Lista 2)

energia gerada por cada usina
↳ var. dec.

Exercício 1 *Gestão da produção de eletricidade. As usinas térmicas e hidrelétricas brasileiras podem ser agrupadas em 4 subsistemas intercambiando energia entre eles. Supomos que cada região contém uma usina hidrelétrica (agregação das usinas hidrelétricas deste subsistema) e um número arbitrário de usinas térmicas. Cada usina hidrelétrica funciona com um reservatório. Somente 80% das afluências de uma região dada é armazenado nos reservatórios. O restante é diretamente convertido em eletricidade por usinas ao fil d'água. O custo de produção da eletricidade com as usinas térmicas é uma função linear da produção enquanto ele é considerado nulo com usinas hidrelétricas. Cada usina tem uma capacidade de produção conhecida e os níveis dos reservatórios devem ficar entre determinados valores mínimos e máximos. Cada dia, a demanda dos clientes deve ser atendida, eventualmente comprando energia no mercado spot a um custo unitário mais alto que o maior custo unitário das térmicas.*

Explicar como determinar as produções diárias das usinas térmicas e hidrelétricas para o mês seguinte, de maneira a minimizar o custo e satisfazendo a demanda e as restrições de funcionamento das usinas.

- 4 subsistemas → $i \in \{1,2,3,4\}$
- cada subsistema i com 1 hidrelétrica e y_i térmicas, $y \in \mathbb{N}$
- qtd. das afluências do subsistema i no início do dia: a_i
- nível do reservatório do subsistema i no início do dia: x_i
- capacidades máxima e mínima do reservatório x_i: M_i, m_i
- demanda de energia do dia: D
- capacidade de produção da usina hidrelétrica do subsistema i: p_i^H

(entendemos que se utilizarmos um volume V_i de água para produzir na usina i, a produção de eletricidade é $p_i^H \cdot V_i$)

- capacidade de produção da usina térmica t no subsistema i: p_{ti}, $t=1,\dots,y_i$
- custo por eletricidade das usinas térmicas no subsistema i: c_i^T
- custo da eletricidade no mercado spot no dia: c_s

1) Variáveis de decisão:

x_i^T = qtd. de eletricidade gerada pelas usinas térmicas no subsistema i

x_i^H = qtd. de eletricidade gerada pelas usinas hidrelétricas no subsistema i

x_s = qtd. de eletricidade comprada no mercado spot

2) Função Objetivo: minimizar o custo da produção das usinas térmicas + custo da eletricidade comprada no mercado spot:

$$\min \quad c_s x_s + \sum_{i=1}^{4} c_i^T x_i^T$$

3) Restrições:

- de demanda:

$$\left(\sum_{i=1}^{4} 0{,}2 \cdot a_i + x_i^T + x_i^H\right) + x_s \geq D$$

- de armazenamento:

$$m_i \leq x_i + 0{,}8 \cdot a_i - p_i^H \cdot V_i \leq M_i \quad , i \in \{1,2,3,4\}$$

solução Vincent

- Parâmetros

tempo $t = 1, \dots, T$, região $i = 1,2,3,4$

A_{ti} = afluência no tempo t na região i

D_{ti} = demanda da região i no tempo t

B_i =

C_{ij} = custo de prod. unitária de eletricidade para a usina térmica j na região i

$\bar{U}_{ij}$ = capacidade de prod. da usina térmica j na região i

$\bar{V}_i$ = capacidade de prod. da usina hidrelétrica na região i

$\underline{x}_{ti}$ = nível mínimo do reservatório i para o tempo t

$\bar{x}_{ti}$ = " máximo " " " " " " "

w_{ti} = q^td. de energia comprada no mercado spot para o tempo t na região i

p_t = custo de energia no mercado spot em t

1. Variáveis de decisão:

x_{ti} = nível do reservatório i no início de t , x_{1i} é dado

v_{ti} = produção da usina hidrelétrica da região i em t

u_{tij} = produção da usina térmica j da região i em t

w_{ti} = q^td. de energia comprada no mercado spot para o tempo t na região i

sp_{ti} = "spillage" para o reservatório i no tempo t (?)

