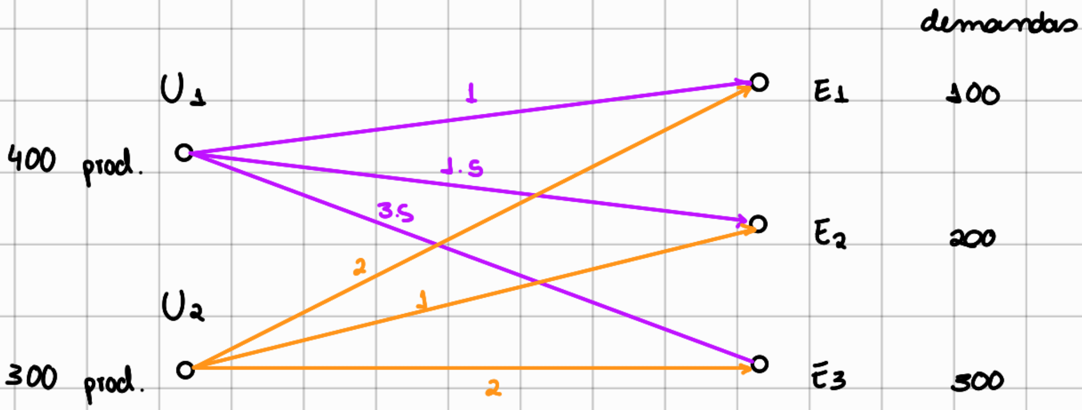
Lista 1)

Exercício 1 *Uma fábrica possui duas usinas U1 e U2. A usina U1 dispõe de 400 unidades de um produto e a U2 de 300 unidades do mesmo produto. A fábrica tem três clientes E1, E2 e E3 cujas demandas respectivas para o produto são 100 unidades para E1, 200 unidades para E2 e 300 unidades para E3. Os custos de transportes são resumidos na tabela seguinte:*

	E1	E2	E3
U1	1	1.5	3.5
U2	2	1	2

Por exemplo, cada unidade fornecida a E1 a partir de U2 custa 2 reais. Como obter um sistema de distribuição ótimo?

Problema de Transporte



1) Variáveis de decisão: x_{ij} = quantidade de produto transportados da usina i (U_i) para o cliente j (E_j)

2) Função objetivo: queremos minimizar o custo

$c^T x$

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}$$

$$x_{11} + 1{,}5 \cdot x_{12} + 3{,}5 \cdot x_{13} + 2 \cdot x_{21} + x_{22} + 2 \cdot x_{23}$$

Atendimento à demanda

$x_{11} + x_{21} \geq 100$

$x_{12} + x_{22} \geq 200$

$x_{13} + x_{23} \geq 300$

(=)

3) Restrições de Capacidade

$x_{11} + 1{,}5 \cdot x_{12} + 3{,}5 \cdot x_{13} \leq 400$

$2 \cdot x_{21} + x_{22} + 2 \cdot x_{23} \leq 300$

Não negatividade

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$

Exercício 2 *Numa usina química, produzimos dois tipos de produtos a partir de três fertilizantes. O produto I, composto por um quilograma de nitratos e dois quilogramas de sal de potássio é vendido por R\$7, e o produto II, composto de um quilograma de nitratos, um quilograma de fosfatos e três quilogramas de sal de potássio é vendido por R\$9. Sobram no estoque 8kg de nitratos, 4kg de fosfatos e 19kg de sal de potássio.*

1. *Qual quantidade de cada produto a empresa tem que produzir para maximizar o lucro?*
2. *Uma cooperativa agrícola quer negociar (i.e., minimizar) o preço de um quilograma de cada componente para comprar a granel todos os fertilizantes do estoque. Como determinar os preços para que a venda a granel seja pelo menos tão lucrativa como a venda dos produtos?* → (dual do 1)

Problema de Mistura

	Ni	KCl	P	Preço
Produto 1	1	2	–	7
Produto 2	1	3	1	9
	8	19	4	

1.

