25 sett 2019 (1° cap) Ricerca Operativa - Operational Research
Management Science
OR/MS

analisi problema — costruzione modello — analisi modello — soluzione numerica — validazione

modello → concreto
modello → astratto (matematico)
- → stocastici (con casuale intrinseca)
- → deterministici (senza variab. aleat.)
- → statici
- → dinamici

modello di programmazione matematica

variabili ← obiettivo → relazioni matematiche

(f, S) → insieme costituito da tutte le soluzioni ammissibili che tengono conto cioè delle restrizioni

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in S \end{cases}$$

→ il mio obiettivo è massimizzare la f (o minimizzare)

x = variabili di decisione (incognite del problema)

COMPONENTI DELLA SOLUZIONE
- variabili di decisione (x nell'esempio)
- funzione obiettivo (f nell'esempio)
- vincoli
- insieme ~~delle~~ ammissibile (S nell'esempio)

ES. 1: industria, 4 prodotti, 2 reparti. per 1 tonnellata (tempo in h)

	P1	P2	P3	P4	
PRODUZ	2	1.5	0.5	2.5	h
CONFEZ	0.5	0.25	0.25	1	
PROFITTO	250	230	110	350	€

massimizza profitto complessivo in 1 settimana
capacità max produzione: 100 h
capacità max confezionam. 50 h

1. definisco le variabili di decisione

x_i = prodotto del tipo i da produrre in 1 settimana
(x_1, x_2, x_3, x_4)

2. quindi alla fine avrò qualcosa del tipo

$$250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

da massimizzare

③ devo definire l'insieme dei vincoli S

monte ore produzione:

$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$ (vincolo 1)

monte ore confezionamento:

$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$ (vincolo 2)

vincoli di non negatività delle variabili:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

④ scrivo il problema come

$$\begin{cases} \max\ 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4 & \to f(x) \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100 & \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 & \to S \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{cases}$$

vincoli su S

che è il mio MODELLO

⑤ RISOLUZIONE:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ vettore

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

!NB! ricorda di considerare la natura delle variabili
(es se il bene è frazionabile 0.25x o no 1,2,3...x)

PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL) $\leftrightarrow$ PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA PLI

ES. 2: budget 1000 € da investire
3 possibili investimenti A, B, C con relativo costo e rendimento

	A	B	C
costo	750	200	800
rend.	20	5	10

quali investimenti fare x massimizzare il rendimento?

~~[illegible]~~

$x_A = \begin{cases} 1 & \text{se lo effettuo} \\ 0 & \text{se NON lo effettuo} \end{cases}$ $\quad x_B = \begin{cases} 1 & \text{se lo effettuo} \\ 0 & \text{se non lo effettuo} \end{cases}$

$x_C = \begin{cases} 1 & \text{se lo effettuo} \\ 0 & \text{se non lo effettuo} \end{cases}$

enumero i possibili casi:

(0) $x_A, x_B, x_C = 0$ non investo

(1) $x_A = 1$ $x_B, x_C = 0$ faccio investim. A

(2) $x_A = 0$ $x_B = 1$ $x_C = 0$ " B

(3) $x_A, x_B = 0$ $x_C = 1$ " C

(4) $x_A, x_B = 1$ $x_C = 0$ " A, B

(5) $x_A = 0$ $x_B, x_C = 1$ " B, C

e calcolo i possibili rendimenti:

$f(0) = 0$

$f(1) = 20$

$f(2) = 5$

$f(3) = 10$

$f(4) = 25$ → soluzione ottimale → investimento migl.

$f(5) = 15$

QUESTO <u>NON</u> E' UN APPROCCIO **MODELLISTICO**

poiche' non ho costruito un modello, la risoluzion dipende estremamente dai dati, richiede molti calcoli (soprattutto se fosse su scala più grande)
↳ cardinalità ↗

BISOGNA FORMULARE UN MODELLO

$x_A = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $x_B = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $x_C = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ (variabili)

$20x_A + 5x_B + 10x_C$ (funzione)

$750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000$ (vincolo 1)

$x_A, x_B, x_C \in \{0,1\}$ binarie (vincolo 2)

la funzione va massimizzata.

$$x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} \in \{0,1\}^3$$

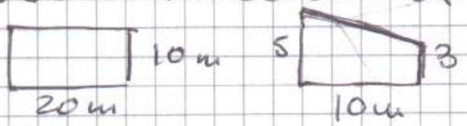
↳ insieme delle terne binarie

$$S = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} \in \{0,1\}^3 \;\middle|\; 750x_A + 200x_B + 800x_C \right\}$$

27 sett 2019

se variabile non è divisibile coefficiente must be given accordingly (no 0.5, 0.25 ...)

es. silos da ~~costruire~~ costruire con materiale plastico. deve entrare in magazzino con tetto spiovente. massimizzare volume (f)

magazzino 

200 m^2 materiale

1. scelta variabili

x_1 = raggio, x_2 = altezza

2. ~~max~~ funzione

$\max(\pi x_1^2 x_2)$
↓
obiettivo

3. vincoli

$2x_1 \leq 10$ (vincolo base)

$\underbrace{2x_1^2\pi}_{\text{basi}} + \underbrace{2\pi x_1 \cdot x_2}_{\text{laterale}} \leq 200$ (vincolo superficie)

se raggio = 0 h max = 5

se raggio $2x_1$ cresce devo decrescere del 20%

$x_2 \leq 5 - \underbrace{0.2}_{\text{dipende da inclinazione del 20\%}} \cdot 2x_1$ (vincolo h)

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

4. modello

$$\begin{cases} \max \pi x_1^2 x_2 \\ 2x_1 \leq 10 \\ 2x_1^2\pi + 2\pi x_1 x_2 \leq 200 \\ x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

modello NON lineare di programmazione (PNL)
il corso non li tratta

//

Richiami di Algebra lineare

- $\mathbb{R}^n$. $x \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $x_i \in \mathbb{R}$. $x^T = (x_1 \cdots x_n)$
- αx, $x+y$ come sempre. $x \neq 0_n$ vuol dire $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{cases} x \cdot y \text{ prodotto scalare} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ x^T y = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x \cdot y \quad (x^T y = y^T x) \end{cases}$
- $x^T y = 0 \rightarrow x$ ortogonale a y $(x \perp y)$
- indipendenza lineare

  $x_1 \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}^n, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ essi sono lin. dip se $\exists$ scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ non tutti nulli tc $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0$
- $\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

  puoi indicare gli elementi con notazione $[A]_{ij}$
- con la notazione $A = (a_1, \dots, a_n)$ si indicano le colonne $a_1, \dots, a_n$ di A, m-dimensionali

  con la notazione $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$ si indicano le righe $a_1, \dots, a_m$, n-dimens.
- αA, $A+B$ come sempre, $A \times B$ come sempre
- $Ax = y$ con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$
- $(y^T A x)^T = x^T A^T y$, $x^T A^T y = y^T A x$
- rango$(A) =$ max # di col/righe lin. indip.
- A invertibile/non singolare se è quadrata e se $\det \neq 0$ e l'inversa è unica
- Proposizione: sono equivalenti le seguenti affermazioni:
  1. A è invertibile
  2. A^T è invertibile
  3. $\forall x \in \mathbb{R}^n \neq 0$, $Ax \neq 0$
  4. $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $\exists!$ $x \in \mathbb{R}^n$ tc $y = Ax$ (soluz unica)
  5. $\exists!$ $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ tc $A^{-1}A = AA^{-1} = I \in \mathbb{R}^{n,n}$
  6. le colonne di A sono lin indip
  7. le righe di A sono lin indip

- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE (PO)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (variabili x vincolate a S)

$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S \end{cases}$ or $\begin{cases} \max f(x) \to f \text{ obiettivo} \\ x \in S \to \text{insieme ammissibile} \end{cases}$

$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max -f(x) \\ x \in S \end{cases}$

- Def. (minimizzazione)
  - (PO) è INAMMISSIBILE se $S = \emptyset$
  - (PO) è ILLIMITATO (inferiormente) se $\forall M > 0 \; \exists 1$ punto $x \in S$ tc $f(x) < -M$
  - (PO) AMMETTE SOLUZIONE OTTIMA (finita) se $\exists x^* \in S$ tc $f(x^*) \leq f(x) \; \forall x \in S$
  - x^* si dice minimo globale di f su S
  - $f(x^*)$ si dice valore ottimo
- Classificazione dei problemi di ottimizzazione
  - (PO) CONTINUA se $x \in \mathbb{R}^n$ (le var. sono reali)
  - $S \equiv \mathbb{R}^n \to$ ottimizzazione NON VINCOLATA
  - $S \subset \mathbb{R}^n \to$ ottimizzazione VINCOLATA
  - (PO) DISCRETA se $x \in \mathbb{Z}^n$ (le var hanno componenti intere)
  - $S \subseteq \{0,1\}^n \to$ ottimizzazione BINARIA / BOOLEANA
  - discreta $\wedge$ continua $\to$ mista (?)
- S descritto attraverso numero finito di disuguaglianze / uguaglianze ~~come~~ $g(x) \geq b$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ cioè $S: \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq b_1, g_2(x) = b_2 \ldots\}$

quindi modello = $\begin{cases} \min f(x) \\ g_1(x) \geq b_1 \\ g_2(x) = b_2 \end{cases}$

generalizzata = $\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \geq b_i \quad i = 1, \ldots, n \end{cases}$

quindi tutti i vincoli si possono scrivere con $\geq$

quando un modello si può scrivere in modo generale, si dice PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

