty$ no lineal en sistemas electromecánicos

### 7.1. Introducción

En este capítulo consideramos el problema de la caracterización de órbitas periódicas en sistemas electromecánicos empleando técnicas de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal.

La mayoría de las técnicas de control desarrolladas tradicionalmente en ingeniería de control, abordan problemas de estabilización asintótica de puntos de equilibrio o seguimiento de trayectorias. Este ha sido, por ejemplo, el objetivo de control planteado en los anteriores capítulos de esta Tesis. Recientemente, sin embargo, ha surgido un renovado interés por el problema de estabilización de sistemas dinámicos en torno a órbita, motivado por la necesidad de inducir comportamientos oscilatorios de determinadas magnitudes dinámicas en ciertas aplicaciones. Algunas de estas aplicaciones podrían ser, por ejemplo, los *robots caminantes*, donde las patas del robot que deben moverse según un movimiento alternativo o periódico para lograr un movimiento efectivo, o *inversores de potencia*, en los que la tensión o corriente son las magnitudes que deben oscilar de acuerdo con unas determinadas características.

El problema de estabilización de oscilaciones ha sido tratado en la literatura em-

pleando diversas metodologías, si bien los esfuerzos más recientes se centran en el problema de estabilización de órbitas en sistemas subactuados. Así por ejemplo, podemos encontrar una aproximación hamiltoniana a este problema en (Aracil *et al.* 2002, Gómez-Estern 2002, Ortega *et al.* 2001) donde se emplean técnicas de moldeo de energía para inducir comportamientos oscilatorios estables en diversos tipos de sistemas mecánicos subactuados. Un enfoque diferente para este problema puede encontrarse en (Canudas de Wit *et al.* 2002) donde se introduce el concepto de *restricción virtual*, que con una transformación apropiada del sistema permite reducir éste a un sistema dinámico de orden dos<sup>1</sup> empleando la noción de *dinámica cero*. Para este sistema reducido, es entonces posible diseñar una ley de control de realimentación de estados que permita al sistema alcanzar una órbita estable (Gorgnard and Canudas de Wit 2002).

Como contribución a estas líneas de trabajo, en este capítulo nos proponemos estudiar la síntesis de leyes de control mediante realimentación de estados que permitan inducir comportamientos oscilatorios estables en sistemas electromecánicos subactuados. Para ello se emplearán técnicas de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal ya introducidas en capítulos previos de este trabajo de Tesis.

Son escasos los trabajos que podemos encontrar en el marco  $\mathcal{H}_\infty$ , en lo que se refiere al control de oscilaciones. Cabe mencionar el trabajo en (Chung and Hauser 1994), donde, bajo la hipótesis de la existencia de un ciclo límite para el sistema y empleando un cambio de coordenadas apropiado para el sistema (*ángulo generalizado* y *radio generalizado* del sistema), se resuelve un problema de atenuación de perturbaciones  $L_2$  que induce un comportamiento localmente asintóticamente estable en torno a una órbita periódica. El principal inconveniente de esta solución reside precisamente encontrar el cambio de coordenadas apropiado, para el cual no se proporciona una metodología clara de obtención, y requiere una solución particular en cada caso dependiendo del sistema y de la órbita que queramos inducir.

La solución propuesta en este capítulo está restringida a la obtención de órbitas armónicas para sistemas de orden 2, si bien resulta en principio posible extender esta metodología a sistemas de orden superior empleando estrategias de *backstepping* o *forwarding* como sugieren algunos trabajos (Gómez-Esterñ 2002), aunque este aspecto no ha sido suficientemente estudiado en el desarrollo de este trabajo por limitaciones de tiempo.

De este modo, se plantea en este capítulo una solución para el problema de generación de órbitas estables que ha sido publicada en (Vivas and Rubio 2003), y que emplea también, como ya se ha mencionado, la metodología de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal. Una ventaja de la metodología propuesta es que la aproximación al problema resulta más directa e intuitiva, y no es necesario recurrir a engorrosos cambios de coordenadas, si bien se restringe a la generación de órbitas de tipo armónico. La solución se basa

---

<sup>1</sup>Para sistemas con grado de subactuación igual a 1.

en la transformación del sistema, mediante una ley de prealimentación apropiada para la cual se proporciona expresión explícita, en un sistema equivalente a un oscilador armónico en ausencia de perturbaciones y acción de control. Este oscilador armónico es un sistema lineal que, como es bien sabido no exhibe comportamiento oscilatorios estructuralmente estables, por lo que a continuación se plantea un método para *robustecer* este sistema en términos de atenuación  $L_2$  de perturbaciones en torno a la órbita deseada planteando y resolviendo una ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman apropiada. Para ello se propone una forma explícita para la función de Bellman del sistema así como un método numérico que permite ajustar los parámetros libres de la misma. Como se verá, dicho método numérico es una adaptación del bien conocido método de Galerkin para el caso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Para validar los resultados presentados en este capítulo, se presentan resultados tanto de simulación como experimentales sobre un péndulo de Furuta.

## 7.2. Formulación general del problema

Consideremos un sistema dinámico no lineal afín en la actuación de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u + g_2(x_1, x_2)\omega\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde  $f(x)$ ,  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  son funciones suficientemente suaves definidas en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = [x_1, x_2]^T \in \mathcal{R}^2$ , es el vector de estados del sistema,  $u \in \mathcal{R}$  es la acción de control y  $\omega \in \mathcal{R}$  representa un señal de perturbación de exógena en la planta.

Consideraremos además, tal como se ha hecho en anteriores capítulos, una señal de penalización  $z(x, u) \in \mathbb{R}^{m_z}$ , que nos permitirá ponderar robustez frente a comportamiento del sistema.

Con el objeto de caracterizar el comportamiento oscilatorio buscado para el sistema, se definirá además una órbita *objetivo*, que como sugiere su nombre, representa la dinámica oscilatoria deseada para el sistema controlado. Supondremos que dicha órbita *objetivo* puede describirse en general en términos de un generador de órbitas  $\beta_d(x_1, x_2)$  dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \beta_d(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{7.2}$$

de tal modo que la órbita objetivo es un invariante del sistema dinámico (7.2).

No obstante, el diseño de una ley de control asintóticamente estabilizante en torno a una órbita objetivo genérica,  $\eta_t(x_1, x_2)$ , es en general una tarea complicada. Como se ha mencionado, en (Hauser and Chung 1994) se plantea un marco teórico para la solución de este problema empleando órbitas genéricas, si bien se requiere encontrar un cambio de coordenadas apropiado que no resulta difícil si no imposible en ciertos casos de encontrar. Por este motivo, restringiremos el estudio en este capítulo a órbitas de tipo armónico, es decir, particularizaremos  $\beta_d(x_1, x_2) = -\omega_c^2 x_1$ , donde  $\omega_c$  representa la pulsación del movimiento armónico. Tomando  $\beta_d$  de este modo, transformamos el sistema (7.2) en lo que llamaremos un *generador de órbitas armónicas*.

Es sin embargo un hecho bien conocido, que el *generador de órbitas armónicas* así definido, no constituye un generador de órbitas estructuralmente estables. Esto es debido a que las propiedades armónicas del sistema se derivan de una característica tan débil, como es la de imponer que el sistema posea una pareja de polos conjugados exactamente sobre el eje imaginario. En otras palabras, las órbitas proporcionadas por este generador armónico, son extremadamente frágiles en la práctica, ya que la más mínima perturbación sobre el sistema hace que el sistema se vuelva, bien inestable, o bien tienda al origen y deje por tanto de oscilar. Es además interesante comentar que el generador armónico antes introducido, define un conjunto infinito de órbitas periódicas,  $\eta$ , de una determinada pulsación que cubren todo el espacio de estados. La órbita concreta sobre la que evolucione el sistema (suponiendo ausencia de perturbaciones) dependerá de las condiciones iniciales del mismo.

A la vista de estas ideas, es necesario, por tanto, *robustecer* el comportamiento del sistema en torno a la órbita objetivo, planteamiento éste que se realiza, como se ha adelantado, en el contexto del rechazo de perturbaciones  $L_2$ .

Introduciremos a continuación algunas definiciones que resultarán útiles para el planteamiento formal del problema y algunos resultados que mostraremos con posterioridad.

**Definición 7.1 (Órbita armónica objetivo).** *Sea  $\eta$  el conjunto de ciclos límites asociado al generador de órbitas armónicas previamente introducido. Definimos la órbita armónica objetivo,  $\eta_0(\omega_c, \mu)$ , como la órbita elíptica en  $\eta$ , cuyo plano de fase se corresponde con el conjunto  $\eta_0(\omega_c, \mu)(x) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \omega_c^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu^2 = 0\}$ .*

Para caracterizar la estabilidad del sistema dinámico en torno a una órbita, y como contraposición de la bien conocida definición de estabilidad para punto de equilibrio, definimos:

**Definición 7.2 (Estabilidad local asintótica en torno a una órbita).** *Decimos que un sistema (7.1) es localmente asintóticamente estable en torno a una órbita objetivo  $\eta_t(x)$ , si existe un entorno  $\mathcal{B}$  de  $\eta_t(x)$  tal que para todo  $x(0) \in \mathcal{B}$ , tenemos que*

$d(x(t), \eta_t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ , donde  $d(x(t), \eta_t)$  es alguna medida de la distancia<sup>2</sup> de  $x(t)$  a la órbita objetivo  $\eta_t$ .

Asimismo, definimos la ganancia  $L_2$  local en torno a una órbita como:

**Definición 7.3 (Ganancia  $L_2$  local en torno a una órbita).** Decimos que un sistema (7.1) tiene ganancia  $L_2$  menor que  $\gamma$  respecto a  $\omega(t)$ , localmente en torno a una órbita  $\eta_t$ , si existe una constante  $\delta > 0$  tal que para  $x_0 \in \eta_t$  y para todo  $\omega \in \mathbb{L}_2$  tal que  $\|\omega(t)\| \leq \delta$ ,  $t > 0$  se verifica

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \|z(\tau)\|^2 d\tau < \frac{\gamma^2}{2} \int_0^\infty \|\omega(\tau)\|^2 d\tau \quad (7.3)$$

Con este planteamiento, y de acuerdo con la formulación de rechazo de perturbaciones  $L_2$  asociada al problema  $\mathcal{H}_\infty$  introducida en el capítulo 3, el objetivo de control planteado puede ser enunciado como: *encontrar una ley de realimentación de estados,  $u(x)$ , que estabilice localmente asintóticamente el sistema en torno a una órbita objetivo,  $\eta_t(x_1, x_2)$ , definida en  $\mathbb{R}^2$ , con ganancia  $L_2$  local en torno a  $\eta_t(x_1, x_2)$  menor que  $\gamma$ .*

### 7.3. Obtención de órbitas armónicas

El procedimiento de obtención de órbitas armónicas propuesto en este capítulo se lleva a cabo en dos etapas:

- En una primera etapa se transforma el sistema original (7.1) mediante una ley de realimentación de estados, para hacerlo coincidir con el generador de la órbita armónica objetivo en ausencia de perturbaciones y acción de control.
- En un segunda etapa, aplicamos un procedimiento para *robustecer* el comportamiento de la órbita seleccionada, de modo que ésta sea localmente asintóticamente estable verificando una ganancia  $L_2$  en torno a la órbita objetivo menor que un determinado valor prefijado  $\gamma$ .

---

<sup>2</sup> $d(x(t), \eta_t)$  es un operador que verifica las condiciones necesarias para ser considerado una medida de distancia, es decir: toma siempre valores positivos, excepto para  $x(t)$  sobre la órbita  $\eta_t$  que vale 0, y verifica la desigualdad triangular.

### 7.3.1. Transformación en oscilador armónico para el sistema

Consideremos una transformación de la ley de control como

$$u = g_1(x_1, x_2)^{-1}(-\omega_c x_1 - f(x_1, x_2)) + v \quad (7.4)$$

donde asumimos que  $g_1(x_1, x_2)^{-1}$  está bien definida en el dominio de interés considerado.