1) Variáveis de Decisão: p_i = quantidade de produto i produzida

$p_i \in \mathbb{N}$

2) Função Objetivo: $\max\ 7p_1 + 9p_2$

3) Restrições:

- De recurso:

$p_1 + p_2 \leq 8$

$2p_1 + 3p_2 \leq 19$

$p_2 \leq 4$

- não negatividade

$p_1, p_2 \geq 0$

2. 1) Variáveis de decisão: y_i = preço de 1kg do componente i

2) Função Objetivo: $\min\ 8y_1 + 19y_2 + 4y_3 = y^T b$

3) Restrições:

- Não negatividade:

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- Garantir que a venda seja tão lucrativa como a venda dos produtos:

$y_1 + 2y_2 \geq 7$

$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 9$

Exercício 3 *Um modelo de carro é montado em 3 usinas situadas em cidades V1, V2 e V3. O motor destes modelos é fornecido por duas outras usinas situadas nas cidades U1 e U2. As usinas de montagem precisam de pelo menos 5, 4 e 3 motores. Cada usina pode fornecer no máximo 6 motores. A direç ao da empresa quer minimizar o custo de transporte dos motores entre os dois sítios de fábrica e os três sítios de montagem. Os custos unitários (por motor transportado) para todos os itinerários possíveis são:*

	V1	V2	V3
U1	38	27	48
U2	37	58	45

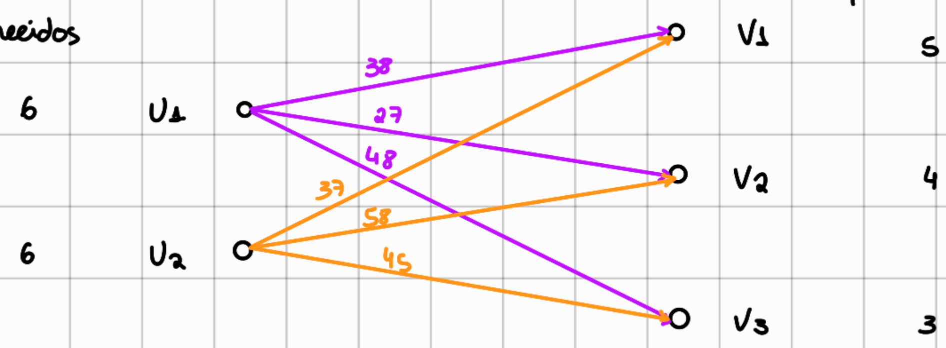
Como minimizar o custo total de transporte respeitando a oferta e a demanda?

Problema de Transporte

★ minimizar custo de transporte

qtd motores fornecidos

qtd motores necessários



1) Variáveis de decisão: x_{ij} = quantidade de motores transportada da usina U_i para a usina V_j

2) Função Objetivo: min $38x_{11} + 27x_{12} + 48x_{13} + 37x_{21} + 58x_{22} + 45x_{23}$

3) Restrições:

- de recurso

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 6$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 6$

- não negatividade

$x_{ij} \geq 0 \quad , \forall i,j$

- de atendimento à demanda

$x_{11} + x_{21} \geq 5$

$x_{12} + x_{22} \geq 4$

$x_{13} + x_{23} \geq 3$

Exercício 4 *Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele trabalha 10 horas por dia e gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar 1 unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 78 unidades por dia e que o lucro unitário por sapato é de 5 reais e o de cinto é de 4 reais, pede-se: o modelo do sistema de produç ao diário do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro diário.*

Problema de Mistura

⊛ maximizar lucro diário

<u>sapateiro</u> → 10h de trabalho

6 sapatos / h se fizer só sapatos → $\frac{1}{6}$ h p/ fazer 1 sapato | 2 un. couro 1 sapato

5 cintos / h se fizer só cintos → $\frac{1}{5}$ h p/ fazer 1 cinto | 1 un. couro 1 cinto

	horas	couro	Lucro
sapato	$\frac{1}{6}$	2	5
cinto	$\frac{1}{5}$	1	4
total	10	78	

(produto 1)
(produto 2)

1) Variáveis de decisão: x_s = quantidade de sapatos que deve ser produzida pelo sapateiro

x_c = quantidade de cintos que deve ser produzida pelo sapateiro

2) Função Objetivo: $\max\ 5x_s + 4x_c$

3) Restrições:

- <u>de recurso</u>:

$\left(\frac{1}{6}\right)x_s + \left(\frac{1}{5}\right)x_c \leq 10$

$2x_s + x_c \leq 78$

- <u>não negatividade</u>:

$x_s \geq 0$

$x_c \geq 0$

Exercício 5 *Certo fabricante de combustível para avião vende 2 tipos de combustível, A e B. O combustível de tipo A possui 25% de gasolina 1, 25% de gasolina 2 e 50% de gasolina 3. O combustível B tem 50% de gasolina 2 e 50% de gasolina 3. Há disponível para produção 500 galões de gasolina 1 e 200 galões de cada gasolina 2 e 3. Os lucros pela venda dos combustíveis A e B são, respectivamente, 20 e 30 dólares. Quanto se deve fazer de cada combustível para se obter um lucro máximo? Formule e resolva o*

Problema de Mistura

* maximizar lucro

	gas. 1	gas. 2	gas. 3	preço
combustível A	25%	25%	50%	20
combustível B	–	50%	50%	30
total	500	200	200	

1) Variáveis de Decisão: x_A = qtd. de galões do combustível A que deve ser produzida

x_B = qtd. de galões do combustível B que deve ser produzida

2) Função Objetivo: $\max \; 20x_A + 30x_B$

3) Restrições

- de recurso

$0{,}25x_A \leq 500$

$0{,}25x_A + 0{,}5x_B \leq 200$

$0{,}5x_A + 0{,}5x_B \leq 200$

- não negatividade

$x_A, x_B \geq 0$

Exercício 6 *Uma fábrica de petróleo deseja utilizar quatro tipos de petróleos para produzir três tipos de diesel: A, B, e C. A respeito dos tipos de petróleo, temos as seguintes informações:*

Tipo de petróleo	*Quantidade máxima disponível por dia*	*Custo (reais por barril)*
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4
4	1000	5

O diesel A não pode conter mais de 30% do petróleo do tipo 1, nem mais de 50% do tipo 3, mas deve conter no mínimo 40% do tipo 2. O preço de venda deste diesel é de 5.5 reais por barril.

O diesel B, cujo preço de venda é 4.5 reais por barril, deverá ser composto de pelo menos 10% do tipo 2 mas no máximo de 50% do tipo 1.

O diesel C não poderá conter mais de 70% do petróleo do tipo 1 e o seu preço de venda é de 3.5 reais por barril.

A fábrica gostaria de saber a quantidade de barris de cada tipo de petróleo que deveria ser utilizada na fabricação de cada um dos tipos de diesel para poder maximizar seu lucro.

Problema de Mistura

⊛ maximizar lucro

	Tipos de petróleo 1	2	3	4	Preço
diesel A	< 30%	> 40%	< 50%		5,5
diesel B	< 50%	> 10%			4,5
diesel C	< 70%				3,5

1) Variáveis de decisão: x_{iA} = qtd de barris de petróleo do tipo i utilizada na fabricação do diesel A

x_{iB} = qtd de barris de petróleo do tipo i utilizada na fabricação do diesel B

x_{iC} = qtd de barris de petróleo do tipo i utilizada na fabricação do diesel C

2) Função Objetivo: lucro da venda − custo da compra do petróleo

$$\max \quad 5{,}5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}+x_{4A}) + 4{,}5(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B}+x_{4B}) + 3{,}5(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C}+x_{4C}) - 3(x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}) - 6(x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}) - 4(x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}) - 5(x_{4A}+x_{4B}+x_{4C})$$

3) Restrições:

- de Demanda:

$$\frac{x_{1A}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iA}} \leq 30\%$$

$$\frac{x_{2A}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iA}} \geq 40\%$$

$$\frac{x_{3A}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iA}} \leq 50\%$$

$$\frac{x_{1B}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iB}} \leq 50\%$$

$$\frac{x_{2B}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iB}} \geq 10\%$$

$$\frac{x_{1C}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iC}} \leq 70\%$$

- de Recurso:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 3000$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 2000$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 4000$$

$$x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} \leq 1000$$