$g(x) \geq b$. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. vincolo è soddisfatto se $g(\bar{x}) \geq b$. (VV si dice VIOLATO)

vincolo è attivo se è soddisfatto all'uguaglianza

vincolo si dice ridondante se la sua eliminazione non cambia S

2 OTT 2019 (1°C)

PROBLEMA di PROGRAMMAZIONE LINEARE **PL**: tutte le funzioni che compaiono nel problema sono lineari nelle variabili di decisione

PROB. di PROGRAMMAZ. NON LINEARE **PNL**: se almeno una delle funzioni del problema è non lineare

per funzioni si indicano vincoli e funzione obiettivo

PL → sono le uniche che affrontiamo
→ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare cioè:
1. $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

cioè se
$\sum c_i x_i$ (con i da 1 a n) $= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = f(x)$
→ con minimizzazione $\min \ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
e vincoli ... $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$
$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$ } modello

posso scrivere il modello in forma + breve definendo

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad A = [A]_{ij} = a_{ij}$

e quindi $\begin{cases} \min \ c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$ è l'equivalente sintetico

PL → proporzionalità diretta
→ additività
→ continuità variabili
} rendono i PL largamente utilizzabili

DIVISIONE ARTIFICIOSA

MODELLI → di allocazione ottima di risorse (limitati) (1); di miscelazione (2); di trasporto (3)

MOD. ALLOC. RISORSE

(1) obiettivo: allocare le risorse limitate in modo da ottimizzarle

- esempio: colorificio che produce 2 coloranti C_1, C_2. x produrli si usano 3 preparati di base. la percentuale dei preparati di base cambia il C finale. La composizione in ettogrammi x litro di C è:

	C_1	C_2	DISPOSIZIONE AL GIORNO (P)	PREZZO
P_1	1	1	750 Hg	7€/e
P_2	1	2	1000 Hg	10€/e
P_3	–	1	400 Hg	
PREZZO (C)	7 €/e	10 €/e		

x_i = quantità C_i al giorno $(i=1,2)$

$\begin{cases} \max \ 7x_1 + 10x_2 \\ 1x_1 + 1x_1 \leq 750, \ 1x_1 + 2x_2 \leq 1000, \ 0x_1 + 1x_2 \leq 400 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

1 variabile non lineare è, per esempio, un prezzo dipendente da quantità

• esempio: azienda auto che produce 3 modelli (economico, normale, lusso) con 3 linee di produzione A, B, C da utilizzare con varie tempistiche e disponibili per un certo numero di h al giorno. ed l'obiettivo deve valutare la produzione giornaliera ottima di auto anche non intere per massim. ~~la~~ le entrate. Inoltre le auto lusso non possono superare il 20% del tot e quelle econ. devono essere almeno il 40%. ~~[illegible]~~
il profitto per auto: E = 1000 N = 1500 L = 2200

	E	N	L	
A	20	30	62	8 h/d
B	31	42	51	8 h/d
C	16	81	10	5 h/d
	1000 €	1500 €	2200 €	

~~[illegible]~~ $x_1 = \#E$ $x_2 = \#N$ $x_3 = \#L$ al giorno

$$\begin{cases} \max (1k)x_1 + (1.5k)x_2 + (2.2k)x_3 \\ 20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480 \\ 31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480 \\ 16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 0.20(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0.40(x_1 + x_2 + x_3) \end{cases}$$

• esempio modello a risorse concorrenti

	p_1 → beni	p_n	b_m ← disponibilità di R_n
R_1 ← reparti di produzione	a_{11}	a_{1n}	b_1
R_m	a_{m1}	a_{mn}	b_m
~~[illegible]~~	c_1 → RICAVI	c_n	

risorse concorrenti $x_1, \dots, x_m$

$x_i = \#\, p_i$ da fabbricare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix} \quad [A]_{ij} = a_{ij} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}$$

• esempio modello a risorse parallele

ogni R_i produce autonomamente

x_{ij} = # P_{ij} da fabbricare nel reparto j-esimo

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \dots + c_n \sum_{i=1}^{n} x_{in} \\ a_{11} x_{11} + a_{12} x_{12} + \dots + a_{1n} x_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} x_{m1} + \dots + a_{mn} x_{mn} \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

• esempio modello multi-plant

	impianto 1			impianto 2		
	P_1	P_2		P_1	P_2 → Prodotti	
levigatura	4	2	80	5	3	60
pulitura	2	5	60	5	6	75
	10 \$	15 \$		10 \$	15 \$	

processi

tempi di lavoro in ore

disponibilità SETTIMANALI dei macchinari in ore

~~[illegible]~~

1 unità $P_{1,2}$ = 4 kg materiale grezzo

possibilità a)

~~[illegible]~~

Ho ~~100~~ 120 kg di materia prima

75 kg → Imp. 1 , 45 kg → imp. 2

come max profitto ottimale?

possibilità b)

Ho 120 kg e non li alloco

possibilità a) FORMULO IL PROBLEMA

$X_1 = I_1 P_1 \quad X_2 = I_1 P_2 \quad X_3 = I_2 P_1 \quad X_4 = I_2 P_2$

posso costruire 2 modelli diversi!

$$I_1 \begin{cases} \max 10x_1 + 15x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases} \qquad I_2 \begin{cases} \max 10x_3 + 15x_4 \\ 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ 4x_3 + 4x_4 \leq 45 \\ x_{3,4} \geq 0 \end{cases}$$

possibilità b)

$$\begin{cases} \max\ 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 60 \\ 5x_3 + 3x_4 \le 60 \\ 5x_3 + 6x_4 \le 75 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 120 \\ x_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases}$$

le possibilità a) e b) differiscono x l'allocazione dei 120 kg di materia grezza

la soluzione ottima è pari a :

393.75 \$ per possibilità a)

404.15 \$ per possibilità b)

quindi in a) il materiale allocato arbitrariamente non era nell'allocazione ottimale.

- esempio modello multiperiodo

prendo il 1° impianto dell'esempio precedente.

periodo: 2 settimane

1ª 2ª

nella 1ª settimana al + vendo 12 p_1 e 4 p_2

nella 2ª settimana al + vendo 8 p_1 e 12 p_2

nella 1ª settimana si può produrre di + e immagazzinare

costo immagazzinamento = 2\$ a prodotto

(cambia la possibilità di avere un surplus)

variabili:

$x_1 = \# p_1$ 1ª settimana

$x_2 = \# p_2$ " "

$x_3 = \# p_1$ 2ª settimana

$x_4 = \# p_2$ " "

$y_1 = \#$ surplus p_1

$y_2 = \#$ surplus p_2

funzione obiettivo e vincoli (viene 429,1 \$ vs 393.75 \$ di prima)

$$\begin{cases} \max\ 10(x_1 - y_1) + 15(x_2 - y_2) + 10(x_3 + y_1) + 15(x_4 + y_2) - \\ \quad - 2(y_1) - 2(y_2) \\ 4x_1 + 2x_2 \le 80 \ \wedge \ 2x_1 + 5x_2 \le 60 \ \wedge \ 4x_1 + 4x_2 \le 75 \\ 4x_3 + 2x_4 \le 80 \ \wedge \ 2x_3 + 5x_4 \le 60 \ \wedge \ 4x_3 + 4x_4 \le 75 \\ x_1 - y_1 \le 12 \ \wedge \ x_2 - y_2 \le 4 \ \wedge \ x_3 + y_1 \le 8 \ \wedge \ x_4 + y_2 \le 12 \\ x_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases}$$

• esercizio: fabbrica produce 2 tipi pneumatici A e B.
ha gestione trimestrale della produzione.
per i prossimi 3 mesi (ott, nov, dic) c'è le seguente ordine da soddisfare

ott: 16'000 A , 14'000 B

nov: 7000 A , 4000 B

dic: 4000 A , 6000 B

la produzione avviene su 2 linee di prod (1, 2).
la produzione avviene su 1 SOLA delle linee
la disponibilità di h disponibile è:

	L 1	L 2
ott	2000	3000
nov	400	800
dic	200	1000

e i tempi di produzione sono: (in h)

	1	2
A	0.10	0.12
B	0.12	0.18

il costo di produzione orario per entrambe le linee è 6€

il materiale grezzo necessario è

A 2.50 €/unità di materiale

B 4.00 €/unità " "

nei primi 2 mesi ci può essere surplus con costo di immagazzinamento di 0.35 €/unità