Con esta transformación el sistema original (7.1) adopta la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_c^2 x_1 + g_2(x_1, x_2)\omega + v\end{aligned} \quad (7.5)$$

que se corresponde con un generador de órbitas armónicas de pulsación  $\omega_c$  para el caso en que  $\omega(t) = 0$  y  $u(t) = 0$ .

Con esta transformación aparece una nueva acción libre de control,  $v$ , que puede interpretarse como el esfuerzo de control que es necesario aplicar al sistema para corregir las desviaciones sobre la órbita objetivo que las perturbaciones,  $\omega(t)$ , inducen sobre el sistema.

### 7.3.2. Robustificación de la ley de control de oscilaciones

Tras la transformación establecida en el paso anterior, el objetivo de control se traduce a encontrar la ley de control expresada en la nueva variables,  $v$ , que estabilice asintóticamente el sistema en torno a la órbita armónica objetivo, garantizando un nivel  $\gamma$  de atenuación de perturbaciones  $L_2$  para el canal  $\omega \mapsto z$ .

Considérese como señal de penalización  $z(x, u)$  en (7.3), una función de la forma

$$z = \begin{bmatrix} h(x) \\ \sigma v \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

con  $h(x) = \omega_c^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu^2$  y  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

Para justificar esta elección particular, resulta interesante observar que la función  $h(x)$  es una medida de la distancia del punto  $x$  del espacio de estados a la órbita armónica objetivo, según la definición 7.1. Es fácil comprobar por ejemplo que  $h(x)$  se anula sobre la órbita armónica objetivo

Con esta interpretación, resulta evidente que la señal  $z$  en (7.6) representa una penalización, ponderada por el parámetro  $\sigma$ , del comportamiento del sistema a través de  $h(x)$ , y el esfuerzo de control asociado a  $v$ .

Llegados a este punto se introduce la noción de función definida positiva sobre una órbita, que será empleada con posterioridad.

**Definición 7.4 (Función definida positiva sobre una órbita).** Una función  $V$  definida en un entorno  $\mathcal{B}$  de  $\eta_0(\omega_c, \mu)$  tal que  $V(x) : \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es definida positiva sobre la órbita  $\eta_0(\omega_c, \mu)$  si  $V(x) = 0 \forall x \in \eta_0$  y  $V(x) > 0 \forall x \in \mathcal{B} \setminus \eta_0(\omega_c, \mu)$  en un entorno abierto de  $\eta_0(\omega_c, \mu)$ .

El siguiente teorema permite establecer

**Teorema 7.1.** Considérese el sistema no lineal transformado en (7.5) y supóngase que existe una función definida positiva que  $V(x)$  en  $\eta_0(\omega_c, \mu)$  que satisface

$$\frac{\partial V}{\partial x} F(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma^2} G_2(x) G_2^T(x) - \frac{1}{\sigma^2} G_1(x) G_1^T(x) \right) \frac{\partial^T V}{\partial x} + \frac{1}{2} H^T(x) H(x) \leq 0 \quad (7.7)$$

donde

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\omega_c^2 x_1 \end{bmatrix} \quad G_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x) \end{bmatrix} \quad H(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ h(x) \end{bmatrix}$$

entonces el control  $v = -\frac{1}{\sigma^2} G_1^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}$  proporciona una ganancia  $L_2$  menor que  $\gamma$  localmente en torno a  $\eta_0(\omega_c, \mu)$ , para la correspondencia  $\omega \mapsto z$  en el sistema (7.5).

Adicionalmente, si existe una ley de control suave  $v(x) = \Gamma(x)$ , tal que existe una función escalar,  $V(x)$ , definida positiva en  $\eta_0(\omega_c, \mu)$  con tasa de aporte  $r(\omega, z) = \frac{1}{2}\gamma^2\omega^T\omega - \frac{1}{2}z^Tz$ , entonces  $V(x)$  es también una para la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (7.7).

### Demostración:

La demostración de este resultado es una extensión para sistemas oscilatorios de los resultados presentados en el capítulo 3 en el marco de la teoría de sistemas disipativos. Podemos encontrar una versión de este resultado en (Hauser and Chung 1994), del cual mostramos a continuación una versión resumida en aras de completitud de este documento.

Resulta evidente según las consideraciones mostradas en el capítulo 3 de esta Tesis, que probar que el sistema (7.5) tiene ganancia  $L_2$  menor que  $\gamma$  para la correspondencia

$\omega \mapsto z$  es equivalente a mostrar que el sistema a lazo cerrado es disipativo respecto a la tasa de aporte  $r(\omega, z) = \frac{1}{2}\gamma^2\omega^T\omega - \frac{1}{2}z^Tz$ .

Asumamos que existe una ley de control de realimentación de estados,  $v(x) = \Gamma(x)$ , que proporciona una ganancia  $L_2$  menor que  $\gamma$  en torno a la órbita objetivo para el sistema (7.5) a lazo cerrado.

Esto es equivalente a imponer que se satisface la desigualdad de disipación

$$0 \leq V(x(t)) \leq \int_0^t r(\omega(\xi), z(\xi)) d\xi \quad (7.8)$$

Diferenciando esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene la ecuación de disipación diferencial

$$\dot{D}(\omega, u) = r(\omega(t), z(t)) - \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \quad (7.9)$$

donde  $\dot{D}(\omega, u)$  representa la *tasa de disipación de energía* del sistema, que debe ser positiva para un sistema disipativo.

Si se tiene en cuenta que  $\dot{x} = F(x) + G_1(x)u + G_2(x)\omega$  y se sustituyen la expresión de la tasa de aporte,  $r(\cdot)$  y (7.6) en (7.9), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{D}(\omega, u) = & \left[ \frac{\gamma^2}{2}\omega^T\omega - \frac{\partial V}{\partial x}G_2(x)\omega \right] - \frac{1}{2}\sigma u^T u + \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}G_1(x)u - \frac{\partial V}{\partial x}F(x) - \frac{1}{2}H^T(x)H(x) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Dado que  $\dot{D}(\omega, u)$  es una función cuadrática en  $\omega$  y  $u$ ,  $\dot{D}(\omega, u)$  tiene un mínimo global y único en

$$\omega^*(x) = \frac{1}{\gamma^2}G_2^T(x)\frac{\partial V}{\partial x} \quad (7.11)$$

y una máxima global y única para

$$u^*(x) = -\frac{1}{\sigma^2}G_1^T(x)\frac{\partial V}{\partial x} \quad (7.12)$$

donde  $u^*$  es la ley de control disipativa deseada y  $\omega^*$  representa la peor perturbación que puede actuar sobre el sistema para una acción de control dada.

De este modo, para hacer que el lazo cerrado del sistema sea disipativo, debemos imponer que  $\dot{D}(\omega, u) \geq 0$ . Por tanto

$$\dot{D}(\omega^*, u^*) = \max_u \min_{\omega} \dot{D}(\omega, u) \geq 0 \quad (7.13)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (7.10), (7.11) y (7.12) en (7.13), se obtiene finalmente la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman en (7.7).

Por otro lado, si asumimos que existe una función de almacenamiento  $V(x) \geq 0$  definida positiva sobre la órbita objetivo  $\eta_0(\omega_c, \mu)$  que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman en (7.7), podemos reescribir dicha ecuación sustituyendo la ley de control proporcionada por el teorema,  $u(x) = \Gamma(x) = -\frac{1}{\sigma^2} G_1^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}$ , y la peor perturbación admisible (7.11) en la desigualdad de disipación diferencial (7.10), como

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} \left( F(x) - \frac{1}{\sigma^2} G_1(x) G_1(x)^T \frac{\partial V^T}{\partial x} \right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left( G_2(x) G_2^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right) + \\ + \frac{1}{2\sigma^2} \left( G_1(x) G_1^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} H^T(x) H(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

expresión ésta que muestra que el sistema posee ganancia  $L_2$  menor que  $\gamma$  en torno a la órbita objetivo.

q.o.d.

## 7.4. Solución de la inecuación de HJB para estabilización de oscilaciones

Al igual que sucedió en los capítulos 5 y 6, para los problemas de control híbrido  $\mathcal{H}_\epsilon/\mathcal{H}_\infty$  y control  $\mathcal{H}_\infty$  mediante realimentación de la salida, uno de los principales obstáculos que encontramos para la aplicación de las estrategias de control  $\mathcal{H}_\infty$  en el marco no lineal, es encontrar solución a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman asociadas.

Para el problema de estabilización de oscilaciones planteadas en este capítulo, el problema se traduce en encontrar una función escalar,  $V(x)$ , definida positiva sobre la órbita objetivo, de modo que se satisfaga inecuación diferencial (7.7) expresada en el teorema 7.1.

La metodología que de propone a continuación permite obtener una solución local aproximada para este problema empleando un método numérico basado en una adaptación del conocido método de Galerkin para la solución de EDP.

### 7.4.1. Aplicación del método de Galerkin para la solución de la inecuación de HJB

El método propuesto en este apartado para la obtención de una solución local aproximada de la ecuación HJB asociada al problema de estabilización de oscilaciones, se basa en una adaptación de la metodología propuesta en (Beard and McLain 1998) para este contexto.

La ventaja asociada a la metodología de Galerkin reside en el hecho de que permite seleccionar la estructura de las soluciones que se pretende obtener, al configurar ésta como una combinación lineal de *funciones de aproximación* que pueden ser seleccionadas libremente con la única condición de que sean linealmente independientes. El grado de bondad de la solución obtenida, dependerá por tanto de lo apropiado de estas funciones de aproximación para el problema tratado. En el caso del control de oscilaciones, esta característica del método es especialmente interesante ya permite imponer, entre otras, la característica necesaria de que la solución sea definida positiva sobre la órbita objetivo, hecho éste difícil de imponer con otros métodos numéricos.

El algoritmo que se muestra a continuación proporciona la metodología básica para la obtención de una solución aproximada para la función  $V(x)$  de (7.7), expresada en el teorema 7.1.

**Algoritmo 7.1 (Método numérico para inecuación HJB de oscilaciones).** *El algoritmo consta de dos lazos iterativos en las variables  $i$  y  $j$ , según el esquema*

1. Sea  $v^{(0)} = 0$  un ley de control de partida que estabiliza el sistema en ausencia de control y perturbaciones sobre la órbita objetivo  $\eta_0(\omega_c, \mu)$

2. Para:  $i = 0:\infty$ , Sea:  $\omega^{(i,0)} = 0$

2.1 Para:  $j = 0:\infty$ , Resolver: (ver ecuación (7.18))

$$\frac{\partial V^{(i,j)}}{\partial x} (F(x) + G_1 v^{(i)} + G_2 \omega^{(i,j)}) + |h|^2 + \sigma^2 |u^{(i)}|^2 - \gamma^2 |\omega^{(i,j)}|^2 = 0 \quad (7.15)$$

2.2 Sea:  $\omega^{(i,j+1)} = \frac{1}{\gamma^2} G_2^T \frac{\partial V^{(i,j)}}{\partial x}$

3. Sea:  $v^{(i+1)} = -\frac{1}{\sigma^2} G_1^T \frac{\partial V^{(i,\infty)}}{\partial x}$

La justificación matemática de este algoritmo, está fuera del alcance de este documento de Tesis<sup>3</sup>, si bien no resulta complicado dar una explicación intuitiva de su

<sup>3</sup>El lector interesado puede consultar esta justificación en (Beard and McLain 1998)

funcionamiento: el algoritmo consiste en dos iteraciones anidadas correspondientes al problema *min-max* asociadas al problema  $\mathcal{H}_\infty$ . De este modo, el lazo interno itera para aproximar la solución de la ecuación de HJB original a través de una secuencia de funciones  $v^{(i)}$  obtenidas de una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales (7.15), que, al ser lineal, puede ser resuelta, como veremos, en términos de una expansión en serie de funciones de aproximación de Galerkin. En el lazo interno también se calcula la expresión de la peor de las posibles perturbaciones,  $\omega^{(i,j+1)}$ , en términos de ganancia  $L_2$ , para el control  $v^{(i)}$  calculado hasta ese momento. El lazo externo por su parte, actualiza en cada iteración la ley de control para mejorar el comportamiento, de nuevo en términos de ganancia  $L_2$ , para la peor de las perturbaciones posibles calculadas en el lazo interno.

