Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Introducción a la física moderna I

15 de mayo de 2017

Atractores Extraños

Sofía González Montoya

Profesor Carlos Lizárraga

El sistema de Lorenz

En 1963, Edward Lorenz (1917-2008), un matemático y meteorólogo estadounidense estudió el fenómeno de convección en la atmósfera de la Tierra. Mientras estudiaba los patrones meteorológicos comenzó a percatarse que estos no siempre se comportaban como se predecía. Variaciones de minutos en los valores iniciales en su modelo matemático resultaba en grandes divergencias en patrones meteorológicos, lo que es conocido como efecto mariposa.

Simplificó de manera drástica las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales describen la dinámica de fluidos. El modelo obtenido se observó ser un modelo matemático muy interesante.

El modelo es un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias conocidas actualmente como las ecuaciones de Lorenz:

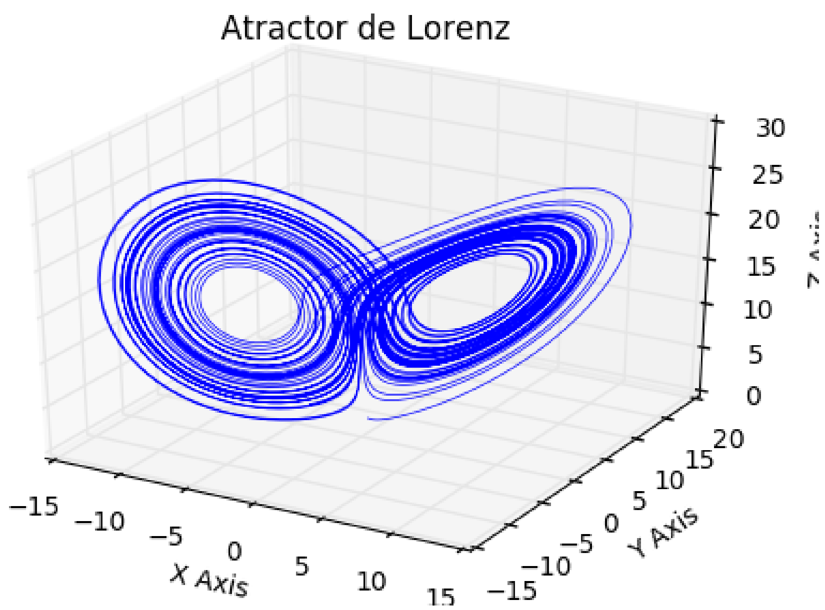
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

Donde σ, β, ρ son los parámetros del sistema. Este sistema de ecuaciones es no-linal, no periódico, de tres dimensiones y determinístico.

Lorenz utilizó los valores $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$ y ρ =28. El sistema presenta comportamiento caótico para estos valores y otros cercanos.

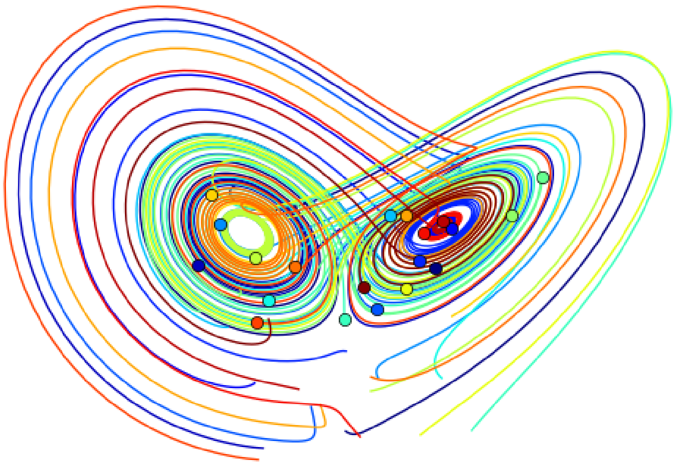
Las ecuaciones de Lorenz fueron propuestas como un modelo muy simplificado de la convección en forma de anillos que parece ocurrir a veces en la atmósfera terrestre. Por ello, las tres magnitudes a las que Lorenz se refiere en su sistema son: 'x' la razón de rotación del anillo, 'y' el gradiente de temperatura y 'z' la desviación de la temperatura respecto a su valor de equilibrio. Lorenz descubrió que su sistema contenía una dinámica extremadamente errática. Las soluciones oscilaban irregularmente sin llegar a repetirse, aunque lo hacían en una región acotada del espacio de fases. Vio que las trayectorias rondaban siempre alrededor de lo que ahora se define como atractor extraño.

La gráfica realizada con matplotlib y jugando con los ángulos de cada variable, es la siguiente:



Y utilizando las notas del usuario jakevdp de github para animar el sistema de

Lorenz obtenemos lo siguiente:



Referencias

1. Animating the Lorenz system in 3D https://jakevdp.github.io/blog/2013/02/16/animating-the-lorentz-system-in-3d/

2. Lorenz system https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system