Programação Linear Inteira

13/02/2025

- Vincent - sala 523 - vincentguigues@gmail.com
- A1

* Modellagem → 2 listas → 2 questões na prova
* outras listas
* implementar os modelos das listas - (python ou scilab)
↳ biblioteca gratuita p/ acadêmicos
Mosek - biblioteca muito boa p/ otimização de programas lineares

listas 80%
trabalho 20%

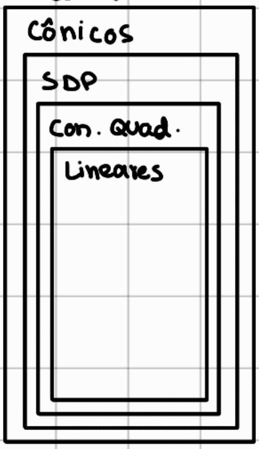
- A2

* Prova 50%
* Listas 50%

- Eclass → Notas de Aula e Listas
→ Simplex
→ Branch and Bound

13/02/2025

Problemas Determinísticos		Problemas Estocásticos	
Convexos	Não convexos (PLI)	Convexos	Não convexos (PLI)



Problemas Estocásticos → alguns parâmetros não são conhecidos

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \ \forall i \\ x \in X \end{cases}$$

* SDP: semi definido positivo

Modelagem

1) Escolher as variáveis de decisão — $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

2) Escrever a função objetivo — $\min c^T x$

3) Escrever as restrições do problema — $\begin{cases} A_1 x_1 \leq b_1 \\ A_2 x_2 = b_2 \end{cases}$

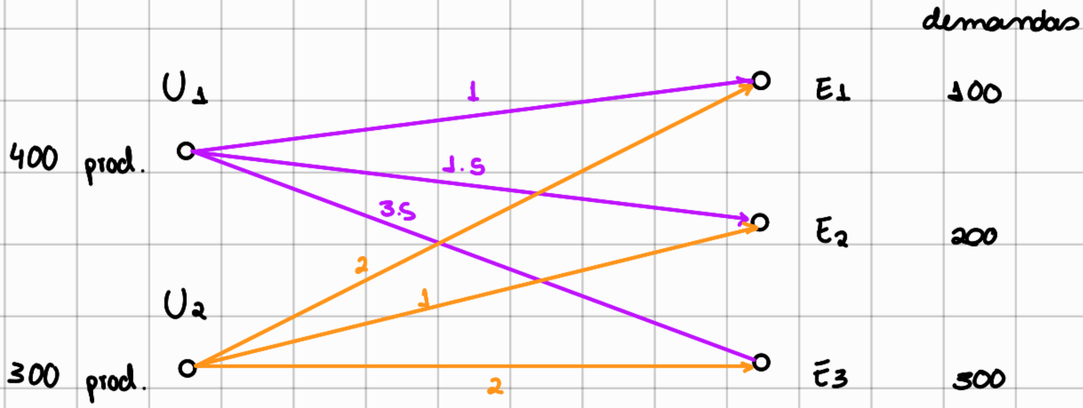
Lista 1)

Exercício 1 *Uma fábrica possui duas usinas U1 e U2. A usina U1 dispõe de 400 unidades de um produto e a U2 de 300 unidades do mesmo produto. A fábrica tem três clientes E1, E2 e E3 cujas demandas respectivas para o produto são 100 unidades para E1, 200 unidades para E2 e 300 unidades para E3. Os custos de transportes são resumidos na tabela seguinte:*

	E1	E2	E3
U1	1	1.5	3.5
U2	2	1	2

Por exemplo, cada unidade fornecida a E1 a partir de U2 custa 2 reais. Como obter um sistema de distribuição ótimo?

Problema de Transporte



1) Variáveis de decisão: x_{ij} = quantidade de produto transportados da usina i (U_i) para o cliente j (E_j)

2) Função objetivo: queremos minimizar o custo

$c^T x$

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}$$

$$x_{11} + 1{,}5 \cdot x_{12} + 3{,}5 \cdot x_{13} + 2 \cdot x_{21} + x_{22} + 2 \cdot x_{23}$$

Atendimento à demanda

$x_{11} + x_{21} \geq 100$

$x_{12} + x_{22} \geq 200$

$x_{13} + x_{23} \geq 300$

$(=)$

3) Restrições de Capacidade

$x_{11} + 1{,}5 \cdot x_{12} + 3{,}5 \cdot x_{13} \leq 400$

$2 \cdot x_{21} + x_{22} + 2 \cdot x_{23} \leq 300$

Não negatividade

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$

Exercício 2 *Numa usina química, produzimos dois tipos de produtos a partir de três fertilizantes. O produto I, composto por um quilograma de nitratos e dois quilogramas de sal de potássio é vendido por R\$7, e o produto II, composto de um quilograma de nitratos, um quilograma de fosfatos e três quilogramas de sal de potássio é vendido por R\$9. Sobram no estoque 8kg de nitratos, 4kg de fosfatos e 19kg de sal de potássio.*

1. *Qual quantidade de cada produto a empresa tem que produzir para maximizar o lucro?*
2. *Uma cooperativa agrícola quer negociar (i.e., minimizar) o preço de um quilograma de cada componente para comprar a granel todos os fertilizantes do estoque. Como determinar os preços para que a venda a granel seja pelo menos tão lucrativa como a venda dos produtos?* → (dual do 1)

Problema de Mistura

	Ni	KCl	P	Preço
Produto 1	1	2	–	7
Produto 2	1	3	1	9
	8	19	4	

1.

1) Variáveis de Decisão: p_i = quantidade de produto i produzida

$p_i \in \mathbb{N}$

2) Função Objetivo: $\max\ 7p_1 + 9p_2$

3) Restrições de Recurso

$$p_1 + p_2 \leq 8$$
$$2p_1 + 3p_2 \leq 19$$
$$p_2 \leq 4$$

$$(P) \begin{cases} \max\ 7p_1 + 9p_2 \\ p_1 + p_2 \leq 8 \\ 2p_1 + 3p_2 \leq 19 \\ p_2 \leq 4 \\ p_1, p_2 \geq 0 \end{cases}$$

é o problema primal da forma

$$\begin{cases} \max\ c^T p \\ Ap \leq b \\ p \geq 0 \end{cases},$$

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix}$$

② * para os problemas duais geralmente usamos as variáveis λ, y

p/ comprar a granel

cooperativa quer negociar (minimizar) o preço de 1kg de cada componente

como determinar os preços para que a venda a granel seja tão lucrativa como a venda dos produtos?

1) Variáveis de decisão: y_i = preço de 1kg do componente i

2) Função Objetivo: $\min \; 8y_1 + 19y_2 + 4y_3 = y^T b$

3) Restrições:

- Não negatividade:

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

-

$$\left.\begin{array}{l} y_1 + 2y_2 \geq 7 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 9 \end{array}\right\} \text{p/ lucrar pelo menos o que lucrava antes}$$

* Podemos escrever o problema (dual de P) na forma:

$$\begin{cases} \min \; y^T b \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \min \; y^T b \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(D) é o dual de (P)

OBS: o nº de restrições = nº de colunas de A

nº de variáveis = tamanho de b

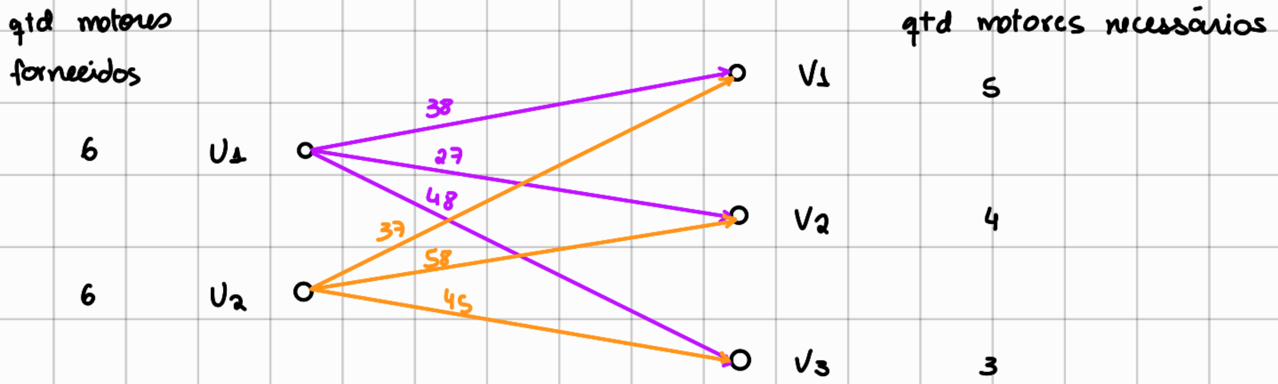
Exercício 3 *Um modelo de carro é montado em 3 usinas situadas em cidades V1, V2 e V3. O motor destes modelos é fornecido por duas outras usinas situadas nas cidades U1 e U2. As usinas de montagem precisam de pelo menos 5, 4 e 3 motores. Cada usina pode fornecer no máximo 6 motores. A direç ao da empresa quer minimizar o custo de transporte dos motores entre os dois sítios de fábrica e os três sítios de montagem. Os custos unitários (por motor transportado) para todos os itinerários possíveis são:*

	$V1$	$V2$	$V3$
$U1$	38	27	48
$U2$	37	58	45

Como minimizar o custo total de transporte respeitando a oferta e a demanda?

Problema de Transporte

★ minimizar custo de transporte



1) Variáveis de decisão: x_{ij} = quantidade de motores transportada da usina U_i para a usina V_j

2) Função Objetivo: $\min \quad 38x_{11} + 27x_{12} + 48x_{13} + 37x_{21} + 58x_{22} + 45x_{23}$

3) Restrições:

- de recurso

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 6$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 6$

- não negatividade

$x_{ij} \geq 0 \quad , \forall i,j$

- de atendimento à demanda

$x_{11} + x_{21} \geq 5$

$x_{12} + x_{22} \geq 4$

$x_{13} + x_{23} \geq 3$

Exercício 4 *Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele trabalha 10 horas por dia e gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar 1 unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 78 unidades por dia e que o lucro unitário por sapato é de 5 reais e o de cinto é de 4 reais, pede-se: o modelo do sistema de produç ao diário do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro diário.*

Problema de Mistura

⊛ maximizar lucro diário

sapateiro → 10h de trabalho

6 sapatos / h se fizer só sapatos → $\frac{1}{6}$ h p/ fazer 1 sapato | 2 un. couro 1 sapato

5 cintos / h se fizer só cintos → $\frac{1}{5}$ h p/ fazer 1 cinto | 1 un. couro 1 cinto

	horas	couro	Lucro	
sapato	$\frac{1}{6}$	2	5	(produto 1)
cinto	$\frac{1}{5}$	1	4	(produto 2)
total	10	78		

1) Variáveis de decisão: x_s = quantidade de sapatos que deve ser produzida pelo sapateiro

x_c = quantidade de cintos que deve ser produzida pelo sapateiro

2) Função Objetivo: max $5x_s + 4x_c$

3) Restrições:

- de recurso:

$\left(\frac{1}{6}\right)x_s + \left(\frac{1}{5}\right)x_c \leq 10$

$2x_s + x_c \leq 78$

- não negatividade:

$x_s \geq 0$

$x_c \geq 0$

Exercício 5 *Certo fabricante de combustível para avião vende 2 tipos de combustível, A e B. O combustível de tipo A possui 25% de gasolina 1, 25% de gasolina 2 e 50% de gasolina 3. O combustível B tem 50% de gasolina 2 e 50% de gasolina 3. Há disponível para produção 500 galões de gasolina 1 e 200 galões de cada gasolina 2 e 3. Os lucros pela venda dos combustíveis A e B são, respectivamente, 20 e 30 dólares. Quanto se deve fazer de cada combustível para se obter um lucro máximo? Formule e resolva o*

Problema de Mistura

* maximizar lucro

	gas. 1	gas. 2	gas. 3	preço
combustível A	25%	25%	50%	20
combustível B	-	50%	50%	30
total	500	200	200	

1) Variáveis de Decisão: x_A = qtd. de galões do combustível A que deve ser produzida

x_B = qtd. de galões do combustível B que deve ser produzida

2) Função Objetivo: $\max\ 20x_A + 30x_B$

3) Restrições

- de recurso

$0{,}25x_A \leq 500$

$0{,}25x_A + 0{,}5x_B \leq 200$

$0{,}5x_A + 0{,}5x_B \leq 200$

Exercício 6 *Uma fábrica de petróleo deseja utilizar quatro tipos de petróleos para produzir três tipos de diesel: A, B, e C. A respeito dos tipos de petróleo, temos as seguintes informações:*

Tipo de petróleo	*Quantidade máxima disponível por dia*	*Custo (reais por barril)*
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4
4	1000	5

O diesel A não pode conter mais de 30% do petróleo do tipo 1, nem mais de 50% do tipo 3, mas deve conter no mínimo 40% do tipo 2. O preço de venda deste diesel é de 5.5 reais por barril.

O diesel B, cujo preço de venda é 4.5 reais por barril, deverá ser composto de pelo menos 10% do tipo 2 mas no máximo de 50% do tipo 1.

O diesel C não poderá conter mais de 70% do petróleo do tipo 1 e o seu preço de venda é de 3.5 reais por barril.

A fábrica gostaria de saber a quantidade de barris de cada tipo de petróleo que deveria ser utilizada na fabricação de cada um dos tipos de diesel para poder maximizar seu lucro.

Problema de Mistura

⊛ maximizar lucro

	Tipos de petróleo				
	1	2	3	4	Preço
diesel A	$< 30\%$	$> 40\%$	$< 50\%$		5,5
diesel B	$< 50\%$	$> 10\%$			4,5
diesel C	$< 70\%$				3,5

1) Variáveis de decisão: x_{iA} = qtd de barris de petróleo do tipo i utilizada na fabricação do diesel A

x_{iB} = qtd de barris de petróleo do tipo i utilizada na fabricação do diesel B

x_{iC} = qtd de barris de petróleo do tipo i utilizada na fabricação do diesel C

2) Função Objetivo: lucro da venda − custo da compra do petróleo

$$\max \quad 5{,}5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}+x_{4A}) + 4{,}5(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B}+x_{4B}) +$$
$$3{,}5(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C}+x_{4C}) - 3(x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}) - 6(x_{2A}+x_{2B}+x_{2C})$$
$$- 4(x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}) - 5(x_{4A}+x_{4B}+x_{4C})$$

3) Restrições:

- de Demanda:

$$\frac{x_{1A}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iA}} \leq 30\%$$

$$\frac{x_{2A}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iA}} \geq 40\%$$

$$\frac{x_{3A}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iA}} \leq 50\%$$

$$\frac{x_{1B}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iB}} \leq 50\%$$

$$\frac{x_{2B}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iB}} \geq 10\%$$

$$\frac{x_{1C}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iC}} \leq 70\%$$

- de Recurso:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 3000$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 2000$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 4000$$

$$x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} \leq 1000$$

- Principais problemas de modelagem

18/02/2025

1. Transporte
2. Mistura

- Implementação das listas
  ↳ achar a solução ótima
  ↳ achar uma outra solução

Modeling - Linear Programming

Ex. 1.1 - Localização de Posto de Bombeiros

- $x_i = \begin{cases} 1 & \text{, se estação é construída na cidade } i \\ 0 & \text{, c.c} \end{cases}$

$$\min \sum_{i=1}^{5} x_i$$

Lista 2)

energia gerada por cada usina
↳ var. dec.