Con el objeto de obtener un algoritmo implementable, los lazo iterativos deben ser lógicamente truncados a un nivel de aproximación  $N$ . La precisión de la solución depende del valor de este grado de aproximación, si bien se ha comprobado mediante simulación que valores de  $N$  no mayores de 5 proporcionan niveles de aproximación aceptables para la solución y mantienen el tiempo de cómputo razonablemente bajo.

Por otro lado, la aplicación del algoritmo 7.1 requiere obtener una solución en cada paso de iteración para la ecuación (7.15). Esta solución puede aproximarse empleando una aproximación en serie Galerkin de la forma

$$V^{(i,j)} = \sum_{k=1}^N c_k^{(i,j)} \phi_k(x) \quad (7.16)$$

donde  $\phi_k(x)$  son las funciones de aproximación del desarrollo en serie, y  $c_k^{(i,j)}$  son los coeficientes libres a determinar.

Al aplicar la aproximación en serie de Galerkin para la solución del problema, incurrimos necesariamente en un error

$$\text{Error}_N = \left( \sum_{k=1}^N c_k^{(i,j)} \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} \right) (F(x) + G_1 v^{(i)} + G_2 \omega^{(i,j)}) + |h|^2 + \sigma^2 |u^{(i)}|^2 - \gamma^2 |\omega^{(i,j)}|^2 = 0 \quad (7.17)$$

La mejor aproximación en serie será por tanto, aquella combinación de coeficientes  $c_k^{(i,j)}$  que minimicen el error anterior para una estado de aproximación  $(i, j)$  dados. Es un resultado bien conocido, que el conjunto de coeficientes que minimizan cuadráticamente este error pueden obtenerse de la proyección de la expresión del error sobre el espacio lineal expandido por  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^N$ . En términos matemáticos, esto equivale a resolver el siguiente sistema de  $N$  ecuaciones lineales sobre los coeficientes  $c_k^{(i,j)}$  para un estado de aproximación  $(i, j)$  dado:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial V^{(i,j)}}{\partial x} (F(x) + G_1 u^{(i)} + G_2 \omega^{(i,j)}) + |h|^2 + |u^{(i)}|^2 - \gamma^2 |\omega^{(i,j)}|^2 \right) \phi_k(x) dx = 0 \quad (7.18)$$

donde  $\Omega$  representa un conjunto compacto de la región de estabilidad de la ley de control estabilizante inicial,  $v^{(0)}$  en torno a la órbita armónica objetivo  $\eta_0(\omega_c, \mu)$ . En términos prácticos  $\Omega$  puede asimilarse a la región local en torno a la órbita de la que se quiere aproximar la solución del problema.

Una contribución principal de este trabajo de Tesis consiste en la apropiada elección de las funciones de aproximación para el caso de estabilización de oscilaciones. Para cumplir con los requisitos mencionados del método iterativo aplicado, estas funciones de aproximación se han seleccionado tales que  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  representan un juego completo de funciones linealmente independientes y definidas positivas en  $\eta_0(\omega_c, \mu) \in \mathcal{R}^2$ .

En (Aracil *et al.* 2002, Gómez-Estern 2002) se emplea un tipo de función definida positiva sobre una órbita armónica para estabilización de oscilaciones en el contexto de métodos Hamiltonianos. Inspirado en estos resultados, se han seleccionado funciones de aproximación de la forma:

$$\phi_k(x) = (\omega_c^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu^2)^{2k} \quad k = 1 \dots \infty \quad (7.19)$$

con  $\mu > 0$ . La figura (7.1) muestra la forma de estas funciones de aproximación donde puede observarse que efectivamente son funciones definidas positivas sobre la órbita objetivo, propiedad que se conserva para una combinación lineal de ellas, tal como se propone en (7.16) para  $V(x)$ .

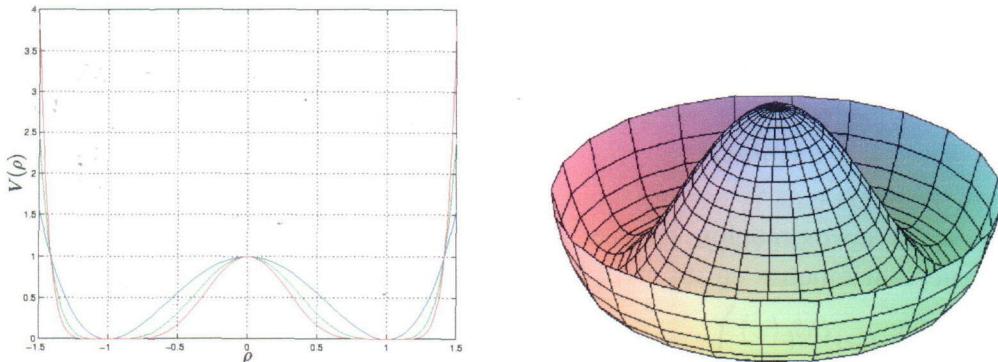


Figura 7.1: Forma de las funciones de aproximación,  $\phi_k(x) = (\omega_c^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu^2)^{2k}$  con  $\rho^2 = \omega_c^2 x_1^2 + x_2^2$  para diferentes valores de  $k$ , y representación 3D para  $k = 1$ .

De este modo, la ley de control resultante puede ser aproximada por la expresión

$$v_N^{(i,j)} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N c_k^{(i,j)} g_1^T \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} \quad (7.20)$$

donde los coeficientes  $c_k^{(i,j)}$  se calculan mediante el método numérico descrito en este apartado.

Para la aplicación del método numérico desarrollado en este apartado se han desarrollados rutinas empleando el conocido programa de cálculo simbólico, Maple. En el Apéndice B puede encontrarse una descripción del código de estas rutinas para la obtención de los coeficientes de aproximación.

## 7.5. Algunos comentarios adicionales

- La metodología de control propuesta en el apartado anterior para la síntesis de control de órbitas estables mediante metodología  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal, emplea un método numérico adaptado de Galerkin para la obtención de una solución aproximada local en torno a la órbita objetivo.

Una particularidad del método numérico de Galerkin es que éste siempre proporciona, al menos aparentemente, una solución para el problema. La “calidad” de la solución depende, sin embargo, en buena medida de lo apropiado de la elección de las funciones de aproximación. Para determinar en qué medida la solución obtenida es válida, resulta interesante evaluar el error obtenido mediante la expresión (7.17). Si este error es excesivo, se estará obteniendo probablemente una solución inaceptable que no conducirá a los resultados deseados una vez implementada.

Un caso típico en que la solución obtenida no es aceptable, es aquél en que se impone un nivel de atenuación de perturbaciones  $\gamma$  demasiado exigente. En este caso, el algoritmo proporciona una solución que conduce a errores porcentuales superiores al 100

- Por otro lado resulta interesante mencionar que la metodología de estabilización de oscilaciones planteada en este capítulo requiere, como es propio en la formulación  $\mathcal{H}_\infty$  genérica, que las perturbaciones que actúen sobre el sistema sean de clase  $\mathcal{L}_2$ , es decir que tengan energía finita. Esta hipótesis puede resultar un tanto restrictiva para el problema particular que se está considerando, ya que quedarían excluidas de esta categoría las perturbaciones de naturaleza periódica ya que no tienen definida su norma-2 sobre intervalos infinitos de tiempo.

Esta restricción puede si embargo relajarse ligeramente aplicando la interpretación de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas nolineales introducida en (Isidori and Byrnes 1989, Isidori and Byrnes 1990). En este trabajo los autores reinterpretan dicha norma aludiendo al equivalente para sistemas lineales de la norma  $\mathcal{H}_\infty$ , es decir la relación de ganancias de las señales de entrada y salida en régimen senoidal permanente.

La clave de esta extensión reside en la noción de *régimen de estado estacionario* para un sistema no lineal desarrollada en (Isidori and Byrnes 1989). Concretamente, puede demostrarse que si un sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x, w)$$

es localmente asintóticamente estable en el origen  $(x, w) = (0, 0)$ , y si la señal  $w$  es generada por un oscilador periódico de periodo  $T$  de la forma

$$\dot{w} = s(w)$$

entonces el sistema compuesto tiene como *variedad central*<sup>4</sup>

$$S = \{(x, w) : x = \pi(w)\}$$

de una correspondencia  $x = \pi(w)$  de clase  $C^1$  definida en un entorno  $W$  de  $w = 0$ .

Dado que esta variedad central es localmente atractiva, resulta que la señal  $w(t)$  estará confinada en  $W$  para todo  $t$ , si la condición inicial,  $x(0)$ , es suficientemente próxima a la variedad central. O equivalentemente, la trayectoria  $x(\cdot)$  que pasa por  $x(0)$  converge a la *trayectoria estacionaria*  $x_{ss}(\cdot)$  que pasa por  $\pi(w(0))$ .

La trayectoria  $x_{ss}(\cdot)$  es la conocida como *respuesta de estado estacionario* del sistema no lineal a la entrada periódica  $w(\cdot)$ .

De este modo, si  $w(\cdot)$  es una señal periódica de periodo  $T$ , también lo será  $x_{ss}(\cdot)$ , y por tanto la relación de atenuación de perturbaciones puede reducirse a

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \|z(\tau)\|^2 d\tau < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \|\omega(\tau)\|^2 d\tau$$

relación que requiere únicamente que las perturbaciones  $\omega(t)$ , sean integrables en un periodo  $T$ , y no para un intervalo infinito de tiempo.

Las analogías de este razonamiento con el problema planteado en este capítulo resultan obvias si consideramos como generador de oscilaciones exógeno  $w(\cdot)$  al sistema oscilante considerado.

## 7.6. Resultados experimentales y de simulación

Con el objeto de corroborar la validez de la metodología descrita en este capítulo, mostramos a continuación una aplicación de la misma sobre un sistema subactuado bien conocido en la literatura especializada: el péndulo de Furuta.

### 7.6.1. Descripción del péndulo de Furuta y ecuaciones dinámicas

El péndulo de Furuta es un sistema electromecánico consistente en un brazo articulado sobre el que bascula un vástago dispuesto ortogonalmente a éste (ver figura 7.2).

<sup>4</sup>Traducción del término *Central Manifold*.

El sistema tiene por tanto dos grados de libertad: uno ( $\theta$ ) asociado al movimiento del brazo, y otro ( $\phi$ ) que describe la posición angular la varilla. De estos grados de libertad, únicamente el asociado a la posición angular del brazo es directamente controlable. Estamos por tanto ante un sistema subactuado.

El sistema empleado para obtener los resultados experimentales en este apartado, ha consistido en un péndulo de Furuta diseñado y desarrollado íntegramente en el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla.

El sistema está actuado por un motor de corriente continua sin escobillas (“Brushless”) que proporciona un alto par de forma continua, con independencia de la posición angular del rotor. La electrónica de control y supervisión está compuesta por una tarjeta de adquisición de datos de la firma DSpace, que permite implementar complejas estructuras de control empleando un lenguaje de simulación de sistemas dinámicos de alto nivel como MATLAB/Simulink. Adicionalmente se dispone de un PC comercial como interfaz de desarrollo e implementación.



Figura 7.2: Péndulo de Furuta

En cuanto a los parámetros físicos del péndulo considerado, tenemos para el vástago un masa,  $m = 0,079Kg$ , y longitud,  $l = 0,28m$ . Para el brazo tenemos una masa,  $M = 0,2869Kg$ , con una longitud,  $r = 0,235m$ . En cuanto al actuador, el motor presenta una relación de conversión tensión-par,  $km = 7,4$ , con una inercia efectiva,  $J_m = 0,0012Kgm^2$ .

Con esta descripción, las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento de

este sistema, pueden obtenerse fácilmente empleando la formulación de Euler. De este modo, si tomamos como punto de partida las expresiones para la energía cinética,  $T$ , y potencial del sistema  $V$ :

$$\begin{aligned} 2T &= (J_a + mr^2 + (J_p + ml^2)\sin^2\theta)\dot{\phi}^2 + 2mrl\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + (J_p + mrl^2)\dot{\theta}^2 \\ V &= mgl(\cos\theta - 1) \end{aligned} \quad (7.21)$$

donde  $J_a$  representa la inercia efectiva del brazo más el motor,  $J_p$  es la inercia del vástago del péndulo,  $m$  y  $l$  son respectivamente la masa y la longitud del vástago, y  $r$  es la longitud del brazo.