E_{tij} = energia transportada de i para j em t

2. Função Objetivo: $\min \sum_{tij} c_{ij} u_{tij} + \sum_{ti} w_{tipt} + \sum_{ti} sp_{tid}$

3. Restrições:

- $\underline{x}_{ti} \leq x_{ti} \leq \overline{x}_{ti}, \quad \forall ti$

  $0 \leq u_{tij} \leq \bar{U}_{ij}, \quad \forall ti$

  $0 \leq v_{ti} \leq \bar{V}_{ij}, \quad \forall ti$

- $x_{ti} = x_{t-1\,i} + 0.8 A_{ti} - V_{ti} - sp_{ti}$

- $0.2 A_{ti} + \sum_{j} u_{tij} + V_{ti} + \sum_{(j,i)\in E} E_{tji} - \sum_{(i,j)\in E} E_{tij} \geq D_t$, $i \neq N$,

  , com $\sum_{(i,j)\in E} E_{tji} = \sum_{(i,j)\in \bar{E}} E_{tij}$, $i = N$

- $sp_{ti} \geq 0$, $w_{ti} \geq 0$, $E_{tij} \geq 0$, $E_{tij} \leq \bar{E}_{tij}$

* p/ implementação pode colocar ou não sp_{ti} e E_{tij}

ou $x_{ti} = x_{0i} + \sum_{t=1}^{T} 0.8 A_{ti} - V_{ti} - sp_{ti}$

Exercício 2 *Gestão de carteiras. Queremos investir M reais em n ativos financeiros. O retorno do ativo i no período de investimento é r_i. Escrever um problema de otimização linear que permita determinar a quantidade de dinheiro a investir em cada ativo para maximizar o lucro. Qual é a solução deste problema?*

- M reais em n ativos
- retorno do ativo i no período de investimento é r_i

1) Variáveis de Decisão: x_i = quantidade de dinheiro a investir em cada ativo i, $i = 1, \ldots, n$

2) Função Objetivo: $\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$

3) Restrições:

- <u>de recurso</u>:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq M$$

- <u>não negatividade</u>

$$x_i \geq 0, \forall i$$

Exercício 3 *Planificação da expansão da produção. Consideramos o problema de expansão da capacidade de produção de uma usina produzindo m produtos. Cada uma das n máquinas é flexível e cada produto pode ser produzido por qualquer máquina. A máquina j está agora disponível para h_j horas de funcionamento por semana e horas adicionais podem ser adquiridas num custo atualizado de c_j por hora. O uso da máquina j é limitado por uma cota superior de u_j horas, por outra parte, uma revisão de t_j horas da máquina j é necessária para cada hora de funcionamento. O tempo total gasto em revisão não pode ultrapassar T horas. A taxa de produção do produto i na máquina j é a_{ij}, com um custo associado de g_{ij} por hora.*

Cada semana, a empresa deve satisfazer a demanda em cada um dos m produtos. Cada unidade de produto i não vendida acarreta um custo p_i. A empresa quer decidir quantas horas adicionais são necessárias para cada máquina com os dados a seguir:

– $n = 4,\ m = 3,\ T = 100,\ p_i = (400, 400, 400)$;

– $c_j = (2.5, 3.75, 5.0, 3.0),\ t_j = (0.08, 0.04, 0.03, 0.01)$;

– $h_j = (500, 500, 500, 500),\ u_j = (2000, 2000, 3000, 3000)$;

– $[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.9 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 & 0.6 & 0.8 \\ 0.05 & 0.2 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$

– $[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 2.6 & 3.4 & 3.4 & 2.5 \\ 1.5 & 2.4 & 2.0 & 3.6 \\ 4.0 & 3.8 & 3.5 & 3.2 \end{pmatrix}$

– *as demandas nos diferentes produtos (numa semana dada) são dadas por {1800, 600, 3000}.*