MULTI PLANT & MULTIPERIODO

variabili

$A_{L_1}^{ott}$ $A_{L_2}^{ott}$ $A_{L_1}^{nov}$ $A_{L_2}^{nov}$ $A_{L_1}^{dic}$ $A_{L_2}^{dic}$ A_{m}^{ott}, A_{m}^{nov}

$B_{L_1}^{ott}$ $B_{L_2}^{ott}$ $B_{L_1}^{nov}$ $B_{L_2}^{nov}$ $B_{L_1}^{dic}$ $B_{L_2}^{dic}$ B_{m}^{ott}, B_{m}^{nov}

funz obiett.

costi macchine

$$0.6\left(A_{L_1}^{O}+A_{L_1}^{N}+A_{L_1}^{D}\right)+0.72\left(A_{L_2}^{O}+A_{L_2}^{N}+A_{L_2}^{D}\right)+$$
$$+0.72\left(B_{L_1}^{O}+B_{L_1}^{N}+B_{L_1}^{D}\right)+1.08\left(B_{L_2}^{O}+B_{L_2}^{N}+B_{L_2}^{D}\right)$$

tempo × costo = costo totale macchine

costi materiale

$$+2.50\left(A_{L_1}^{O}+A_{L_1}^{N}+A_{L_1}^{D}+A_{L_2}^{O}+A_{L_2}^{N}+A_{L_2}^{D}\right)+$$
$$+4.00\left(B_{L_1}^{O}+B_{L_1}^{N}+B_{L_1}^{D}+B_{L_2}^{O}+B_{L_2}^{N}+B_{L_2}^{D}\right)+$$

costi materiale

costi magazz.

$$+0.35\left(A_{m}^{O}+A_{m}^{N}+B_{m}^{O}+B_{m}^{N}\right)$$

costi magazzino

vincoli $0.10\,A^O_{L_1} + 0.12\,B^O_{L_1} \le 2000$

$0.10\,A^N_{L_1} + 0.12\,B^N_{L_1} \le 400$

$0.10\,A^D_{L_1} + 0.12\,B^D_{L_1} \le 200$

maure A L_1

$0.12\,A^O_{L_2} + 0.18\,B^O_{L_2} \le 3000$

$0.12\,A^N_{L_2} + 0.18\,B^N_{L_2} \le 800$

$0.12\,A^D_{L_2} + 0.18\,B^D_{L_2} \le 1000$

maure A L_2

vincoli sugli ordini

$A^O_{L_1} + A^O_{L_2} - A^O_{im} = 16000$

$B^O_{L_1} + B^O_{L_2} - B^O_{im} = 14000$

$A^N_{L_1} + A^N_{L_2} + A^O_{im} - A^N_{im} = 7000$

$B^N_{L_1} + B^N_{L_2} + B^O_{im} - B^N_{im} = 4000$

$A^D_{L_1} + A^D_{L_2} + A^N_{im} = 4000$

$B^D_{L_1} + B^D_{L_2} + B^N_{im} = 6000$

NON NEGAT

$A^{O,N,D}_{L_1},\ A^{O,N,D}_{L_2},\ B^{O,N,D}_{L_1},\ B^{O,N,D}_{L_2},\ A^{O,N,D}_{im},\ B^{O,N,D}_{im} \ge 0$

$//$

4 ott 2019

MODELLI DI MISCELAZIONE (2)

nei modelli di allocazione ottima le risorse devono essere ripartite mentre nei modelli di miscelazione le risorse devono essere combinate tra di loro.

- esempio 1: Fabbrica di succhi di frutta

POLPA , DOLCIFICANTE (che acquista)

requisiti su VIT C , SALI MIN , ZUCCHERO

	P	D	requisiti:	
VIT C	140 mg	//	$\geq$ 70 mg	/100 g
SALI	20 mg	10 mg	$\geq$ 30 mg	/100 g
ZUCC	25 g	50 g	$\geq$ 75 g	/100 g
	4.00 €/100 g	6.00 €/100 g		

var: x_1: quantità P x_2: quantità D

$$\left.\begin{array}{ll} f: & \min 4x_1 + 6x_2 \\ vin: & 140x_1 \geq 70 \quad \to mg \\ & 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \quad \to mg \\ & 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \quad \to g \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{modello}$$

- Modello Generale

componenti/qualità degli S_n

	S_1	...	S_n	singoli elementi/risorse
C_1	a_{11} → quantità C_n in S_n		a_{1n}	b_1 → requisiti di $a_n x_n$
⋮				
C_m	a_{m1}		a_{mn}	b_n
	p_1		p_n → prezzi	

var $x_1 = S_1$ ... $x_n = S_n$

$$\begin{cases} \min/\max \ c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_n \\ x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \min \ c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

con $c =$ $x =$ $b =$ $A =$

- Esempio: materie naturali N_1, N_2, N_3
  " sintetiche S_1, S_2

  ogni settimana non posso raffinare più di 500 q delle mat nat.

  300 q delle mat sint.

  la gradazione del prodotto finale deve essere tra 2 e 7

prezzo 350 € di vendita

	N_1	N_2	N_3	S_1	S_2
costo/q	300 €	190 €	250 €	200 €	230 €
gradaz	6.0	1.9	8.5	5.0	3.5

1. non si perde volume con la raffinazione
2. la grad finale dipende lin. da grad delle singole componenti

var: $x_1 = N_1 \quad x_2 = N_2 \quad x_3 = N_3 \quad x_4 = S_1 \quad x_5 = S_2$

y = quantità totale prodotto finito

funz: $\max(350\, y - 300 x_1 - 190 x_2 - 250 x_3 - 200 x_4 - 230 x_5)$

vinc.: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$

$x_4 + x_5 \leq 300$

$2y \leq 6.0\, x_1 + 1.9\, x_2 + 8.5\, x_3 + 5.0\, x_4 + 3.5\, x_5 \leq 7y$

potrei introdurre $x_1/y, \dots, x_5/y$ (proporzione materie/prodotto finale)
$\quad \quad \quad \quad \quad \quad$ " $\quad\quad$ "
$\quad \quad \quad \quad \quad z_1, \dots, z_5$

e allora

$2 \leq 6.0 z_1 + 1.9 z_2 + 8.5 z_3 + 5.0 z_4 + 3.5 z_5 \leq 7$

è corretto. (vanno bene entrambe)

⇒ $\lim^-(\text{TOT}) \leq \alpha(\text{var ass}) + \dots + \beta(\text{v.a.}) \leq \lim^+(\text{TOT})$

$\lim^- \leq \alpha(\text{proporz. var ass}) + \dots + \beta(\text{p.v.a}) \leq \lim^+$

$y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ indispensabile

il vincolo di continuità esprime la conservatività della quantità durante il processo

- modelli input - output

S_j : input C_i = output

j, x_j, $c_j x_j$, $a_{ij} x_j$ output di tipo i

- es mod. inp. outp. (TURNI CAMERIERI)

	Lun	Mar	Merc	Gio	Ven	Sab	Dom
#cam. (almeno)	52	50	47	55	70	40	40

ogni cam ~~può~~ lavora 5d/7
ogni cam può fare max 4 d continuativi
ogni cam. ~~lavorare~~ può fare ~~almeno~~ solo 1 sab o 1 dom

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
L	L	R	L	L	L	L	L	L
M	L	L	R	L	L	R	L	L
M	L	L	L	R	L	L	R	L
G	L	L	L	L	R	L	L	R
V	R	L	L	L	L	~~R~~ L	L	L
S	L	R	L	~~L~~ R	L	R	L	R
D	R	L	R	~~R~~ L	R	L	R	L

costi: 250€/sett 270€/sett con domenica

x_i := camerieri assegnati al turno i-esimo

funz. $\min(250x_1 + 270x_2 + 250x_3 + 270x_4 + 250x_5 + 270x_6 + 250x_7 + 270x_8)$

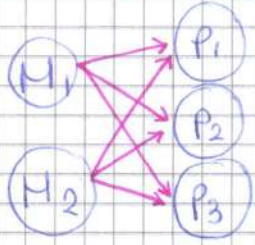
vincoli
(L) $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 52$
(M) $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 50$
(M) $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 47$
(G) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 55$
(V) $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 70$
(S) $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 40$
(D) $x_2 + x_4 + x_6 + x_8 \geq 40$

9 ott 2019 (1°C)

MODELLI DI TRASPORTO (3)

es

2 miniere



M_1 : 130 q prodotti
M_2 : 200 q prodotti] TOT 330 q

P_1 : 80 q richiesti
P_2 : 100 q richiesti
P_3 : 150 q richiesti] TOT 330 q

3 impianti

	P_1	P_2	P_3	
M_1	10	8	21	€/q
M_2	12	20	14	€/q

Il GRAFO è ORIENTATO e BIPARTITO che rende il problema STRUTTURATO cioè si sfrutta la struttura del problema per sviluppare l'algoritmo di soluzione

variabili : x_{ij} da M_i $(i=1,2)$ $\longrightarrow$ P_j $(j=1,2,3)$

funzione : $\min\ 10x_{11}+8x_{12}+21x_{13}+12x_{21}+20x_{22}+14x_{23}$

vincoli :

vincoli di origine:
$x_{11}+x_{12}+x_{13}=130$ q , $x_{21}+x_{22}+x_{23}=200$ q

vincoli di destinazione:
$x_{11}+x_{21}=80$, $x_{12}+x_{22}=100$, $x_{13}+x_{23}=150$

vincolo di non negatività:
$x_{ij}\geq 0$

• modello di trasporto generico (PT) → problema di trasporto

O_1 ... O_m ; D_1 ... D_n } ed ∃ una rotta da ogni O a ogni D.
c_{ij}, $i=1,\dots,m$ $j=1,\dots,n$ è il costo
inoltre $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (= quantità)

$\min \sum \sum c_{ij}x_{ij}$

vincoli di origine : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i=1,\dots,n$

vincoli di destinaz. : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i$, $j=1,\dots,m$

vincoli di non negat.