Con estas expresiones, y definiendo las magnitudes auxiliares

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{mgl}{J_p + ml^2}} \\ \alpha &= \frac{mrl}{J_p + ml^2} \\ \beta &= \frac{J_a + mr^2}{J_p + ml^2} \\ \tau &= \omega_0 t \\ \gamma &= \frac{k_m}{mgl} \end{aligned}$$

donde  $k_m$  representa la ganancia equivalente del conjunto motor y sevoamplificador, podemos expresar las ecuaciones dinámicas del sistema como:

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta + \alpha \dot{\phi} \cos\theta - \sin\theta = 0 \quad (7.22)$$

$$\alpha \ddot{\theta} \cos\theta - \alpha \dot{\phi}^2 \sin\theta + 2\dot{\phi} \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta + (\beta + \sin^2\theta) \dot{\phi} = \gamma u \quad (7.23)$$

expresión en la que  $u$  representa la acción de control.

El sistema dinámico así descrito puede ser expresado en una forma más conveniente para nuestros propósitos aplicando una linealización parcial al sistema. De este modo, resulta sencillo comprobar que si se despeja  $\dot{\theta}$  de (7.22) y se sustituye en (7.23), y se adopta como nueva variable de control  $v = \dot{\phi}$ , la dinámica del péndulo adopta la forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_0^2 \sin(\theta_1) - \alpha \cos(\theta_1)v + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)(\dot{\phi}_2^2 + \omega(t)) \\ \dot{\phi}_1 &= \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= v \end{aligned} \quad (7.24)$$

donde  $\theta_1 = \theta$  y  $\phi_1 = \phi$ . Adicionalmente se ha considerado la influencia de un término de perturbaciones externas,  $\omega(t)$ , sobre la dinámica del brazo del péndulo.

### 7.6.2. Obtención de la ley de control

Si bien la estructura dinámica del sistema (7.22) no se corresponde con la exigida por la formulación desarrollada en el planteamiento teórico del problema (7.1), podemos encontrar una estructura muy similar para las dos primeras ecuaciones que describen el comportamiento del grado de libertad  $\theta$ .

Si aplicamos una trasformación al sistema del tipo propuesto en (7.4) podemos transformar la dinámica del vástago del péndulo en un oscilador armónico de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= -\omega_c^2\theta_1 + v + g_2(\theta_1)\omega\end{aligned}\tag{7.23}$$

para el sistema sin acción de control  $v = 0$  y en ausencia de perturbaciones  $\omega(t) = 0$ .

Sobre este sistema puede aplicarse el procedimiento de robustificación descrito en este capítulo. Concretamente se han seleccionado como parámetros del comportamiento oscilatorio a robustecer unos valores  $\mu = 14,3$  que corresponde una amplitud aproximada de oscilaciones para el vástago del péndulo de  $0,3\text{rad}$ . El período de oscilación se ha seleccionado igual a  $0,5\text{s}$  que se corresponde con una pulsación  $\omega_c = 4\pi$ .

Para estos parámetros de oscilación, se ha aplicado el procedimiento iterativo descrito por el algoritmo 7.1, seleccionando un nivel de atenuación de perturbaciones  $\gamma = 0,5$  tomando un grado de aproximación para la solución numérica del problema  $N = 3$ .

Con esta aproximación, es fácil mostrar que la solución proporcionada por el método para el péndulo que nos ocupa, resulta

$$\begin{aligned}v(\theta_1, \theta_2) = &- \theta_2(2,56((\theta_1^2 + \theta_2^2)^2 - \mu^2) - \\&+ 0,92((\theta_1^2 + \theta_2^2)^2 - \mu^2)^3 + \\&+ 0,032((\theta_1^2 + \theta_2^2)^2 - \mu^2)^5)\end{aligned}\tag{7.24}$$

En el proceso de diseño planteado, no se ha tenido en cuenta hasta el momento el comportamiento de la dinámica del brazo del péndulo. Nada puede decirse en principio para el comportamiento de esta dinámica bajo la acción de la ley de control  $v$ .

En (Aracil *et al.* 2002) se propone la inclusión de un término de amortiguamiento lineal para el subsistema dinámico del brazo que si bien perturba ligeramente la dinámica del vástago, logra en cambio que las trayectorias del conjunto permanezcan acotadas conservando el comportamiento las características de comportamiento oscilatorio deseado. Este término de amortiguamiento debe ser escogido suficientemente pequeño

para no perturbar en exceso la dinámica del sistema, aunque no se proporciona ningún resultado que nos permita establecer la estabilidad global del sistema como consecuencia de la inclusión de este término.

La solución adoptada en esta Tesis es similar a la contemplada en (Aracil *et al.* 2002), si bien se ha comprobado mediante simulación y experimentación que es más conveniente incluir un término de amortiguamiento cúbico en el sistema, ya que proporciona un comportamiento más robusto ante perturbaciones. Tomamos por tanto una ley de control final de la forma

$$\begin{aligned} v(\theta_1, \theta_2) = & -\theta_2(2,56((\theta_1^2 + \theta_2^2)^2 - \mu^2) - \\ & + 0,92((\theta_1^2 + \theta_2^2)^2 - \mu^2)^3 + \\ & + 0,032((\theta_1^2 + \theta_2^2)^2 - \mu^2)^5) + k_\phi \dot{\phi}^3 \end{aligned} \quad (7.25)$$

La justificación para este comportamiento parece bastante intuitiva si tenemos en cuenta que el amortiguamiento cúbico proporciona una acción más agresiva que el lineal para grandes valores de  $\dot{\phi}$ , que es precisamente cuando es necesario, mientras que el amortiguamiento es más leve para valores pequeños de este valor, cuando resulta menos necesario incluir este efecto amortiguador.

De nuevo, el valor de  $k_{phi}$  debe escogerse suficientemente pequeño para no perturbar en exceso la dinámica del vástago del péndulo. De este modo, si deshacemos los cambios asociados a la relación entre la variables de control  $v$  y  $u$ , la ley de control final aplicada al péndulo adopta la forma:

$$\begin{aligned} u(\theta_1, \theta_2) = & \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\beta}{\cos(\theta_1)} (\omega_c^2 \theta_1 + \omega_0^2 \sin(\theta_1) + \right. \\ & \left. + 4c_k(\omega_c^2 \theta_1^2 + \theta_2^2 - \mu^2)^{2k-1} \theta_2) \right) + \sin \theta \dot{\phi}_2^2 + k_\phi \dot{\phi}_2^3 \end{aligned} \quad (7.26)$$

donde  $c_k$  son los coeficientes obtenidos mediante el procedimiento numérico, es decir  $c_1 = 2,56$ ,  $c_2 = 0,92$  y  $c_3 = 0,032$ .

A continuación se muestran los resultados tanto de simulación como experimentales para este control aplicado al péndulo descrito anteriormente.

### 7.6.3. Simulaciones

Mostramos en este apartado los resultados de simulación obtenidos para el sistema suponiendo en primer lugar ausencia de perturbaciones como muestra la figura 7.3.

Puede observarse que el comportamiento oscilatorio responde bastante bien a los parámetros de la órbita impuesta, si bien no podemos obtener un órbita exactamente armónica debido a la influencia del término de amortiguamiento de la dinámica del brazo del péndulo.

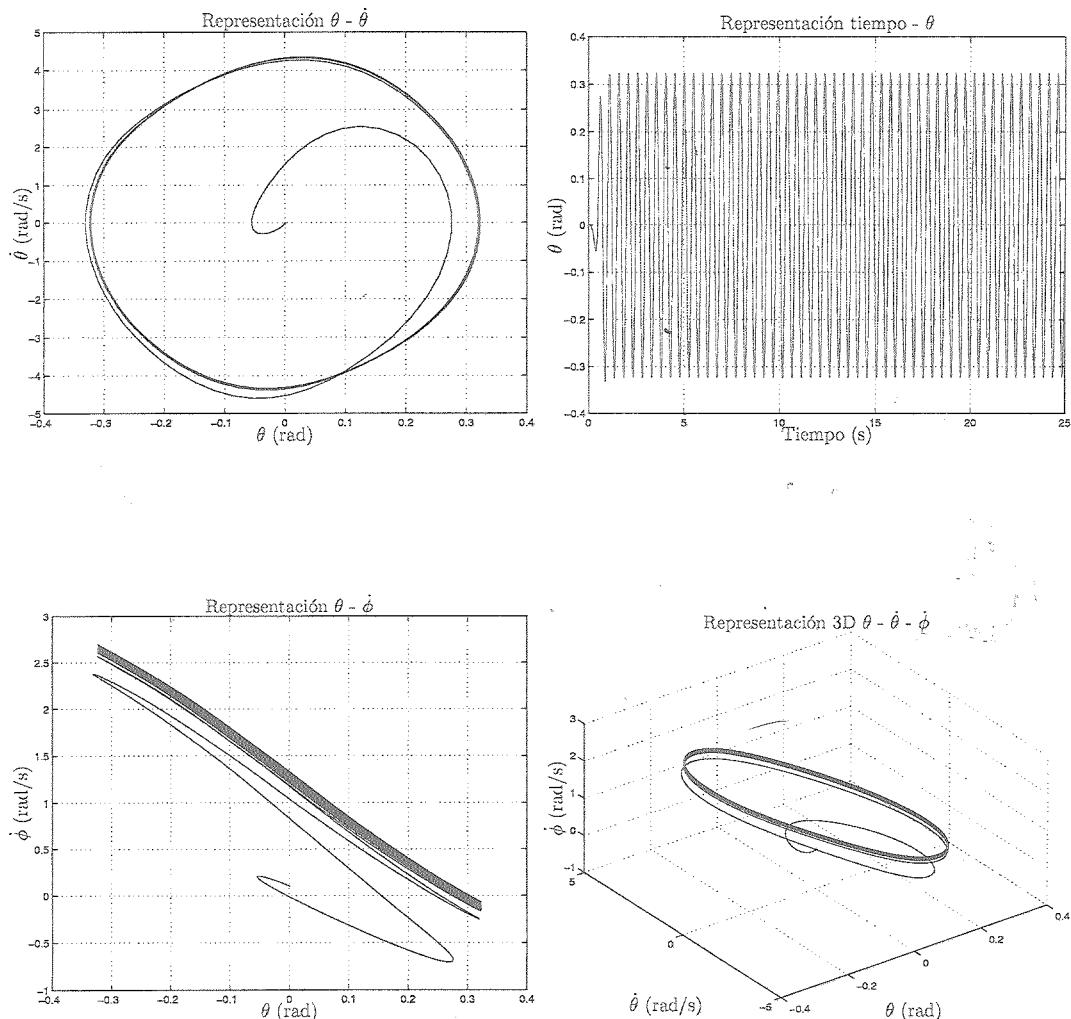


Figura 7.3: Resultados de simulación para el comportamiento oscilatorio del péndulo de Furuta sin perturbaciones.

la figura 7.4 muestra el comportamiento de simulación del sistema considerado, teniendo en cuenta la acción de una perturbación puntual para el instante  $t = 10s$ . Puede observarse la robustez del control, que restituye el comportamiento oscilatorio transcurrida la perturbación.

Resulta también interesante observar como el comportamiento oscilatorio para el brazo sufre un desplazamiento de su centro de oscilación, no recuperando éste exactamente la órbita original. Este es un fenómeno no tratado en la formulación, debido

a que la metodología propuesta en este capítulo permite imponer comportamientos oscilatorios únicamente sistemas dinámicos de orden dos.

