PARCIAL 2 SEÑALES Y SISTEMAS

1.

- m: masa
  k: constante del resorte
  c: coeficiente de amortiguamiento
  Entrada: fuerza externa $F_E(t)$ → suma de fuerzas
  Salida: desplazamiento $y(t)$

(Segunda ley de Newton):

$$F_E(t) = m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t)$$

velocidad $y(t)$ → desplazamiento
$\dot{y}(t)$ → derivada de y respectiva
$\ddot{y}(t)$ → segunda derivada → aceleración

Inercia: $m\ddot{y}(t)$
Amortiguamiento: $c\dot{y}(t)$
Elástica: $ky(t)$

Laplace condiciones iniciales 0. → laplace

$$F_E(s) = ms^2 Y(s) + csY(s) + kY(s)$$

Factor común

$$F_E(s) = (ms^2 + cs + k)\,Y(s)$$

Función de transferencia: $H(s) = \dfrac{Y(s)}{F_E(s)}$ → salida / → entrada

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0)$$

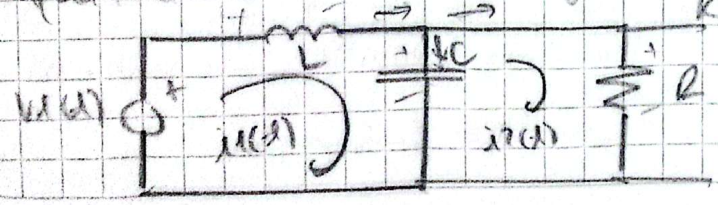
$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

$$\frac{F_E(s)}{(ms^2 + cs + k)} = Y(s) \Rightarrow \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{Y(s)}{F_E(s)}$$

- Relación entre variables

~~Voltaje $v(t)$ → Fuerza $F(t)$~~
$y(t) = x(t)$
Corriente $i(t)$ → Velocidad $v(t) = \dot{x}(t)$
Inductancia L → Masa m
Resistencia R → Amortiguador c
Capacitancia C → Inversa de rigidez $\frac{1}{k}$ → resorte

$v_0(t)$ → $y(t)$ → desplazamiento



$\frac{1}{k} = C \Rightarrow 1 = Ck$

$\frac{1}{C} = k$

$i_1 = i_C(t)$
$i_2 = i_1 = i_C$

Sistema mecánico equivalente:

$$L\ddot{y}(t) + R\dot{y}(t) + \frac{1}{C}y(t) = v_i(t)$$

Malla 1: (Ly(t))

$$-v_i(t) + L + V_C(t) = 0 \Rightarrow v_i(t) = L\frac{di_1}{dt} + V_C(t)$$

Malla 2: (Ry(t))

$$\frac{1}{C}\int(i_1 - i_2)dt$$

$$V_C + R\,i_2(t) = 0 \Rightarrow R\,i_2 + \frac{1}{C}\int(i_2 - i_1)dt$$

Derivando para eliminar integrales

Malla ①

$$\frac{d v_i}{dt} = L\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right)$$

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$a_0 = k$
$a_1 = c$
$a_2 = m$

$$K = \frac{1}{a_0} \Rightarrow K = \frac{1}{k}$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$\omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2} = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_n = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}$$

frecuencia natural

$0 < \xi < 1$: SLIT subamortiguado
$\xi = 1$: SLIT amortiguamiento crítico
$\xi > 1$: SLIT sobreamortiguado
$\xi = 0$: SLIT oscilatorio
$\xi < 0$: SLIT inestable (polos en la derecha del plano complejo s)

Como la hemos diseñado que el sistema es SLIT puede aplicar todas estas propiedades:

La función de transferencia del sistema mecánico $m\ddot{y}(t)$... $y = g(t)$ $H(S)$ se está respondiendo para condiciones libres e iniciales en el tiempo con condiciones iniciales 0.

Si se está pidiendo $H(S)$ ya se asume esas condiciones

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_n^2 m = k$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$$

$$\sqrt{k} = \omega_n\sqrt{m}$$

$$\sqrt{m}\cdot\sqrt{k}\sqrt{m} = (\omega_n\sqrt{m})\sqrt{m} = m\omega_n \Rightarrow \omega_n m$$

$$c = 2m\omega_n\xi$$

ecuación final:

$$m\ddot{y} + 2m\omega_n\xi\dot{y} + m\omega_n^2 y = f(t) \Rightarrow \text{dividimos todo por } m$$

$\ddot{y} + 2\zeta w_n \dot{y} + w_n^2 y = \frac{F(t)}{m}$ → despejamos $\ddot{y}$

$\ddot{y} = -2\zeta w_n \dot{y} - w_n^2 y + \frac{F(t)}{m}$ → tira de código

para calcular sistema amortiguado.