• vale TEOREMA : CNES affinché PT ammetta soluzione è che la somma di a_i uguagli la somma delle b_j, cioè $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

• Teorema: si consideri il problema dei trasporti PT. Allora se a_i, $i=1,\dots,m$ e b_j, $j=1,\dots,n$ sono interi e se il problema ammette soluz. ottima, allora ammette soluz. ottima intera.

• se accade $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

• se accade che non esista una rotta O-D, metto come suo coefficiente di costo $+\infty$

• se magazzini disponibili solo nelle origini: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$

se magazzini disponibili solo nelle destinazioni: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j$

• per riportare il surplus si fa $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ e si invia questo surplus ad una destinazione fittizia, a costo zero.

• esempio: (non sul testo) 3 fabbriche, 2 magazzini. nelle fabbriche si producono 2 tipi di materiale che viene poi trasportato nei magazzini

	F1 C	F1 T	F2 C	F2 T	F3 C	F3 T	
	C	T	C	T	C	T	→ (costi / tempi)
T1	8	0.8	7	0.7	6	0.6	→ € e frazione di h
T2	10	1.0	8	0.8	7.5	0.7	
	1200		800		1000		→ h totali disponibili

	M1	M2
T1	1000	2000
T2	1500	1200

	F1	F2	F3
M1	1	2.5	3
M2	1.5	2	3

↳ costi di trasporto

variabili: x_{ij} quant. prodotto T_1 da prod in F_i e da trasportare a M_j

y_{ij} quant prodotto T_2 da prod. in F_i e da trasportare a M_j

f: ~~[illegible]~~ min (costi produz + costi trasporto)

vincoli: $h F_1 \leq 1200$ $\quad h F_2 \leq 800$ $\quad h F_3 \leq 1000$

T_1 in $M_1 \geq 1000$ $\quad T_1$ in $M_2 \geq 2000$

T_2 in $M_1 \geq 1500$ $\quad T_2$ in $M_2 \geq 1200$

non negatività

• $\mathbb{R}^2$ $a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$ → forma dei PL

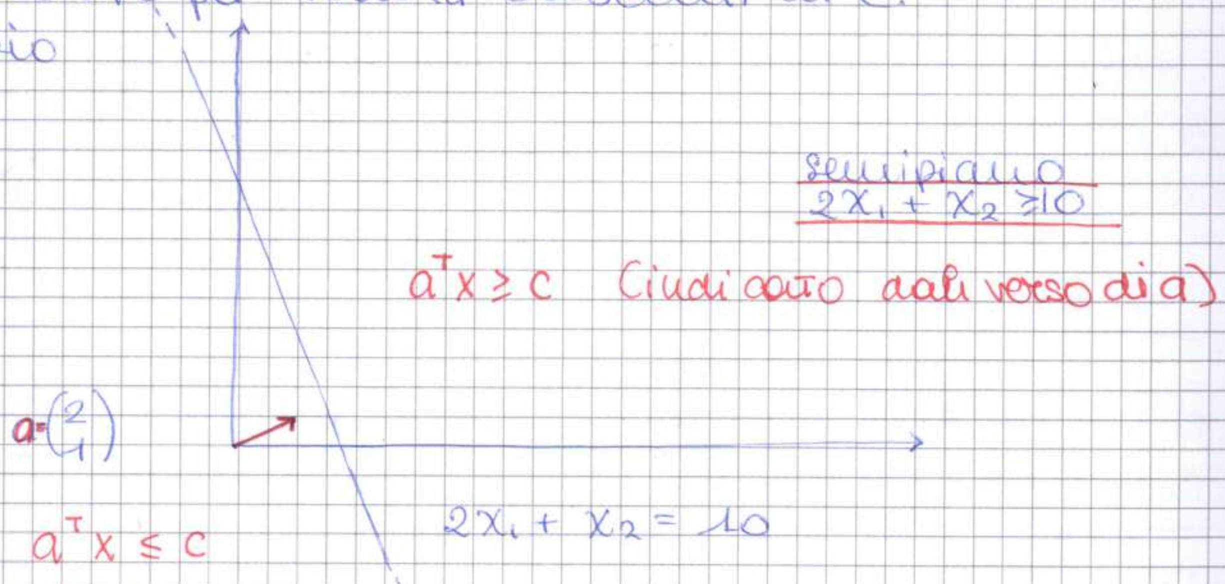
$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ → $a^T x = c$ → rappresenta retta

nei PL posso anche avere $a x^T \le c$, $a x^T \ge c$

→ rappresentano dei semipiani chiusi

• proposizione: $a^T x = c$ famiglia di rette // al variare di c, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fissati. Voglio sapere come è messo $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Esso sarà ⊥ a tutte le rette //.
Data 1 famiglia di rette //, il vettore a risulta essere ⊥ alle rette ed è orientato ~~da~~ verso il semipiano generato da $a^T x = c$ ottenuto per valori crescenti di c.

• esempio

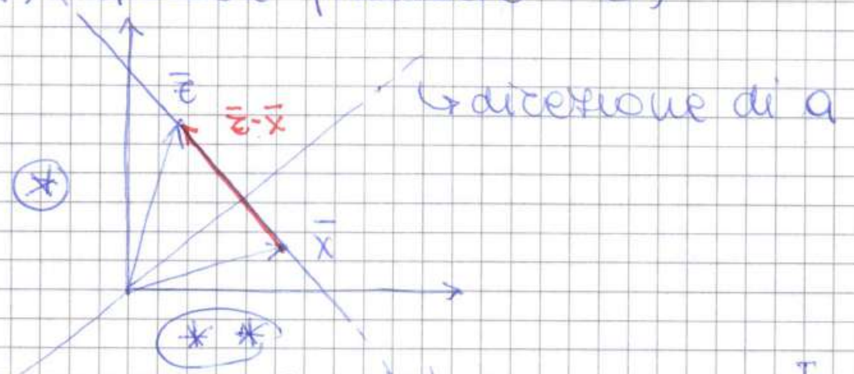


• dimostrazione

$a^T x = c$, $\bar{z}, \bar{x} \in$ retta, quindi $a^T \bar{z} = c$, $a^T \bar{x} = c$

⇒ $a^T(\bar{z} - \bar{x}) = 0$ (ho sottratto membro a membro)

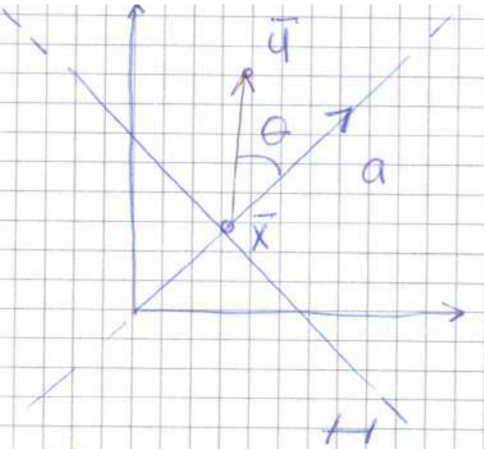
= $a^T \perp (\bar{z} - \bar{x})$ (poiché prodotto = 0)



suppongo che in (*) semipiano valga $a^T y \ge c$
e in (* *) semipiano valga $a^T y \le c$
allora $a^T \bar{y} \ge c$, $a^T \bar{x} = c$ ⇒ $a^T(\bar{y} - \bar{x}) \ge 0$
e prod scalare è ≥ 0 sse l'angolo tra a e $(\overrightarrow{\bar{y} - \bar{x}})$ è acuto ($\theta < 90°$)