<u>Dados do problema</u>

- m produtos, n máquinas, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$
- h_j: qtd. de horas de funcionamento da máquina j em 1 semana
- c_j: custo de 1 hora de funcionamento adicional para a máquina j
- u_j: qtd. máxima de horas que a máquina j pode funcionar em 1 semana
- t_j: qtd. de horas de revisão da máquina j para 1 hora de funcionamento
- T: qtd. máxima de horas que podem ser gastas em revisão em 1 semana
- a_{ij}: taxa de produção do produto i na máquina j
- g_{ij}: custo de 1 hora da produção do produto i na máquina j
- d_i: demanda do produto i da semana a ser satisfeita
- p_i: custo para cada unidade do produto i não vendida

1) Variáveis de Decisão:

x_{ij} = qtd. de horas a máquina j deve produzir o produto i na semana

y_j = qtd. de horas adicionais para cada máquina j na semana

2) Função Objetivo: minimizar o custo

$$\min \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j y_j}_{\text{horas adicionais}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_{ij}}_{\text{custo de produzir o produto } i \text{ na máq. } j \text{ por } x_{ij} \text{ horas}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} - d_i\right)\cdot p_i}_{\text{custo da qtd. do produto } i \text{ não vendida}}$$

3) Restrições:

- de demanda:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \geq d_i$$

- de horas:

$$h_j + y_j \leq u_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq h_j + y_j$$

$$t_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \leq T$$

$j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$

solução do Vincent

- Parâmetros

n máquinas

h_j = horas para a máquina j

e_j = qtd. adicional de horas compradas no preço c_j para a máquina j, $e_{ij} \geq 0$

