Nomenclatura:

m_c = Masa de la carga (kg)

m_t = Masa del carrito (kg)

m_b = conjunto de masas del puente (kg) (lumped mass of bridge) (kg)

m_l = equivalent mass of all rotating components of hoist (kg)

x = Desplazamiento del carrito (m)

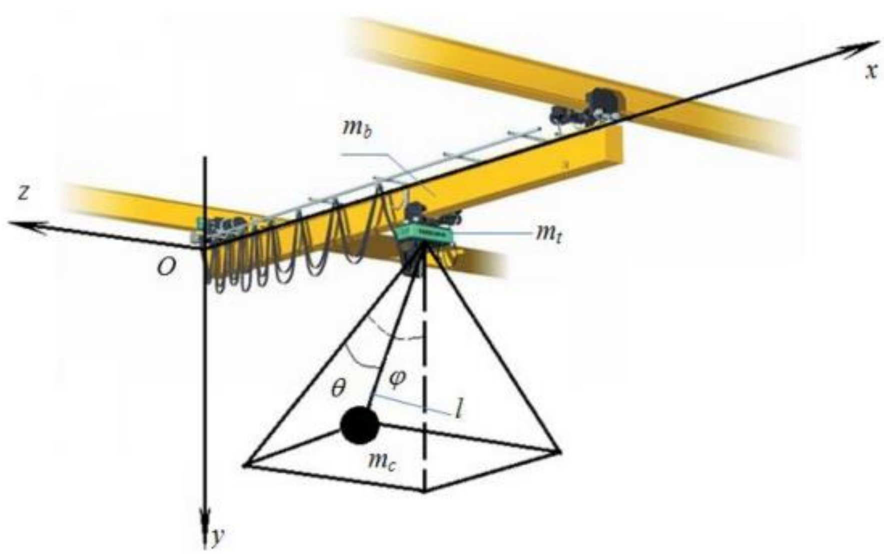
l = largo del cable de la carga suspendida (m)

θ & φ = ángulos de oscilación de carga (rad)

u_t = Fuerza de desplazamiento del carrito (N)

u_b = bridge-traveling force (N)

u_l = cargo-lifting force (N)



Este Sistema está compuesto por 4 masas **m_t, m_b, m_l y m_c**. Las masas distribuidas en el puente son convertidas en un agrupamiento de masa **m_b** puestas en el centro del puente.

El sistema implica 5 grados de libertad correspondiente a 5 coordenadas generalizadas:

- **X(t)** para el desplazamiento del carrito.
- **Z(t)** para el movimiento del puente (bridge motion)
- **L(t), q(t) y j(t)** son 3 coordenadas generalizadas que determinan la posición de la carga.

- La fricción interna del cable es considerada un elemento de amortiguador lineal $\mathbf{b_r}$
- Las fricciones del carrito y el movimiento del puente (bridge motion) son $\mathbf{b_t}$ **y** $\mathbf{b_b}$ respectivamente.
- Las señales de control $\mathbf{u_b}$, $\mathbf{u_t}$ **y** $\mathbf{u_l}$ denotan las fuerzas impulsoras del movimiento del carrito, traslación del puente y el levantamiento de la carga (cargo hoist) respectivamente.

Basado en el principio del poder virtual y las ecuaciones de Lagrange, la dinámica completamente no lineal del sistema de la grúa se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} (m_t+m_b+m_c)\ddot{z}+m_c sin\varphi cos\theta\ddot{l}+m_c l cos\varphi cos\theta\ddot{\varphi} \\ -m_c l sin\varphi sin\theta\ddot{\theta}+b_b\dot{z}+2m_c cos\varphi cos\theta\dot{l}\dot{\varphi} \\ -2m_c sin\varphi sin\theta\dot{l}\dot{\theta}-2m_c l cos\varphi sin\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ -m_c l sin\varphi cos\theta\dot{\varphi}^2-m_c l sin\varphi cos\theta\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} = u_b\,, \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} (m_t+m_c)\ddot{x}+m_c sin\theta\ddot{l}+m_c l cos\theta\ddot{\theta} \\ +b_t\dot{x}+2m_c cos\theta\dot{l}\dot{\theta}-m_c l sin\theta\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} = u_t\,, \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} (m_l+m_c)\ddot{l}+m_c sin\theta\ddot{x}+m_c sin\varphi cos\theta\ddot{z} \\ +b_r\dot{l}-m_c l\dot{\theta}^2-m_c l cos^2\theta\dot{\varphi}^2-m_c g cos\varphi cos\theta \end{pmatrix} = u_t\,, \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} m_c l cos\varphi cos\theta\ddot{z}+m_c l^2 cos^2\theta\ddot{\varphi} \\ +2m_c l cos^2\theta\dot{l}\dot{\varphi}-2m_c l^2 cos\theta sin\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}+m_c g l sin\varphi cos\theta \end{pmatrix} = 0\,, \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix} m_c l cos\theta\ddot{x}-m_c l sin\varphi sin\theta\ddot{z}+m_c l^2\ddot{\theta} \\ +2m_c l\dot{l}\dot{\theta}+m_c l^2 cos\theta sin\theta\dot{\varphi}^2+m_c g l cos\varphi sin\theta \end{pmatrix} = 0\,, \qquad (5)$$