→

quindi



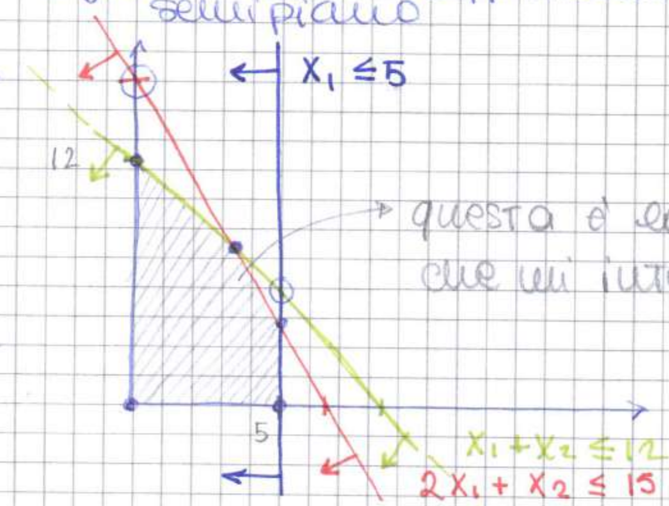
$a^T u \geq c$
θ deve essere acuto per condiz pagina precedente (a non sarebbe potuto essere orientato dall'altra parte)

• esempio
PL su piano (non c'è sul testo)

$$\begin{cases} \max\ 15x_1 + 10x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ → mi limitano al 1° quadrante

ogni vincolo rappresenta un semipiano



questa è la regione che mi interessa

la regione evidenziata è la regione AMMISSIBILE per il problema. I punti in essa contenuti sono i punti AMMISSIBILI del problema.

Per ottenere i vertici del poliedro che ci interessa vanno intersecate le rette dei vincoli

I vincoli attivi devono essere tanti quanti il numero della dimensione in cui si sta lavorando

$n = 2$ dimensione dell'es
$m = 5$ vincoli dell'es

$\Rightarrow \binom{5}{2}$ modi di prendere quei 5 vincoli 2 a 2 $= 10$

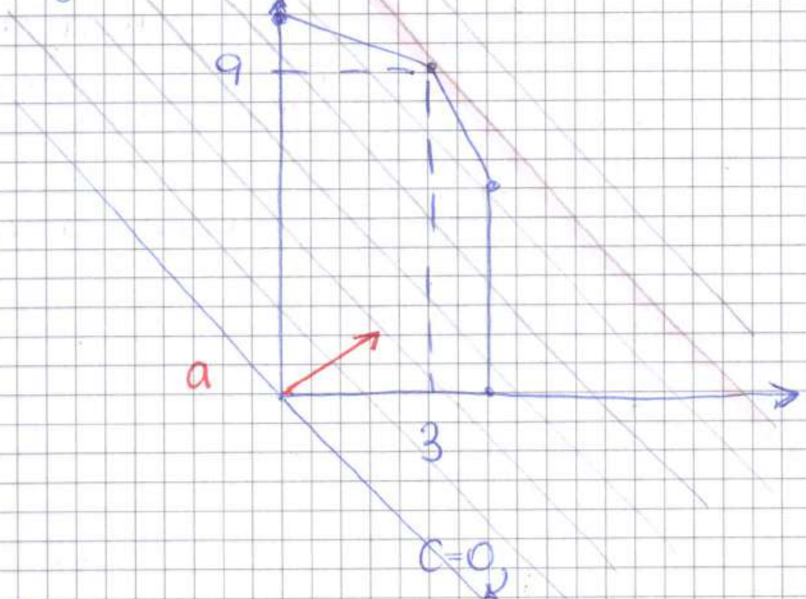
⇒ 10 sono tutte le possibili intersezioni delle rette formate dai vincoli

⇒ # intersezioni è finito

⇒ # max dei vertici del nostro poliedro = # intersezioni (es. dell'es = 10)

→

la f obiettivo è $15x_1 + 10x_2 = c$ da massimizzare
voglio trovare $x_1, x_2 \in$ insieme AMMISSIBILE
tali che max(f). Geometricamente, fissati
15 e 10 e facendo variare c ottengo 1
famiglia di rette //.



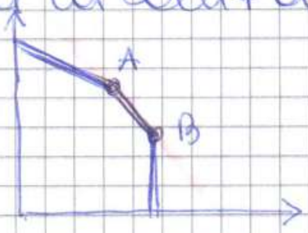
$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sarà chiamato DIREZIONE DI CRESCITA
(indica la direzione di crescita di c)
L'ultima retta che possiamo disegnare, coerentemente con l'area AMMISSIBILE, è quella in arancione.
(poiché è l'ultima che ancora tocca l'area ammiss.)
Quella retta indica l'ottimo del mio problema.

le rette // sono dette curve di crescita.
la retta con c=0 è il minimo (es il minimo delle vendite è NON VENDERE NIENTE)

$x_1^* = 3 \quad x_2^* = 9 \rightarrow$ soluzioni ottime

$\Rightarrow \quad f^* = 139$

È plausibile che il punto di ottimo sia su un vertice (vedremo che è giusto).
!NB! se la retta che indicava la soluz ottima coincideva con 1 segmento, es

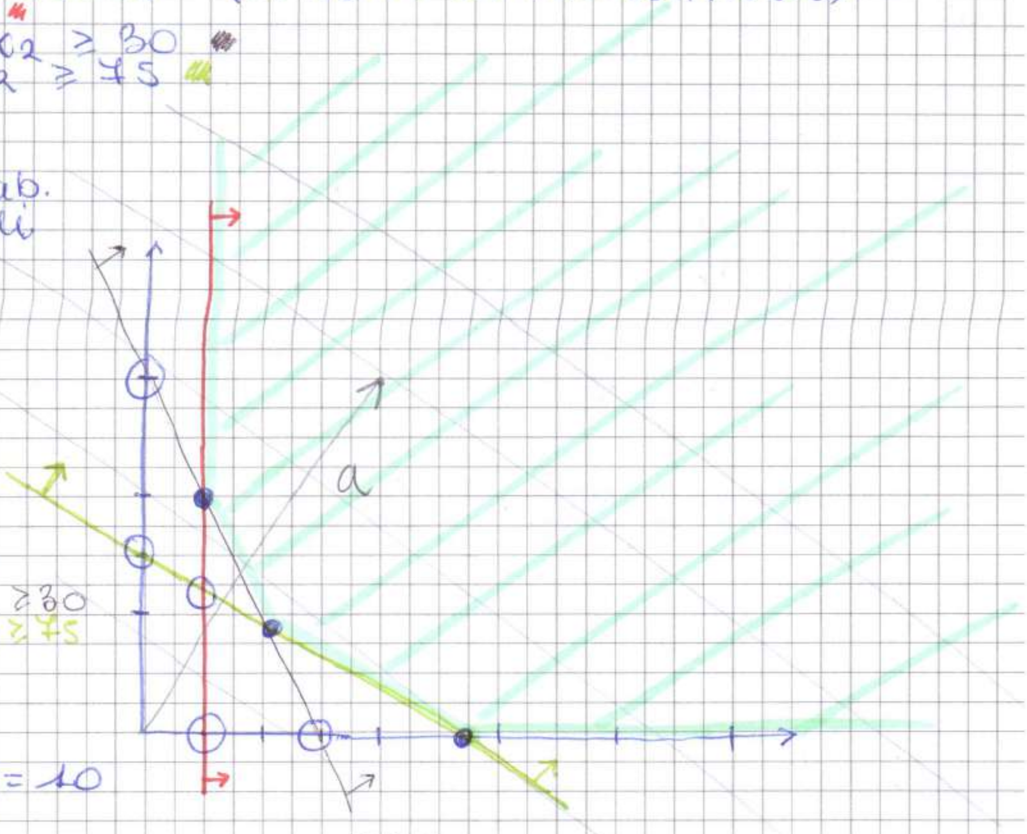


vuol dire che le soluzioni ottime sono tutte quelle su $\overline{AB}$

11 ott 2019 (PC)

es. $\begin{cases} \min\ 400x_1 + 600x_2 \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ (es su PL di miscelazione)

$n = 2$ #variab.
$m = 5$ #vincoli



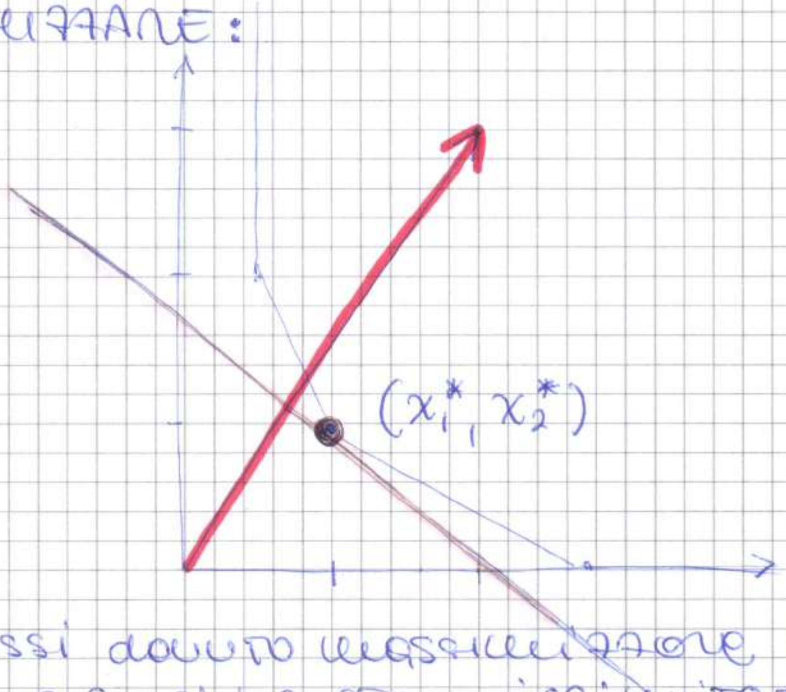
vincolo $140x_1 \geq 70$
vincolo $20x_1 + 10x_2 \geq 30$
vincolo $25x_1 + 50x_2 \geq 75$