Exercício 1 *Gestão da produção de eletricidade. As usinas térmicas e hidrelétricas brasileiras podem ser agrupadas em 4 subsistemas intercambiando energia entre eles. Supomos que cada região contém uma usina hidrelétrica (agregação das usinas hidrelétricas deste subsistema) e um número arbitrário de usinas térmicas. Cada usina hidrelétrica funciona com um reservatório. Somente 80% das afluências de uma região dada é armazenado nos reservatórios. O restante é diretamente convertido em eletricidade por usinas ao fil d'água. O custo de produção da eletricidade com as usinas térmicas é uma função linear da produção enquanto ele é considerado nulo com usinas hidrelétricas. Cada usina tem uma capacidade de produção conhecida e os níveis dos reservatórios devem ficar entre determinados valores mínimos e máximos. Cada dia, a demanda dos clientes deve ser atendida, eventualmente comprando energia no mercado spot a um custo unitário mais alto que o maior custo unitário das térmicas.*

Explicar como determinar as produções diárias das usinas térmicas e hidrelétricas para o mês seguinte, de maneira a minimizar o custo e satisfazendo a demanda e as restrições de funcionamento das usinas.

- 4 subsistemas → $i \in \{1,2,3,4\}$
- cada subsistema i com 1 hidrelétrica e y_i térmicas, $y \in \mathbb{N}$
- qtd. das afluências do subsistema i no início do dia : a_i
- nível do reservatório do subsistema i no início do dia: x_i
- capacidades máxima e mínima do reservatório x_i : M_i, m_i
- demanda de energia do dia : D
- capacidade de produção da usina hidrelétrica do subsistema i : p_i^H

(entendemos que se utilizarmos um volume V_i de água para produzir na usina i, a produção de eletricidade é $p_i^H \cdot V_i$)

- capacidade de produção da usina térmica t no subsistema i : p_{ti} , $t = 1, \ldots, y_i$
- custo por eletricidade das usinas térmicas no subsistema i : c_i^T
- custo da eletricidade no mercado spot no dia : c_S

1) Variáveis de decisão :

x_i^T = qtd. de eletricidade gerada pelas usinas térmicas no subsistema i

x_i^H = qtd. de eletricidade gerada pelas usinas hidrelétricas no subsistema i

x_S = qtd. de eletricidade comprada no mercado spot

2) Função Objetivo: minimizar o custo da produção das usinas térmicas + custo da eletricidade comprada no mercado spot:

$$\min \quad c_S x_S + \sum_{i=1}^{4} c_i^T x_i^T$$

3) Restrições:

- de demanda:

$$\left(\sum_{i=1}^{4} 0{,}2 \cdot a_i + x_i^T + x_i^H\right) + x_s \geq D$$

- de armazenamento:

$$m_i \leq x_i + 0{,}8 \cdot a_i - p_i^H \cdot V_i \leq M_i \quad , \; i \in \{1,2,3,4\}$$

Exercício 2 *Gestão de carteiras. Queremos investir M reais em n ativos financeiros. O retorno do ativo i no período de investimento é r_i. Escrever um problema de otimização linear que permita determinar a quantidade de dinheiro a investir em cada ativo para maximizar o lucro. Qual é a solução deste problema?*

- M reais em n ativos
- retorno do ativo i no período de investimento é r_i

1) Variáveis de Decisão: x_i = quantidade de dinheiro a investir em cada ativo i, $i = 1, \dots, n$

2) Função Objetivo: $\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$

3) Restrições:

- de recurso:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq M$$

- não negatividade

$$x_i \geq 0, \forall i$$

Exercício 3 *Planificação da expansão da produção.* *Consideramos o problema de expansão da capacidade de produção de uma usina produzindo m produtos. Cada uma das n máquinas é flexível e cada produto pode ser produzido por qualquer máquina. A máquina j está agora disponível para h_j horas de funcionamento por semana e horas adicionais podem ser adquiridas num custo atualizado de c_j por hora. O uso da máquina j é limitado por uma cota superior de u_j horas, por outra parte, uma revisão de t_j horas da máquina j é necessária para cada hora de funcionamento. O tempo total gasto em revisão não pode ultrapassar T horas. A taxa de produção do produto i na máquina j é a_{ij}, com um custo associado de g_{ij} por hora.*

Cada semana, a empresa deve satisfazer a demanda em cada um dos m produtos. Cada unidade de produto i não vendida acarreta um custo p_i. A empresa quer decidir quantas horas adicionais são necessárias para cada máquina com os dados a seguir:

- $n = 4,\ m = 3,\ T = 100,\ p_i = (400, 400, 400);$
- $c_j = (2.5, 3.75, 5.0, 3.0),\ t_j = (0.08, 0.04, 0.03, 0.01);$
- $h_j = (500, 500, 500, 500),\ u_j = (2000, 2000, 3000, 3000);$
- $[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.9 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 & 0.6 & 0.8 \\ 0.05 & 0.2 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$
- $[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 2.6 & 3.4 & 3.4 & 2.5 \\ 1.5 & 2.4 & 2.0 & 3.6 \\ 4.0 & 3.8 & 3.5 & 3.2 \end{pmatrix}$
- *as demandas nos diferentes produtos (numa semana dada) são dadas por {1800, 600, 3000}.*

<u>Dados do problema</u>

- m produtos, n máquinas, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$
- h_j : qtd. de horas de funcionamento da máquina j em 1 semana
- c_j : custo de 1 hora de funcionamento adicional para a máquina j
- u_j : qtd. máxima de horas que a máquina j pode funcionar em 1 semana
- t_j : qtd. de horas de revisão da máquina j para 1 hora de funcionamento
- T : qtd. máxima de horas que podem ser gastas em revisão em 1 semana
- a_{ij} : taxa de produção do produto i na máquina j
- g_{ij} : custo de 1 hora da produção do produto i na máquina j
- d_i : demanda do produto i da semana a ser satisfeita
- p_i : custo para cada unidade do produto i não vendida

1) Variáveis de Decisão:

x_{ij} = qtd. de horas a máquina j deve produzir o produto i na semana

y_j = qtd. de horas adicionais para cada máquina j na semana

2) Função Objetivo: minimizar o custo

$$\min \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j y_j}_{\text{horas adicionais}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_{ij}}_{\text{custo de produzir o produto } i \text{ na máq. } j \text{ por } x_{ij} \text{ horas}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} - d_i\right)\cdot p_i}_{\text{custo da qtd. do produto } i \text{ não vendida}}$$

3) Restrições:

- de demanda:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \geq d_i$$

- de horas:

$$h_j + y_j \leq u_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq h_j + y_j$$

$$t_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \leq T$$

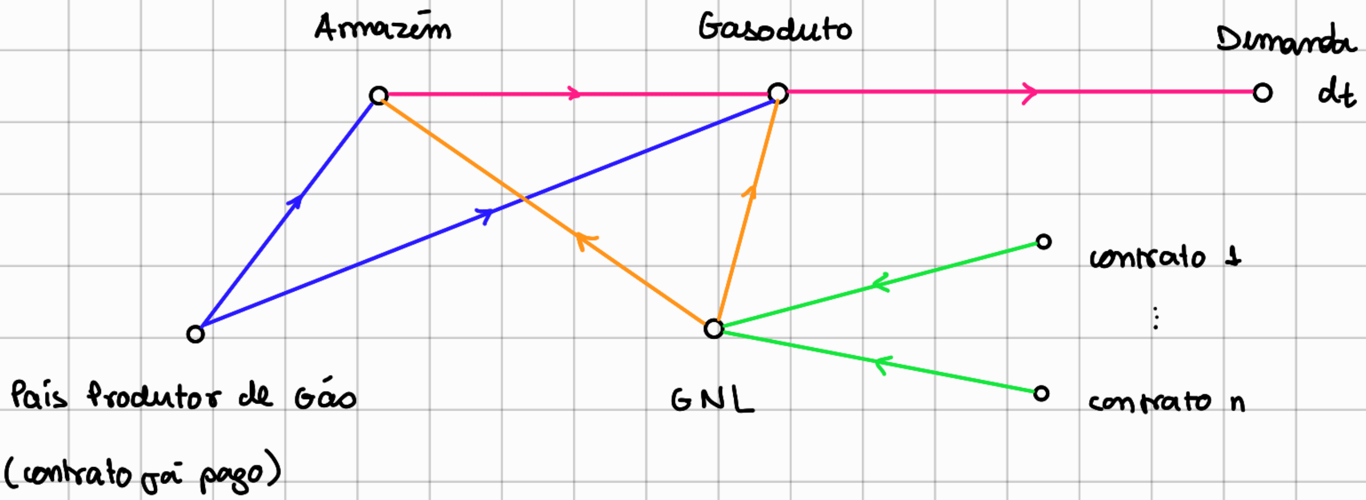
$j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$

Exercício 4 *Gestão de contratos com opção de cancelamento.* *Uma empresa deve entregar cada mês, via um gasoduto (visto como um armazém de gás com capacidades mínimas e máximas), uma determinada quantidade de gás a seus clientes. Para isto, ela dispõe de um armazém de gás e de um contrato (já pago) com um país produtor de gás que garante uma determinada chegada de gás cada mês. Este gás pode ser enviado no armazém ou no gasoduto diretamente. Além disto, a empresa passou contratos de Gás Natural Liquefeito (GNL) com opção de cancelamento. Cada um destes contratos permite a entrega de uma determinada quantidade de gás, para uma data fixada no contrato. Porém, esta carga pode ser cancelada até um mês antes do dia da entrega, pagando uma multa, dependendo do momento em que é feito o cancelamento (quanto mais tarde o cancelamento, mais elevada a multa). O preço pago pelo GNL é o preço spot do gás natural no dia da entrega. O GNL é entregue por navios que ficam no porto até serem esvaziados. Para evitar que os navios permaneçam muito tempo no porto, um custo (função linear do armazém) é pago cada mês para o gás que sobra nos navios. O gás é vendido aos clientes 30 acima do preço spot.*

Escrever um programa de otimização linear que permite determinar que contratos têm que cancelar assim como os fluxos de gás na rede de modo a maximizar o lucro satisfazendo as restrições do sistema.

- maximizar o lucro
- determinar que contratos têm que cancelar

e os fluxos de gás na rede



__Dados do problema:__

- Dd: demanda do gás no dia d
- M, m: capacidade máxima e mínima do armazém
- a_0: qtd. inicial de gás no armazém
- pd: qtd. de gás garantida pelo país produtor de gás no dia d
- cid: qtd. de GNL disponibilizada pelo navio do contrato i no dia d
- mid: multa por cancelar o contrato i no dia d
- sd: preço spot do gás no dia d
- md: multa por qtd. de gás paga pelo tanto que sobra nos navios no dia d
- nd: qtd. de contratos para o dia d

1) Variáveis de decisão:

- xd = qtd. de gás que sai do armazém para atender a demanda
- $yid = \begin{cases} 1, & \text{se o contrato } i \text{ é cancelado no dia } d \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$
- bd = qtd. de gás que será comprada dos navios no dia d

2) Função objetivo: minimizar o custo total

$$\min \underbrace{\sum_{d=1}^{30} \sum_{i=1}^{nd} yid \cdot mid}_{\text{custo de cancelamentos de contrato no mês}} + \underbrace{\sum_{d=1}^{30} bd \cdot sd}_{\text{custo c/ a qtd. de gás que será comprada dos navios}}$$

$$\underbrace{+ \sum_{K=1}^{30} \left(\sum_{d=1}^{K} \sum_{i=1}^{nd} yid\, cid - \sum_{d=1}^{K} bd \right) \cdot m_K}_{\text{multa do tanto de gás que sobra dos navios no fim do dia } K}$$

3) Restrições:

- de demanda:

$$xd + bd \geq Dd$$

- de armazenamento:

$$m \leq a_0 + \sum_{i=1}^{d} pi - \sum_{i=1}^{d} xi \leq M \quad , \ d = 1, \ldots, 30$$

- de recurso:

$$bd \leq \sum_{i=1}^{n_1} yi1\, ci1 + \cdots + \sum_{i=1}^{nd} yid\, cid - b_1 - b_2 - \cdots - b_{d-1}$$

Exercício 5 *Problema da mochila. Mickey está preparando sua mochila para um trekking na Cordilheira dos Andes. Cada objeto que ele pode levar tem uma certa utilidade (expressa por um número positivo). Cada objeto tem um peso conhecido e Mickey não quer carregar mais de P kg. Escrever um problema de otimização que permita determinar os objetos a serem colocados na mochila de modo a maximizar a utilidade. Como modificar este problema se tomarmos em consideração o volume de cada objeto; o volume da mochila sendo V?*

* objeto → utilidade
  → peso

* peso deve ser $< P$ kg
* soma do volume dos objetos $< V$

1) Variáveis de decisão: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ é colocado na mochila} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$

Seja $\begin{cases} u_i & \text{a utilidade do objeto } i \\ v_i & \text{o volume do objeto } i \\ p_i & \text{o peso do objeto } i \end{cases}$

2) Função Objetivo: $\max \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x^T u$

3) Restrições:

- $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq P$
- $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \leq V$

$x_i \in \{0,1\} \; \forall i$

Exercício 6 *Problema de "Unit commitment". Uma empresa dispõe de 10 usinas térmicas que estão por enquanto desligadas. As usinas devem ser usadas para satisfazer, para cada um dos meses do ano seguinte, as demandas em eletricidade dos clientes da empresa. Para cada usina, o custo de produção é uma função linear da produção. Por outra parte, ligar uma usina acarreta um custo fixo que depende da usina. Uma vez ligada, a usina fica funcionando até o final do ano. Escrever um problema de otimização que permita saber que usinas ligar e quando, assim como as produções das usinas ligadas de modo a satisfazer as demandas minimizando o custo de produção.*

- Quero saber quantas usinas ligar?

  quando ligar cada uma?

  quanto cada usina vai produzir?
  $\vee$
  ligada

Dados do Problema

- d_m : demanda de eletricidade para o mês $m = 1, \ldots, 12$
- p_i : custo de produção de eletricidade pela usina i em 1 mês
- c_i : custo de ligar a usina i

1) Variáveis de decisão:

- $$l_{mi} = \begin{cases} 1, & \text{se a usina } i \text{ está ligada no mês } m \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

- x_{mi} = qtd. de eletricidade que a usina i vai produzir no mês m

com $i = 1, \ldots, 10$ e $m = 1, \ldots, 12$

2) Função Objetivo: Quero minimizar o custo

$$\min \sum_{i=1}^{10} \Bigg[\underbrace{l_{12,i} \cdot c_i}_{\text{custo de ligar as usinas}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{12} p_i x_{mi} l_{mi}}_{\text{custo de produção de eletricidade}} \Bigg]$$

3) Restrições:

- de demanda:

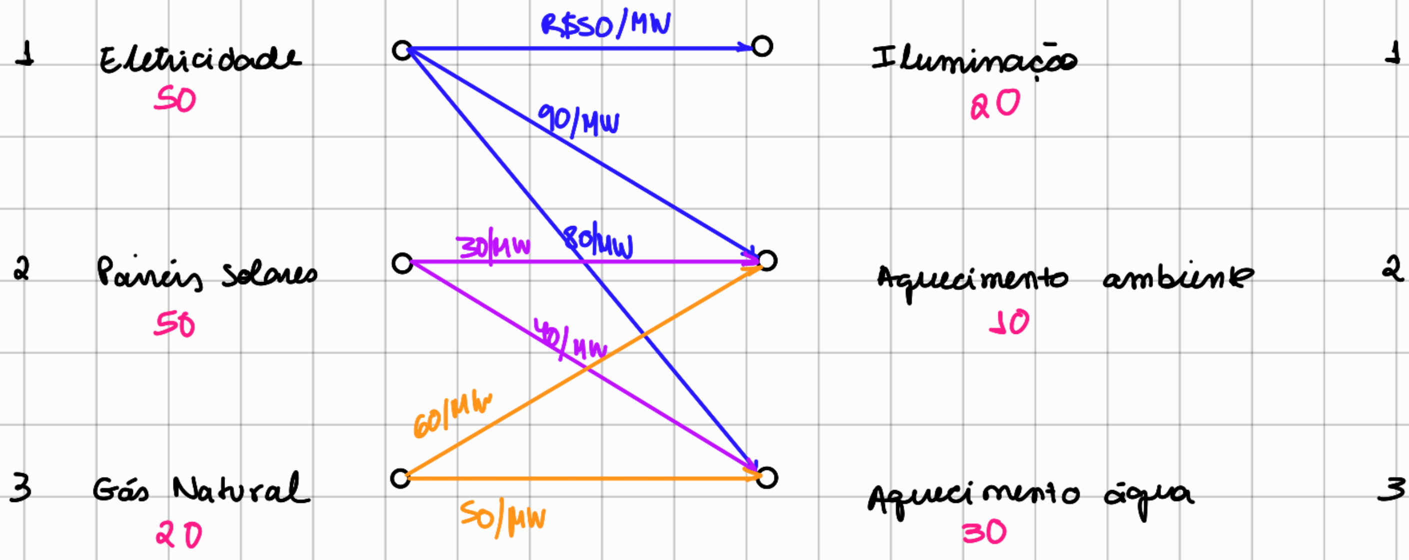
$$\sum_{i=1}^{10} x_{mi} l_{mi} \geq d_m, \quad m = 1, \ldots, 12$$

- da usina:

$$l_{mi} \leq l_{12,i} \quad , m = 1, \ldots, 12 \text{ e } i = 1, \ldots, 10$$

Exercícios de Modelagem da prova de 2024

(2) companhia energética Dark necessita realizar o planejamento de um novo prédio.
A energia necessária é class. em 3 categorias:



Variáveis de Decisão) x_{ij} = qtd de energia fornecida da fonte i para a necessidade j

Função objetivo) min $50 \cdot x_{11} + 90 \cdot x_{12} + 80 \cdot x_{13} + 30 \cdot x_{22} + 40 \cdot x_{23} + 60 \cdot x_{32} + 50 \cdot x_{33}$

Restrições)

• de recurso:

$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leq 50$

$\sum_{j=2}^{3} x_{2j} \leq 50$

$\sum_{j=2}^{3} x_{3j} \leq 20$

• de demanda:

$x_{11} = 20$

$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \geq 10$

$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \geq 30$

• não negatividade:

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{32}, x_{33} \geq 0$

(1)

4 tipos de líquido:

	Qtd.	custo	Preço
A	8000	5,50	6
B	4250	4,50	6
C	16 000	7,50	6
D	2000	11,25	6

3 Misturas:

	A	B	C	D	Preço	Tem que prod.
E	30%	>10%	40%	<50%	11	400
F	>25%	< 20%	20%	> 10%	15	300
G	20%	> 15%	40%.	< 20%	14	200

1) Variáveis de Decisão:

x_{ij} = qtd do líquido j usada na mistura i

l_i = qtd do líquido i vendida diretamente

p = qtd da mistura P produzida ($2/3$ de G, $1/3$ de E)

* Qtd. de mistura E vendida diretamente: $\sum_{j=1}^{4} x_{Ej} - \left(\frac{P}{3}\right) \geq 0$

↳ Qtd. de mistura E produzida: $\sum_{j=1}^{4} x_{Ej} \geq 400$

* Qtd. de mistura F produzida: $\sum_{j=1}^{4} x_{Fj} \geq 300$

* Qtd. de mistura F vendida diretamente: $\sum_{j=1}^{4} x_{Gj} - \left(\frac{2P}{3}\right) \geq 0$

↳ Qtd. de mistura G produzida: $\sum_{j=1}^{4} x_{Gj} \geq 200$

• Restrições de ...

retorno

2) Função Objetivo: max $\overbrace{r}^{\text{retorno}} - c \rightarrow$ custo $\Big\}$ lucro

$$r = 6 \sum_{i=1}^{4} l_i + 11\left(\sum_{j=1}^{4} x_{1j} - \frac{p}{3}\right) + 15\left(\sum_{j=1}^{4} x_{2j}\right) + 14\left(\sum_{j=1}^{4} x_{3j} - \frac{2p}{3}\right)$$
$$+ 22p$$

$$c = 5.5\left(l_1 + \sum_{i=1}^{3} x_{i1}\right) + 4.5\left(l_2 + \sum_{i=1}^{3} x_{i2}\right) + 7.5\left(l_3 + \sum_{i=1}^{3} x_{i3}\right)$$
$$+ 11.25\left(l_4 + \sum_{i=1}^{3} x_{i4}\right)$$

* Restrições da Mistura

E

$$x_{11} = 0.3\left(\sum_{j=1}^{4} x_{1j}\right),$$
$$x_{12} \geq 0.1\left(\sum_{j=1}^{4} x_{1j}\right),$$
$$x_{13} = 0.4\left(\sum_{j=1}^{4} x_{1j}\right)$$
$$x_{14} \leq 0.05\left(\sum_{j=1}^{4} x_{1j}\right)$$

F

$$x_{21} \leq 0.25\left(\sum_{j=1}^{4} x_{2j}\right)$$
$$x_{22} \geq 0.2\left(\sum_{j=1}^{4} x_{2j}\right)$$
$$x_{23} = 0.2\left(\sum_{j=1}^{4} x_{2j}\right)$$
$$x_{24} \geq 0.1\left(\sum_{j=1}^{4} x_{2j}\right)$$

G

$$x_{31} = 0.2\left(\sum_{j=1}^{4} x_{3j}\right)$$
$$x_{32} \geq 0.15\left(\sum_{j=1}^{4} x_{3j}\right)$$
$$x_{33} = 0.4\left(\sum_{j=1}^{4} x_{3j}\right)$$
$$x_{34} \leq 0.2\left(\sum_{j=1}^{4} x_{3j}\right)$$

* Restrições de recurso

$$Q_1 \leq 8000$$
$$Q_2 \leq 4250$$
$$Q_3 \leq 16\,000$$
$$Q_4 \leq 2000$$

Espaços Afins

27/02/2025

Def: E é um espaço afim se, e somente se,

$$\forall x_0, x_1 \in E : \{t x_0 + (1-t)x_1 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{x_0 + t(x_1 - x_2) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq E$$

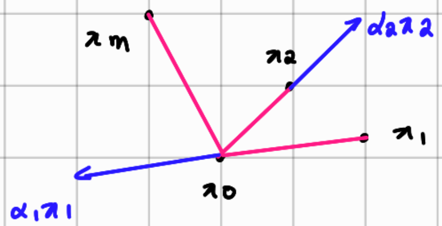
Def - combinação Afim: $x \in E$ é uma combinação afim de $x_0, \dots, x_m \in E$ se, e somente se $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ t.q $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$ e $x = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i$

- Obs: se x é c.a de $x_0, \dots, x_m$, $x = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i$ com $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$

$$x = \alpha_0 x_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$

$$x = \left(1 - \sum_{i=1}^{m} x_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \underline{\underline{x_0}} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (x_i - x_0)$$

↳ origem



Prop - (E é um espaço afim) <=> (Toda combinação afim de pontos de E é um ponto de E)

- Prova:

Seja E um e.a

Seja $H(m)$: Toda c.a de m pts de E é um pt. de E

Para $m \geq 2$:

Vamos mostrar que $H(m)$ vale $\forall m$

1. $\boxed{H(2)}$ seja $x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1$, $x_0, x_1 \in E$ e $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$

$$= \alpha_0 x_0 + (1 - \alpha_0) x_1 \in E$$

2. $H(m)$ vale, vamos mostrar que $H(m+1)$ vale, $m \geq 2$

Sejam $x_0, \dots, x_m$ $m+1$ pts de E

Seja $x = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i$ com $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$

$$\begin{cases} \exists i \mid \alpha_i \neq 1 \\ \text{Porque se } \forall i,\ \alpha_i = 1,\ \underbrace{\sum_{i=0}^{m}}_{1} \alpha_i = m+1 \geq 3 \end{cases}$$

$\alpha_0 \neq 1$

$$x \overset{(1)}{=} \underset{\substack{\neq \\ 1}}{\alpha_0} x_0 + (1-\alpha_0)\bar{x} \in E,\quad \text{com } \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \overbrace{\frac{\alpha_i}{(1-\alpha_0)}}^{\theta_i} x_i = \sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i$$

como $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$, $\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i$ é uma combinação afim de pts de E

$$\underset{H(m)}{\Longrightarrow} \bar{x} \in E \underset{(1)}{\Longrightarrow} x \in E \Longrightarrow H(m+1)$$

$\Leftarrow$ $H(m)$ vale $\forall m \geq 2$

$\Rightarrow$ $H(2)$ vale

$\Rightarrow$ $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \in E \quad \forall x_0, x_1 \in E \mid \alpha_0 + \alpha_1 = 1$

$\Rightarrow$ $\alpha_0 x_0 + (1-\alpha_0) x_1 \in E \quad \forall x_0, x_1 \in E$

$\Rightarrow$ E é espaço afim

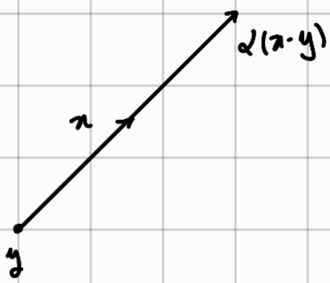
Prop – Seja E e.a. Seja $V = \{x - y \mid x, y \in E\}$

Então: (1) V é um espaço vetorial (direção de E)

(2) $E = x_0 + V \quad \forall x_0$

- Prova:

(1) V é um e.v.



a) $\forall v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha v \in V$?

$v \in V$, $v = x - y$, $x, y \in E$

$$\alpha v = y + \alpha(x-y) - y = \underbrace{(1-\alpha)y + \alpha x}_{\in E} - \underbrace{y}_{\in E} \in V$$

b) $v_1, v_2 \in V$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x_1 - y_1 \\ v_2 &= x_2 - y_2 \end{aligned}\right\} x_1, y_1, x_2, y_2 \in E \Rightarrow v_1 + v_2 = \underbrace{x_1 - y_1 + x_2}_{\in E} - \underbrace{y_2}_{\in E} \in V$$

(2) $E = x_0 + V \quad \forall x_0 \in E$

- $E \subseteq x_0 + V$: seja $x \in E$, $x = x_0 + \underbrace{x - x_0}_{\in V} \in x_0 + V$

- $x_0 + V \subseteq E$: $x \in x_0 + V$, $x = x_0 + x_1 - x_2 \in E$, $x_0, x_1, x_2 \in E$

– Seja $X \neq \emptyset$

Definimos $Aff(X)$ = menor para $\subseteq$ espaço afim que contém X.

se S é um espaço afim tal que $X \subseteq S$ então $Aff(X) \subseteq S$

Prop – Sejam $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ espaço afim $E_\alpha = x_\alpha + V_\alpha$, $V_\alpha = \{x - y \mid x, y \in E_\alpha\}$

Então: $E = \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha = x_0 + V$, $\forall x_0 \in E$, é um espaço afim $\forall x_0 \in E$ e $V = \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha$

- Prova: $x_0, x_1 \in E \Rightarrow x_0, x_1 \in E_\alpha, \forall \alpha$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $t x_0 + (1-t) x_1 \in E_\alpha$ $\forall \alpha \in I \Rightarrow t x_0 + (1-t) x_1 \in E$

$\Rightarrow E$ é um espaço afim

$E \subseteq x_0 + V$

$x \in E$, $x = x_0 + x - x_0$

$x_0 \in E \Rightarrow x_0 \in E_\alpha$ $\forall \alpha$

$x \in E \Rightarrow x \in E_\alpha$ $\forall \alpha$

$\Rightarrow x - x_0 \in V \Rightarrow x \in x_0 + V$

Prop – $Aff(X) = \overbrace{\bigcap_{S \text{ afim},\, X \subseteq S} S}^{S(X)}$

- Prova:

1

⊛ espaço afim é uma generalização dos espaços vetoriais

conj. de todas as comb. lin dos vetores do conj.

Base de um espaço afim

(k+1 vetores)

Seja $E = x_0 + V$ com V espaço vetorial de dim k, i.e., $\dim(E) = k$

Então

$(x_0, x_1, \dots, x_k)$ é uma base de $E \iff \forall x \in E$

$$\exists! (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$$

$$e \quad x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i$$

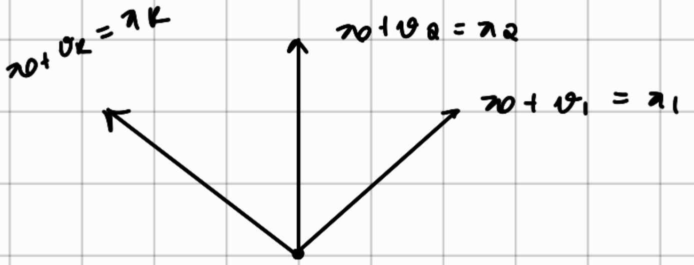
- cada x pode ser escrito como uma combinação afim dos vetores da base

↳ essa combinação é única p/ cada x

- Na prática, escolhemos uma base $v_1, \dots, v_k$ de V e $(x_0, \dots, x_k)$ é uma base de E, onde $x_i = x_0 + v_i$, $i = 1, \dots, k$

- Base de um espaço afim E

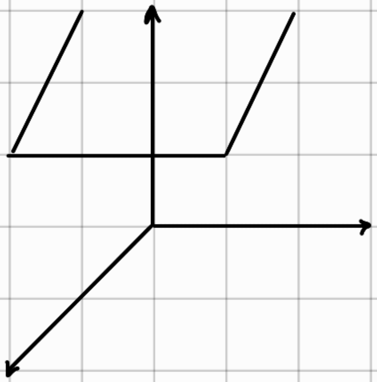
Seja $x_0 \in E$, $(v_1, \dots, v_k)$ base de $V = E - x_0$



$\Rightarrow (x_0, \dots, x_k)$ base de E

Relembrando: 11/03/2025

- E é espaço afim $\iff$ $E = x_0 + V$ para todo $x_0 \in E$, onde $V = \{x - y \mid x, y \in E\}$ é um espaço vetorial



- x é combinação afim de $x_0, \dots, x_n \in E$ $\iff$ $\exists\ \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ e $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

- Dado $X \neq \emptyset$, $\mathrm{Aff}(X)$ é o menor espaço afim que contém ($\supseteq$) X

- $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

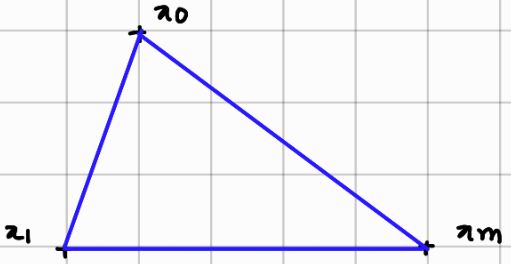
$$\mathrm{Aff}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i ,\ n \geq 1,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ x_i \in X \right\}$$

- Base de um espaço afim: Seja $E = x_0 + V$ um espaço afim com V espaço vetorial com $\dim(V) = k$ e $\dim(E) = k$

Def - Base de um espaço afim: $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ é base de $E = x_0 + V$ espaço afim com $\dim(E) = k = \dim(V)$ $\iff$ $\forall x \in E\ \exists!\ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ e $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$

CRM - Circumcentered Reflection Method:

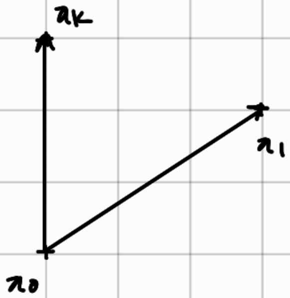
$C = \text{CRM}(x_0, x_1, \dots, x_m)$, $x_i \in \mathbb{R}^m$



$E = x_0 + V$, $\dim(V) = k$

$(x_0, x_1, \dots, x_k)$ base de E $\iff$ 1. $\forall x \in E \ \exists \ \alpha_0, \dots, \alpha_k$ t.q $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

Def - $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ são afim independentes se, e somente se (c)
$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$



$(x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0)$ LI

1) $\iff \text{Aff}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\}) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i , \ \alpha_i \in \mathbb{R} , \ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \right\} = E$

$$\iff E = \text{Aff}(\overbrace{\{x_0, x_1, \dots, x_1\}}^{X})$$
$$= x_0 + \text{Span}(\{0, x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\})$$
$$= x_0 + \text{Span}(\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\})$$
$$= x_0 + V$$

$$\boxed{\text{Aff}(X) = x_0 + \text{Span}(X - x_0)}$$

$\iff V = \text{Span}(\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\})$

2) $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i$, com $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1$ (D)

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i = 0, \dots, k$

$\overset{(A)}{\Longleftrightarrow}$ $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ são afim independentes

$\overset{(B)}{\Longleftrightarrow}$ $(x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0)$ LI

$(x_0, \dots, x_k)$ base de E $\Longleftrightarrow$ $\left|\begin{array}{l} ① \ V = \text{span}(\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\}) \\ ② \ (x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0) \text{ LI} \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow (\underbrace{x_1 - x_0}_{v_1}, \dots, \underbrace{x_k - x_0}_{v_k})$ é base de V

são dados

$(v_1, \dots, v_k)$ base de V

$(x_0, x_0 + v_1, \dots, x_0 + v_k)$ é base de E

Ou seja, construímos a base do espaço afim a partir da base de V

- Provando (A) e (B)

(A)

$\Rightarrow)$ $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$

Queremos mostrar que $\alpha_i = 0 \ \forall i$

Por contradição, se $\exists \, i_0$ tal que $\alpha_{i_0} \neq 0$

$\sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i = \sum_{i=0}^{k} (\beta_i + \alpha_i) x_i$; $\sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1$

e $\sum_{i=0}^{k} (\beta_i + \alpha_i) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1$

$\sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i x_i$ com $\gamma_i = \beta_i + \alpha_i$, $\sum_{i=0}^{k} \gamma_i = 1$

$\gamma_{i_0} = \beta_{i_0} + \underbrace{\alpha_{i_0}}_{\neq 0} \neq \beta_{i_0}$

$\Leftarrow)$ Supomos (C). Quero mostrar que (D) vale

$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i$; $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1$

$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i x_i = 0$ com $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$

$\sum \gamma_i = 0 \overset{(C)}{\Longrightarrow} \gamma_i = 0 \ \forall i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \ \forall i$

(B)

$\Rightarrow)$ $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0 \overset{(P)}{\Longrightarrow} \alpha_i = 0$, $\forall i = 0, \dots, k$

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i - x_0) = 0$

$\alpha_0 x_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$, com $\alpha_0 = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i$

$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$

$\overset{(P)}{\Longrightarrow} \alpha_i = 0$, $\forall i$

$\Leftarrow)$ $(x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0)$ L.I. Queremos mostrar que (c) vale

$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$

$\alpha_0 \overset{(Q)}{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \Rightarrow 0 = -\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i - x_0)$

$\Rightarrow \alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, k$

$\overset{(Q)}{\Longrightarrow} \alpha_0 = 0$

Other Representation of an Affine space

Prop - V é um espaço vetorial $\Longleftrightarrow$ $\exists$ A matriz tal que $V = \{x \mid Ax = 0\}$ $= \operatorname{Ker}(A)$

• Prova:

$\Leftarrow)$ $\operatorname{Ker}(A)$ é um espaço vetorial

$\Rightarrow)$ V espaço vetorial. Seja $(a_1, \dots, a_k)$ base de $V^{\perp}$

Seja $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{bmatrix}$. Vamos mostrar que $V = \{x \mid Ax = 0\}$

1) $x \in V$, $x \perp a_1, \dots, x \perp a_k \Rightarrow a_i^T x = 0 \ \forall i \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow V \subseteq \operatorname{Ker}(A)$

2) $x \in \operatorname{Ker}(A)$, $a_i^T x = 0 \ \forall i$ $\quad x \in V = (V^{\perp})^{\perp}$

$\forall y \in V^{\perp}$, $y^T x = 0$?

$\forall y \in V^{\perp}$, $\exists$ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$

$y^T x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{a_i^T x}_{=0} = 0$

Prop – E espaço afim $\iff$ $E = \{x \mid Ax = b\}$

- Prova:

$\Leftarrow$) $\{x \mid Ax = b\} = x_0 + \underbrace{\ker(A)}_{V,\text{ esp. vet.}}$, onde $A x_0 = b$

$\Rightarrow$) $E = x_0 + V$ V ev

$= x_0 + \ker(A)$

$= \{x \mid Ax = b\}$ com $Ax_0 = b$

Exemplos:

- Espaço afim em $\mathbb{R}^M$ $E = x_0 + V$

→ $\dim E = \dim V = 0$

$V = \{0\}$

$E = \{x_0\} = \{x \mid Ax = b\}$, $A\ n \times m$

→ $\dim E = \dim V = 1$

- Base contém 2 pontos x_0, x_1 com $x_0 \neq x_1$

$E = \{x_0 + t(x_1 - x_0) : t \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \mid Ax = b\}$ $A : n-1 \times n$

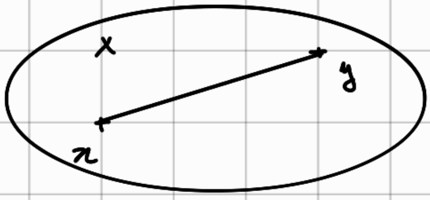
→ $\dim E = \dim V = n-1$

- $E = \{x \mid a^T x = b\}$ hiperplano

→ $\dim E = \dim V = n$ $E = \mathbb{R}^n$

Convexidade

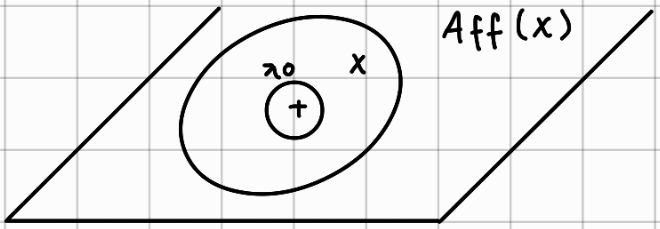
Def - X é convexo se $\forall x, y \in X$ $\forall\, 0 \leq t \leq 1$, $tx + (1-t)y \in X$



$[x, y] \subseteq X$

Def - $ri(X) :=$ o interior relativo de X

$x_0 \in ri(X) \iff \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \cap Aff(X) \subseteq X$



Exemplos:

1) Espaços Afins
2) $\{x \mid a_\alpha^T x \leq b_\alpha,\ \forall \alpha \in I\}$

caso particular dos poliedros (I) finita: $\{x \mid Ax \leq b\}$

3) $\{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$
4) Elipsoides: $\{x \mid (x - x_0)^T Q^{-1} (x - x_0) \leq k^2\}$, $k \geq 0$, Q d.p.
5) Se X convexo $\Rightarrow int(X)$, $ri(X)$, X^ε convexos

$X^\varepsilon = \{x \mid dist(x, X) \leq \varepsilon\}$

6) Simplexe

C é um simplexe se

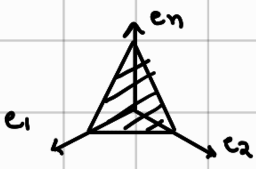
$C = \{\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1\}$

, onde $x_0, x_1, \ldots, x_k$ são afim independentes

* A2 tem exercício de convexidade
de simplex
de dualidade
de branch and ...

• casos particulares:

1) $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (0, e_1, \ldots, e_n)$ L.I

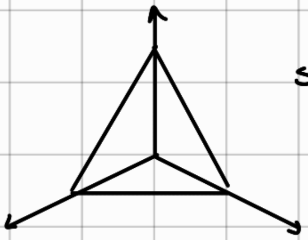


$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \alpha_0 \cdot 0$, $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

2) $(x_0, x_1, \dots, x_n) = (0, e_1, \dots, e_n)$ afim independente

$\mathbb{R}^3$ $(e_2 - e_1, e_3 - e_1)$ L.I.

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $0 \le \alpha_i \le 1$, $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$



simplex Probabilístico

Convexidade 13/03/2025

Def: Uma combinação convexa (c.c) x de $x_0, \dots, x_m$ é da forma

$$x = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i \, , \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \, , \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$$

Prop: Seja X um conjunto

X é convexo $\iff$ Qualquer combinação convexa dos pontos de X é um ponto de X

- Prova

$\Leftarrow$) por definição

$\Rightarrow$) $H(m)$: qualquer combinação convexa de m pts de X é um ponto de X

- $H(2)$ vale por def.
- Para $m \geq 2$: Supomos que $H(m)$ vale e vamos mostrar que $H(m+1)$ vale

↳ seja $x = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i$, $x_i \in X$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$

↳ $\exists\, \alpha_i \neq 1$ (se $\forall i\ \alpha_i = 1$, $\sum \alpha_i = m+1 \geq 3 \neq 1$, contradição!)

c.c de pts de $X \Rightarrow \bar{x} \in X$

↳ sem perda de generalidade, $\alpha_1 \neq 1$

↳ $x = \alpha_1 \underbrace{x_1}_{\in X} + (1-\alpha_1)\bar{x}$, com $\bar{x} = \sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} \cdot x_i = \boxed{\sum_{i=2}^{m+1} \gamma_i x_i}$

↳ Resta provar que $\bar{x} \in X$

* Temos $\sum_{i=2}^{m+1} \gamma_i x_i := \sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1} = 1$

$\gamma_i \geq 0$, $\gamma_i \leq 1 \iff \alpha_i + \alpha_1 \leq \sum \alpha_i = 1$

- seja $X \neq \emptyset$. $\mathrm{Conv}(X) = \dots$ (para $\subseteq$) convexo que contém X

Prop: Sejam X_i, $i \in I$ convexos, então $\bigcap_{i \in I} X_i$ é convexa

Prop: $\mathrm{Conv}(X) = \underbrace{\bigcap_{S \text{ convexo},\ X \subseteq S} S}_{S(X)}$

- $S(X) \subseteq \mathrm{Conv}(X)$

$\mathrm{conv}(X) \subseteq S(X)$

Prop: $conv(X) = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i ,\ n \geq 1,\ x_i \in X,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}}_{S(X)}$

• Prova:

1) $conv(X) \subseteq S(X)$

a) $S(X)$ convexo
b) $X \subseteq S(X)$
$\}$ (R)

2) $S(X) \subseteq conv(X)$

$x \in X$, $\underbrace{x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}_{\text{c.c dos pts de conv}(X)}$, $x_i \in X$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

$x_i \in X \subseteq conv(X) \Rightarrow x \in conv(X)$

– Operações preservando a convexidade

Prop:

1. Sejam X_i, $i \in I$ convexos. Então $\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$ é convexo

2. Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afim e $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Então $f(C)$ é convexo

3. Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afim e $D \subseteq \mathbb{R}^m$ convexo. Então $f^{-1}(D)$ é convexo

4. X, Y convexos. Então $X + Y = \{x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$ é convexo

5. X, Y convexos $\Rightarrow X \times Y$ é convexo

6. Seja X convexo. Então $\Pi(X) = \{x_1 \mid \exists x_2 : (x_1, x_2) \in C\}$ é convexo

– Seja $P(x,t) = \dfrac{x}{t}$, $P: \mathbb{R}^n \times \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\} \to \mathbb{R}^n$

Prop 1: se C é convexo, $P(C)$ é convexo onde $C \subseteq dom(P)$

• Prova 1) $z_1, z_2 \in P(C)$, $z_1 = P(x_1, t_1) = \dfrac{x_1}{t_1}$, $z_2 = P(x_2, t_2) = \dfrac{x_2}{t_2}$

$\forall\ 0 \le t \le 1 : t z_1 + (1-t) z_2 \in P(C)$

temos $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in C$

Prop 2: se C convexo, $P^{-1}(C)$ é convexo

- Prova: $\forall\ 0 \le \mu \le 1,\ \mu(x_1, t_1) + (1-\mu)(x_2, t_2) \in C$

$p = (\mu x_1 + (1-\mu)x_2,\ \mu t_1 + (1-\mu)t_2) \in C$

$$P(p) = \frac{\mu x_1 + (1-\mu)x_2}{\mu t_1 + (1-\mu)t_2} = \frac{N}{D}$$

$$\shortparallel$$

$$t z_1 + (1-t) z_2$$

$$(t)\frac{x_1}{t_1} + (1-t)\frac{x_2}{t_2} = \frac{\mu t_1}{D}\frac{x_1}{t_1} + \frac{(1-\mu)t_2}{D}\frac{x_2}{t_2}$$

$$\frac{\mu t_1}{\mu t_1 + (1-\mu)t_2} = t$$

$$\mu t_1 = t[\mu(t_1 - t_2) + t_2]$$

$$0 \le \mu = \frac{t t_2}{t_1(1-t) + t t_2} \le 1$$

$$\frac{1-\mu}{D} = 1 - t$$

- Prova 2: $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in P^{-1}(C)$

$P(x_1, t_1) = \frac{x_1}{t_1} \in C,\quad P(x_2, t_2) = \frac{x_2}{t_2} \in C$

$0 \le \theta \le 1,\ (\theta x_1 + (1-\theta)x_2,\ \theta t_1 + (1-\theta)t_2) \in P^{-1}(C)$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta x_1 + (1-\theta)x_2}{\theta t_1 + (1-\theta)t_2} \in C$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\theta t_1}{\theta t_1 + (1-\theta)t_2}\right)}_{\mu} \cdot \frac{x_1}{t_1} + \underbrace{\left(\frac{(1-\theta)t_2}{\theta t_1 + (1-\theta)t_2}\right)}_{1-\mu} \cdot \frac{x_2}{t_2}$$

$$= \mu\left(\frac{x_1}{t_1}\right) + (1-\mu)\left(\frac{x_2}{t_2}\right) \in C \ \square$$

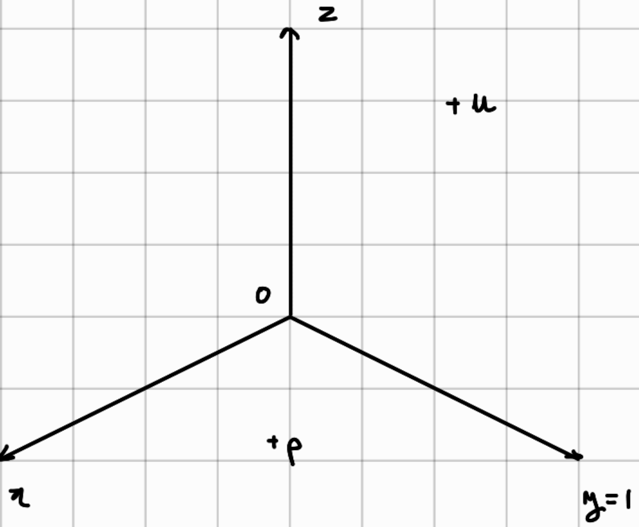
- $\dfrac{2x + y + z}{a+b+c} \leq M \Rightarrow 2x + y + z \leq (a+b+c)M$

