

# Primeira Sucessão Ecológica no Vulcão Anak Krakatau

Juliana Carrica e Sofia Lakschevitz

28 de Novembro de 2022

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Artigo: Markovian Approaches to Ecological Succession . . . . .	4
1.2	Artigo: The Energetics of Ecological Succession: A Logistic Model of Entropic Output . . .	5
1.3	Artigo: A Stoichiometric Model of Early Plant Primary Succession . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>6</b>
2.1	Escolha do Modelo . . . . .	6
2.2	Modelo Estequiométrico . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>8</b>
3.1	Uma espécie e dois nutrientes . . . . .	8
3.2	Duas espécies e dois nutrientes . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Discussão</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>11</b>

# 1 Introdução

Krakatau (6.102°S, 105.423°L) é uma ilha localizada na Indonésia antigamente dominada por grupos de cones de vulcões até então considerados extintos. Em agosto de 1883 ocorreu uma grande erupção que contou com 4 explosões ao longo dos dias que se seguiram. Cinzas foram expelidas a aproximadamente 24 quilômetros de altura, o som podia ser ouvido na Austrália, há mais de 4500 quilômetros de distância e uma nuvem de vapor se espalhou por 40 quilômetros ao redor da área. Foi a quarta explosão que desencadeou um Tsunami com ondas de 36 metros que atingiram as ilhas Java e Sumatra, ilhas ao redor de Krakatau.

Quando a erupção terminou, mais de 36.000 pessoas haviam sido mortas e a ilha de Krakatau tinha diminuído seu tamanho pela metade. Desde a década de 1930, surgiu na parte submersa na ilha, um cone vulcânico, chamado de Anak Krakatau, que vem sofrendo erupções desde então e, conseqüentemente, aumentando de tamanho. Essa nova formação pode vir a ser muito mais forte e fatal que a anterior tendo em vista que em 1883 os três cones de vulcão se juntaram e hoje formam uma caldeira de cerca de 50 quilômetros.

A erupção de Krakatau é considerada a segunda mais fatal da história e a sexta maior do mundo. Como resultado das explosões e de toda extinção da fauna e da flora em Krakatau, o local se tornou uma importante fonte de estudo para sucessão ecológica.

A sucessão ecológica pode ser, de forma simples, definida como um processo gradual e progressivo de mudanças nas comunidades de um ecossistema até que seja atingido um clímax. Existem muitos aspectos que podem ser estudados do assunto, como a primeira sucessão, comunidades pioneiras ou intermediárias e até mesmo a perda de energia do sistema. Dessa forma, falando de vulcões podemos associar a sucessão ecológica à mudança no ecossistema causada pelas erupções.

Os vulcões são uma constante fonte de sucessão ecológica pois sua atividade destrói o ecossistema anterior, transformando o ambiente em um lugar sem vida. Portanto, pode ocorrer uma sucessão ecológica primária diversas vezes de acordo com a frequência da atividade de um vulcão e dessa forma as espécies pioneiras podem ser estudadas. Nem sempre as espécies pioneiras serão as mesmas após uma erupção, isso vai depender de algumas variáveis.

Nesse artigo, iremos estudar a primeira sucessão ecológica no vulcão Anak Krakatau. Para isso, nos baseamos em uma espécie de vinhas, estudada no artigo biológico "Colonization and Succession on Krakatau: An Analysis of the Guild of Vining Plants" escrito por Mark B. Bush, Robert J. Whitaker e Tukirin Partomihardjo. Através dele e de alguns outros artigos sobre modelagem matemática de sucessões ecológicas, visamos construir um modelo para entender os aspectos da evolução dessa espécie.

## 1.1 Artigo: Markovian Approaches to Ecological Succession

O primeiro modelo a ser estudado é o modelo de Markov, trabalhado no artigo “Markovian Approaches to Succession” de Michael B. Usher, 1979. Ele define que existem discordâncias acerca de processos de Markov na literatura sobre sucessão ecológica. Ainda assim, ele aceita que foi definido como processos estocásticos que possuem propriedades probabilísticas. Esses processos, segundo o artigo, são processos de primeira ordem. Isso significa que as probabilidades do processo em um dado instante no futuro, dependem somente do presente estado, ignorando completamente o passado.