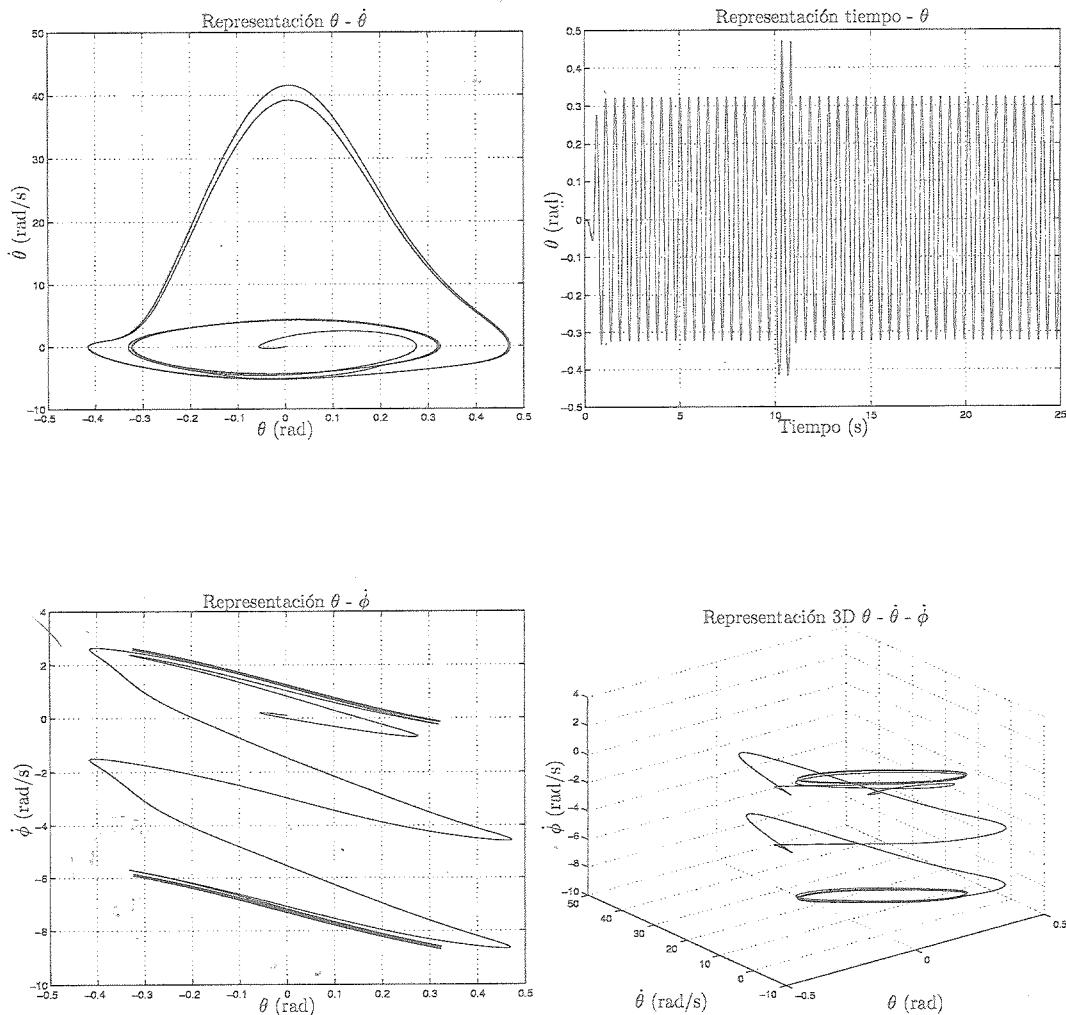


Figura 7.4: Resultados de simulación para el comportamiento oscilatorio del péndulo de Furuta con perturbaciones.

#### 7.6.4. Resultados experimentales

La misma estrategia de control ensayada en el apartado anterior, se implementó sobre el sistema físico real.

La figura 7.5 muestra los resultados experimentales obtenido en ausencia de perturbaciones actuando sobre el sistema. De nuevo las características de la órbita obtenida

se adaptan muy aproximadamente a los impuestos en el diseño, aunque como era de esperar el comportamiento obtenido es más irregular que en simulación.

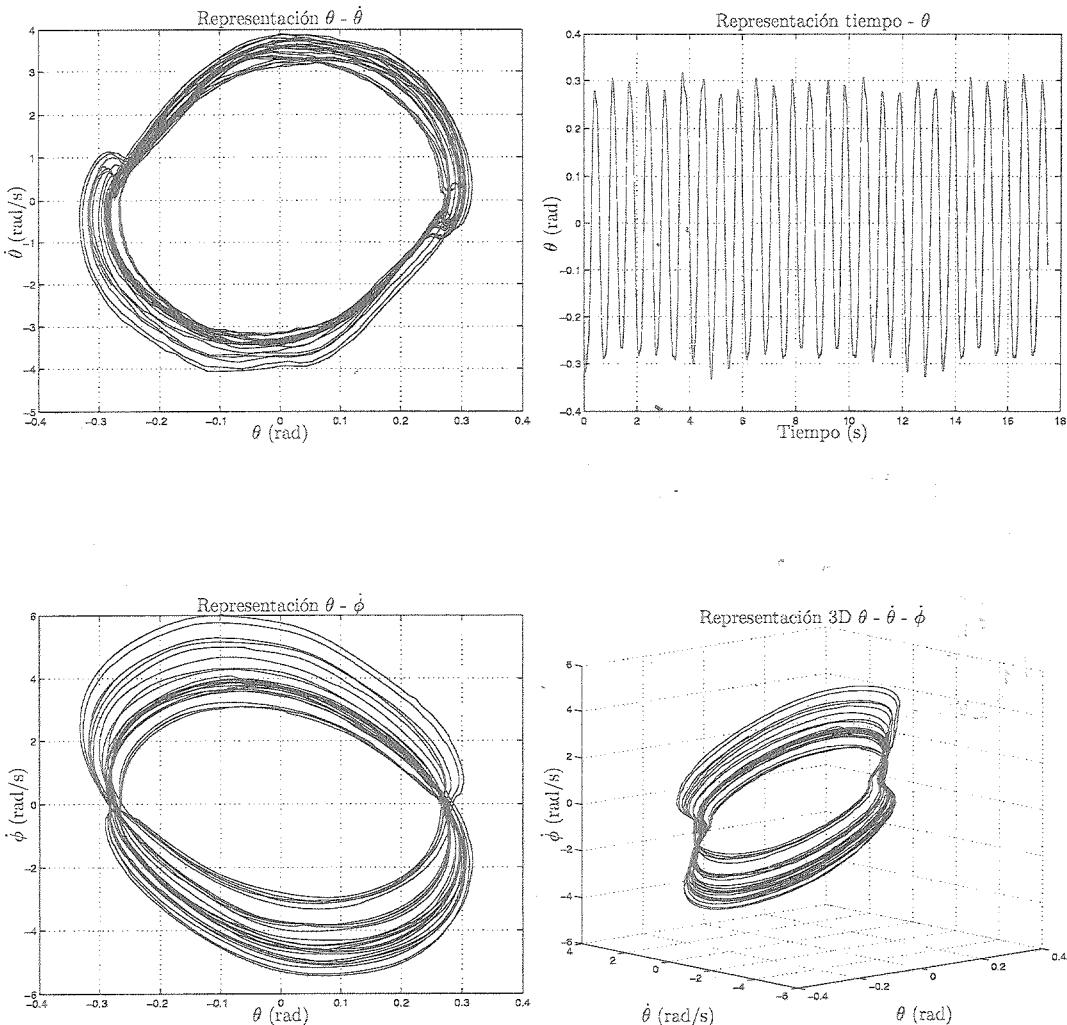


Figura 7.5: Resultados experimentales para el comportamiento oscilatorio del péndulo de Furuta sin perturbaciones.

Los resultados obtenidos en el caso de la inclusión de perturbaciones se muestra en la figura 7.6. En este caso, las perturbaciones se generaron golpeando el vástago del péndulo de forma puntual en un instante de su evolución dinámica.

Resulta muy destacable a la vista de estos resultados la notable robustez del comportamiento del sistema que permiten restituir el comportamiento oscilatorio nominal del sistema aún en presencia de perturbaciones considerables.

La dinámica del brazo del péndulo también requiere un comentario a parte. Como puede observarse, este comportamiento difiere notablemente del teórico previsto, conservándose acotada en todo caso la evolución dinámica del sistema. Esta estabilidad

de comportamiento del sistema, aun en presencia de perturbaciones y lo inevitables errores de modelado del sistema, sugiere que existe alguna propiedad intrínseca que permite asegurar la estabilidad del conjunto bajo ciertas condiciones, que en lo que se ha podido investigar, no están claramente determinadas en la literatura. Este aspecto resulta a la vez desconcertante y motivador, y está incluido como una de las posibles de líneas de investigación futuras para la continuación de este trabajo.

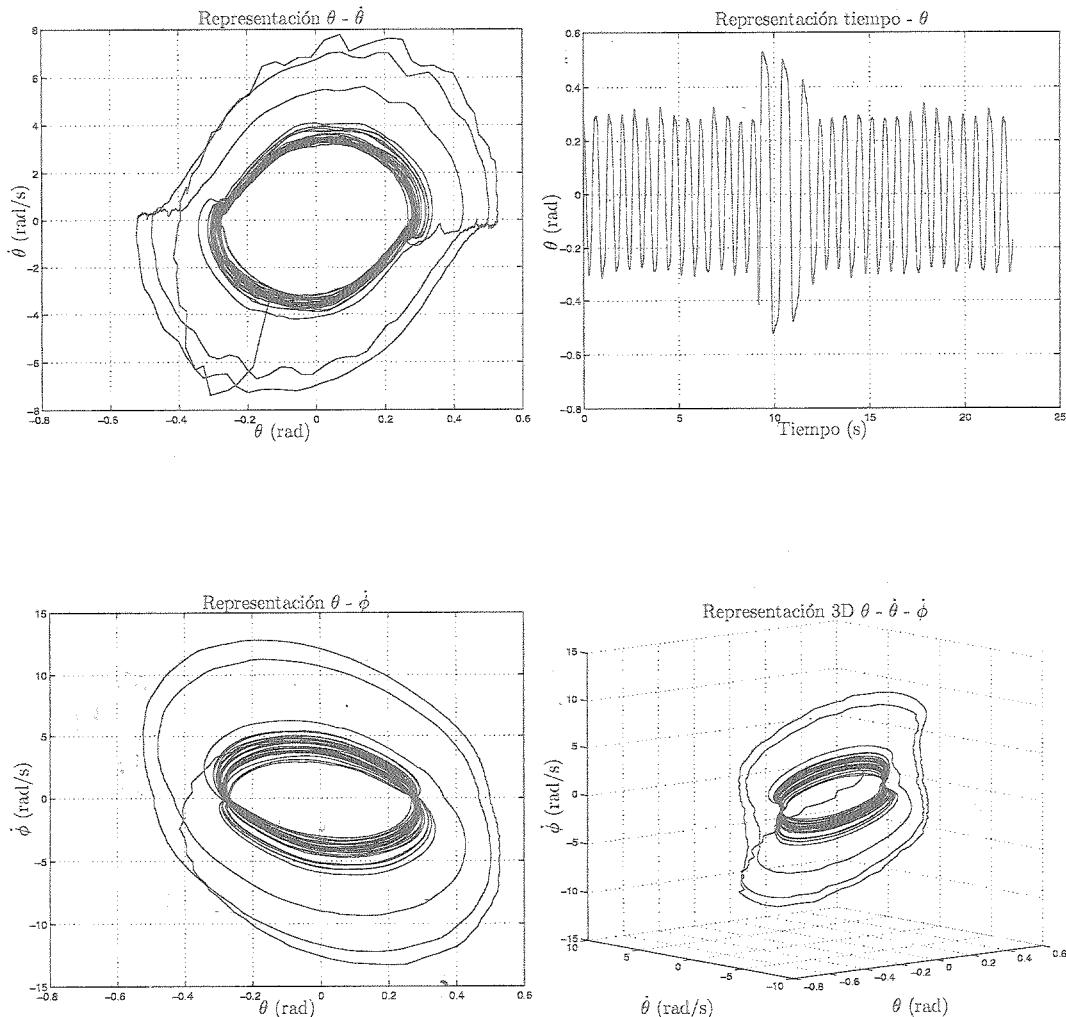


Figura 7.6: Resultados experimentales para el comportamiento oscilatorio del péndulo de Furuta con perturbaciones.