↳ $b_1 \leq Ax \leq b_2$, $x_i \geq 0$ $x_i \in \mathbb{N}$

– Exemplos de aplicação

1. Seja $f(x) = \dfrac{Ax+b}{c^T x + d}$, com $dom(f) = \{x \mid c^T x + d > 0\}$

* se C convexo, então $f(C)$ convexo e $f^{-1}(C)$ convexo



$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $z = 1$, $P(u) = \left(\dfrac{u_1}{u_3}, \dfrac{u_2}{u_3}\right)$

$p = tu = \begin{bmatrix} tu_1 \\ tu_2 \\ tu_3 \end{bmatrix}$ $t = \dfrac{-1}{u_3}$

$= \begin{bmatrix} -u_1/u_3 \\ -u_2/u_3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P(u) \\ -1 \end{bmatrix}$

Seja $g(x) = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ função afim

$f(x) = P(g(x))$

$f(C) = P(g(C))$

$f^{-1}(C) = g^{-1}(P^{-1}(C))$

2. Um elipsoide em $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{E} = \{x \cdot (x - x_0)^T Q^{-1} (x - x_0) \leq 1\}$ é convexo

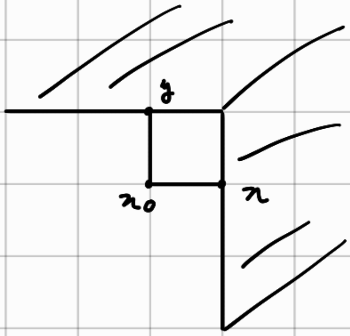
$x \in \mathcal{E} \iff \| \underbrace{Q^{-1/2}(x - x_0)}_{y} \|_2 \leq 1$

$\iff \|f(x)\|_2 \leq 1$, $f(x) = Q^{-1/2}(x - x_0)$

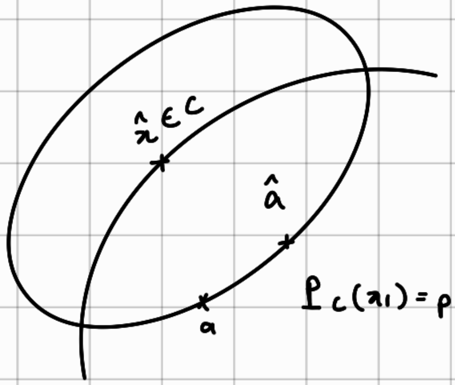
$\iff f(x) \in B_2(0,1)$

$\mathcal{E} = f^{-1}(\underbrace{B_2(0,1)}_{\text{convexo}})$

f afim $\longrightarrow$ $\mathcal{E}$ convexo



C



Def: Seja C convexo fechado de um espaço de Hilbert $(H \langle\rangle)$

A projeção de x_0 em C é $P_C(x_0) = \underset{x \in C}{\operatorname{argmin}} \|x - x_0\|$, onde $\|x\|^2 \equiv \langle x, x\rangle$

Prop: Seja C conjunto convexo fechado.

Então $P(x_0)$ é bem definida e é única

- Prova:

* terminar de copiar a aula do dia 13/03
* pegar aula do dia 18/03

Def - C é um cone regular se C é um cone, é fechado e $int(C) \neq 0$ 20/03/2025

Teorema 1: Seja C convexo e $y \notin \bar{C}$

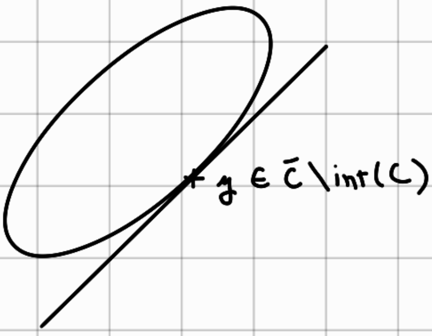
Então $\exists\, a \neq 0$ t.q. $\sup\limits_{x \in C} \langle a, x\rangle < \langle a, y\rangle$

Teorema 2: Seja C convexo e $y \in \bar{C} \setminus int(C)$

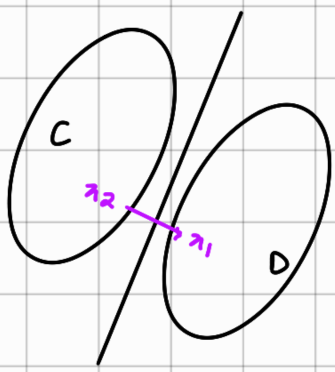
Então $\exists\, a \neq 0$ t.q. $\sup\limits_{x \in C} \langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle$

C convexo

T2



T3



Teorema 3: C, D convexos e $C \cap D = \emptyset$

Então $\exists\, a \neq 0$ t.q. $\sup\limits_{x \in C} \langle a, x\rangle \leq \inf\limits_{x \in D} \langle a, x\rangle$

• Prova: Seja $E = C - D = \{c - d,\ c \in C,\ d \in D\}$

↪ E convexo

↪ $0 \notin E$

↪ 2 casos:

1. $\underset{\substack{\parallel \\ y}}{0} \in E$ e $0 \notin int(E)$, $0 \in \bar{E} \setminus int(E) \xRightarrow{T2} \exists\, a \neq 0$

$\Big|\ \langle a, y\rangle = \boxed{\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\langle a, 0\rangle} \geq \sup\limits_{x \in E} \langle a, x\rangle}$

2. $\underset{y}{\overset{0}{\shortparallel}} \notin E \xRightarrow{T1} \exists\, a \neq 0 \mid \langle a, y\rangle = 0 > \sup_{x \in E} \langle a, x \rangle$

$$\boxed{\Rightarrow \forall x \in E \;\; \langle a, x\rangle < 0}$$

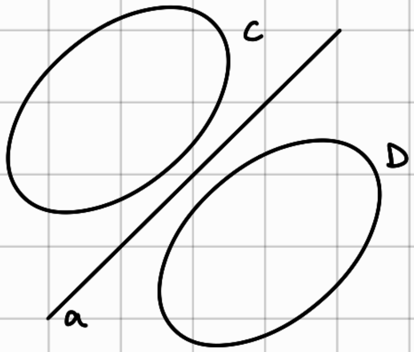
$\Rightarrow \forall x \in E, \; \langle a, x\rangle \leq 0$

$\Rightarrow \forall c \in C, \; \forall d \in D, \; \langle a, c-d\rangle \leq 0$

$\Rightarrow \forall (c,d) \in C \times D, \; \langle a, c\rangle \leq \langle a, d\rangle$

$\Rightarrow \sup_{c \in C} \langle a, c\rangle \leq \inf_{d \in D} \langle a, d\rangle$

$\sup_{x \in C} \langle a, x\rangle < L < \inf_{x \in D} \langle a, x\rangle$



Teorema 4: Sejam C, D convexos. $C \cap D = \emptyset$. C compacto, D fechado

Então $\exists\, a \neq 0$ t.q. $\sup_{x \in C} \langle a, x\rangle < \inf_{x \in D} \langle a, x\rangle$

• Prova: Seja $E = C - D$

↳ E convexo

↳ $0 \notin E$

↳ 2 casos

1. $0 \in \bar{E}$ não é possível $\Bigg\{$ se $0 \in \bar{E}$

$0 = \lim_{k \to \infty} c^k - d^k, \quad c^k \in C, \; d^k \in D$

C compacto, $\exists\, \sigma$ t.q. $c^{\sigma(k)} \to c \in C$

$\Rightarrow d^{\sigma(k)} \to c \in D$ (D fechado) $\Rightarrow$ contradição!

2. $0 \notin \bar{E} \xrightarrow{T1} \exists\, a \neq 0 \mid \langle a, y\rangle = 0 > \sup_{x \in E} \langle a, x\rangle$

$\Updownarrow$
y

$$\Rightarrow \exists\, a \neq 0 \mid \sup_{\substack{c \in C \\ d \in D}} \langle a, c-d\rangle < b < 0$$

$$\Rightarrow \exists\, a \neq 0 \mid \forall c \in D^{?}, \forall d \in D, \ \langle a, c-d\rangle < b < 0$$

$$\Rightarrow \exists\, a \neq 0 \mid \sup_{c \in C} \langle a, c\rangle - \inf_{d \in D} \langle a, d\rangle < b < 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \exists\, a \neq 0 \mid \sup_{c \in C} \langle a, c\rangle < \inf_{d \in D} \langle a, d\rangle}$$

Teorema 5: C, D convexos $ri(C) \cap ri(D) \neq \emptyset$ ri ou ri ?

$$\exists\, a \neq 0 \mid \sup_{x \in C} \langle a, x\rangle \leq \inf_{x \in D} \langle a, x\rangle$$

• Prova: $E = C - D$

$ri(E) = ri(C) - ri(D) = \{ c-d \mid c \in ri(C), d \in ri(D)\}$

$0 \notin ri(E)$

2 casos:

1. $0 \notin \bar{E}$

2. $0 \in \bar{E}$. Neste caso $0 \notin int(E)$, porque se $0 \in int(E) \in ri(E)$ contradição!

$0 \in E \setminus int(E)$

$$\underset{T2}{\overset{T1}{\Rightarrow}} \exists\, a \neq 0 \mid \sup_{e \in E} \langle a, e\rangle \leq 0$$

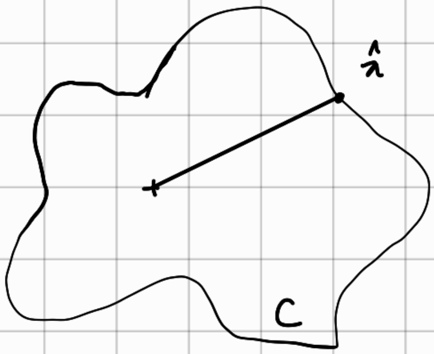
$$\Rightarrow \exists\, a \neq 0 \mid \sup_{\substack{c \in C \\ d \in D}} \langle a, c-d\rangle \leq 0 \Rightarrow \boxed{\exists\, a \neq 0 \mid \sup_{c \in C} \langle a, c\rangle \leq \inf_{d \in D} \langle a, d\rangle}$$

Def: x é um ponto extremo de C se não pode ser escrito da forma
$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ com $0<\alpha<1$ e $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in C$

- Vamos denotar por $ext(C)$ os pontos extremos de C

Ex

1. $C = [a,b]$, $ext(C) = \{a,b\}$
2. $C = (a,b)$, $ext(C) = \emptyset$
3. $C = [a, +\infty[$, $ext(C) = \{a\}$
4. $C = B(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, $ext(C) = S(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| = r\}$



Teorema 6: $C \neq \emptyset$ compacto. Então C tem ponto extremo

- Prova: seja $\delta = \max \|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2$

Então $\hat{x}$ é ponto extremo de C

* tenho que mostrar que $x_1 = x_2$

se $\hat{x} = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $0<\alpha<1$, $x_1, x_2 \in C$

$$\delta = \|\hat{x}\|^2 = \|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\|^2 = \alpha\underbrace{\|x_1\|^2}_{\leq \delta} + \underbrace{(1-\alpha)\|x_2\|^2}_{\leq \delta} - \alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2$$

$\Rightarrow \alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2 \leq 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Teorema da Alternativa

- seja $(S) \begin{cases} a_i^T x > b_i, & i = 1, \dots, p & \lambda_i \geq 0 \\ a_i^T x \geq b_i, & i = p+1, \dots, p+m & \lambda_i \geq 0 \end{cases}$

- (S) não tem solução $\iff$ $T(I)$ ou $T(II)$ tem solução (*)

- se x é solução de (S) e $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p+m$

$$\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i^T x \geq \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i$$

CASO 1	CASO 2
$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i > 0$	$\lambda_i \geq 0 \ \forall i$
$\lambda_i \geq 0 \ \forall i$	$\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i = 0$
$\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i = 0$	$\underbrace{\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i^T x}_{=0} \geq \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i$
$\underbrace{\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i^T x}_{=0} > \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i$	

(*), onde $T(I) \begin{cases} \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p+m}) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i > 0 \\ \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i \geq 0 \end{cases}$ $T(II) \begin{cases} \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p+m}) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i > 0 \end{cases}$

- Prova:

($\Leftarrow$) Se $T(I)$ ou $T(II)$ tem solução, então (S) não tem solução

1. Se $T(I)$ tem sol. λ é sol. de $T(I)$

Por contradição se (S) tem solução $\exists x$ t.q. $a_i^T x > b_i$, $i = 1, \dots, p$
$a_i^T x \geq b_i$, $i = p+1, \dots, p+m$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i^T x}_{=0} > \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i$$

$$0 > \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i \qquad \text{cont.}$$

2. se T(II) tem sol. $\lambda \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i > 0$$

se (S) tem sol. $\exists\, x$ t.q. $a_i^T x > b_i,\ i = 1, \dots, p$

$$a_i^T x \geq b_i,\ i = p+1, \dots, p+m$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i^T x}_{0} > \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i \leq 0 \rightarrow$ contradição!

(*) Mostramos que se T(I) tem solução ou T(II) tem solução $\Rightarrow$ (S) não tem solução

($\Rightarrow$) se S não tem solução, então T(I) ou T(II) tem solução

---

Antes, vamos ver o Lema de Farkas

seja (T) $\begin{cases} a^T x < 0 \\ a_i^T x \geq 0,\ i = 1, \dots, m \end{cases}$

Lema de Farkas: (T) inviável $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \geq 0 \mid a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ (*)

- Prova:

($\Leftarrow$) se $\exists\, \lambda \geq 0 \mid a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$

Por contradição se (T) é viável $\exists\, x$ t.q. $\begin{cases} a^T x < 0 & (f) \\ a_i^T x \geq 0,\ i = 1, \dots, m & (e) \end{cases}$

$a^T x = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{a_i^T x}_{\geq 0} \geq 0 \rightarrow$ contradição com (f)

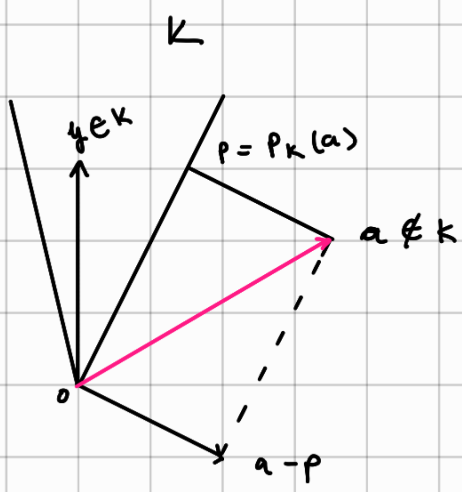
($\Rightarrow$) se (T) é inviável

seja $K = \{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geq 0\ \forall i \}$

Quero mostrar que $a \in K$.

Por contradição $a \notin K$

K é um cone fechado



Temos, usando a proposição

$$\begin{cases} a^T(a-p) > 0, \\ (a-p)^T y \le 0, \ \forall y \in K \Rightarrow (a-p)^T a_i \le 0 \ \forall i, \ i=1,\dots,m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^T x < 0 \\ a_i^T x \ge 0, \ i=1,\dots,m \end{cases}, \text{ com } x = p-a$$

$\Rightarrow$ x sol de (T) contradição!