Por esse motivo, ele pode ser útil para modelar uma sucessão ecológica, levando em consideração que nesse trabalho falaremos da primeira sucessão. Isso significa que estudaremos como que se deu a primeira originação de espécies após a completa destruição da vida pela erupção de 1883. Matematicamente, como se deu essa evolução de espécies a partir de uma primeira observação de vida em função do tempo.

Connel Slatyer (1977) concluíram que existem três conceitos diferentes de modelos de sucessão. O modelo de facilitação (“facilitation model”) assume que uma coleção de  $xi - 1$  faz com que o ambiente seja menos favorável para a própria existência, mas mais favorável para a invasão de um próximo ser  $xi$ , que pode se tornar dominante. Ainda assim, a quantidade de tempo necessária pra isso é indefinida. Ele formalmente vai dizer que a comunidade vai mudar de forma que:

$$comunidade\ xi \rightarrow comunidade\ xi + c$$

Onde  $c \geq 0$ .

Isso pode ser traduzido em uma matriz de probabilidade markoviana da forma:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1m} \\ 0 & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2m} \\ 0 & 0 & P_{33} & \dots & P_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Onde  $P_{jk}$  representa a probabilidade que uma comunidade  $j$  iria mudar para uma comunidade  $k$  em um certo período de tempo.

Outro modelo proposto por eles é o modelo de tolerância (“tolerance model”), que assume que a presença de uma comunidade  $xi$  pode aumentar ou diminuir a chance de surgimento e crescimento de outras espécies. A representação markoviana desse modelo é dada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2m} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & P_{m3} & \dots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

Nela é possível que ocorra regressão na evolução mesmo no desenvolvimento em torno do clímax como pode ser visto que  $P_{jk} > P_{kj}$  ( $k > j$ ) na maioria das comparações.

O terceiro modelo é chamado de modelo de inibição (“inhibition model”). Ele, apesar de parecido com o modelo de tolerância, estabelece uma pausa no modelo de sucessão pois conta com algum agente externo, como fogo, agindo sobre o ambiente. Dessa forma, existiria um momento de pausa que seria um estagio intermediário. Como estamos falando de sucessão em um vulcão, esse modelo não poderia ser aplicado pois uma vez que o agente externo vêm de erupções (lava), ele não pausa o processo mas reinicia o mesmo.

## 1.2 Artigo: The Energetics of Ecological Succession: A Logistic Model of Entropic Output

O segundo modelo utilizado para lidar com o fenômeno da sucessão ecológica foi encontrado no artigo "The energetics of ecological succession: A logistic model of entropic output", por Keith R. Skene. Esse artigo, manipulando o princípio da máxima produção de entropia, apresenta um modelo baseado nas mudanças observadas na produção de entropia ao longo do fenômeno biológico em questão. Após diversas interpretações, a sucessão ecológica passou a ser entendida como um fluxo de energia, pensamento que tinha como suporte as leis da termodinâmica, que com o seu desenvolvimento, apoiou-se prioritariamente na segunda lei e no conceito de entropia.

No artigo, Odum e Schrodinger são citados para afirmar que ecossistemas e organismos são sistemas termodinâmicos abertos, não-equilibrados que trocam energia e matéria com o meio ambiente continuamente (Odum). Adicionalmente, a ordem interna só pode ser mantida a custo do aumento da desordem do meio, ou seja, os ecossistemas se transformam para reduzir sua própria entropia, afastando-se do equilíbrio energético, maximizando, automaticamente, a entropia externa (Schrodinger). A partir disso, os autores do artigo, usando o princípio da máxima produção de entropia, introduzem um modelo logístico, o qual, por meio de mudanças observadas durante o processo de sucessão ecológica, começa com as primeiras evidências de um ecossistema (quando a produção de entropia ainda é baixa) e vai até a comunidade clímax do ecossistema (quando a produção é maximizada).