# Capítulo 8

## Conclusiones y desarrollos futuros

### 8.1. Contribuciones y conclusiones por capítulos

En este último capítulo, y a modo de sumario, se presentan las contribuciones más relevantes presentadas en este trabajo de Tesis, así como las futuras líneas de investigación a la que pueden dar lugar algunos de los resultados presentados en este trabajo.

A continuación se resumirán los contenidos más relevantes de cada capítulo, resaltando las contribuciones aportadas por este trabajo de Tesis en el marco del control  $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_{\infty}$  para sistemas Euler-Lagrange. Así podemos encuadrar en cada uno de los capítulos que componen el trabajo:

- En los capítulos 2 y 3 se ha realizado una exposición compacta y relacional de las teorías de control  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_{\infty}$  no lineal, centrándonos en las aproximaciones basadas en la teoría de sistemas disipativos y teoría de juegos. Se ha mostrado asimismo las notables relaciones conceptuales y de formulación que relacionan ambos problemas.
- En el capítulo 4 se ha mostrado una descripción de los sistemas Euler-Lagrange considerados en este trabajo así como la clasificación de los mismos. Además se ha proporcionado una descripción de espacio de estados afín en la actuación y perturbaciones de la dinámica de error de estos sistemas. El vector de estados

ha sido ampliado con la inclusión de la integral del error de seguimiento para permitir a las leyes de control formuladas a partir de esta descripción incluir términos integrales que rechacen perturbaciones mantenidas. Adicionalmente se presenta una modificación de la dinámica de error que permite tener en cuenta las incertidumbres de modelado del sistema e implementar así estrategias de control robusto.

- En el capítulo 5 se presenta una formulación subóptima para el problema de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  no lineal aplicado a sistemas Euler-Lagrange. La principal contribución reside en la formulación de una solución explícita al problema, proporcionando un algoritmo para su obtención. También en este capítulo, y como requisito para la obtención de la ley de control híbrido, se ha formulado una ampliación a la ley de control óptimo propuesta en (Johansson 1990), incluyendo un término de integral de error de seguimiento que permite a la ley de control óptima  $\mathcal{H}_2$  así obtenida rechazar perturbaciones mantenidas. Se han presentado asimismo resultados tanto simulados como experimentales aplicados a diversos sistemas electromecánicos de diferente naturaleza, mostrando buenos resultados de comportamiento conformes con el marco teórico en el que se desarrollan.
- En el capítulo 6 se proporciona una formulación de una ley de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal para sistemas Euler-Lagrange empleando únicamente información sobre la posición instantánea de las articulaciones del sistema (realimentación de la salida). La novedad reside en la formulación de la expresión explícita de la estructura dinámica *observador+controlador* asociada al control. También en este capítulo, se han presentado resultados tanto simulados como experimentales aplicados a los sistemas electromecánicos analizados en el capítulo 5, donde especialmente en el caso experimental se ha puesto de manifiesto las ventajas asociadas al método, al permitir la obtención de una señal de velocidad estimada considerablemente más limpia que la que se consigue por métodos convencionales de derivación de las señales de posición.
- En el capítulo 7 se aborda el problema del control de oscilaciones para sistemas electromecánicos subactuados. La metodología propuesta emplea el formalismo de la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal para estabilizar estructuralmente órbitas, satisfaciendo los requisitos de atenuación de perturbaciones propios de la metodología empleada. La contribución de este capítulo reside en la aplicación de un método numérico adaptado de Galerkin para la obtención de una solución aproximada de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada a la formulación del problema. Para ello se propone un conjunto de *funciones de aproximación* que verifican las restricciones del problema y se muestran apropiadas para representar la solución del problema planteado.

## 8.2. Desarrollos futuros

Para concluir, en este apartado se esbozarán algunas posibles líneas de trabajo que pueden constituir la continuación del trabajo de esta Tesis.

- Implementación de la estrategia de control híbrido planteada en esta Tesis sobre un sistema robótico de accionamiento directo. El Departamento de Ingeniería de sistemas y automática está desarrollando una plataforma de experimentación consistente en un robot de dos grados de libertad de accionamiento directo.
- Investigación de posibles conjuntos de soluciones para las ecuaciones asociadas al problema de control híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  para contemplar soluciones menos conservativas. En particular, ciertos resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo, permiten intuir que la estructura de la solución para el problema híbrido  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$  puede adoptar una forma más general que la presentada desarrollada en esta Tesis.
- Investigar la posible adaptación de las metodologías propuestas para sistemas Euler-Lagrange subactuados.
- Investigar la posibilidad de adaptación de la ley de control híbrido formulada en el capítulo 5 para contemplar el caso de realimentación de la salida formulado de modo independiente en el capítulo 6.
- Estudio de diferentes parametrizaciones para sistemas Euler-Lagrange que permitan incorporar de forma más directa el vector de fuerzas generalizadas,  $\tau$ , estudiendo en la medida de lo posible la transformación que nos obliga emplear una lo que hemos dado en llamad el *exceso de control*  $u$ .
- Consideración de funciones objetivo para el problema híbrido más generales que las formas cuadráticas asociadas a las matrices  $R$  y  $Q$  empleadas en este trabajo.
- Adaptación de los resultados expuestos a nuevos sistemas que presenten una estructura más general que la de los sistemas EL. En este sentido se planean esfuerzos para adaptar algunos de estos resultados al sistemas aeronáuticos en el marco del proyecto CORMA que está siendo desarrollado en el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla.
- Consideración de la inclusión de limitaciones en la acción de control como saturaciones o limitadores de pendiente.
- Considerar la ampliación de la metodología propuesta en el capítulo 7 para estabilización de oscilaciones, a sistemas dinámicos de orden mayor que dos.

- Investigar las propiedades de la cuenca de atracción asociada a la estrategia de control planteada para el péndulo de Furuta del capítulo 7. Experimentalmente se comprueba la existencia de dicha cuenca de atracción, si bien, en lo que se ha podido averiguar, no existen resultados que permitan asegurar la existencia de la misma.

# Apéndice A

## Fundamentos Matemáticos

En este anexo, y con el objeto de que el presente documento sea lo más autocontenido posible, se van a exponer algunos conocidos resultados matemáticos relacionados con el desarrollo de esta Tesis. En concreto, se definirán algunas normas y ciertos resultados de álgebra matricial que se emplean en algunas demostraciones matemáticas.

### A.1. Algunas identidades matriciales

**Lema A.1 (Inversión de suma de matrices).** *Sean  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$  matrices de dimensiones compatibles tal que las matrices  $A_2A_3A_4$  y  $(A_1 + A_2A_3A_4)$  están definidas. Entonces se verifica*

$$(A_1 + A_2A_3A_4)^{-1} = A_1^{-1} - A_1^{-1}A_2(A_4A_1^{-1}A_2 + A_3^{-1})^{-1}A_4A_1^{-1}$$

*suponiendo que las inversas matriciales involucradas existen.*

**Lema A.2 (Inversión de matrices por bloques).** *Supongamos que las matrices  $A_{11}^{-1}$  y  $X^{-1}$ , definida a continuación, existen, y que todas las matrices involucradas presentan dimensiones compatibles. Entonces se verifica*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}X^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}X^{-1} \\ -X^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & X^{-1} \end{pmatrix}$$

*donde  $X = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  es el denominado complemento de Schur de  $A_{11}$  en  $A$ .*

*De forma análoga, si  $A_{22}^{-1}$  y  $Y^{-1}$  existen podemos escribir*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}Y^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}Y^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

donde  $Y = A_{11} - A_{11}A_{22}^{-1}A_{21}$  es en esta ocasión el *complemento de Schur* de  $A_{22}$  en  $A$

Un resultado análogo nos permite establecer la naturaleza de *matriz definida positiva/negativa* de una matriz por bloques, tal como se presenta en el siguiente lema

**Lema A.3 (Matrices por bloques definidas positivas).** *La condición*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} > 0$$

es equivalente al siguiente par de condiciones

$$\begin{aligned} A_{11} &> 0 \\ A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &> 0 \end{aligned}$$

supuestas dimensiones compatibles para las matrices, y que  $A_{11}^{-1}$  existe.

O bien, es equivalente al siguiente par de condiciones

$$\begin{aligned} A_{22} &> 0 \\ A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &> 0 \end{aligned}$$

supuestas de nuevo dimensiones compatibles para las matrices, y que  $A_{22}^{-1}$  existe.

## A.2. Normas

En este apartado recordaremos brevemente el concepto de normas vectoriales y matriciales que son utilidad en el desarrollo de algunos conceptos de este trabajo de Tesis.

En general, la definición de una norma va a depender del tipo de elemento al que se le aplique. En este apéndice se van a distinguir tres: vectores constantes, matrices constantes y señales.

### A.2.1. Definición de norma

La norma de un elemento  $A$  perteneciente a un espacio vectorial lineal normado es un número real, al cual se le denotará por  $\|A\|$ , el cual debe satisfacer las cuatro propiedades siguientes:

1.  $\|A\| \geq 0$
2.  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
3.  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$

### A.2.2. Normas de vectores

Sea un vector  $v$  constante de  $n$  elementos:

$$V = \{v_i\} = [ v_1 \quad \cdots \quad v_n ]^T$$

Se define la *norma p* de un vector  $V$  como:

$$\|V\|_p \equiv \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.1})$$

De especial interés para el marco del trabajo es la definición de *norma 2* del vector, también conocida como norma euclídea, a la cual se le ha denotado como  $\|\cdot\|_2$  o simplemente como  $\|\cdot\|$ , donde:

$$\|V\| \equiv \|V\|_2 \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

### A.2.3. Normas de matrices

Sea una matriz  $M$  constante de  $f$  filas y  $c$  columnas:

$$M = \{m_{ij}\} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{f1} & \cdots & m_{fc} \end{bmatrix}$$

La definición de la norma de una matriz podría hacerse como una *extensión de la norma p* expuesta anteriormente para vectores, esto es:

$$\|M\|_p \equiv \left( \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^c |m_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

siendo las tres más conocidas las correspondiente a  $p = 1$  (suma de los valores absolutos de los elementos de la matriz),  $p = 2$  (norma de Frobenius) y  $p = \infty$  (máximo valor absoluto de los elementos de la matriz).

Es interesante introducir también el concepto de *norma inducida* de una matriz. Esta norma define su valor tomando en consideración la relación

$$y = Mu$$

De este modo, definimos la norma  $p$  inducida como:

$$\|M\|_{ip} \equiv \max_{\|u\|_p \leq 1} \|Mu\|_p \equiv \max_{\|u\|_p = 1} \|Mu\|_p \equiv \max_{u \neq 0} \frac{\|Mu\|_p}{\|u\|_p}$$

donde el subíndice  $i$  hace referencia al adjetivo *inducida*.

Las normas inducidas más conocidas son de nuevo las correspondientes a valores de  $p$  iguales a 1, 2 e  $\infty$ . Para estos casos, las expresiones resultantes son las siguientes:

$$\begin{aligned}\|M\|_{i1} &= \max_j \sum_{i=1}^f |m_{ij}| \\ \|M\|_{i2} &= \bar{\sigma}(M) = \sqrt{\rho(M^*M)} \\ \|M\|_{i\infty} &= \max_i \sum_{j=1}^c |m_{ij}|\end{aligned}$$

donde  $M^*$  simboliza la matriz traspuesta conjugada de la matriz  $M$ .

Además, dichas normas cumplen la propiedad:

$$\|M_1 M_2\| \leq \|M_1\| \|M_2\| \quad (\text{A.2})$$

De las posibles normas matriciales, la norma 2 inducida (denotada como  $\|\cdot\|_{i2}$  o simplemente como  $\|\cdot\|$ ) es la más usual y es la considerada en este trabajo.

especialmente interesante para este trabajo, siendo ésta la definición de *norma infinito de un sistema*.

### A.2.4. Normas de señales

Las normas de las señales pueden ser entendidas como una extensión de las normas de los vectores, sin más que considerar que los vectores de señales son vectores constantes para cada instante de tiempo.