$\Rightarrow$ $a \in K \Rightarrow \exists \ \lambda \ge 0 \mid a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$

Prop: (S) inviável $\Leftrightarrow$ (U_0) $\begin{cases} -s < 0 \\ t - s \geq 0 \\ a_i^T x - b_i t - s \geq 0, \ i=1,\dots,p \\ a_i^T x - b_i t \ge 0, \ i = p+1,\dots,p+m \end{cases}$ é inviável

- Prova: (S) viável $\Leftrightarrow$ (U_0) viável

($\Rightarrow$) Seja (S) viável

seja x tal que $\begin{cases} a_i^T x > b_i, \ i=1,\dots,p \\ a_i^T x \geq b_i, \ i=p+1,\dots,p+m \end{cases}$

seja (x,s,t) tal que $t=1$, $s = \underbrace{\min\big(1, \underbrace{\min(a_i^T x - b_i, \ i=1,\dots,p)}_{>0}\big)}_{>0}$

(x,s,t) solução de (U_0) (U_0 viável)

(S) $\begin{cases} a_i^T x > b_i, \ i=1,\dots,p & \lambda_i \ge 0 \\ a_i^T x \geq b_i, \ i=p+1,\dots,p+m & \lambda_i \geq 0 \end{cases}$

($\Leftarrow$) seja (U_0) viável

$\exists$ (x,s,t) sol. de (U_0) $\Rightarrow t \geq s \Rightarrow t > 0$

$t>0 \Rightarrow a_i^T \left(\frac{x}{t}\right) - b_i \geq \left(\frac{s}{t}\right) > 0$ e

$a_i^T \left(\frac{x}{t}\right) - b_i \geq 0, \ i=p+1,\dots,p+m$ Assim, $\bar{x} = \frac{x}{t}$ é solução de (S)

- $\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i = 0$
- $\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i b_i = \lambda_0$
- $\lambda_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

* ñ sei onde que esses resultados se encaixam

2 casos

1. $\lambda_0 = 0$:
- $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 > 0$
- $\sum \lambda_i b_i = 0 \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i = 0$
- $\lambda_i \geq 0$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p+m}) \to$ solução de $T(I)$

2. $\lambda_0 > 0$:
- $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i > 0$
- $\sum_{i=1}^{p+m} \lambda_i a_i = 0$
- $\lambda \geq 0$, λ é solução de $T(II)$

($\Rightarrow$) Seja (S) inviável

$$(U)\begin{cases} (0,-1,0)^T(r,s,t) < 0 \\ (0,-1,1)^T(r,s,t) \geq 0, & \lambda_0 \\ (a_i,-1,b_i)^T(r,s,t) \geq 0, & \lambda_i,\ i=1,\dots,p \\ (a_i,0,-b_i)^T(r,s,t) \geq 0, & \lambda_i,\ i=p+1,\dots,p+m \end{cases}$$

inviável

(U_0) é da forma (T) *

Usando o lema de Farkas

$\exists\ (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+m})$, $\lambda_i \geq 0\ \forall i$ tal que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \begin{bmatrix} a_i \\ -1 \\ -b_i \end{bmatrix} + \sum_{i=p+1}^{p+m} \lambda_i \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ -b_i \end{bmatrix}$$

implementação das listas → Final da semana da A1 25/03/2025

- Mosek (manual do usuário, licença acadêmica)
- python
- listas de modelagem

(*) mochila : variáveis inteiras

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ blc \leq Ax \leq buc \\ blx \leq x \leq bux \\ x_i \in \mathbb{Z},\ i \in I \end{cases} = f^*,\ x^*$$

f^* → valor ótimo

x^* → solução ótima

- vamos inventar dados p/ os que não tem

Convexidade

Def: Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ não vazio é convexo se, para qualquer $x_1, x_2 \in C$ e $\lambda \in [0,1]$, vale que $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$

Def: Uma combinação convexa de vetores $x_1, \dots, x_m$ é um vetor da forma

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda x_i \quad , \text{ onde } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \, , \; \lambda_i \geq 0 \text{ e } i \geq 1$$

Prop: X é convexo $\Leftrightarrow$ toda combinação de pontos de X pertence à X

Prop: Um conjunto não vazio que é a interseção de um (possivelmente infinito) conjunto de conjuntos convexos é convexo

Prop: Seja X um conjunto não vazio.
Então, $\mathrm{conv}(X)$ é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de X

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; k \geq 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in X, i \geq 1, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

seja

$$S(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; k \geq 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in X, i \geq 1, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

É fácil checar que $S(X)$ é um conjunto convexo que contém X

Então, $\mathrm{conv}(X) \subset S(X)$

Reciprocamente, se $x \in S(X)$, então $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, para $x_i \in X$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

como $x_i \in X \subset \mathrm{conv}(X)$ e como $\mathrm{conv}(X)$ é convexo, x, que é uma comb. convexa de pontos de um conjunto convexo $\mathrm{conv}(X)$, também pertence à $\mathrm{conv}(X)$

Então $S(X) \subset \mathrm{conv}(X)$

Lista 1 - convexity

Exercice 1. Let A be an $m\times n$ matrix, let $b \in \mathbb{R}^m$, and $c \in \mathbb{R}^n$. Solve the optimization problem: minimize $c^T x$ subject to the constraints $Ax = b$.

- $A_{m\times n}$
- $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$
- $\min c^T x$ t.q. $Ax = b$

Tomemos uma solução x_0 de $Ax = b$

Sabemos que as outras soluções do problema podem ser escritas da forma $x = x_0 + n$, onde n satisfaz $An = 0$, ou seja, $n \in N(A)$

Separando em 3 casos, temos $c^T n < 0$, $c^T n > 0$ e $c^T n = 0$

Tomando n de modo que $c^T n < 0$ temos:

$$c^T(x_0+n) = c^T(x_0+n)$$
$$c^T(x_0+n) + c^T n < c^T(x_0+n)$$
$$c^T(x_0+2n) < c^T(x_0+n)$$

ou seja, se tomo um vetor solução $x = x_0 + n$ de modo que $c^T n < 0$, sempre consigo fornecer outra solução que gera um valor menor na função.

Analogamente, tomando as soluções $x = x_0 + n$ de modo que $c^T n > 0$ temos:

$$c^T(x_0+n) = c^T(x_0+n)$$
$$c^T(x_0+n) > c^T(x_0+n) - \frac{1}{2} c^T n$$
$$c^T(x_0+n) > c^T\left(x_0 + \frac{1}{2} n\right)$$

que também sempre consigo fornecer outra solução que minimize $c^T x$

Finalmente, tomando as soluções de modo que $c^T n = 0$ temos:

$$c^T(x_0) = c^T(x_0) + 0$$
$$c^T(x_0) = c^T(x_0) + c^T n$$
$$c^T(x_0) = c^T(x_0+n)$$

ou seja, $c^T x$ é constante e portanto são os mínimos, pois não consigo apresentar outra solução de $Ax = b$ que gere algum valor menor para $c^T x$

Exercice 2. *Show that the following sets are convex:*

a) $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ *where* $x_1, \dots, x_n$ *are given in* $\mathbb{R}^n$.

b) $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ *where* $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *and* $\|\cdot\|$ *is a norm on* $\mathbb{R}^n$.

c) $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ *and* $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ *where* $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.

d) $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, Cx \leq d\}$.

a) $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$, onde $x_1, \dots, x_n$ são dados em $\mathbb{R}^n$

Seja $A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ e $a_1, a_2 \in A$.

Então, $a_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $a_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$

Seja $a_\lambda = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2$. Queremos mostrar que, $\forall \lambda, \alpha, \beta \in [0,1]$, $x_\lambda \in A$.

Assim,

$$a_\lambda = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2$$
$$a_\lambda = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$
$$a_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i x_i + (1-\lambda) \beta_i x_i$$
$$a_\lambda = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + (1-\lambda) \beta_i) x_i$$

Como $\sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + (1-\lambda) \beta_i) = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}_{=1} + (1-\lambda) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}_{=1}$

$$= \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Concluímos que $a_\lambda \in A$ e A é convexo

b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, onde $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e $\|\cdot\|$ é a norma em $\mathbb{R}^n$

Seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$

Sejam $x_1, x_2 \in B$, então $\|x_1 - x_0\| \leq r$ e $\|x_2 - x_0\| \leq r$

Seja $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. Queremos mostrar que $x_\lambda \in B$ $\forall \lambda \in [0,1]$

Assim, $x_\lambda - x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x_0$

$$x_\lambda - x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - \lambda x_0 - (1-\lambda) x_0$$

$$x_\lambda - x_0 = \lambda (x_1 - x_0) + (1-\lambda)(x_2 - x_0)$$

$$\|x_\lambda - x_0\| \leq |\lambda| \underbrace{\|x_1 - x_0\|}_{\leq r} + |1-\lambda| \underbrace{\|x_2 - x_0\|}_{\leq r}$$

$$\|x_\lambda - x_0\| \leq |\lambda| r + |1-\lambda| r = r$$

Portanto, $x_\lambda \in B$ e o conjunto B é convexo.

c) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$, onde $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$

$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$. Seja $x_1, x_2 \in C_1$. Então $a^T x_1 = b$
$a^T x_2 = b$

Seja $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. Queremos mostrar que x_λ também pertence à C_1 $\forall \lambda \in [0,1]$. Assim,

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$
$$a^T x_\lambda = a^T (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$$
$$a^T x_\lambda = \lambda a^T x_1 + (1-\lambda) a^T x_2$$
$$a^T x_\lambda = \lambda b + (1-\lambda) b$$
$$a^T x_\lambda = b \implies x_\lambda \in C_1$$, portanto C_1 é convexo

$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$. Seja $x_1, x_2 \in C_2$. Então $a^T x_1 \leq b$
$a^T x_2 \leq b$

Seja $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. Queremos mostrar que x_λ também pertence a C_2, $\forall \lambda \in [0,1]$. Assim,

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$
$$a^T x_\lambda = a^T (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$$
$$a^T x_\lambda = \lambda (a^T x_1) + (1-\lambda)(a^T x_2)$$
$$a^T x_\lambda \leq \lambda b + (1-\lambda) b$$
$$a^T x_\lambda \leq b \implies a^T x_\lambda \in C_2$$, portanto C_2 é convexo

d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ Cx \leq d\} = S$

Seja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Então $Ax_1 = b$ e $Cx_1 \leq d$ e $Ax_2 = b$ e $Cx_2 \leq d$

seja $x\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. Queremos mostrar que $x\lambda$ também pertence à S, $\forall \lambda$

Temos que

$$Ax\lambda = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

$$Ax\lambda = \lambda A x_1 + (1-\lambda) A x_2$$

$$Ax\lambda = \lambda b + (1-\lambda) b$$

$$Ax\lambda = b$$

Também que

$$Cx\lambda = C(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

$$Cx\lambda = \lambda C x_1 + (1-\lambda) C x_2$$

$$Cx\lambda \leq \lambda d + (1-\lambda) d$$

$$Cx\lambda \leq d$$

Portanto, $x\lambda \in S$ e S é convexo.

Exercice 3. *Show that if a nonempty set is an intersection of convex sets then it is convex. Deduce that the set of semidefinite positive matrices is convex.*

Mostre que se um conjunto não vazio é uma interseção de conjuntos convexos então ele também é convexo

Deduza que o conjunto das matrizes semidefinidas positivas é convexo

Seja $I = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ com C_i convexos, $i = 1, \dots, n$

Seja $x_1, x_2 \in C_i$, para $i = 1, \dots, n$ e $\lambda \in [0,1]$

$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C_i$, já que C_i é convexo

Assim, $x_\lambda \in I$ porque pertence a todos os C_i com $i = 1, \dots, n$

Portanto, I é convexo.

Uma matriz A é semi-definida positiva se $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

Fixando x, tomemos o seguinte conjunto: $H_x = \{A \mid x^T A x \geq 0\}$

Podemos mostrar que H_x é convexo, pois:

Dados $A, B \in H_x$, definimos $M_\lambda = \lambda(A) + (1-\lambda)(B)$

$x^T(\lambda(A) + (1-\lambda)(B))x$

$= (\lambda x^T A + (1-\lambda) x^T B)\, x$

$= \lambda x^T A x + (1-\lambda) x^T B x \geq 0$, pois $\lambda \in [0,1]$, $x^T A x \geq 0$ e $x^T B x \geq 0$

Assim, $M_\lambda \in H_x$ e H_x é convexo

A partir disso, podemos concluir que o conjunto

$\{A \mid A$ é semi-definida positiva$\} = \bigcap_x H_x$ é convexo, pois se trata da interseção de conjuntos convexos

Exercice 4. Show that the set of optimal solutions of a convex optimization problem is convex.

Mostre que o conjunto de soluções ótimas de um problema de otimização convexo é convexo

Consideremos um problema da forma:

→ minimizar $f(x)$, com f convexa

→ x^* é uma solução ótima global

Tomemos o conjunto de todos as soluções ótimas globais:

$S = \{x \mid f(x) = f(x^*)\}$

Suponhamos, por contradição, que S não é convexo.

Nesse caso, existem $a, b \in S$ e $\lambda \in [0,1]$ tal que $\lambda a + (1-\lambda)b \notin S$

Como f é convexa e $f(a) = f(b)$, temos:

$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(a) = f(a)$

ou seja, $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq f(a)$

Consideremos os 2 casos:

1. $f(\lambda a + (1-\lambda)b) < f(a)$: Há uma contradição, já que $f(a)$ é mínimo global

2. $f(\lambda a + (1-\lambda)b) = f(a)$: Isso significa que $\lambda a + (1-\lambda)b \in S$, o que supomos falso. Contradição!

Portanto, S é convexo

Exercice 5. *a) Show that if X is convex its interior is convex too.*
b) We define the ε-enlargement of set X by

$$X^\varepsilon = \{y : dist(y, X) \leq \varepsilon\}$$

for $\varepsilon > 0$ where dist is the distance function:

$$dist(y, X) = \begin{cases} \inf \|y - x\| \\ x \in X. \end{cases}$$

Show that if X is convex then the set X^ε is convex too.
c) Let $B_F(0, \varepsilon) = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$. Show that if X is convex and closed then $X^\varepsilon = X + \mathbb{B}_F(0, \varepsilon)$. If X is closed and convex, deduce another proof of the convexity of X^ε.

a) Mostre que se X é convexo seu interior também é convexo

Dado $0 < t < 1$, temos $tS + (1-t)S \subseteq S$, pela convexidade em S

Isso quer dizer que qualquer coisa da forma $t \cdot x + (1-t) \cdot y$, dados $x, y \in S$, estão em S.

Denotemos $U = int(S)$. U é um conjunto aberto, logo tU também é, o que implica $tU + (1-t)U$ também aberto. (A soma de um conjunto aberto com qualquer coisa é aberto).

Essa soma é um conjunto aberto contido em S, então deve estar contido no interior de S, que é U.