è uno spazio illimitato

max intersez $\binom{5}{2} = 10$

$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{400}{600} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

DEVO MINIMIZZARE:

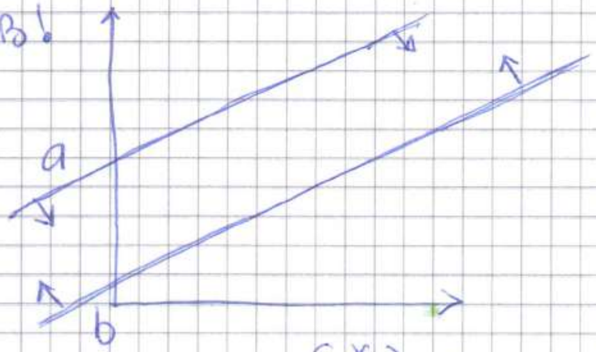


$x_1^* = 1$
$x_2^* = 1$

NB! se avessi dovuto massimizzare il problema sarebbe stato illimitato (sup) deduciamo che un problema di PL:

1. può ammettere soluzione ottima che può essere unica o può essere composta da ∞ soluz
2. se non ammette soluzione ottima è perché l'insieme ammissibile è $\emptyset$ (~~[illegible]~~ PROBLEMA INAMMISSIBILE) o perché l'insieme ammiss. è illimitato e allora il PROBLEMA è ILLIMITATO (SUP / INF)

!NB!



insieme ammissibile è detto STRISCIA DI PIANO

$a // b$

se $a\binom{x}{y} \perp a, b$ allora a, b sono max e min

se $a\binom{x}{y}$ non è $\perp$ ad a, b la soluz è illimitata

!NB! il poliedro ammette vertici solo se non possono contenere rette / semirette

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$

→ retta

→ semiretta

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + \lambda d, \lambda \geq 0\}$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda y + (1-\lambda) z, 0 \leq \lambda \leq 1, y, z \in \mathbb{R}^n\}$

→ segmento con estremi y, z, $[y, z]$

DEF. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall x, y \in X$, $[x, y]$ è interamente contenuto in X.

~~[illegible]~~

$\forall x, y \in X \Rightarrow [x, y] \subseteq X$

$\forall x, y \in X \Rightarrow z = \lambda x + (1-\lambda) y \subseteq X$

TEO: L'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso

· **COROLLARIO**: l'intersezione di un numero finito di insiemi convessi è un insieme convesso

· **DEF**: sia dato vettore $a \in \mathbb{R}^n$, l'insieme $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ con $b \in \mathbb{R}$ assegnato.

(vettore in R^2 = retta, in $\mathbb{R}^3$ = piano, in $\mathbb{R}^n$ = iperpiano)

$S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$

$S^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}$ → SEMISPAZI CHIUSI

$$H \subseteq S^{\leq} \qquad H \subseteq S^{\geq}$$

$$H = S^{\leq} \cap S^{\geq}$$

· **TEO**: un semispazio chiuso è un insieme convesso

DIM: $S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$

$x, y \in S^{\leq}$, $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, $0 \leq \alpha \leq 1$

deve valere $a^T z \leq b \; \forall z$

[$a^T z = a^T(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha a^T x + (1-\alpha) a^T y$

$x, y \in S$ quindi le 2 quantità sono entrambe $\leq b$: $a^T x \leq b$ e $a^T y \leq b$

$\Rightarrow \leq \alpha b + (1-\alpha) b = b$] → $a^T z = b$

$\Rightarrow S^{\leq}$ è un semispazio convesso

· **COROLLARIO**: un iperpiano è un insieme convesso

DIM: $H = S^{\leq} \cap S^{\geq}$ e $S^{\geq}, S^{\leq}$ sono semispazi convessi

· **TEOREMA**: l'insieme ammissibile di un problema di PL è un insieme convesso

(in quanto l'insieme è formato tramite le eq/diseq lineari, cioè un intersezione di 1 numero finito di semispazi ~~chiusi~~ iperpiani (che sono convessi) che intersecati danno 1 insieme convesso.

· **DEF**: un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>POLIEDRO</u> se è l'intersezione di 1 numero finito di semispazi chiusi e iperpiani.

(l'insieme ammissibile è detto quindi poliedro) →

• DEF: UN POLIEDRO LIMITATO SI DICE POLITOPO.

(es. il 1° insieme ammissibile di PL che abbiamo disegnato era un POLITOPO)

• Dal punto di vista algebrico 1 insieme P è un poliedro se $\exists$ 1 matrice $A = m \times n$ tc P possa essere scritto come $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$

(def di poliedro geometricamente)

!NB! $\emptyset$ può essere poliedro per PL incompatibile

$\mathbb{R}^n$ è un poliedro per sistema $0x_1 + \dots + 0x_n = 0$

• DEF: DATO 1 insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$

un punto $\bar{x} \in C$ si dice vertice di C se $\nexists$ due punti $\in C$ ~~[illegible]~~, y, z che siano $\neq$ tra di loro $y \neq \bar{x}$, $z \neq \bar{x}$, $y \neq z$ e tc $\bar{x} = \lambda y + (1-\lambda) z$, $0 < \lambda < 1$

16 OTT 2019 (1°C)

- $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$ → PROBLEMA IN FORMA GENERALE

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{Ax \geq b}\}$ → POLIEDRO

a_i^T righe di A, $i=1,\dots,m$

$a_i^T x \geq b_i$, $i=1,\dots,m$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ → $a_i^T \bar{x} \geq b_i$ $\forall i=1,\dots,m$ ⇒ allora $\bar{x} \in P$

$A\bar{x} \geq b$ (è la stessa cosa)

→ $a_j^T \bar{x} = b_j$ per tale j

$I(\bar{x}) = \{i \in \{1,\dots,m\} \mid a_i^T \bar{x} = b_i\}$ insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$

- TEOREMA (caratterizzazione algebrica dei vertici di un poliedro in "forma generale"):
sia dato il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ e $\bar{x} \in P$. Il punto $\bar{x}$ è vertice di P SE e SOLO SE $\exists$ n righe della matrice A corrispondenti a vincoli attivi, a_i^T, $i \in I(\bar{x})$, che sono linearmente indipendenti. Equivalentemente: il rango di $\{a_i^T, i \in I(\bar{x})\}$ (cioè della matrice composta dalle righe di A che sono vincoli attivi) è pari a n

quelli con l' = non la diseq.

$$rg\underbrace{\{a_i^T, i \in I(\bar{x})\}}_{\text{NORMALI AI VINCOLI ATTIVI}} = n$$

DIMOSTRAZIONE: $\bar{x}$ è vertice ⇒ $\exists$ n vincoli attivi in $\bar{x}$ linearmente indip.