Sea un vector temporal  $e(t)$  de  $n$  señales:

$$e(t) = \{e_i(t)\} = [ e_1(t) \ \cdots \ e_n(t) ]^T$$

Al igual que se expuso en la sección A.2.2, se puede definir la *norma p* de un vector de señales temporales  $e(t)$  sin más que aplicar la definición (A.1) e integrarla en el tiempo, dando así lugar a las conocidas normas  $l_p$ :

$$\|e(\tau)\|_p \equiv \left( \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |e_i(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

Al igual que en los casos anteriores, las normas más usuales (ya que tienen un claro significado físico) son las correspondientes a valores de  $p$  iguales a 1, 2 e  $\infty$ , siendo:

$$\|e(\tau)\|_1 \equiv \left( \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |e_i(\tau)| d\tau \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\|e(\tau)\|_2 \equiv \sqrt{\left( \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |e_i(\tau)|^2 d\tau \right)} \quad (\text{A.4})$$

$$\|e(\tau)\|_\infty \equiv \max_{\tau} \left( \max_i |e_i(\tau)| \right) \quad (\text{A.5})$$

Obsérvese cómo las ecuaciones (A.3), (A.4) y (A.5) se corresponden con la *integral del valor absoluto* de la señal, la “*energía de la señal*” (concepto que ha sido muy manejado en esta Tesis) y el *pico máximo “temporal” de la señal*, donde en caso de considerar a  $e(t)$  como una señal de error, las dos primeras definiciones son las de los conocidos índices de comportamiento *IAE* e *ISE* respectivamente.

## Apéndice B

### Código de Maple para estabilización de oscilaciones mediante el método de Galerkin

Con el objeto de obtener las soluciones aproximadas para la ecuación (7.18) del problema de estabilización de oscilaciones planteado en el capítulo 7, se muestra a continuación el código de Maple empleado para la implementación de dichos desarrollos

Por simplicidad de cálculo, el código emplea una parametrización polar donde  $\rho = \omega_c^2 x_1^2 + x_2^2$ . De este modo, las funciones de aproximación dependen únicamente de  $\rho$  al presentar éstas simetría de revolución con esta representación.

Así, en primer lugar declaramos las variables  $N$ ,  $gam$  y  $mu$  asociadas respectivamente al grado de iteración, la relación de atenuación de perturbaciones deseada y el radio de la órbita a estabilizar. Se declaran también otras variables auxiliares para el correcto funcionamiento del código

```
N:=3; gam:=0.3; mu:=1; h:=rho-mu; rho_min:=-1; rho_max:=1;
```

Las funciones  $\phi_k(\rho, \theta)$  y sus derivadas

```
phik:=k->(rho^2-1)^(2*k);
dphik:=k->matrix(2,1,[diff(phik(k),rho),diff(phik(k),theta)]);
```

```

evalm(dphik(k)); Sum('c[k]*phik(k)', 'k'=1..N);
VN:=sum('c[k]*phik(k)', 'k'=1..N);
dVN=matrix(2,1,[diff(VN,rho),diff(VN,theta)]);

```

A continuación definimos un procedimiento para la solución del sistema de ecuaciones lineales asociadas a la ecuación (7.18), y donde fp y gp representan respectivamente las expresiones de  $f(x)$  y  $g(x)$  en (7.5).

```

solveVN := proc(u)
  Mn:=matrix(N,N);
  B:=matrix(N,1);
  for i from 1 to N do
    for j from 1 to N do
      a:=evalm(transpose(dphik(j))&*(fp+gp*u)*phik(i));
      Mn[i,j]:=evalf(Doubleint(a[1,1],rho=1+rho_min..1+
        rho_max,theta=0..2*Pi));
    od;
    B[i,1]:=evalf(Doubleint((-gam^2*u^2-h^2)*phik(i),
      rho=mu+rho_min..mu+rho_max,theta=0..2*Pi));
  od;
  Ck:=evalm(inverse(Mn)&*B);
  return Ck;
end;

```

El programa principal para calcular la solución aproximada adopta la forma

```

Ni:=10; Ck:=matrix(N,1,[1,1,1]);
dVN:=add(Ck[k,1]*dphik(k),k=1..N);
ua:=evalm((-1/(2*gam^2))*transpose(g2p)&*dVN); u:=ua[1,1];

for l from 1 to Ni do
  Ck:=solveVN(u);
  dVN:=add(Ck[k,1]*dphik(k),k=1..N);
  ua:=evalm((-1/(2*gam^2))*transpose(g2p)&*dVN);
  u:=ua[1,1];
od;

```

Con este código podemos obtener en las variables Ck los valores correspondientes a los coeficientes de aproximación del desarrollo en serie de Galerkin.

Podemos igualmente representar gráficamente la forma de la funciones de aproximación obtenidas mediante el bloque de código:

```
with(plots):
addcoords(z_cylindrical,[z,r,theta],[r*cos(theta),r*sin(theta),z]);
rho:=r; VN:=sum('Ck[k,1]*phik(k)','k'=1..N);
plot3d(VN,r=0..1.30,theta=0..2*Pi,coords=z_cylindrical);
```

# Bibliografía

- A., Astolfi, F. Gordillo and A.J. van der Schaft (2003). *Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*. Elsevier, Oxford.
- Aamo, O.M., M. Arcak, T.I. Fosen and P. Kokotovic (2001). Global output tracking control of a class of Euler-Lagrange systems with monotonic non-linearities in the velocities. *Int. J. Control* 74(7), 649–658.
- Aracil, J., F. Gordillo and J.A. Acosta (2002). Stabilization of oscillations in the inverted pendulum. *15th Triennial IFAC World Congress, Barcelona, Spain*.
- Astolfi, A. and P. Colaneri (2001). Trading robustness with optimality in nonlinear control. *Automatica*.
- Ball, J.A. and J.W. Helton (1988a). Factorization of nonlinear systems: Towards a theory of nonlinear  $H_\infty$  control. *Proc. 27th IEEE CDC* pp. 2376–2381.
- Ball, J.A. and J.W. Helton (1988b). Interpolation problems for null and pole structure of nonlinear systems. *Proc. 27th IEEE CDC* pp. 14–19.
- Ball, J.A. and J.W. Helton (1988c). Shift invariant manifold and nonlinear analytic function theory. *Integral equations operator theory* 5(11), 615–725.
- Ball, J.A. and J.W. Helton (1992a). Inner-outer factorization of nonlinear operators. *J. Funct. Anal.* (104), 363–413.
- Ball, J.A. and J.W. Helton (1992b). Nonlinear  $H_\infty$  control theory for stable plants. *J. Math. Control, signals, and systems* (5), 233–261.
- Ball, J.A. and J.W. Helton (1996). Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations arising in nonlinear  $H_\infty$  control. *J. Math. System Estim. Control* (6), 1–22.
- Ball, J.A., C. Foias, J.W. Helton and A. Tannenbaum (1987a). Nonlinear interpolation theory in  $H_\infty$ . In: Modeling, Robustness and Sensitivity Reduction in Control Systems. *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F: Comput. Systems Sci.* (34), 31–46.
- Ball, J.A., C. Foias, J.W. Helton and A. Tannenbaum (1987b). On local nonlinear commutant lifting theorems. *Indiana Univ. Math. J.* (36), 693–109.

- Bardi, M. and Italo Capuzzo-Dolcetta (1997). *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Springer Verlag.
- Basar, T. and P. Bernhard (1991).  *$H_\infty$ -optimal control and related minimax design problems. A dynamic game approach*. C.I. Byrnes. Birkhäuser.
- Baumann, W.T. and Rugh, W.J. (1986). Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 31, 40–46.
- Beard, R.W. and T.W. McLain (1998). A practical algorithm for designing nonlinear  $H_\infty$  control laws. *Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, USA*.
- Bélanger, P.R. (1992). Estimation of angular velocity and acceleration from shaft encoders measurements. *Proc. IEEE Conf. Robotics Automat. Nice, France* pp. 585–592.
- Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
- Berguis, H. and Nijmeijer, H. (1992). Observer design in the tracking control problem for robots. *Proc. IFAC Symp. NOLCOS'92, Bordeaux, France* pp. 588–593.
- Berguis, H. and Nijmeijer, H. (1993). A passivity approach to controller-observer design for robots. *IEEE trans. Robotics and Automation* 9(6), 740–754.
- Berguis, H. and Nijmeijer, H. (1994). Robust control of robots via linear estimated state feedbacks. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(10), 2159 – 2162.
- Besançon, G. (2000). Global output feedback tracking control for a class of lagrangian systems. *Automatica* 36(12), 1915–1921.
- Brancis, B., J.W. Helton and G. Zames (1984).  $H_\infty$ -optimal controller for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 29, 888–900.
- Canudas de Wit, C. and Fixot, N. and Åström, K.J. (1992). Trajectory tracking in robot manipulators via nonlinear estimated state feedback. *IEEE Trans. Automat. Control* 8, 138–144.
- Canudas de Wit, C. and N. Fixot (1991). Robot control via robust state estimated feedback. *IEEE Trans. Automat. Control* 36, 1497–1501.
- Canudas de Wit, C., B. Espiau and C. Urrea (2002). Orbital stabilization of underactuated mechanical systems. *15th IFAC Worl Congress. Barcelona, Spain*.
- Chung, C. Choo and J. Hauser (1994). Nonlinear  $H_\infty$  control of periodic orbits. *American Control Conference, Baltimore, Maryland, USA* pp. 2103–2108.
- Colaneri, P., J.C. Geromel and A. Locatelli (1997). *Control Theory and Design: An  $RH_2$  and  $RH_\infty$  viewpoint*. Academic Press.

- Crandall, M.G. and P.L. Lions (1983). Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **277**, 142.
- D'azzo, J., Houpis, C. (1966). *Feedback Control System Analisys and Synthesis*. McGraw Hill.
- Didinsky, G., T. Basar and P. Bernhard (1993). Structural properties of minimax policies for a class of differential games arising in nonlinear  $H_\infty$  control and filtering. *Proc. 32nd IEEE CDC* pp. 184–189.
- Dorf, R.C. (1983). *Modern Control Systems*. Addison Wesley.
- Doyle, J.C. (1978). Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Trans. on Autom. Control* **4**(23), 756–757.
- Doyle, J.C., K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis (1989). State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Trans. Autom. Control* **34**, 831–847.
- Doyle, J.C., Stein, G. (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Feng, W. and I. Postlethwaite (1994). Robust non-linear  $H_\infty$  /adaptive control of robot manipulator motion. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part I: J. Systems Contr. Eng.* **208**, 221–230.
- Fleming, W.H. and W.M. McEneaney (1992). *Risk-sensitive optimal control and differential games*. Vol. 184 pp.185-197 of *Stochastic games and adaptive control. Lectures notes in control inform. Sci.*. Springer-Verlag.
- Fleming, W.H. and W.M. McEneaney (1995). Risk-sentive control on an infinite time horizon. *SIAM J. Control Optim.* **33**(6), 1881–1915.
- Foias, C., C. Gu and A. Tannenbaum (1995). Nonlinearity  $H_\infty$  optimization: A causal power series approach. *SIAM J. Control Optim.* **1**(33), 185–207.
- Foias, C., C. Gu and A. Tannenbaum (1996). Nonlinearity in  $H_\infty$  control theory, causality in the conmutant lifting theorem, and extension of intertwining operators. *Integral equations operator theory* (25), 481–489.
- Foias, C., C. Gu and A. Tannenbaum (1998). *On the nonlinear standard  $H_\infty$  control problem*.
- Franklin, G., Powell, J., Emami-Naeini, A. (1986). *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley.
- Georges, D. (1997). Mixed  $H_2/H_\infty$  control for nonlinear time-varying systems with application to robotic systems. *Proc. European Control Conference*.