Ou seja: $tU + (1-t)U \subseteq U$, $\forall t \in [0,1]$, então U é convexo

b) Definimos ε-enlargement do conjunto X por $X^\varepsilon = \{ y \mid dist(y,X) \leq \varepsilon \}$ para $\varepsilon > 0$, onde dist é a função de distância: $dist(y,X) = \inf \|y - x\|$, $x \in X$

Mostre que se X é convexo então X^ε também é convexo

Como X é convexo, dado $0 < t < 1$, sabemos que $tX + (1-t)X \subseteq X$

Tomemos $y_1, y_2 \in X^\varepsilon$. Queremos mostrar que $y_t = t y_1 + (1-t) y_2 \in X^\varepsilon$, ou seja, que $dist(y_t, X) \leq \varepsilon$

Assim, $dist(y_t, X) = \inf \| t y_1 + (1-t) y_2 - x \| \; x \in X$

$= \inf \| t(y_1 - x) + (1-t)(y_2 - x) \| \; x \in X$, como $\|\cdot\|$ é convexa,

$\leq t \inf \| y_1 - x \| + (1-t) \inf \| y_2 - x \| \; | x \in X$

$\leq t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon$

Portanto, X^ε é convexo.

c) Seja $BF(0,\varepsilon) = \{x \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$. Mostre que se X é convexo e fechado

Então $X^\varepsilon = X + BF(0,\varepsilon)$ (I)

Se X é convexo e fechado, deduza outra prova de que X^ε é convexo (II)

(I)

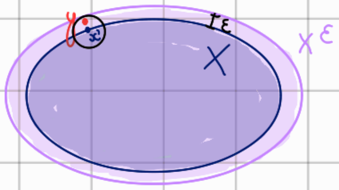
Supomos X convexo e fechado

Primeiro, vamos provar que $X^\varepsilon \subseteq X + BF(0,\varepsilon)$

Reescrevendo, queremos mostrar que $X^\varepsilon \subseteq \bigcup_{x\in X} BF(x,\varepsilon)$

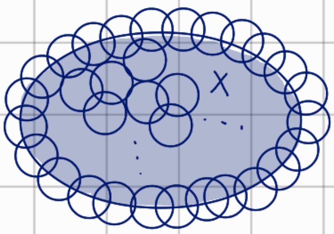
Pela definição, sabe-se que se $y \in X \Rightarrow y \in \bigcup_{x\in X} BF(x,\varepsilon)$

Portanto, nos resta mostrar que, dado um y "na faixa ε", ele está contido em $\bigcup_{x\in X} BF(x,\varepsilon)$



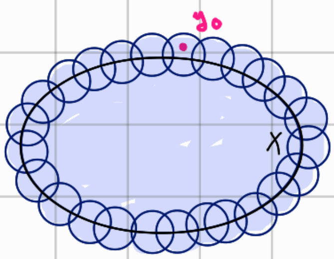
Como $y \in X^\varepsilon$, $\exists x' \in X$ tal que $\|y - x'\| \leq \varepsilon$. Ou seja, $X^\varepsilon \subseteq \bigcup_{x\in X} BF(x,\varepsilon)$.

Nos resta mostrar que $\bigcup_{x\in X} BF(x,\varepsilon) \subseteq X^\varepsilon$. $\bigcup_{x\in X} BF(x,\varepsilon)$ será algo da forma



Tomemos um y_0 arbitrário em $\bigcup_{x\in X} BF(x,\varepsilon)$. Segue da definição que se $y_0 \in X \Rightarrow y_0 \in X^\varepsilon$.

Estamos interessados nos casos em que y_0 está fora de X, como no seguinte desenho:



$\bigcup_{x\in X} BF(x,\varepsilon)$

Sabemos que há um $\hat{x}$ que minimiza $\|y_0 - x\|$ para $x \in X$, de modo que $\|y_0 - \hat{x}\| \leq \varepsilon$, dado a forma que $BF(x,\varepsilon)$ é definida.

Portanto, dado: $\text{dist}(y_0, x) = \inf_{x \in X} \|y_0 - x\|$

Sabemos que $\text{dist}.(y_0, x) \leq \varepsilon$. Ou seja, $y \in X^\varepsilon$

Logo $\bigcup_{x \in X} B_F(x, \varepsilon) \subseteq X^\varepsilon$

Dessa forma, concluímos que $\bigcup_{x \in X} B_F(x,\varepsilon) = X + B_F(0, \varepsilon) = X^\varepsilon$

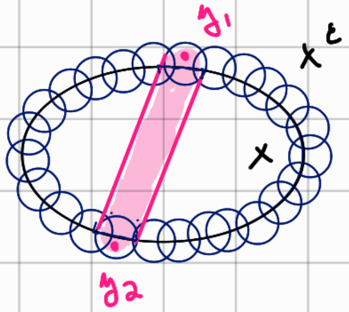
(II) Agora, vamos utilizar isso para provar a convexidade de $X^\varepsilon = \bigcup_{x \in X} B_F(x, \varepsilon)$

Suponhamos X fechado e convexo

Escolhemos dois elementos arbitrários de X^ε: y_1 e y_2

Para provar a convexidade de X^ε, precisamos garantir que a reta que liga y_0 e y_1 está contida em X^ε também, quaisquer que sejam as escolhas de y_1 e y_2.

Escolhendo $y_1, y_2 \in X$, sai direto pela definição, então vamos supor que y_0 e y_1 estejam na faixa ε, como na figura abaixo



Seja x_1 o centro da bola que contém y_1 e x_2 o centro da bola que contém y_2

$y_1 \in B_F(x_1, \varepsilon)$, $y_2 \in B_F(x_2, \varepsilon)$

Seja $0 < t < 1$

Definimos S como o fecho convexo de $B_F(x_1, \varepsilon) \cup B_F(x_2, \varepsilon)$. Sendo

$S = \{ t y_1 + (1-t) y_2 \mid y_1, y_2 \in B_F(x_1, \varepsilon) \cup B_F(x_2, \varepsilon) \}$

Como S é fecho convexo, é convexo.

Resta mostrar que $S \subseteq X^\varepsilon = \bigcup_{x \in X} B_F(x, \varepsilon)$

Para isso, vamos definir o conjunto: $T = \bigcup_{x \in R} B_F(x, \varepsilon)$ tal que $R = \{ t x_1 + (1-t) x_2 \mid 0<t<1 \}$

Claramente, $T \subset X^\varepsilon$, por definição

Basta provar que $S \subseteq T$

Seja $s \in S \Rightarrow s = t\alpha + (1-t)\beta$

Seja $s^* \in S$ tal que $s^* = t x_1 + (1-t) x_2$

Como $s - s^* = t\alpha + (1-t)\beta - t x_1 - (1-t) x_2$

$= t(\alpha - x_1) + (1-t)(\beta - x_2)$

$\leq t\,\varepsilon + (1-t)\varepsilon$

$\leq \varepsilon$

Ou seja, $s - s^* \leq \varepsilon$ e $BF(s^*, \varepsilon) \subseteq T \Rightarrow s^* \in T$ c.q.d.

$\Rightarrow s \in T \Rightarrow S \subseteq T$

Logo, $S \subseteq T \subseteq X^{\varepsilon} \Rightarrow S \subseteq X^{\varepsilon}$

Como S pode ser formado a partir de quaisquer duas bolas em $\underbrace{\bigcup_{x \in X} BF(x, \varepsilon)}_{X^{\varepsilon}}$, garantimos que $\underbrace{\bigcup_{x \in X} BF(x, \varepsilon)}_{X^{\varepsilon}}$ é convexo

Exercice 6. *Let C be a convex set and let $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Show that*

$$(\alpha_1 + \alpha_2)C = \alpha_1 C + \alpha_2 C.$$

Find a set C for which the above relation does not hold.

seja C um conjunto convexo e seja $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

Mostre que $(\alpha_1 + \alpha_2)C = \alpha_1 C + \alpha_2 C$ (I)

Encontre um conjunto C para o qual a relação acima não vale (II)

(I)

$(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot C = \{ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot c \mid c \in C \}$

$\alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot C = \{ \alpha_1 \cdot c_1 + \alpha_2 \cdot c_2 \mid c_1, c_2 \in C \}$

primeiro: $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot C \subseteq \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot C$

seja $x \in (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot C \Rightarrow x = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot c$, $c \in C$

$= \alpha_1 \cdot c + \alpha_2 \cdot c$, $c, c \in C$

$\Rightarrow x \in \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot C$

$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot C \subseteq \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot C$

segundo: $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot C \supseteq \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot C$

seja $x \in \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot C \Rightarrow x = \alpha_1 \cdot c_1 + \alpha_2 \cdot c_2$, $c_1, c_2 \in C$

$$x = (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\alpha_1 \cdot c_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2 \cdot c_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)$$

como $c_1 \in C$, $c_2 \in C$ e $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = 1$ e C é convexo

temos $c^* = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot c_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot c_2 \in C$

Logo, $x = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot c^*$, $c^* \in C$

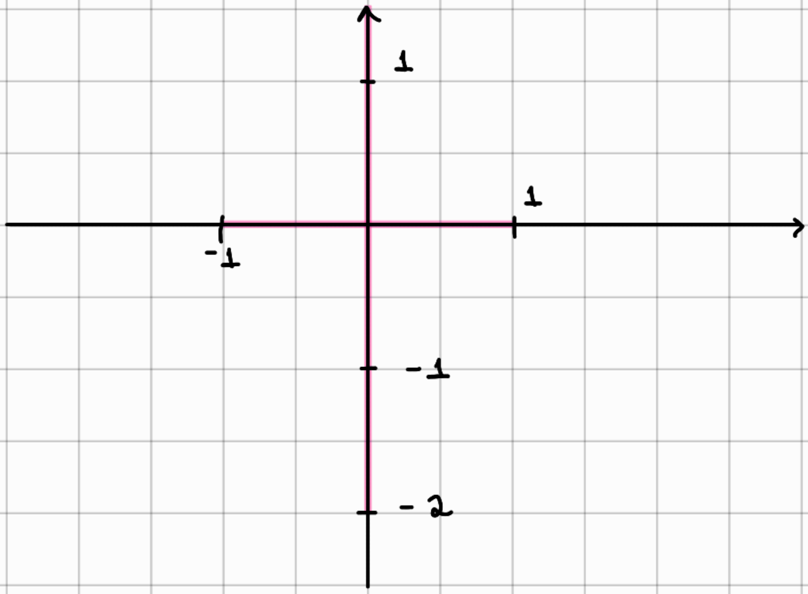
$\Rightarrow x \in (\alpha_1 + \alpha_2) C$

Dessa forma, $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot C = \alpha_1 \cdot C + \alpha_2 \cdot C$

(II) Essa relação não vale para

$$C = \{\alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_2 \mid c_1 = (1,0),\ c_2 = (0,1),\ \alpha \in [-1,1],\ \beta \in [-2,1]\}$$

C :

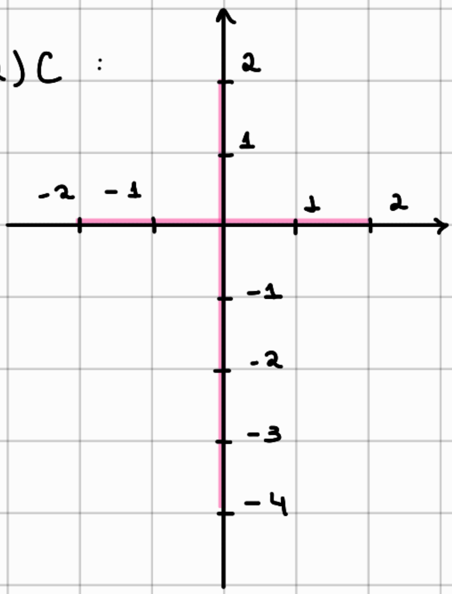


Para $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$:

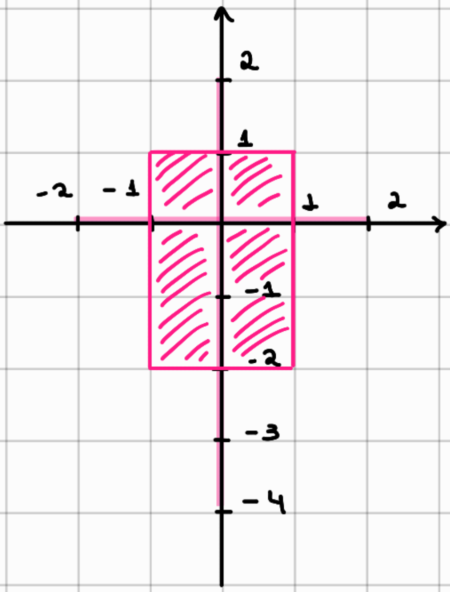
$(1+1)C = \{2 \cdot c \mid c \in C\}$

$1C + 1C = \{c_1 + c_2 \mid c_1, c_2 \in C\}$

(2)C :



(1)C + (1)C :



$(1,1) \in C + C$

Afinal $c_1 + c_2 \in C + C$

Exercice 7. Let S, T be two nonempty convex sets in $\mathbb{R}^n$. Show that a separates S, T if and only if

$$\sup_{x\in S} a^T x \le \inf_{y\in T} a^T y$$

and

$$\inf_{x\in S} a^T x \le \sup_{y\in T} a^T y.$$

Show that the separation is strong if and only if

$$\sup_{x\in S} a^T x < \inf_{y\in T} a^T y.$$

Seja S, T dois conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$

Mostre que a separa S, T se, e somente se, (I)

$$\sup_{x\in S} a^T x \le \inf_{y\in T} a^T y \quad \text{e} \quad \inf_{x\in S} a^T x \le \sup_{y\in T} a^T y$$

Mostre que a separação é forte se, e somente se, (II)

$$\sup_{x\in S} a^T x < \inf_{y\in T} a^T y$$

(I) a separa S, T

($\Rightarrow$) $\exists\, c$ t.q. $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = c\}$ é um hiperplano separador, ou seja

$T \subseteq H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \ge c\}$

$S \subseteq H_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \le c\}$

(ou o contrário)

$\forall x \in S$, $\langle a, x\rangle \le c$, então $\inf\limits_{x\in S} \langle a, x\rangle \le c$ $\left(\inf < \langle a, x\rangle, \forall x\right)$

$\forall y \in T$, $\langle a, y\rangle \ge c$, então $\sup\limits_{y\in T} \langle a, y\rangle \ge c$

Logo $\sup\limits_{y\in T} \langle a, y\rangle \ge \inf\limits_{x\in S} \langle a, x\rangle$

como $\forall x \in S$ $\langle a, x\rangle \le c \Rightarrow \sup\limits_{x\in S} \langle a, x\rangle \le c$, afinal, caso contrário, por convexidade obteríamos um ponto e x tal que $\langle a, x\rangle > c$ e $x \notin H_-$ $\rightarrow$ absurdo!

Analogamente, $\inf\limits_{y\in T} \langle a, y\rangle \ge c$

Logo, $\sup\limits_{x\in S} a^T x \le \inf\limits_{y\in T} a^T y$

$(\Leftarrow)$ $\sup_{x \in S} a^T x \leq \inf_{y \in T} a^T y$

$\exists\, c$ t.q. $\sup_{x \in S} \langle a, x \rangle \leq c \leq \inf_{y \in T} \langle a, y \rangle$

Daí, $\forall x \in S$, $\langle a, x \rangle \leq c$ e $\forall y \in T$, $\langle a, y \rangle \geq c$

Logo, $x \in S \Rightarrow x \in H_- = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq c \}$, $S \subseteq H_-$

$y \in T \Rightarrow y \in H_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, y \rangle \geq c \}$, $T \subseteq H_+$

Assim, $H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = c \}$ é um plano separador

(II)

$(\Rightarrow)$ como a separação é forte, $\exists\, c$ e $\varepsilon > 0$ t.q

$T + \varepsilon B \subseteq H_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq c \}$

$S + \varepsilon B \subseteq H_- = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq c \}$

Como $\forall x \in S$

$$\left\langle a, x + \overbrace{\frac{\varepsilon}{\|a\|} \cdot a}^{\in B} \right\rangle \leq c$$

$$\langle a, x \rangle + \underbrace{\frac{\varepsilon}{\|a\|} \cdot \langle a, a \rangle}_{> 0} \leq c$$

$$\sup_{x \in S} \langle a, x \rangle + \underbrace{\varepsilon \cdot \|a\|}_{> 0} \leq c$$

$$\sup_{x \in S} \langle a, x \rangle < c$$

Analogamente, $\inf_{y \in T} \langle a, y \rangle > c$

Logo, $\sup_{x \in S} \langle a, x \rangle < \inf_{y \in T} \langle a, y \rangle$

$(\Rightarrow)$ dado $x \in T$:

se $\sup_{x \in S} \langle a, x \rangle < \inf_{y \in T} \langle a, y \rangle$

$\exists\, c$ t.q $\sup_{x \in S} \langle a, x \rangle < c < \inf_{y \in T} \langle a, y \rangle$

$\exists\ \varepsilon > 0$ t.q. $\forall\ V$ com $\|V\| = 1$ $\quad \sup_{x \in S} \langle a, x \rangle + \varepsilon \cdot \langle a, v \rangle \leq c$

e, como $\langle a, x \rangle \leq \sup_{x \in S} \langle a, x \rangle$

$$\langle a, x \rangle + \varepsilon \cdot \langle a, v \rangle \leq c$$

$$\langle a, x + \varepsilon v \rangle \leq c$$

Logo, $T + \varepsilon B \subseteq H_- = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq c \}$

Analogamente, $S + \varepsilon B \subseteq H_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq c \}$

Lista 2 - Theorem on Alternative, cones, and conic programs

Exercice 1. *Let K be a regular cone and let $\bar{x} >_K 0$. Prove that $x >_K 0$ if and only if there exists a positive real t such that $x \geq_K t\bar{x}$.*

?

seja K um cone regular e seja $\bar{x} >_K 0$

Prove que $x >_K 0$ se, e somente se, existe t real positivo tal que $\bar{x} \geq_K t\bar{x}$

Para demonstrar que $x \in int(K) \Rightarrow x - t\bar{x} \in int(K)$, vamos apresentar algum t que faça $(x - t\bar{x})$ estar a no máximo uma distância ε de x.

$$\|(x - t\bar{x}) - x\| \leq \varepsilon$$

$$\|-t\bar{x}\| \leq \varepsilon$$

$$-t\,\|\bar{x}\| \leq \varepsilon$$

Se tomarmos $t = \dfrac{\varepsilon}{2\|\bar{x}\|}$, que é positivo, teremos: $-\dfrac{\varepsilon}{2\cancel{\|\bar{x}\|}}\cancel{\|\bar{x}\|} \leq \varepsilon$

$\Rightarrow -\dfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.