A produção entrópica do primeiro estágio, em  $t = 0$ , chamamos de  $S_0$ , a capacidade intrínseca do ecossistema de intensificar sua capacidade de produção de entropia, denominamos de  $r_S$ . A produção de entropia no tempo  $t$ ,  $S_t$ , definimos como:  $S_t = r_S * S_0$ . Por fim, a taxa de mudança na geração entrópica pode ser expressa da forma:  $\frac{\delta S}{\delta t} = r_S * S$ .

## 1.3 Artigo: A Stoichiometric Model of Early Plant Primary Succession

Encontramos o terceiro modelo para sucessão ecológica no artigo chamado "A Stoichiometric Model of Early Plant Primary Succession", por Justin N. Marleau, Yu Jin, John G. Bishop, William F. Fagan and Mark A. Lewis. Neste artigo, os autores desenvolvem um modelo mecanístico estequiométrico da sucessão ecológica primária no Mount St. Helens, um vulcão no estado de Washington, EUA. Utilizando estequiometria ecológica, as interações ecológicas e mecanismos de sucessão (como competição, facilitação e disponibilidade de recursos) podem ser descritos em termos de trocas de compostos químicos. No experimento em questão, como o foco é a sucessão das plantas, os recursos utilizados são dois dos nutrientes que as plantas demandam, o nitrogênio e fósforo.

A modelagem baseia-se num sistema de várias equações diferenciais ordinárias, cada uma consistindo em um aspecto diferente necessário para a dinâmica da comunidade das plantas. Cada espécie  $j$  de planta dentro da comunidade tem uma biomassa  $B_j$  (mol C) e uma certa quantidade  $Q_{ij}$  (mol nutrient mol  $C^{-1}$ ) de um nutriente  $i$  por unidade de biomassa. Além disso, cada planta conseguirá nutrientes por meio do solo, dependendo da concentração do nutriente  $i$ , denotada por  $R_i$  (mol nutrient  $L^{-1}$ ). Ainda mais, quando uma planta morre, uma parte de cada nutriente dela vira detrito, denominado  $D_i$  (mol nutrient), e podem voltar para o solo ao longo do tempo.

Através da realização de seus experimentos, os autores observam que mudanças na composição das comunidades de plantas podem ser explicadas pela competição por nutrientes e alterações na disponibilidade de nutrientes, ambos influenciados por fatores bióticos e abióticos.

## 2 Metodologia

### 2.1 Escolha do Modelo

Para a criação da metodologia que melhor se aplica à questão que estamos tratando, os três modelos foram analisados e dois foram descartados. O primeiro a ser descartado foi o modelo da entropia. Apesar do modelo servir para modelagem do problema, o foco principal dele no artigo estudado é o da perda de energia do solo e não a relação que a energia do solo têm com a evolução de espécies. Sendo assim, o modelo não se mostrou apto à modelagem do problema. O segundo a ser descartado foi o modelo de Markov. Mesmo o artigo estudado tratar de três modelos markovianos que falam de evolução de espécies, eles não se encaixam de forma tão correta quanto o modelo mecanístico estequiométrico quando se trata de sociedades pioneiras. Esse problema, apesar de contornável, foi ressaltado no resumo do artigo. O modelo escolhido, por sua vez, vai utilizar equações diferenciais ordinárias para estudar as mudanças ambientais.

### 2.2 Modelo Estequiométrico

Devido as complexas interações entre plantas, solo e detritos envolvidas na sucessão primária, para explicar a dinâmica da comunidade, é essencial acompanhar a biomassa das plantas, os nutrientes presentes no solo e os nutrientes localizados no tecido morto das plantas.

Recapitulando o que foi brevemente dito na introdução, cada espécie  $j$  de planta dentro da comunidade tem uma biomassa  $B_j$ (mol C) e uma certa quantidade  $Q_{ij}$ (mol nutrient mol C<sup>-1</sup>) de um nutriente  $i$  por unidade de biomassa. Além disso, cada planta conseguirá nutrientes por meio do solo, dependendo da concentração do nutriente  $i$ , denotada por  $R_i$ (mol nutrient L<sup>-1</sup>). Ainda mais, quando uma planta morre, uma parte de cada nutriente dela vira detrito, denominada  $D_i$ (mol nutrient), e podem voltar para o solo ao longo do tempo.