u_j = qtd. máx. de horas de uso da máquina j $\quad h_j + e_j \leq u_j$

Tempo de revisão da máquina j: $t_j(e_j + h_j)$ e $\sum_j t_j(e_j + h_j) \leq T$

a_{ij} = taxa de produção do produto i na máquina j

g_{ij} = custo

h_{ij} = horas passadas produzindo i na máquina j , $h_{ij} \geq 0$

$x_i = \sum_j h_{ij} a_{ij}$ = qtd. do produto i produzida

d_i = demanda do produto i

s_i = demanda não atendida para o produto i , $s_i \geq 0$

$x_i + s_i = d_i$

custo de produção = $\sum_{i,j} h_{ij} g_{ij}$

$h_j + e_j = \sum_i h_{ij}$

p_i = custo unitário da demanda do produto i não atendida

1. Variáveis de decisão

2. Função objetivo: $\sum_i p_i s_i + \sum_{i,j} h_{ij} g_{ij} + \sum_j c_j e_j$

3. Restrições

$h_{ij}, e_{ij} \geq 0$

$\sum_j t_j (h_j + e_j) \leq T$

$x_i = \sum_j h_{ij} a_{ij}$

$x_i + s_i = d_i$

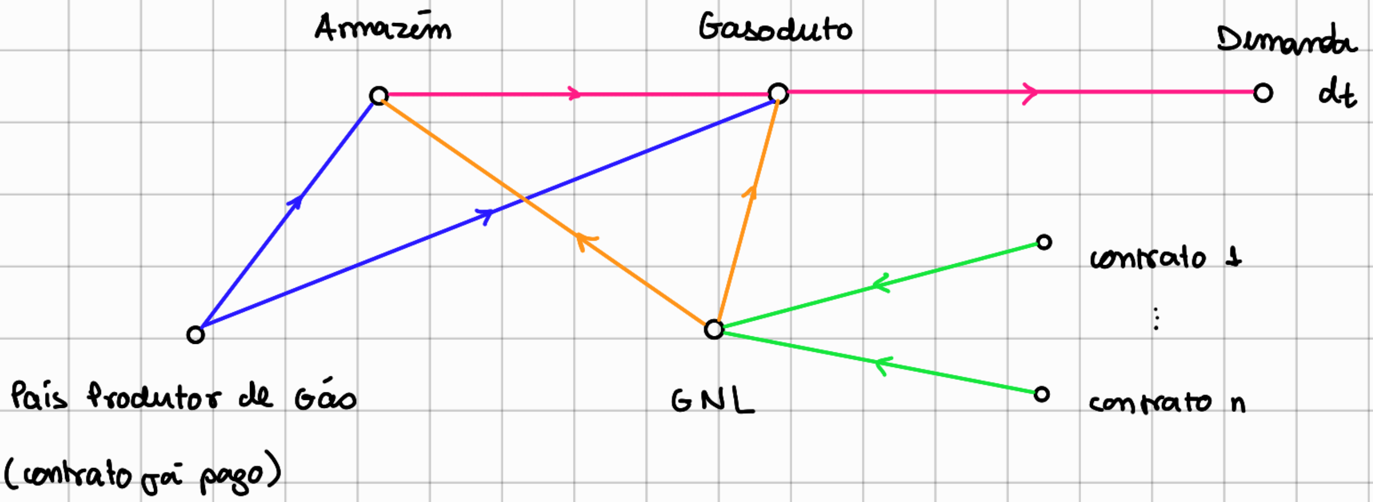
$h_j + e_j = \sum_i h_{ij}$

Exercício 4 *Gestão de contratos com opção de cancelamento.* *Uma empresa deve entregar cada mês, via um gasoduto (visto como um armazém de gás com capacidades mínimas e máximas), uma determinada quantidade de gás a seus clientes. Para isto, ela dispõe de um armazém de gás e de um contrato (já pago) com um país produtor de gás que garante uma determinada chegada de gás cada mês. Este gás pode ser enviado no armazém ou no gasoduto diretamente. Além disto, a empresa passou contratos de Gás Natural Liquefeito (GNL) com opção de cancelamento. Cada um destes contratos permite a entrega de uma determinada quantidade de gás, para uma data fixada no contrato. Porém, esta carga pode ser cancelada até um mês antes do dia da entrega, pagando uma multa, dependendo do momento em que é feito o cancelamento (quanto mais tarde o cancelamento, mais elevada a multa). O preço pago pelo GNL é o preço spot do gás natural no dia da entrega. O GNL é entregue por navios que ficam no porto até serem esvaziados. Para evitar que os navios permaneçam muito tempo no porto, um custo (função linear do armazém) é pago cada mês para o gás que sobra nos navios. O gás é vendido aos clientes 30 acima do preço spot.*

Escrever um programa de otimização linear que permite determinar que contratos têm que cancelar assim como os fluxos de gás na rede de modo a maximizar o lucro satisfazendo as restrições do sistema.

- maximizar o lucro
- determinar que contratos têm que cancelar

$\underline{\underline{e}}$ os fluxos de gás na rede



<u>Dados do problema</u>:

- D_d: demanda do gás no dia d
- M, m: capacidade máxima e mínima do armazém
- a_0: qtd. inicial de gás no armazém
- p_d: qtd. de gás garantida pelo país produtor de gás no dia d
- c_{id}: qtd. de GNL disponibilizada pelo navio do contrato i no dia d
- m_{id}: multa por cancelar o contrato i no dia d
- s_d: preço spot do gás no dia d
- m_d: multa por qtd. de gás paga pelo tanto que sobra nos navios no dia d
- n_d: qtd. de contratos para o dia d

1) Variáveis de decisão:

- xd = qtd. de gás que sai do armazém para atender a demanda
- $yid = \begin{cases} 1, \text{ se o contrato } i \text{ é cancelado no dia } d \\ 0, \text{ c.c} \end{cases}$
- bd = qtd. de gás que será comprada dos navios no dia d

2) Função objetivo: minimizar o custo total

$$\min \underbrace{\sum_{d=1}^{30} \sum_{i=1}^{nd} yid \cdot mid}_{\text{custo de cancelamentos de contrato no mês}} + \underbrace{\sum_{d=1}^{30} bd \cdot sd}_{\text{custo c/ a qtd. de gás que será comprada dos navios}}$$

$$\underbrace{+ \sum_{K=1}^{30} \left(\sum_{d=1}^{K} \sum_{i=1}^{nd} yid\, cid - \sum_{d=1}^{K} bd \right) \cdot m_K}_{\text{multa do tanto de gás que sobra dos navios no fim do dia K}}$$

