Proyecto de Optimización Numérica
Programación Cuadrática Sucesiva

1. Introducción

.
El problema es colocar, np, puntos,

$$u_i = (x_i,\ y_i,\ z_i)^T, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ np,$$

en la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, que resuelvan el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=i+1}^{np} \frac{1}{\|u_i - u_j\|_2} \\ \text{Sujeto a} & \\ & u_i^T u_i = 1, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ np. \end{array} \tag{1}$$

2. Programación Cuadrática Sucesiva

Para el problema general

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{Sujeto a} & h(x) = 0, \end{array}$$

con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f,\ h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y mínimo local, x^*, se tiene el método de programación cuadrática sucesiva (**pcs**) con las siguientes características:

Función Lagrangeana

$$L(x,\ \lambda) = f(x) + h(x)^T \lambda,$$

con

$$\nabla_x l(x,\ \lambda) = \nabla f(x) + A(x)^T \lambda,$$

donde $A(x)$ es la matriz jacobiana de la restricción $h(x)$.

Las condiciones necesarias de primer orden para el problema son

$$v = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,\ \lambda) \\ h(x) \end{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Función de mérito

$$\phi(c,\ C) = f(x) + C\|h(x)\|_1.$$

Actualización BFGS con esquema de Powell

Sean $B \in \mathbb{R}^{nxn}$ simétrica positiva definida y vectores $s,\ y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

Si $s^T y \leq (0,2)(s^T Bs)$
$\theta = \frac{(0,8)(s^T Bs)}{s^T Bs - s^T y}$
$r = \theta y + (1-\theta)Bs$
de otro modo
$r = y$
Fin

Hacer

$$B \leftarrow B - \frac{Bss^T B}{s^T Bs} + \frac{r^T r}{s^T r}.$$

Si $con(B) > 10^4$ **hacer**
$B = I_n$
Fin

Notación:
Para el iterando $(x_k,\ \lambda_k)$ usamos:
$h_k = h(x_k),\ \nabla f_k = \nabla f(x_k),\ \nabla_x L_k = \nabla_x L(x_k,\ \lambda_k),\ v_k = (\nabla_x L_k,\ h_k)$

2.1. Método

1. Parámetros: $tol = 10^{-5},\ maxk = 100,\ c_1 = 10^{-2},\ \ C_0 = 1$

2. Valores iniciales: $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ x_0 \approx x^*$ y $\lambda = 0_{mx1}$ y $B_0 = I_n$.

3. **Mientras** $\|v_k\| \geq tol$ y $k \leq maxk$ **hacer**

    a) Resuelva el subproblema cuadrático:

    $$\begin{array}{ll} \text{Min} & (1/2)p^T Bp + \nabla f_k^T p \\ \text{Sujeto a} & A_k p + h_k = 0 \end{array}$$

    con solución única, p_k y multiplicador de Lagrange λ_{k+1}.

    b) Escoga el paramétro C_{k+1} tal que $D_{p_k}\phi(x_k,\ C_{k+1}) < 0$.

    c) Sean $\alpha_k = 1, \phi_k = \phi(x_k,\ C_{k+1})$ y $D_k = D_{p_k}\phi(x_k,\ C_{k+1})$
    Mientras $\phi(x_k + \alpha_k p_k,\ C_{k+1}) > \phi_k + \alpha_k D_k$ **hacer**
    $\alpha_k = \alpha_k/2.$
    Fin

    d) Actualizar
    $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
    $s = x_{k+1} - x_k$
    $y = \nabla_x L(x_{k+1},\ \lambda_{k+1}) - \nabla_x L(x_k,\ \lambda_{k+1})$

    e) Actualizar B_{k+1} de acuerdo al esquema BFGS con esquema de Powell.

    f) Actualizar: $x_k \leftarrow x_{k+1},\ \lambda_k \leftarrow \lambda_{k+1},\ \ B_k \leftarrow B_{k+1}$ y $k = k+1$.

    g) Calcular $v_k = (\nabla_x L(x_k,\ \lambda_k),\ h_k)$ e ir al **Paso 3**.

    Fin

3. Proyecto

Escribir en Matlab la función:

function $[x,\ \lambda,\ k] =$ **pcsglobal**(fx, hx, x_0)
% Método de programación Cuadrática Sucesiva con búsqueda de lineal,
% usando la función de mérito L-1 y actualización de la hessiana
% con la fórmula $BFGS$ para el problema
% Min $\quad fx$
% Sujeto a $hx = 0$
%
% fx y hx son cadenas de caracteres con las funciones en Matlab
% de la función objetivo y las restricciones del problema
% El vector x_0 es el valor inicial
% Salida
% x.- aproximación al mínimo local
% λ.- multiplicador de Lagrange asociado a x.
% k.- número de iteraciones realizadas.
%
% Debe usar las funciones: gradiente.m y jacobiana.m para calcular
% las primeras derivadas.
%
% Nombres completos de los integrantes del equipo
% Instrucciones del programa documentados.

Hacer el script, **esfera.m**, donde resuelva y grafique el porblema inicial (1) con $np = 21$ puntos. Se fija el primer punto en $u_1 = (1,\ 0,\ 0)^T$.

4. Entrega del Proyecto

1. **Entrega Jueves 5 de noviembre**
2. **Entrega única**
3. **Equipos de a lo más tres integrantes.**