Logo, $x \in int(K) \Rightarrow \exists!\ t > 0 \mid x - t\bar{x} \in int(K)$

Para a segunda parte, vamos supor que não existe $t > 0$ que satisfaça $x - t\bar{x} \in int(K)$, mas que $x \in int(K)$

Vimos anteriormente que essa suposição não é verídica, pois foi apresentado que para qualquer $x \in int(K)$ $\exists!\ t > 0$ que satisfaz $x - t\bar{x} \in int(K)$.

Em particular, apresentamos $t = \varepsilon / 2\|\bar{x}\|$, ou seja, podemos concluir que se $\nexists!\ t > 0 \mid x - t\bar{x} \in int(K) \Rightarrow x \notin int(K)$

como consequência da contrapositiva, $x - t\bar{x} \in int(K) \Rightarrow x \in int(K)$

Logo, se $x \in int(K) \Rightarrow \exists!\ t > 0 \mid x - t\bar{x} \in int(K)$

e se $\exists!\ t > 0 \mid x - t\bar{x} \in int(K) \Rightarrow x \in int(K)$

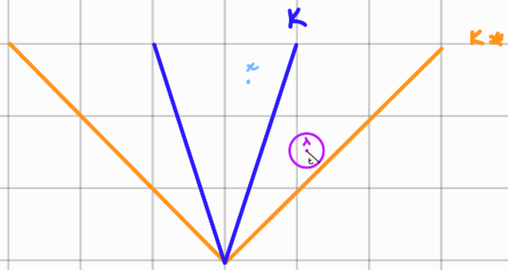
Exercice 2. Let K be a regular cone. 1) Prove that if $x \neq 0 \geq_K 0$ and $\lambda >_{K_*} 0$ then $\langle \lambda, x \rangle > 0$.

2) Assume that $\lambda \in K_*$. Prove that $\lambda >_{K_*} 0$ if and only if for every $x \neq 0$ with $x \geq_K 0$ we have $\langle \lambda, x \rangle > 0$.

3) Prove that $\lambda >_{K_*}$ if and only if the set

$$\{x \geq_K 0 \ : \ \langle \lambda, x \rangle \leq a\}$$

where a is a fixed postive real is compact.



Seja K um cone regular (K fechado c/ $\mathrm{int}(K)$ ñ vazio)

1. Prove que se $\underbrace{x \neq 0 \geq_K 0}_{x \in K}$ e $\underbrace{\lambda >_{K_*} 0}_{\lambda \in \mathrm{int}(K_*)}$ então $\langle \lambda, x \rangle > 0$

como $\lambda \in \mathrm{int}(K_*)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\lambda, \varepsilon) \subset K_*$

se $\lambda = x$, $\langle \lambda, x \rangle = \langle x, x \rangle \geq 0$, mas como $x \neq 0$ $\langle x, x \rangle > 0$, como queríamos

se $\lambda \neq x$, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu < \dfrac{\varepsilon}{\|\lambda - x\|}$

daí, $p = \lambda + (\lambda - x) \cdot \mu \in B(\lambda, \varepsilon) \subset K_*$

afinal, $\|p - \lambda\| = \|\cancel{\lambda} + (\lambda - x)\mu - \cancel{\lambda}\| = \|\lambda - x\| \cdot \mu \leq \cancel{\|\lambda - x\|} \cdot \dfrac{\varepsilon}{\cancel{\|\lambda - x\|}} = \varepsilon$

Sabemos que $\langle \lambda, x \rangle \geq 0$, já que $\lambda \in \mathrm{int}(K) \subset K_*$ e $x \in K$

se supormos por absurdo que $\langle \lambda, x \rangle = 0$, podemos olhar para $\langle p, x \rangle$:

$$\langle \lambda + (\lambda - x)\mu, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle + \mu \langle \lambda - x, x \rangle = \cancelto{0}{\langle \lambda, x \rangle} + \mu \cancelto{0}{\langle \lambda, x \rangle} - \mu \langle x, x \rangle$$
$$= -\mu \langle x, x \rangle$$

como $\mu > 0$ e $\langle x, x \rangle > 0$, onde $x \neq 0$, temos que $\langle p, x \rangle < 0$, o que implica que $p \notin K_*$ que é um absurdo já que $p \in B(\lambda, \varepsilon) \subset K_* \Rightarrow p \in K_*$

Logo $\langle \lambda, x \rangle \neq 0$ e $\langle \lambda, x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \lambda, x \rangle > 0$

2. Suponha que $\lambda \in K_*$

Prove que $\underbrace{\lambda >_{K_*} 0}_{\lambda \in \text{int}(K)} \iff \forall x \neq 0, \text{ com } \underbrace{x \geq_K 0}_{x \in K}$ temos $\langle \lambda, x \rangle > 0$

($\Rightarrow$) Foi mostrado em (1) já que provamos para x arbitrário sob aquelas condições

($\Leftarrow$) Dado $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Se $\exists x^* \in K, x^* \neq 0$, com $\langle \lambda, x^* \rangle \leq 0$

$\lambda \neq x^*$, visto que se $\lambda = x^*$, $\langle \lambda, x^* \rangle = \langle x^*, x^* \rangle > 0$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu < \dfrac{\varepsilon}{\|\lambda - x^*\|}$

A partir disso, $p = \lambda + (\lambda - x^*)\mu$ é de tal modo que

$\|p - \lambda\| = \|\cancel{\lambda} + (\lambda - x^*)\mu - \cancel{\lambda}\| = \mu \|(\lambda - x^*)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{\|\lambda - x^*\|} \cdot \|\lambda - x^*\| = \varepsilon$

e $\langle p, x^* \rangle = \langle \lambda, x^* \rangle + \mu \langle \lambda, x^* \rangle - \mu \langle x^*, x^* \rangle$

$\langle p, x^* \rangle = \langle \lambda, x^* \rangle + \mu \langle \lambda, x^* \rangle = \mu \langle x^*, x^* \rangle$

$\langle p, x^* \rangle \leq -\underbrace{\mu \langle x, x^* \rangle}_{>0} < 0$

ou seja, $p \notin K_*$

Temos então que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p \in B(\lambda, \varepsilon)$ com $p \notin K_*$, isto é, $p \notin \text{int}(K)$

Provamos que se $\exists x^* \in K$ com $\langle \lambda, x^* \rangle \leq 0 \Rightarrow \lambda \notin \text{int}(K)$

Pela contrapositiva, $\lambda \in \text{int}(K) \Rightarrow \forall x \in K, x \neq 0$, temos $\langle \lambda, x \rangle > 0$

3. Prove que $\lambda >_{K^*}$ $\iff$ o conjunto $\{x \geq_K 0 \mid \langle \lambda, x \rangle \leq a\}$, onde a é um real positivo fixo, é compacto

$(\Rightarrow)$

Exercice 3. *Derive the General Theorem on Alternative from Homogeneous Farkas Lemma.*

Hint: Verify that the system

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_i^T x > b_i, \ i = 1, \ldots, m_s, \\ a_i^T x \geq b_i, \ i = m_s + 1, \ldots, m, \end{cases}$$

in variable x has no solution if and only if the homogeneous inequality

$$\varepsilon \leq 0$$

in variables x, ε, t, is a consequence of the system of homogeneous inequalities

$$(\mathcal{T}) : \begin{cases} a_i^T x - b_i t - \varepsilon \geq 0, \ i = 1, \ldots, m_s, \\ a_i^T x - b_i t \geq 0, \ i = m_s + 1, \ldots, m, \\ t \geq \varepsilon \end{cases}$$

in these variables.

Derive o Teorema Geral da Alternativa do Lema Homogeneo de Farkas

Dica: Verifique que

$$(S): \begin{cases} a_i^T x > b_i, \ i = 1, \ldots, m_s \\ a_i^T x \geq b_i, \ i = m_s+1, \ldots, m \end{cases} \iff \varepsilon \leq 0 \text{ nas variáveis } x, \varepsilon, t \text{ é conseq. de}$$

não tem solução

$$(T): \begin{cases} a_i^T x - b_i t - \varepsilon \geq 0, \ i = 1, \ldots, m_s \\ a_i^T x - b_i t \geq 0, \ i = m_s+1, \ldots, m \\ t \geq \varepsilon \end{cases}$$

Exercice 4. *Prove the following corollaries of General Theorem on Alternative:*

1) Gordan's Theorem on Alternative. One of the following systems of inequalities

$$(I)\ \ Ax < 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

in variable x and

$$(II)\ \ A^T y = 0,\ y \neq 0,\ y \geq 0, y \in \mathbb{R}^m,$$

in variable y, with A an $m \times n$ matrix has a solution if and only if the other has no solution.

2) Inhomogeneous Farkas Lemma. A linear inequality $a^T x \leq p$ in variable x is a consequence of a solvable system of linear inequalities $Nx \leq q$ iff there exists $\nu \geq 0$ such that $a = N^T \nu$ and $\nu^T q \leq p$.

3) Motzkin's Theorem on Alternative. The system

$$Sx < 0,\ Nx \leq 0$$

in variables x has no solution if and only if the system

$$S^T \sigma + N^T \nu = 0,\ \sigma \geq 0,\ \nu \geq 0,\ \sigma \neq 0,$$

in variables σ, ν has a solution.

Exercice 5. *Show that if P is an orthogonal matrix then*

(i) $\|PA\|_2 = \|A\|_2$,

(ii) $\|PA\|_F = \|AP\|_F = \|A\|_F$.

Exercice 6. *For matrices A of size $m \times n$ and B of size $n \times q$ show that*

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F.$$

Exercice 7. *Let A be a semidefinite positive matrix and let B be definite positive. If $A \succeq B$ show that $B^{-1/2}AB^{-1/2} \succeq I \succeq A^{-1/2}BA^{-1/2}$.*

Exercice 8. *Let A, B be two positive definite matrices. If $A \succ B$ show that $B^{-1} \succ A^{-1}$. If $A \succeq B$ show that $B^{-1} \succeq A^{-1}$.*

Cones

Def: Um conjunto $C \neq \emptyset$ é cônico se $\forall x \in C$ e $\forall t \geq 0$ temos $tx \in C$

Def: Um cone é um conjunto convexo

Prop: Um conjunto $C \neq \emptyset$ é um cone se, e somente se, satisfaz:

1. $\forall x \in C$ e $\forall t \geq 0$, temos que $tx \in C$
2. $\forall x, y \in C$, temos que $x + y \in C$

- Se C satisfaz 1 e 2 $\forall x, y \in C$ e $\forall\ 0 \leq t \leq 1$, temos que $tx \in C$, $(1-t)y \in C$ e $tx + (1-t)y \in C$
- Reciprocamente, se C é um cone, então C é cônico e $\forall x, y \in C$ temos que

$$x + y = 2\underbrace{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)}_{\in C \text{ por convexidade}} \in C$$

Def: Uma combinação cônica de pontos $x_1, \dots, x_m$ é um vetor da forma $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, onde $\lambda_i \geq 0$, $i \geq 1$

- C é um cone $\iff$ C contém todas as combinações cônicas de pontos de C

Ex O conjunto de soluções do conj de (possivelmente infinitas) desigualdades $a_\alpha^T x \leq 0$, $\alpha \in I$ é um cone.

↳ em particular, o conjunto sol. de um sistema homogêneo finito de m desigualdades lineares homogêneas $Ax \leq b$, onde A é $m \times n$, é um cone chamado cone poliedral (polyhedral cone)

- Similarmente aos conj.'s afins e convexos, uma intersecção não vazia de cones é um cone

Se sejam $C_1, \dots, C_m$ cones, então $\bigcap_{i=1}^{m} C_i$ também é um cone $(C_i \neq \emptyset)$

conic hull of X

- $\forall$ conj. $X \neq \emptyset$, podemos definir o menor cone que contém X : Cone(X)

Prop: Seja X um conjunto não vazio. Então

$$\text{conic}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; k \geq 1,\ x_i \in X,\ \lambda_i \geq 0,\ i \geq 1 \right\}$$

Exemplos de Cones:

1. conj. sol. C de um sist. homogêneo de desigualdades lineares
   $C = \{ x \mid a_i^T x \leq 0,\ i = 1, \dots, m \}$
2. O cone de norma : $C = \{ (x,t) \mid \|x\| \leq t \}$
   Para $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, obtemos o cone de segunda ordem ou cone de Lorentz ou cone de sorvete : $C = \{ (x,t) \mid \|x\|_2 \leq t \}$
3. Conj. das matrizes semidefinidas positivas

Prop: Seja $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Então $\overline{\text{Conic}}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m \right\}$

Seja $K = \text{conic}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m \right\}$

Vamos mostrar que K é <u>fechado</u>

1. Note que qualquer combinação linear dos elementos de X, com coeficientes lineares não negativos pode ser reescrita como uma combinação linear de todos os elementos de X, também com coef. lin. não neg.

2. Tome uma sequência $\{x^k\} \subset K$ tal que $x^k \to \hat{x}$ quando $k \to \infty$

Queremos mostrar que $\hat{x} \in K$

se $\hat{x} = 0$, então $\hat{x} \in K$

se $\hat{x} \neq 0$, sem perda de generalidade, podemos supor que $x^k \neq 0 \ \forall k \geq 1$.

Assim, $\forall k \geq 1$, temos que $x^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k x_i$, onde todos os λ_i^k são não neg. e pelo menos 1 é diferente de zero.

Defina $L_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k$ e $\bar{x}^k = \left(\frac{1}{L_k}\right) x^k = \left(\frac{1}{L_k}\right) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k x_i \quad \forall k \geq 1$

como $\{x^k\} \subset \text{conv}(X)$ que é compacto, existe a subsequência $\{\bar{x}^k \mid k \in J \subset \mathbb{N}\}$ $\subset \{x^k\}$ que converge a um $\bar{x} \in \text{conv}(X)$

Temos 2 casos para considerar:

I)

. . .

Prop: Se C é um cone fechado e $\hat{x} \notin C$, então vale

1. $\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), P_C(\hat{x}) \rangle = 0$
2. $\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), \hat{x} \rangle = 0$
3. $\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$