FUNZIONE OBIETTIVO: $f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (n incognite)

VINCOLI LINEARI (m): $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$\dots$

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

allora coeffic. → $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, variabili → $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, termini noti $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$ con n incognite, m vincoli

TEO CNES affinché ∃ sol ammiss. x prob di trasporto è che risulti: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (DISPONIBILITÀ TOT = RICHIESTA TOT)

TEO se nel prob di trasporto le a_i $(i=1,\dots,m)$ e le b_j $(j=1,\dots,n)$ sono intere e se il prob. ammette sol. ottima, ⇒ ha sol. ottima intera

CAPITOLO SUI POLIEDRI

DEF sia $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ famiglia di rette ∥ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fissati e $c \in \mathbb{R}$. il vettore $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ individua una direzione ⊥ alla famiglia di rette ed è orientato nella parte di piano in cui ci sono le rette della famiglia ottenute per valori crescenti di c (semipiano in cui vale $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$)

DEF il PROB ammette sol ottima (può non essere !) in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile

il PROB NON ammette sol. ottima se la reg. ammissibile è vuota / la reg. ammiss. è illimitata e la f.o. è illimitata sup (se di max) o inf (se di min)

DEF dato punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e direzione $d \in \mathbb{R}^n$ l'insieme dei punti $\in \mathbb{R}^n$:

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \bar{x} + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$ è retta passante per $\bar{x}$ con direzione d

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \bar{x} + \lambda d, \lambda \geq 0\}$ è semiretta con origine in $\bar{x}$ e direz. d

DEF dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\{z \in \mathbb{R}^n \mid z = (1-\lambda)x + \lambda y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ è segmento chiuso di estremi x e y e viene indicato con $[x, y]$

DEF un insieme $X \in \mathbb{R}^n$ è convesso se ∀coppia di punti $\in X$, appartiene a X anche tutto il segmento che li contiene

DEF intersezione di insiemi convessi è insieme convesso (2o+ basta che sia numero finito)

DEF sia a vettore $\in \mathbb{R}^n$, b numero reale allora l'insieme $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$, è detto IPERPIANO di equazione $a^T x = b$ e gli insiemi

$S^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\}$ sono detti SEMISPAZI CHIUSI

$S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$

DEF un semispazio chiuso è insieme convesso

DEF un iperpiano è un insieme convesso

DEF L'insieme ammissibile di un problema di PL è un insieme convesso

DEF $P \subseteq \mathbb{R}^n$ (insieme) è un POLIEDRO se è l'intersezione di 1 numero finito di semispazi chiusi e iperpiani. se limitato viene detto POLITOPO

DEF L'insieme ammiss. di un prob. di PL è un poliedro

DEF vettore $x \in$ insieme convesso C è detto VERTICE di C se ∄ 2 punti distinti $x_1, x_2 \in C$ tc $x \neq x_1$, $x \neq x_2$ e $x \in [x_1, x_2]$

DEF se un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $a_i^T \bar{x} = b_i$ per qualche $i \in \{1, \dots, m\}$ si dice che il corrispondente vincolo è ATTIVO in $\bar{x}$ e si indica con $I(\bar{x})$ l'insieme dei vincoli attivi cioè $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid a_i^T \bar{x} = b_i\}$

TEO Dato poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ e punto $\bar{x} \in P$, allora $\bar{x}$ è VERTICE di P sse ∃ n righe a_i^T della mat A con $i \in I(\bar{x})$ che sono lin. indip. (caratterizz. vertici dell'ins. ammissibile)

TEO Dato P, se la mat A ha un numero di righe lin. indip $< n \Rightarrow P$ non ha vertici
In particolare se $m<n \Rightarrow P$ non ha vertici

TEO Dato P e $\bar{x} \in P$ (punto), $\bar{x}$ è vertice di P sse è sol! di $\begin{cases} a_i^T x = b_i \\ i \in I(x) \end{cases}$

TEO P ha al più un # finito di vertici

Def P contiene retta se $\exists$ punto $\tilde{x} \in P$ e vettore non nullo $d \in \mathbb{R}^n$ tc $\tilde{x} + \lambda d \in P \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
P contiene semiretta se $\exists\ \tilde{x} \in P$ e $d \in \mathbb{R}^n$ tc $\tilde{x} + \lambda d \in P \ \forall \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$

TEO Sia P non vuoto. P possiede almeno 1 vertice sse P NON contiene rette

TEO Fondam. della Progr. Lineare:
dato $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$ supponiamo che $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ non contenga rette.
Allora 1 e 1 solo delle seguenti è vera:
① il prob PL è INAMMISSIBILE $\iff P$ è vuoto
② il prob PL è ILLIMITATO INF
③ il prob PL ammette sol ottime e almeno 1 di queste è vertice di P

Lemma dato $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$ e supponiamo P non vuoto e non contiene rette.
Supponiamo anche che il prob non sia illim. inf. Allora se $\tilde{x}$ è un punto di P ma non vertice di P è possibile trovare $\hat{x} \in P$ tc $c^T \hat{x} \leq c^T \tilde{x}$ e il # vincoli attivi lin. indip in $\hat{x}$ è $>$ che in $\tilde{x}$

Lemma dato $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$ se P è un politopo non vuoto allora il prob di PL ammette sol. ottima finita in un vertice del poliedro P