3) Restrições:

- de demanda:

$$xd + bd \geq Dd$$

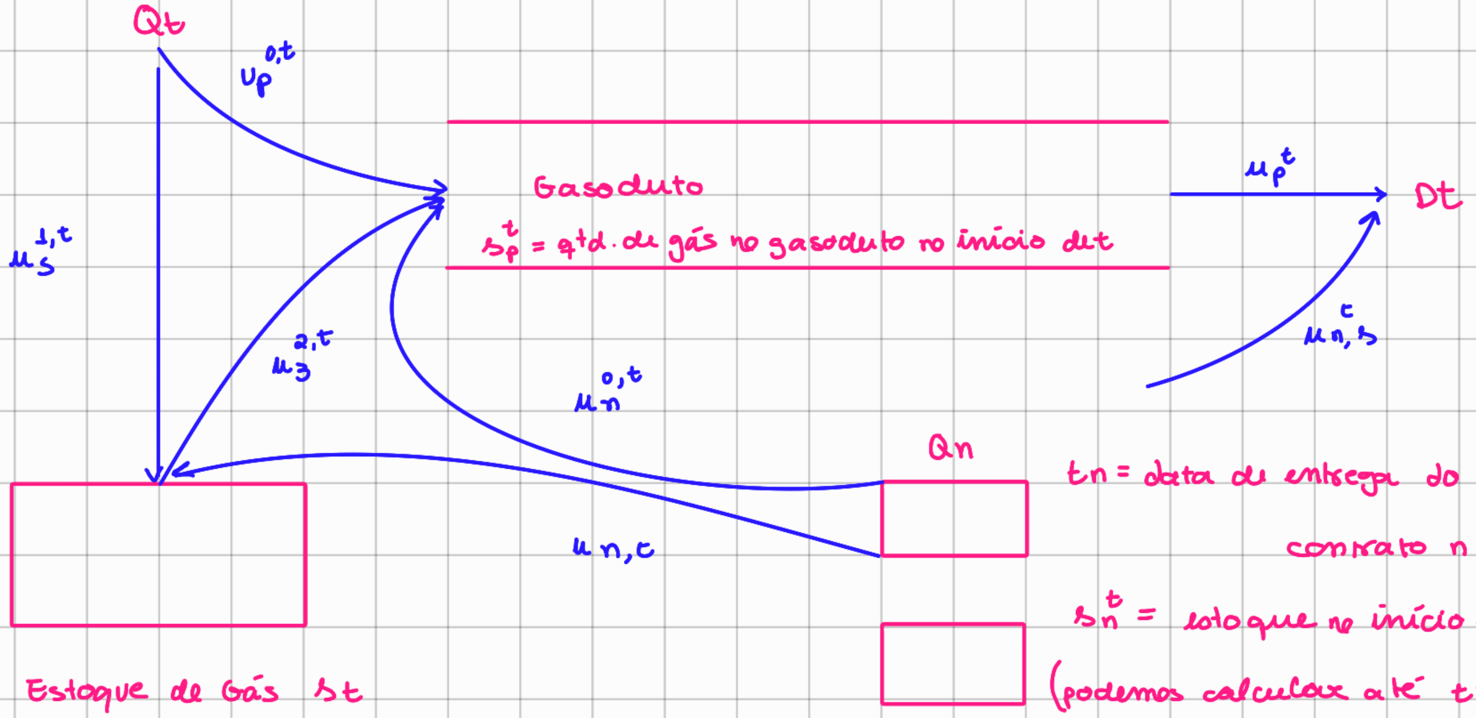
- de armazenamento:

$$m \leq a_0 + \sum_{i=1}^{d} pi - \sum_{i=1}^{d} xi \leq M \quad , \; d = 1, \dots, 30$$