É importante ressaltar que algumas suposições foram indispensáveis para simplificar essa construção teórica a um modelo matemático. Para este modelo, supomos que o meio ambiente é espacialmente homogêneo com parâmetros bióticos e abióticos contantes temporalmente. Além disso, supomos que as plantas consideradas crescem vegetavelmente (reproduções não são consideradas), possuem uma quantidade fixa de carbono por unidade de biomassa, têm alocação de biomassa fixa nas raízes e brotos e competem apenas quando há a redução dos recursos que ficam no solo. Aceitamos, também, que os nutrientes no detrito das plantas se decompõem à mesma taxa, independente das espécies das quais originaram.

Seguindo essa simplificação do modelo, descrevemos a comunidade das plantas usando um sistema de equações diferenciais ordinárias.

A taxa de variação do nutriente  $i$  no solo é uma função da taxa do fornecimento de nutrientes, da taxa de absorção do nutriente  $i$  pela comunidade e da taxa de mineralização do nutriente  $i$  proveniente do detrito, e é descrita pela seguinte equação:

$$\frac{dR_i}{dt} = I_i - \phi_i R_i - \omega \sum_{j=1}^n f_{ij}(R_i, Q_{ij}) B_j + \omega \delta_i D_i, \quad (1)$$

Onde  $I_i$  é o influxo do nutriente  $i$  entrando no solo,  $\phi_i$  é a taxa de perda do nutriente  $i$  do solo,  $\omega$  é a quantidade de água no solo,  $f_{ij}$  é a função de absorção do nutriente  $i$  pela espécie  $j$  e  $\delta_i$  é a taxa da mineralização do nutriente  $i$ . Note que  $I_i$  depende de  $\omega$  e que  $R_i$  é uma concentração. Dessa forma, mudanças em  $\omega$  não causam ganhos nem perdas adicionais na total quantidade de nutrientes presentes, apenas na solução do solo.

O nutriente  $i$  tomado pela espécie  $j$ , entra na reserva de nutrientes da planta, onde a dinâmica é governada pelos ganhos de absorção e diluição devido ao crescimento.

$$\frac{dQ_{ij}}{dt} = f_{ij}(R_i, Q_{ij}) - \psi_j(Q_{1j}, \dots, Q_{ij}, \dots, Q_{nj}) Q_{ij}, \quad (2)$$

Onde,  $\psi$  é a função de crescimento da espécie  $j$  que depende unicamente da quantidade de nutriente nas reservas de  $j$ . Desse modo, a dinâmica da biomassa da espécie  $j$  é determinada pela dinâmica das reservas de nutrientes que controla o crescimento e pelas perdas causadas pela mortalidade.

$$\frac{dB_j}{dt} = [\psi_j(Q_{1j}, \dots, Q_{ij}, \dots, Q_{nj}) - m_j] B_j, \quad (3)$$

Onde  $m_j$  é a taxa de mortalidade constante da espécie  $j$ . Devido à mortalidade, uma porção de nutrientes acabam nos detritos da planta, em que a dinâmica é dirigida pela reciclagem e mineralização.

$$\frac{dD_i}{dt} = \sum_{j=1}^n m_j B_j Q_{ij} \zeta_{ij} - \delta_i D_i, \quad (4)$$

Onde  $\zeta_{ij}$  é a porção de nutrientes  $i$  entrando nos detritos de planta que veio da espécie  $j$ .

Para a função de crescimento das plantas, consideramos que o crescimento obedece a lei do mínimo de Liebig, a qual diz que a produção de uma cultura é limitada pelo nutriente que está em menor disponibilidade no solo, ainda que todos os outros elementos estejam disponíveis e na quantidade adequada.

$$\psi_j(Q_{1j}, \dots, Q_{ij}, \dots, Q_{nj}) = \mu_j \min\left(1 - \frac{Q_{min,1j}}{Q_{1j}}, \dots, 1 - \frac{Q_{min,ij}}{Q_{ij}}, \dots, 1 - \frac{Q_{min,nj}}{Q_{nj}}\right), \quad (5)$$

Onde  $\mu_j$  é a taxa máxima de crescimento da espécie  $j$  com infinitos nutrientes internos,  $Q_{min,ij}$  é a quantidade mínima de nutriente interno  $i$  para a espécie  $j$  e a função  $\min$  acha o menor valor dentro dos parênteses e implementa a lei do mínimo de Liebig. Com a finalidade de manter a análise do modelo simples, é usado a teórica máxima taxa de crescimento comum.