P.A. sia $k<n$ il # di vincoli attivi lin. ind. in $\bar{x}$. $\exists\, d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ tc $a_i^T d = 0$, $i \in I(\bar{x})$

$i \notin I(\bar{x})$ $a_i^T \bar{x} > b_i$ ⇒ $\varepsilon > 0$

y, z soddisfano le 2 condizioni

$\begin{cases} y = \bar{x} + \varepsilon d \\ z = \bar{x} - \varepsilon d \end{cases}$ tc $\begin{cases} a_i^T y \geq b_i \\ a_i^T z \geq b_i \end{cases}$ $i \notin I(\bar{x})$

$i \in I(\bar{x})$ $a_i^T y = a_i^T(\bar{x} + \varepsilon d) = a_i^T \bar{x} + \varepsilon a_i^T d = a_i^T \bar{x}$

$a_i^T z = a_i^T(\bar{x} - \varepsilon d) = a_i^T \bar{x} - \varepsilon a_i^T d = a_i^T \bar{x} = b_i$

⇒ $y, z \in P$

$\frac{y+z}{2} = \frac{\cancel{\alpha}x + \cancel{\varepsilon d}}{2} + \frac{\cancel{\alpha}x - \cancel{\varepsilon d}}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \Rightarrow$ ASSURDO

poiché un vertice non può essere punto medio di un segmento (l'assurdo sta nell'aver preso $k<n$)

<u>poi</u> n vincoli attivi lin indip in $\bar{x} \Rightarrow \bar{x}$ è vertice

P.A. assumiamo $\bar{x}$ non sia vertice di P
quindi $\bar{x}$ non è l'unico punto di P
allora P ne deve contenere almeno 2
e, in quanto poliedr. convesso, deve contenere tutti quelli tra i 2 punti,
e quindi è formato da ∞ punti.
siano $y, z \in P$, $y \neq z$, $y \neq \bar{x}$, $z \neq \bar{x}$ tc
$\bar{x} = \lambda y + (1-\lambda) z$, $\lambda \in (0,1)$

cioè $\bar{x} \in \overline{yz}$

aperto altrimenti $\bar{x}$ potrebbe coincidere con 1 dei due punti y, z

$a_i^T y \geq b_i$, $a_i^T z \geq b_i$, $i = 1, \dots, m$
se anche 1 sola di queste disuguagl. fosse verificata col magg. stretto $>$, accadrebbe

$\boxed{a_i^T \bar{x}} = a_i^T(\lambda y + (1-\lambda) z) = \lambda a_i^T y + (1-\lambda) a_i^T z >$
$> \lambda b_i + (1-\lambda) b_i = \boxed{b_i}$

$\Rightarrow a_i^T \bar{x} > b_i \rightarrow$ ASSURDO

altrimenti contraddirei $i \in I(\bar{x})$

quindi $a_i^T y = b_i$ $a_i^T z = b_i$, $i \in I(\bar{x})$
deve essere così
quindi consideriamo $a_i^T x = b_i$, $i \in I(\bar{x})$

A avrà rg pieno
la soluz sarà
UNICA

invece io ho trovato 2 punti distinti che sono soluz di questo problema e questo è assurdo corollari:

① dato 1 poliedro $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\geq b\}$ se la matrice A non possiede ~~…~~ n righe lin. ~~…~~ indip $\Rightarrow$ P non possiede vertici

se il numero delle righe $m<n \Rightarrow$ non ammette vertici

② dato $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\geq b\}$ e $\bar{x}\in P$, $\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se è l'unica soluzione del sistema lineare $a_i^T x = b_i$, $i\in I(\bar{x})$

③ dato $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\geq b\}$, allora P ha un numero finito di vertici. $\binom{m}{n}$

18 ott 2019 (1°C)

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZ. LINEARE

dato $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax\geq b \end{cases}$ e supponiamo che $P\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\geq b\}$ non contenga rette. Allora 1 e 1 sola delle seguenti affermazioni è vera:

1) il problema è inammissibile $(P=\emptyset)$
2) il problema è illimitato
3) il problema ammette soluzione ottima e almeno 1 di queste è su un vertice di P

lemma (risultato preliminare):

dato $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax\geq B \end{cases}$ e supponiamo $P\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\geq b\}$ sia non vuoto e non contenga rette. Inoltre supponiamo che il problema non sia illimitato inferiormente (poiché cerco min)

D~~…~~ $\tilde{x}\in P$ che non è vertice allora è possibile determinare $\hat{x}\in P$ tc il numero dei vincoli attivi in $\hat{x}$ è maggiore che in $\tilde{x}$ ed inoltre $c^T\hat{x}\leq c^T\tilde{x}$

Dimostraz sul libro (pag 95)

PROP: se P è politopo non vuoto, allora il problema ammette soluz ottima su un vertice di P.

OSS $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ l \leq x \leq u \end{cases}$ $\quad l, u \in \mathbb{R}^n$

se questo P è non vuoto, ammette sol ottima

$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \end{cases}$, P poliedro in $\mathbb{R}^n$

se x^* soluzione ottima, $c^T x^* = z^*$ valore ottimo

(vale anche per $\hat{x}^*$ altra sol ottima o per $x \in P$) altro poliedro = poliedro $\cap$ iperpiano

allora l'insieme delle sol. ottime è $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = z^*\}$

che è a sua volta un poliedro (contenuto in P) di equazione $\{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = z^*$

TEOREMA Dato problema di PL

$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \end{cases}$

l'insieme delle sol ottime di questo problema è un poliedro contenuto in P

!NB! un PL non può ammettere n soluzioni <u>distinte</u>, ma solo un insieme specificato come sopra

23 Ott 2019 (1°C)

Introduzione al Metodo del Simplesso

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1,\ i=1,\dots,n\}$

$n=1 \rightarrow$ # vertici $= 2$

$n=2 \rightarrow 2^2$

$n=3 \rightarrow 2^3$ il # vertici è comunque finito

$\dots \qquad \dots$

Algoritmo concettuale (P non vuoto e non limitato inf.)

Passo 1: Individuare tutti i vertici di P : $\{v_1, \dots, v_p\}$

Passo 2: calcolare il valore della funzione obiettivo su tutti i vertici : $c^T v_1, \dots, c^T v_p$

Passo 3: Individuare il vertice $v^* \in P$ tc

$c^T v^* \leq c^T v_i,\ i=1,\dots,p$ ≤ poiché è un problema di min

$\Rightarrow$ v^* è soluzione ottima del problema

(è troppo lungo da calcolare quindi sviluppo)

Passo 1: Determinare un vertice di P (v)

Passo 2: Decidere se v è soluzione ottima

Passo 3: Se v non è soluzione ottima, determinare "in modo intelligente" un nuovo vertice di P e tornare al passo 2

FORMA GENERALE	FORMA STANDARD
$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$	$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

OGNI PROBLEMA DI PL È SCRIVIBILE IN ENTRAMBE LE FORME, ED È POSSIBILE PASSARE DA UNA ALL'ALTRA.

La forma necessaria per utilizzare il metodo del simplesso è la forma standard.

Per cambiare (da Generale a standard)

$Ax \geq b$ $\longrightarrow$ $Ax - \mu = b$ variabili di surplus

$u \in \mathbb{R}^m,\ u \geq 0$

$Ax \leq b$ $\longrightarrow$ $Ax + u = b$ variabili di slack

$u \in \mathbb{R}^m,\ u \geq 0$

$x_i \longrightarrow x_i = x_i^+ - x_i^-$

$x_i^+ \geq 0,\ x_i^- \geq 0$

per cambiare (da standard a generale)

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{A}\bar{x} \geq \bar{b}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

per ottenere

es.

$$\begin{cases} \min 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 11x_4 \leq 5 & \rightarrow \text{vincolo} \leq \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 3 & \rightarrow \text{vincolo} \geq \\ x_1 \geq 0 \\ & \rightarrow \text{manca 1 definizione di} \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} \min 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 11x_4 + x_5 = 5 & \text{aggiungo var. slack} \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 9x_3 + 11x_4 - x_6 = 3 & \text{agg. var. surplus} \\ x_1 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \\ x_6 \geq 0 \\ x_2 = x_2^+ - x_2^- & \rightarrow \text{aggiungo questa definizione} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} \min\ 3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- - 3x_3 + 11x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- + 7x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - x_2^+ + x_2^- + 9x_3 + 11x_4 - x_6 = 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2^+ \geq 0 \\ x_2^- \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \\ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

HO SOSTITUITO $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ IN TUTTO IL PL

$\Rightarrow$ il problema è ora in forma standard

//

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ipotesi di lavoro:

① $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ è non vuoto $P \neq \emptyset$

② $rg(A) = m$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ $\to$ sempre, forma standard

la 1ª ci dice che il PL non sarà inammissibile

la 2ª ci dice che $\exists$ sottomatr. di ordine m di A tale che il suo determinante è $\neq 0$

P ammetterà quindi almeno 1 vertice (sempre)

//

TEOREMA CARATTERIZZAZIONE ALGEBRICA VERTICI POLIEDRO

sia $\bar{x} \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$. $\bar{x}$ è vertice di P se e solo se le colonne della matrice A, corrispondenti alle componenti positive di $\bar{x}$, sono linearmente indipendenti

(es. 2ª componente di $\bar{x}$ positiva $\Leftrightarrow$ 2ª colonna di A)

corollario

Dato P, se $\bar{x} \in P$ è vertice di P, allora il # delle sue componenti positive deve essere minore o uguale a m (con $b \in \mathbb{R}^m$)

es: $P \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 4x_6 = 6 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 7 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

$\bar{x} = (2, 1, 1, 1, 0, 0)^T$ è vertice di P ?