• Utilizamos los valores de w_n, ζ porque nos ayudan a analizar el comportamiento del sistema de forma adimensional (sin unidades)
- Función de transferencia en la forma standard

$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$ modelo normalizado: $w_n = \sqrt{k/m}$

$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

$H(s) = \frac{1 w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$ → utilizamos el modelo normalizado para expresar la ecuación con variables adimensionales o en forma estandar.

y sabemos que

→ Queremos llegar a la expresión w_n y ζ ... dividimos el denominador por m

$H(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} = k \cdot \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)}$ $\times \frac{w_n^2}{w_n^2}$

$\frac{c}{m} = 2\zeta w_n$ $\qquad$ $\frac{k}{m} = w_n^2$

$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

$\frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$ se llega al resultado.

$2\sqrt{km}\,\zeta = c$ $\qquad \times \frac{m}{m}$

$\frac{2\sqrt{km}}{m}\zeta = \frac{c}{m}$; $\sqrt{km} = \sqrt{k}\cdot\sqrt{m}$ → $\frac{c}{m} = \frac{2\zeta\sqrt{k}\sqrt{m}}{m}$; $\frac{\sqrt{m}}{m} = \frac{1}{\sqrt{m}}$

$\frac{m^{1/2}}{m^{1}} = m^{1/2-1}$

$\frac{c}{m} = 2\zeta\sqrt{k}\frac{1}{\sqrt{m}} = 2\zeta\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{w_n}$ $\qquad \frac{c}{m} = 2\zeta w_n$

$m^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{m}}$

Siguiendo con la malla 2:

$$L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\left(\frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt}\right) = 0 \Rightarrow L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C}\frac{di_1}{dt} = 0$$

factorizamos

$$\left(R + \frac{1}{C}\right)\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C}\frac{di_1}{dt} = 0 \Rightarrow \left(R + \frac{1}{C}\right)\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{C}\frac{di_1}{dt} \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = \frac{\frac{1}{C}}{\left(R + \frac{1}{C}\right)}\frac{di_1}{dt}$$

Sustituimos en Malla 1:

$$\frac{dv}{dt} = L\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{di_1}{dt} - \frac{1/C}{(R + 1/C)}\frac{di_1}{dt}\right)$$

Factorizamos

$$\frac{dv}{dt} = L\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(1 - \frac{1/C}{R + 1/C}\right)\frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{1}{C} - \frac{1}{C}\cdot\frac{1/C}{R+1/C}$$

$$\frac{1}{C}\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{R+1/C}\frac{di}{dt}$$

Solucionamos por Laplace

Reemplazamos $y(t)$ → Carga $q(t)$

velocidad $y'(t) \Rightarrow$ corriente $i(t) = q'(t)$

KVL → Ley voltaje de Kirchhoff

$$v_i(t) = v_L(t) + v_{RC}(t)$$

paralelo, voltaje mismo

$$v_L(t) = L\frac{d^2 q(t)}{dt^2}$$

$$v_{RC}(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Resistencia $\Rightarrow V = R\,i(t)$

Inductancia $\Rightarrow V = L\frac{di(t)}{dt}$

Capacitor $\Rightarrow V = \frac{q(t)}{C}$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \rightarrow i(t) \text{ es la velocidad con la que fluye la carga eléctrica}$$

tasa de cambio de la carga con respecto al tiempo

$$v_i(t) = L\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

Transformada de Laplace:

$$V_i(s) = Ls^2 Q(s) + RsQ(s) + \frac{1}{C}Q(s)$$

factorizando

Suponiendo condiciones iniciales:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right\} = s^2 Q(s) \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{dq(t)}{dt}\right\} = sQ(s) \qquad \mathcal{L}\{q(t)\} = Q(s)$$

$$\mathcal{L}\{v_i(t)\} = V_i(s)$$

Ej: Al llenar una cubeta con agua, la cantidad de agua acumulada en la cubeta es como la carga $q(t)$, y la velocidad con la que entra el agua es la corriente $i(t)$

$$V_i(s) = \left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}\right) Q(s) \rightarrow \frac{1}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} = \frac{Q(s)}{V_i(s)}$$

* Los parámetros asociados solo se aplican a la respuesta el escalón ya que lo demás requiere

$$H(s) = \frac{Q(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \rightarrow \frac{1}{ms^2 + Cs + K}$$

$L \rightarrow m$, $R \rightarrow C$, $\frac{1}{C} \rightarrow K$

si es sinusoidal y rampa no poseen un valor final definido que permita calcular tiempos como el de establecimiento o sobreimpulso)

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{Km}} \Rightarrow C = 2\xi\sqrt{Km} \rightarrow \text{en mi gráfica si } m = 1$$

en mi código el usuario puede ajustar ξ, w_n y m (m=1)

$K = w_n^2$; $C = 2\xi w_n$