Para a função de absorção de nutriente, assumimos que aumentando a solução de concentração de nutrientes do solo a absorção aumenta. Porém, aumentando a concentração interna de nutrientes, a absorção diminui.

$$f_{ij}(R_i, Q_{ij}) = \left(\frac{v_{ij} R_i}{K_{ij} + R_i}\right) \left(\frac{Q_{max,ij} - Q_{ij}}{Q_{max,ij} - Q_{min,ij}}\right), \quad (6)$$

Onde  $v_{ij}$  é a taxa máxima de absorção do nutriente  $i$  pela espécie  $j$ ,  $K_{ij}$  é a concentração do nutriente  $i$  na solução do solo e  $Q_{max,ij}$  é a máxima concentração interna do nutriente  $i$  na espécie  $j$ .

### 3 Resultados

Analisando rapidamente o modelo escolhido, é perceptível sua natureza complexa tanto pela quantidade de variáveis quanto pela quantidade de informações que ele engloba. Percebendo isso e levando em consideração que nesse trabalho, é tratada a primeira sucessão ecológica no vulcão de Krakatau, na Indonésia, é difícil obter a quantidade de dados necessários para a realização de uma análise numérica. Logo, uma análise de natureza analítica matemática foi realizada com o intuito de entender as equações e seus equilíbrios.

Para encontrar os equilíbrios e fazer análises gráficas, algumas mudanças tiveram que ser consideradas. A primeira de todas foi a equação de função do crescimento de plantas, denotada pela letra  $\psi_j$ . Essa função, considera uma grande quantidade de nutrientes e uma função de mínimo que é difícil de ser estudada quando não estamos tratando de uma análise de dados. Dessa forma, para encontrar o equilíbrio ela foi utilizada como constante.

A partir disso, foram estudados dois casos: um caso com uma espécie de planta e dois nutrientes e outro caso com duas espécies de planta e dois nutrientes. É importante ressaltar que desde o início é de conhecimento que nosso modelo também trata de uma competição por nutrientes entre espécies, então quando analisamos apenas uma espécie parte da complexidade é perdida e o modelo se torna apenas sobre a absorção de nutrientes.

#### 3.1 Uma espécie e dois nutrientes

Com as mudanças aplicadas nas equações e considerando tanto a função  $\psi_j$  quanto a  $f_{ij}$  como constantes, utilizamos as seguintes equações para o cálculo do equilíbrio.

$$\frac{dR_i}{dt} = I_i - \phi_i R_i - \omega f_i B + \omega \delta_i D_i \quad (7)$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = f_i - \psi Q_i \quad (8)$$

$$\frac{dB}{dt} = (\psi - m)B \quad (9)$$

$$\frac{dD_i}{dt} = (mBQ_i\zeta_i) - (\delta_i D_i) \quad (10)$$

É perceptível, que a quantidade  $j$  de cada variável não está mais presente devido ao estudo de apenas uma espécie nesse momento. Ainda assim, todas as equações e variáveis possuem o mesmo intuito e significado mesmo que conte com a simplificação das equações.

A partir desse ponto e contando com as aulas na plataforma do CoCalc, foram calculados os equilíbrios para as quatro equações e apenas um foi encontrado.

$$[R_i = I_i, Q_i = \frac{f_i}{\psi}, B = 0, D_i = 0] \quad (11)$$

A representação desse equilíbrio em qualquer gráfico seriam apenas pontos e esses pontos dependem diretamente das condições iniciais do ambiente e das matérias orgânicas presentes nele.