TEO dato $\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \end{cases}$. L'insieme delle soluzioni ottime di questo problema è un poliedro contenuto in P

TEO Sia $\bar{x}$ punto $\in P$. Allora $\bar{x}$ è vertice di P sse le colonne di A relative alle componenti positive di $\bar{x}$ sono lin indip

$\boxed{P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}}$ ← FORMA STANDARD DI P

TEO Sia $\bar{x} \in P$. Se $\bar{x}$ è vertice di P allora almeno $n-m$ componenti di $\bar{x}$ sono NULLE

Def Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la mat dei coeff di P in forma stand. e sia $\{a_1, \dots, a_n\}$ l'insieme delle sue colonne, una sottomat $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ di A NON SINGOLARE ($\det \neq 0$) è detta mat DI BASE di A

Def B, N, I_B insieme indici di B, I_N, x_B vettore var di base, x_N
con $I_B = \{1, 2, 3\}$ $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Def data B di A, $\bar{x}$ vettore è detto sol. di base del sistema $Ax = b$ se i suoi sottovettori $\bar{x}_B$ e $\bar{x}_N$ sono tc $\begin{cases} \bar{x}_B = B^{-1} b \\ \bar{x}_N = 0_{n-m} \end{cases}$

Def dato prob in forma standard:
$$\begin{cases} \min c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ B x_B + N x_N = b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m} \end{cases}$$
allora B di A è ammissibile se $B^{-1} b \geq 0_m$

Def Dato problema come sopra e data B ammissibile di A, $\bar{x}$ è detto sol. di base ammissibile (SBA) del prob se i sottovettori $\bar{x}_B$ e $\bar{x}_N$ sono tc $\bar{x}_B = B^{-1} b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$

TEO sia $\bar{x} \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. $\bar{x}$ è vertice di P sse $\bar{x}$ è SBA

TEO il # di SBA (cioè vertici) è finito e pari al più a $\binom{n}{m}$

TEO $\bar{x} \neq 0_n \in P$ è una SBA sse le colonne di A corrispondenti alle componenti di $\bar{x}$ positive sono lin. indip

Def SBA $\bar{x}$ è DEGENERE se il # di componenti positive di $\bar{x}$ è $<$ di m

TEO se $\bar{x}$ SBA è NON degenere allora $\exists!$ base ammiss. B tc
$\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$

TEO CRITERIO OTTIMALITA': Data B ammissibile di A del problema $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0_n \end{cases}$
se vett. dei costi rid. è NON negativo, cioè $\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m}$
allora la SBA $\bar{x}$ associata a B (cioè vettore dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è ottima per il problema.

COROLL. Data B di A ammiss. del problema $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0_n \end{cases}$, se $\gamma > 0_{n-m}$
allora SBA $\bar{x}$ associata a B è l'unica sol ottima del prob.

TEO CRITERIO ILLIMITATEZZA: Data B ammissibile di A del prob $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0_{n-m} \end{cases}$
se per qualche indice $i \in \{1, \dots, n-m\}$ si ha che:
① $\gamma_i < 0$ ② l'i-esima colonna di $B^{-1}N$ è $\leq 0_m$ (i-esima col $= \pi_i$)
$\Rightarrow$ il prob è illim inferiormente

TEO scelta di h: Data B ammissibile di A per prob $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0_{n-m} \end{cases}$, sia $\bar{x}$ la SBA associata
e γ il corrisp. vett. dei coeff. ridotti,
se l'indice $h \in \{1, \dots, n-m\}$ è tc $\gamma_h \leq 0$ ($\gamma_h < 0$) allora il punto
$x(\rho): \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho B^{-1}N e_h \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases}$ con $\rho \geq 0$ ($\rho > 0$) è tc $c^T x(\rho) \leq c^T \bar{x}$ ($<$)

TEO scelta di ρ: Data $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$ ammiss. di prob $\{$
sia γ il corrisp. vett. dei c.r. e sia h indice tc $\gamma_h < 0$ e siano
$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i = 1, \dots, m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}$$
allora $\bar{x} = x(\bar{\rho})$ è una SBA del prob e la B ammiss.
associata è $\tilde{B} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m})$

COROLL sia B ammissibile per problema come sopra, associata a vertice $\bar{x}$ non degenere, sia γ il corrisp. v.c.r, sia h indice tc $\gamma_h < 0$ e $\bar{\rho}$ e k dati da $\bar{\rho}$ = vedi sopra
Allora $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ è SBA del prob tc $c^T \tilde{x} < c^T \bar{x}$

TEO sia T (matrice di pivot) =
$$\begin{matrix}
1 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_1/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & -(\pi_h)_2/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{k-1}/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{k+1}/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{m-1}/(\pi_h)_k & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_m/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 1
\end{matrix}$$

T è invertibile ed è TC $T e_i = e_i$ $\quad i = 1, \dots, m;\ i \neq k$
$T \pi_h = e_k$

TEO data T si ha: $\tilde{B}^{-1}b = T(B^{-1}b)$
$\tilde{B}^{-1}\tilde{N} = T(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m})$

COROLL data T si ha:
$(e_k \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b) = T(\pi_h \mid \pi_1 \dots \pi_{h-1}\ e_k\ \pi_{h+1} \dots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b)$