- Glover, K. and J.C. Doyle (1988). State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$  norm bound and relations to risk-sensitivity. *Systems Control Lett.* 11(3), 167–172.
- Gómez-Estern, F. (2002). Control de sistemas no lineales basado en la estructura hamiltoniana. PhD thesis. Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla.
- Gordillo, F., Acosta J.A. and J. Aracil (2003). A new swing-up law for the Furuta pendulum. *International Journal of Control* 76(8), 836–844.
- Gorgnard, F. and C. Canudas de Wit (2002). Design of orbitally stable zero dynamics for a class of nonlinear system. *Submitted to Systems & Control Letters*.
- Hauser, J. and C. Choo Chung (1994). Converse Lyapunov functions for exponentially stable periodic orbits. *Systems & Control Letters* (23), 27–34.
- Helton, J.W. (1999). *Extending  $H_\infty$  control to nonlinear systems: control of nonlinear systems to achieve performance objectives*. SIAM: Advances in design and control.
- Hermann, R. and A.J. Krener (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Automat. Control* 22(5), 728–740.
- Hill, D. and P. Moylan (1976). The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 5(21), 708–711.
- Hill, D. and P. Moylan (1977). Stability results for nonlinear feedback systems. *Automatica* (13), 377–382.
- Isidori, A. (1985). *Nonlinear Control Systems*. Springer.
- Isidori, A. (1994). Nonlinear  $H_\infty$  control via measurement feedback for affine nonlinear systems. *Internat. J. Robust Nonlinear Control* (4), 553–574.
- Isidori, A. and A. Astolfi (1992a). Disturbance attenuation in  $H_\infty$ -control via measurement feedback. *IEEE Trans. Automat. Control* (37), 1283–1293.
- Isidori, A. and A. Astolfi (1992b). Nonlinear control via measurement feedback. *J. Mathematical systems Estim. Control* 2(1), 31–44.
- Isidori, A. and C.I. Byrnes (1989). Steady-state response, separation principle and the output regulation of nonlinear systems. *28th Conference on Decision and Control* pp. 2247–2251.
- Isidori, A. and C.I. Byrnes (1990). Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control* 35, 131–140.
- Jacobson, D.H. (1991). Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their applications to deterministic differential games. *IEEE Trans. Autom. control* (18), 954–967.

- James, M.R. (1993). A partial differential inequality for dissipative nonlinear systems. *Systems control Lett.* 21(4), 315–320.
- James, M.R. and J.S. Baras (1995). Robust  $H_\infty$  output feedback control for nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control* (40), 1007–1017.
- James, M.R. and J.S. Baras (1996). Partially observed differential games, infinite-dimensional Hamilton-Jacobi-Isaacs equations, and nonlinear  $H_\infty$  control. *SIAM J. Control Optim.* 34(4), 1342–1364.
- James, M.R., J.S. Baras and R.J. Elliot (1994). Risk-sensitive control and dynamic games for partially observed discrete-time nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control* (39), 780–792.
- Johansson, R. (1990). Quadratic optimization of motion coordination and control. *IEEE Trans. Automat. Control* 35(11), 1197–1208.
- Jurdjevic, V. and J.P. Quinn (1978). Controllability and stability. *J. Differential Equations* 28, 381–389.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction theory. *ASME Trans. Series D, J. Basic Engineering* (82), 35–45.
- Kalman, R.E. and R.S. Bucy (1960). New results in linear filtering and prediction theory. *ASME Trans., Series D, J. Basic Engineering* (83), 95–108.
- Khalil, H.K. (1991). Nonlinear systems. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Khargonekar, P.P. and M.A. Rotea (1991). Mixed  $H_2/H_\infty$  control: a convex optimization approach. *IEEE Transaction on Automatic Control* (36), 824–837.
- Kiriakidis, K. (2002).  $\mathcal{H}_\infty$  optimal filters for a class of nonlinear models. *Proc. of the American Control Conference* 3, 2336–2339.
- Kou, S.R., D.L. Elliot and T.J. Tarn (1975). Exponential observers for nonlinear dynamic systems. *Inform. Cont.* (29), 204–216.
- Krener, A.J. and Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Syst. Contr. Lett.* 3, 47–52.
- Krener, A.J. and W. Respondek (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. control optim.* 23(2), 197–216.
- Kumar, P.R. and P. Varaiya (1986). *Stochastic systems: Estimation, Identification and adaptive control*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ.
- Kushner, H.J. (1964). On the differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes, with applications. *SIAM J. Control* 2(1), 106–119.

- Kwakernaak, H., Silvan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley Interscience.
- Kwakernaak, H., Silvan, R. (1986). *A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable systems*. Vol. 44.
- Limebeer, D.J.N., B.D.O. Anderson and B. Hendel (1994). A Nash game approach to mixed  $H_2/H_\infty$  control. *IEEE Trans. Aut. Control* 39(1), 69–82.
- Lin, W. (1996). Mixed  $H_2/H_\infty$  control via state feedback for nonlinear systems. *International Journal of Control* (64), 899–922.
- Loria, A. and E. Panteley (1990). A separation principle for a class of Euler-Lagrange systems. pp. 229–247. New directions in nonlinear observer design. London: Springer. Fjord, Geirander.
- Luenberger, D.G. (1966). Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Automt. Control* (11), 190–199.
- Lukes, D.L. (1969). Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems. *SIAM Journal of Control* 7(1), 75–100.
- McEneaney, W.M. (1995a). Robust control and differential games on a finite time horizon. *Mat. Control Signals and Systems* (8), 138–166.
- McEneaney, W.M. (1995b). Uniqueness for viscosity solutions of nonstationary Hamilton-Jacobi-Bellman equations under some a priori conditions (with applications). *SIAM J. Control optim.* 33(5), 1560–1576.
- Megretski, A. (1995). Optimal pure mixed  $H_2/H_\infty$  do not stabilize the system exponentially. *Allerton Conference*.
- Moler, C.B. and G.W. Stewart (1973). An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.*
- Nicosia, S. and Tomei, P. (1990). Robot Control by using only position measurement. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35(9), 1058–1061.
- Nicosia, S. and Tomei, P. and Tornambe, A. (1989). An approximate observer for a class of nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.* 12, 43–51.
- Olfati-Saber, R. (2001). Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles. PhD thesis. MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY.
- Ortega Linares, M.G. (2001). Aportaciones al control  $H_\infty$  de sistemas multivariados. PhD thesis. Universidad de Sevilla.

- Ortega, R., A. Van der Shaft, I. Mareels and B. Mashke (2001). *Energy shaping control revisited. Advances in the control of Nonlinear Systems.* (a. baños, f. lamnabhi-lagarrigue and f.j. montoya, eds.) ed.. Springer Verlag.
- Ortega, R. and Spong, M.W. (1993). Adaptive motion Control of rigid robots: A tutorial. *Automatica* 25, 877–888.
- Paden, B. and Panja, R. (1988). Globally asymptotically stable PD + controller for robot manipulator. *Int. J. Control* 47, 1697–1712.
- Perez, C. (1999). *Simulación y Control de un Robot Manipulador.* Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla.
- Pontryagin, L., V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze and E. Mischenko (1962). *The mathematical theory of optimal processes.* Wiley- New York.
- Reif, K., F. Sonnemann and R. Unbehauen (1999). Nonlinear state observation using  $\mathcal{H}_\infty$  - filtering Riccati design. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(1), 203–208.
- Rugh, W. J. and Shamma, J. S. (2000). Research on Gain-scheduling. *Automatica* 36(10), 1401–1425.
- Safonov, M., Athans, M. (1977). Gain and Phase Margins for Multiloop LQG Regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Safonov, M., Laub, A., Hartmann, G. (1981). Feedback Properties of Multivariable Systems: The Role and Use of the Return Difference Matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Sepulchre, R., M. Janković and P.V. Kokotović (1996). *Constructive Nonlinear Control.* Springer Verlag.
- Shim, H. and J.H. Seo (2000). Recursive observer design beyond the uniform observability. *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control.*
- Skjetne, R. and H. Shim (2001). A systematic nonlinear observer design for a class of Euler-Lagrange systems. *MED'01.*
- Slotine, J.J.E. and Hedrick, J.K. and Misawa, E.A. (1987). Sliding observers for nonlinear systems. *ASME J. Dynam. Syst., Measurement and Control* 109, 245–252.
- Smith, B.T., J.M. Boyle, J.J. Dongarra, B.S. Garbow, Y. Ikebe, V.C. Klema and C.B. Moler (1976). *Matrix Eigensystem Routines EISPACK Guide.* Vol. 6 of *Lecture Notes in Computer Science.* second ed.. Springer-Verlag.
- Soravia, P. (1996).  $H_\infty$  control of nonlinear systems: Differential games and viscosity solutions. *SIAM J. Control Optim.* 34(3), 1071–1097.

- Souza, C.E., L. Xie and Y. Wang (1993).  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for a class of nonlinear systems. *Systems and Control Letters* 20, 419–416.
- Spong, M.W. (1996). Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. *1996 IFAC World Congress*.
- Spong, M.W. and M. Vidyasagar (1989). *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons.
- Stratonovich, R.L. (1968). *Conditional Markov processes and their application to the theory of optimal control*. Elsevier. New York.
- System Robot. (1991). *RM-10 Manuale d'Uso*. Robótica Industriale.
- Sznaier, M. (1994). An exact solution to general SISO mixed  $H_2/H_\infty$  problems via convex optimization. *IEEE Trans. Autom. Control* 29, 2511–2517.
- Tannenbaum, A. (1980). Feedback stabilization of Plants with uncertainty in the gain factor. *Int. Journal of Control* 32, 1–16.
- Taregaki, M. and Arimoto, S. (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME J. Dynam. Syst., Measurement and control* 102, 119–125.
- Tisseur, Françoise and Karl Meerbergen (2000). The quadratic eigenvalue problem. Technical Report No. 370. Manchester, England.
- Tomei, P. (1989). Design of nonlinear observers for elastic joint robots. *IFAC symp. nonlinear control*.
- Van der Schaft, A. (1992).  $L_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback control. *IEEE Trans. Automat. Control* 6(37), 770–784.
- Van der Schaft, A. (1996).  *$L_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer Verlag.
- Van der Schaft, A.J. (1991). A state space approach to nonlinear  $H_\infty$  control. *Syst. Control Lett.*
- Vivas, C. and F.R. Rubio (2003). Improving the performance for orbitally-stabilizing controls for the furuta pendulum. *IFAC 2nd Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*.
- Vivas, C., C. Canudas de Wit and F.R. Rubio (2002). Gain-scheduling control of systems with dynamic friction. *41th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Vivas, C., C. Pérez and F.R. Rubio (2000). PID gain scheduling controller for a robot manipulator. *IFAC Workshop on Digital Control. PID 00*.

- Vivas, C., M.G. Ortega and F.R. Rubio (June 2004). A parameterization approach for nonlinear mixed  $H_2/H_\infty$  control of mechanical systems. *CONTROLO'04, Faro, Spain.*
- von Neumann, J. and O. Morgenstern (1947). *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press.
- Walcott, B.L. and Corless, M.J. and Zak, S.H. (1987). Comparative study of nonlinear state observation techniques. *Int. J. Control* 45, 2109–2132.
- Whittle, P. (1981). Risk sensitive linear-quadratic-gaussian control. *Adv. Appl. Probab.* (13), 764–777.
- Whittle, P. (1990a). A risk-sensitive maximum principle. *System Control Lett.* (15), 183–192.
- Whittle, P. (1990b). *Risk-sensitive optimal control.* Wiley, New York.
- Whittle, P. (1991). A risk-sensitive maximum principle: The case of imperfect state observation. *IEEE Trans. Automat. control* (36), 793–801.
- Willem, J.C. (1972). Dissipative dynamical systems. part I: General theory. *Arch. rational Mech. Anal.* (45), 321–351.
- Wonham, W.M. (1968). On the separation theorem of stochastic control. *SIAM J. Control* 6(2), 312–326.
- Zadeh, L., Desoer, C. (1963). *Linear System Theory: The State Space Approach.* McGraw Hill. New York.
- Zames, G. (1981). Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26, 301–320.
- Zames, G. and B. Francis (1981). Feedback and minimax sensitivity. *NATO Lectures Notes. Multivariable analysis and design techniques.*
- Zames, G. and B. Francis (1983). Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness. *IEEE Transactions on Automatic Control* 28, 585–601.