#### 3.2 Duas espécies e dois nutrientes

Nessa versão do modelo estequiométrico, consideramos que temos 2 espécies de plantas e dois tipos de nutrientes. Para chegarmos a tal simplificação do modelo tivemos que fazer algumas mudanças, principalmente nas equações que possuíam somatório em relação a variável  $j$  que representa as espécies de planta. O resultado foram as seguintes equações:

$$\frac{dR_i}{dt} = I_i + D_i \delta_i \omega - R_i \phi_i - \omega (B_1 f_{i1} + B_2 f_{i2}) \quad (12)$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = f_{ij} - \psi Q_{ij} \quad (13)$$



$$\frac{dB_j}{dt} = -(\psi_j - m_j)B_j \quad (14)$$

$$\frac{dD_i}{dt} = B_1Q_{i1}m_1\zeta_{i1} + B_2Q_{i2}m_2\zeta_{i2} - \delta_i D_i \quad (15)$$

Nitidamente, continuamos a tratar  $f_{ij}$  e  $Q_{ij}$  como constantes. Além disso, retomamos com a quantidade  $j$  no índice das variáveis que são dependentes dele. Nas equações diferenciais (13) e (14), representamos o  $j$  como uma variável já que a outra variável - a qual está sendo derivada em relação ao tempo - também depende de  $j$ , entretanto, nas equações diferenciais (12) e (15), visto que temos apenas duas espécies de planta, representamos o  $j$  como espécie 1 e espécie 2, com a finalidade de não necessitar do somatório e obter apenas uma soma simples. Por fim, também transformamos o somatório da equação diferencial (15) em uma simples, por meio da substituição da variável  $j$  por 1 e 2 nos termos da soma  $B_jQ_{ij}m_j\zeta_{ij}$ . A partir delas, foi encontrado um equilíbrio.

$$\left[ R_i = \frac{\omega(B_1Q_{i1}m_1\zeta_{i1} + B_2Q_{i2}m_2\zeta_{i2} - B_1f_{i1} - B_2f_{i2}) + I_i}{\phi_i}, Q_{ij} = \frac{f_{ij}}{\psi_j}, B_j = 0, D_i = \frac{B_1Q_{i1}m_1\zeta_{i1} + B_2Q_{i2}m_2\zeta_{i2}}{\delta_i} \right] \quad (16)$$

## 4 Discussão

Em ambas as formas que o modelo foi estudado, foi achado um equilíbrio, mesmo que no caso de duas espécies de planta e dois nutrientes tenha sido um equilíbrio um pouco complicado.

No caso de uma espécie de planta e dois nutrientes, o equilíbrio encontrado representaria um ponto em uma representação gráfica então ele não foi demonstrado. Ainda assim, como ele tem dois componentes representados por zero, fazendo o jacobiano teríamos um determinante igual a zero. O determinante sendo zero determina que o ponto representa um ponto de sela em um retrato de fase. Um ponto de sela não se trata de um máximo ou mínimo mesmo sendo um ponto em que sua declividade é nula, é um ponto em que a elevação é máxima em um lado mas mínima em outro.

De certa forma podemos ver que isso faz sentido já que estamos trabalhando com uma planta e a quantidade de nutriente que ela absorve do solo mas também levamos em consideração a quantidade de nutrientes que ela absorve do solo. Isso pode ser representado por um ponto de sela no equilíbrio.

No caso de duas espécies e dois nutrientes também obtivemos apenas um equilíbrio, porém, como consequência do grande número de variáveis que são usadas no modelo, uma análise rápida seria impossível mesmo com  $B_j = 0$  no equilíbrio. Desse modo, tínhamos que simplificar mais uma vez as nossas quatro equações diferenciais ordinárias para tornar viável uma plotagem em gráfico e retrato de fase. A mudança foi dar valor aos parâmetros das equações, exceto as que estão sendo derivadas em relação ao tempo ( $R_i, Q_{ij}, B_j, D_i$ ).