- de recurso:

$$bd \leq \sum_{i=1}^{n_1} yi1\, ci1 + \dots + \sum_{i=1}^{nd} yid\, cid - b_1 - b_2 - \dots - b_{d-1}$$

Solução Vincent



t_n = data de entrega do contrato n

s_n^t = estoque no início de t (podemos calcular até t_{n-1})

S_t = preço spot de n no tempo t

c_t = custo unitário para armazenar gás nos navios

* $1 \geq s_t \; u_p^t$
* $p_t \; u_{NS}^t$

1. Variáveis de decisão:

- $y_n^t = \begin{cases} 1, & \text{se o contrato } n \text{ é cancelado em } t \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$
- C_n^t = custo pago pelo cancelamento do contrato n no tempo t
- f_{nt} = custo unitário de multa em t para o contrato n
- F_n^t = custo de carga para o contrato n no tempo t

2. Função Objetivo: $\min \sum_t$

Exercício 5 *Problema da mochila. Mickey está preparando sua mochila para um trekking na Cordilheira dos Andes. Cada objeto que ele pode levar tem uma certa utilidade (expressa por um número positivo). Cada objeto tem um peso conhecido e Mickey não quer carregar mais de P kg. Escrever um problema de otimização que permita determinar os objetos a serem colocados na mochila de modo a maximizar a utilidade. Como modificar este problema se tomarmos em consideração o volume de cada objeto; o volume da mochila sendo V?*

* objeto → utilidade
  → peso

* peso deve ser $< P$ kg
* soma do volume dos objetos $< V$

1) Variáveis de decisão: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ é colocado na mochila} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$

Seja $\begin{cases} u_i & \text{a utilidade do objeto } i \\ v_i & \text{o volume do objeto } i \\ p_i & \text{o peso do objeto } i \end{cases}$

2) Função Objetivo: $\max \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x^T u$

3) Restrições:

- $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq P$
- $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \leq V$

$x_i \in \{0,1\} \; \forall i$

Exercício 6 *Problema de "Unit commitment". Uma empresa dispõe de 10 usinas térmicas que estão por enquanto desligadas. As usinas devem ser usadas para satisfazer, para cada um dos meses do ano seguinte, as demandas em eletricidade dos clientes da empresa. Para cada usina, o custo de produção é uma função linear da produção. Por outra parte, ligar uma usina acarreta um custo fixo que depende da usina. Uma vez ligada, a usina fica funcionando até o final do ano. Escrever um problema de otimização que permita saber que usinas ligar e quando, assim como as produções das usinas ligadas de modo a satisfazer as demandas minimizando o custo de produção.*

- Quero saber quantas usinas ligar?

  quando ligar cada uma?

  quanto cada usina vai produzir? $\vee$ ligada

Dados do Problema

- d_m : demanda de eletricidade para o mês $m = 1, \dots, 12$
- p_i : custo de produção de eletricidade pela usina i em 1 mês
- c_i : custo de ligar a usina i

1) Variáveis de decisão:

- $$l_{mi} = \begin{cases} 1, & \text{se a usina } i \text{ está ligada no mês } m \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

- x_{mi} = qtd. de eletricidade que a usina i vai produzir no mês m

com $i = 1, \dots, 10$ e $m = 1, \dots, 12$

2) Função Objetivo: Quero minimizar o custo

$$\min \sum_{i=1}^{10} \Bigg[\underbrace{l_{12,i} \cdot c_i}_{\text{custo de ligar as usinas}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{12} p_i x_{mi} l_{mi}}_{\text{custo de produção de eletricidade}} \Bigg]$$

3) Restrições:

- de demanda:

$$\sum_{i=1}^{10} x_{mi} l_{mi} \geq d_m, \quad m = 1, \dots, 12$$

- da usina:

$$l_{mi} \leq l_{12,i}, \quad m = 1, \dots, 12 \text{ e } i = 1, \dots, 10$$