Estas EDO pueden reescribirse en forma matriz de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}\,, \qquad (6)$$

Donde:

M(q) = M^T (q): Es la matriz simétrica de la masa. (Symmetric mass matrix)

B = Es la matriz del coeficiente de amortiguación.

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ **= Es** la matriz de Coriolis y centrifuga.

G(q) = Denota el vector de gravedad

F = Denota las fuerzas de control

Los componentes de la ecuación 6 están determinados por las siguientes matrices:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 \\ m_{51} & m_{52} & 0 & 0 & m_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} z \\ x \\ l \\ \varphi \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 & c_{25} \\ 0 & 0 & 0 & c_{34} & c_{35} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ 0 & 0 & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} u_b \\ u_t \\ u_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Los coeficientes de la matriz **M(q)** están determinados por las siguientes ecuaciones:

$$m_{11} = m_t + m_b + m_c \,, \;\; m_{13} = m_{31} = m_c sin\varphi cos\theta \,,$$

$$m_{14} = m_{41} = m_c l cos\varphi cos\theta \,, \;\; m_{15} = m_{51} = -m_c l sin\varphi sin\theta \,,$$

$$m_{22} = m_t + m_c \,, \;\; m_{23} = m_c sin\theta \,, \;\; m_{25} = m_{52} = m_c l cos\theta \,,$$

$$m_{32} = m_c sin\theta \,, \;\; m_{33} = m_l + m_c \,, \;\; m_{44} = m_c l^2 cos^2\theta \,, \;\; m_{55} = m_c l^2 \,.$$

Los coeficientes de la matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ están determinados por las siguientes ecuaciones:

$$c_{13} = m_c cos\varphi cos\theta\dot{\varphi} - m_c sin\varphi sin\theta\dot{\theta} \,,$$

$$c_{14} = m_c cos\varphi cos\theta\dot{l} - m_c l cos\varphi sin\theta\dot{\theta} - m_c l sin\varphi cos\theta\dot{\varphi} \,,$$

$$c_{15} = -m_c l cos\varphi sin\theta\dot{\varphi} - m_c sin\varphi sin\theta\dot{l} - m_c l sin\varphi cos\theta\dot{\theta} \,,$$

$$c_{23} = m_c cos\theta\dot{\theta} \,, \;\; c_{25} = m_c cos\theta\dot{l} - m_c l sin\theta\dot{\theta} \,,$$

$$c_{34} = -m_c l cos^2\theta\dot{\varphi} \,, \;\; c_{35} = -m_c l\dot{\theta} \,, \;\; c_{43} = m_c l cos^2\theta\dot{\varphi} \,,$$

$$c_{44} = m_c l cos^2\theta\dot{l} - m_c l^2 cos\theta sin\theta\dot{\theta} \,, \;\; c_{45} = -m_c l^2 cos\theta sin\theta\dot{\varphi} \,,$$

$$c_{53} = m_c l\dot{\theta} \,, \;\; c_{54} = m_c l^2 cos\theta sin\theta\dot{\varphi} \,, \;\; c_{55} = m_c l\dot{l} \,.$$

Los coeficientes distintos de cero del vector **G(q)** están determinados por las siguientes ecuaciones:

$$g_3 = -m_c g cos\varphi cos\theta \,, \;\; g_4 = m_c g l sin\varphi cos\theta \,, \;\; g_5 = m_c g l cos\varphi sin\theta \,.$$