Devido a falta de dados sobre os nutrientes e sobre as espécies de plantas na região de Krakatau, seguimos os valores de acordo com o artigo base usado, "A Stoichiometric Model of Early Plant Primary Succession". O modelo do artigo foi feito para dois nutrientes (Nitrogênio e Fósforo) e três espécies de planta (*Lupinus lepidus*, *Hypochaeris radicata* e *Agrostis scabra*), porém nos baseamos nos dados de apenas duas das plantas usadas, a *Hypochaeris radicata* e a *Agrostis scabra* ainda com os mesmos nutrientes. Assim, atribuímos os valores dos parâmetros da seguinte forma:  $I_i = 514, \omega = 0.267, \delta_i = 0.0015, \phi_i = 1, f_{i1} = 0.225, f_{i2} = 0.225, \psi_j = 0.04048, f_{ij} = 0.225, m_j = 0.1505, m_1 = 0.1505, m_2 = 0.1505, \zeta_{i1} = 0.495, \zeta_{i2} = 0.495$ . Os parâmetros  $\omega, \phi_i, m_j(m_1 m_2), \zeta_{i1} \zeta_{i2} e \delta_i$  são os mesmos para as duas espécies de planta e para os dois nutrientes.

## 5 Conclusão

Com as análises podemos concluir que talvez esse modelo seja válido para uma análise com foco em dados. Por considerar muitas variáveis e trabalhar com funções de mínimos, máximos e de somatória, fica difícil uma maior análise de natureza matemática do assunto. No próprio artigo no qual ele é proposto, "A Stoichiometric Model of Early Plant Primary Succession" é explicado em muitos momentos que eles vão usar dados conhecidos e que vão pular uma discussão analítica da matemática utilizada pela complexidade do modelo.

Como o intuito desse trabalho é estudar a sucessão ecológica no monte de Krakatau e a ilha vem entrando em erupção de tempos em tempos, renovando o ambiente e, com isso, o andamento da evolução das espécies, dificulta a obtenção de dados. Mesmo com uma grande quantidade de artigos e informação sobre esse vulcão em específico, nos deparamos com a maior parte voltada para o estudo puramente da biologia envolvida e não da matemática. Esses foram alguns dos aspectos que dificultaram a evolução desse trabalho.

Desde o início, quando primeiro foi proposta a análise de uma espécie e dois nutrientes, o objetivo era simplificar um pouco o modelo em busca de um maior entendimento mesmo que dessa forma o modelo não considere a competição entre espécies.

Ainda assim, de todos os modelos vistos e todos os artigos lidos, esse era o que mais se encaixava no que estava sendo proposto. Mesmo com as dificuldades, ainda acreditamos que com os dados corretos e as informações necessárias, esse seja um modelo válido por considerar muitos dos fatores envolvendo a sucessão ecológica. Porém, vale ressaltar que grande parte de sua utilidade está em uma natureza mais biológica do que matemática e esse não era o objetivo desse trabalho.

## 6 Bibliografia

- The encyclopedia of volcanoes - second edition  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123859389000730#:~:text=In%20cases%20such%20as%20volcanoes%20emerging%20from%20beneath,available%20colonists%2C%20climate%2C%20biotic%20interactions%2C%20and%20other%20factors.>
- Smithsonian Institution - National Museum of Natural History  
<https://volcano.si.edu/volcano.cfm?vn=262000>
- Today in Conservation  
<https://todayinconservation.com/2018/07/august-26-krakatau-volcano-erupted-1883/>
- Science Direct - The energetics of ecological succession: A logistic model of entropic output, Keith R. Skene, 2013.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0304380012005583>
- ERA education and research archives - A stoichiometric model of early plant primary succession, Justin N. Marleau, Yu Jin, John G. Bishop, William F. Fagan and Mark A. Lewis1, 2011.  
<https://era.library.ualberta.ca/items/1bdd3929-6fc3-42a1-bea6-8df279ea29bc>
- Colonization and Succession on Krakatau: An Analysis of the Guild of Vining Plants.  
[https://www.jstor.org/stable/2388921#metadata\\_info\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/2388921#metadata_info_tab_contents)
- Markovian Approaches to Ecological Succession, Michael B. Usher, 1979.  
[https://www.jstor.org/stable/4170#metadata\\_info\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/4170#metadata_info_tab_contents)