$\bar{x} \in P$ ma non ne è vertice

poiché il # di componenti positive di $\bar{x}$ è 4

che è > 3, (che è dato dal fatto che $\mathbb{R}^3 \ni b = (6\ 5\ 7)^T$)

es: $P \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

$\bar{x}: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in P \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ i vett sono lin indip

$\Rightarrow \bar{x}$ è vertice di P

//

DATO $P: \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ e date per buone
① $P \neq \emptyset$ e ② $rg(A) = m$
② $\Rightarrow \exists$ una sottomatrice quadrata di A non singolare

$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \exists B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Def: una sottomatrice di A, quadrata di ordine m non singolare, si chiama MATRICE di BASE di A: $\longrightarrow \det \neq 0$

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$
$$B = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})$$

vuol dire che è la 1ª colonna di B ma non necessariamente la 1ª colonna di A

le colonne escluse si dicono COLONNE FUORI BASE:

$$N = (a_{jm+1}, \dots, a_{jn})$$

Quindi: B = MATRICE DI BASE
N = MATRICE DI COLONNE FUORI BASE

e si indica con I_B l'insieme degli indici delle colonne di Base e con I_N quello degli indici delle colonne fuori base:

$$I_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$$
$$I_N = \{j_{m+1}, \dots, j_n\}$$
$$(\# I_N = m - n)$$

le componenti x_i, $i \in I_B$ sono dette VARIABILI DI BASE; quelle x_i, $i \in I_N$ sono dette VARIABILI FUORI BASE:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_B = \begin{pmatrix} x_{j1} \\ \dots \\ x_{jm} \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{jm+1} \\ \dots \\ x_{jn} \end{pmatrix}$$

es. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\rightarrow m = 3$

• considero 6^a, 1^a e 4^a colonna di A

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrice quadrata di ordine $\underline{3}$

è base di A?

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow$ è non singolare $\Rightarrow$ è BASE

$I_B = \{6, 1, 4\}$ $\quad I_N = \{2, 3, 5\}$ $\quad x_B = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $\quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$

$\quad\ \ j_1 \quad j_2 \quad j_3$

• considero ora 2^a, 5^a, 4^a colonna di A

$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = B$ di ordine 3

$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ det $= 0 \Rightarrow$ è singolare $\Rightarrow$ NON è BASE

$$\boxed{\begin{aligned} Ax &= b \\ Bx_B + Nx_N &= b \end{aligned}}$$

le 2 scritture sono equivalenti

quindi siamo $\quad c^T x \qquad c_B^T x_B + c_N^T x_N$

$$c_B = \begin{pmatrix} c_{j_1} \\ \vdots \\ c_{j_m} \end{pmatrix} \qquad c_N = \begin{pmatrix} c_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ c_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \min c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ Bx_B + Nx_N = b \\ x_B \geq 0, \ x_N \geq 0 \end{cases}$$

25 OTT 2019 (1°C)

matrice di base – abbreviato con → BASE

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ B x_B + N x_N = b \\ x_B \geq 0,\ x_N \geq 0 \end{cases}$$

: sistema lineare di equazioni con $m<n$ cioè righe < colonne cioè equazioni < incognite

$B x_B + N x_N = b \rightarrow x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$

$\Rightarrow x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$

variabili di base in funzione di variabili fuori base

tra le ∞^{m-n} soluzioni, scelgo quella con tutti i parametri $= 0$

$x_N = 0 \Rightarrow x_B = B^{-1} b$ $\qquad x \begin{cases} x_B \\ x_N \rightarrow \text{scelgo } x_N = 0 \end{cases}$

Def. Dato il problema di PL in forma standard

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = B \\ x \geq 0 \end{cases}$$

una matrice di base B di A si dice MATRICE DI BASE AMMISSIBILE se risulta $B^{-1} b \geq 0$ (con 0 inteso come vettore di m componenti)

Def. Dato il problema di PL in forma standard e data la matrice di base (ammissibile), il vettore $\bar{x}$ si dice SOLUZIONE DI BASE se risulta: $\bar{x}_B = B^{-1} b$

$\bar{x}_N = 0$

se la base B è una base ammissibile allora

$\bar{x}_B = B^{-1} b \geq 0$

$\bar{x}_N = 0$

si chiama SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE (SBA)

NB! nella regola del simplesso NON si calcola MAI la matrice inversa onde evitare errori, altrimenti il metodo non avrebbe senso.

esempio: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(B) = -3 \neq 0$

$B^{-1}b$ con $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. $B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

allora $B^{-1}b = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$I_B = \{6, 1, 4\}$ $I_N = \{2, 3, 5\}$

$\underbrace{X_B = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_1 \\ X_4 \end{pmatrix}}$ $X_N = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_5 \end{pmatrix}$

$= B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e questo elem. è a <u>termini positivi</u>

allora la B è una base ammissibile

e con $X_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ottengo una SBA

definita come $\bar{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} = X_1 \in X_B \\ = X_2 \in X_N \\ = X_3 \in X_N \\ = X_4 \in X_B \\ = X_5 \in X_N \\ = X_6 \in X_B \end{matrix}$

QUESTI CALCOLI NON SI FARANNO MAI :)

TEOREMA: sia dato un punto $\bar{x} \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$

allora $\bar{x}$ è VERTICE DI P se e solo se

esso è una SBA

SBA → definizione algebrica

VERTICE → definizione geometrica

c'è 1 corrispondenza biunivoca tra vertici e SBA

una cioè tra base e SBA.

TEOREMA: il numero delle SBA (cioè vertici)

è FINITO ed è pari, al più,

ad $\binom{n}{m}$ cioè max numero di

combinate colonne

upper bound → forma generale $\binom{m}{n}$

→ forma standard $\binom{n}{m}$

esempio: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_4 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

determina tutti i vertici di questo P in forma standard.

$n = 4 \quad m = 2 \quad$ max # di sistemi 2×2 è $\binom{n}{m}$

$\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = 6 \Rightarrow 6$ sistemi da risolvere

prendo 1ª, 2ª colonna $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\det B = 6 \to B$ base di A

$I_B = \{1,2\} \quad I_N = \{3,4\}$

$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$

$\underset{B^{-1}b}{\shortparallel} \qquad x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è SBA

prendo 1ª e 3ª colonna $B\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det B = 0$

$\to$ NON è BASE DI A

prendo 1ª, 4ª colonna $\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = B$, $\det B = \frac{6}{2} = 3 \neq 0$

$\to$ è base di A

$I_B = \{1,4\} \quad I_N = \{2,3\} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5/2\, x_4 = 4 \\ -x_1 + 1/2\, x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \\ x_4 = \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ma -1 non è ≥ 0 quindi questo punto $\bar{x}$ è soluzione di base ma non SBA:

$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ NON è SBA

prendo 2ª, 3ª colonna $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = 12 \neq 0 \to$ BASE

$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \not\geq 0$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ NON è SBA prendo $2^a, 4^a$ colonna $B=\begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 4 & 1/2 \end{pmatrix}$ det $= 9 \neq 0$

$\Rightarrow$ base di A

$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_2 + 5/2\, x_4 = 4 \\ 4x_2 + 1/2\, x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \geq 0$$

quindi $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ è SBA

prendo $3^a, 4^a$ colonna $B=\begin{pmatrix} -2 & 5/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$ det $= -6 \neq 0$

$\Rightarrow$ base di A

$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -2x_3 + 5/2\, x_4 = 4 \\ 2x_3 + 1/2\, x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

quindi $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è SBA

$\Rightarrow$ abbiamo determinato tutti i vertici del P dato in forma standard

30 Ott 2019

Esaminiamo le SBA dell'esercizio precedente.

$\bar{x} = (2, 1, 0, 0)^T$

$\bar{x} = (0, -1/3, 0, 4/3)^T$

$\bar{x} = (0, 0, -1/2, 2)^T$

→ le colonne a cui si riferisce la SBA sono quelle di indice uguale all'indice delle componenti non $=0$ della SBA stessa

es. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

1ª, 2ª col: $B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det B = 1$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$x_1 = -1, \ x_2 = 1$

$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{x}_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è SBA

1ª, 3ª col: $B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det B = 1$ $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

$x_1 = 0, \ x_3 = 1$

$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una SBA

1ª, 4ª col: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det B = 0 \Rightarrow$ non è una base

2ª, 3ª col: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det B = 1$ $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$x_2 = 0, \ x_3 = 1$

$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una SBA

2ª, 4ª col: $B\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$x_2 = 1 \quad x_4 = 1$

$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\bar{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una SBA

$3^a, 4^a$ col. $B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ det $B = 1$ $\begin{cases} x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$

$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una SBA

$\bar{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Esamino le SBA

$\bar{x} = (0, 0, 1, 0)^T$

$\bar{x} = (0, 0, 1, 0)^T$

$\bar{x} = (0, 1, 0, 1)^T \rightarrow I_B = \{2, 4\}$

$\bar{x} = (0, 0, 1, 0)^T$

per queste SBA non posso determinare le colonne a cui si riferiscono (tolta la colonna 3)

$I_B = \{1, 3\}$

$I_B = \{2, 3\}$ $\Rightarrow$ queste 3 basi portano alla stessa SBA

$I_B = \{2, 4\}$

$I_B = \{3, 4\}$

È possibile che alla stessa SBA siano associate basi diverse (la corrispondenza biunivoca base - SBA non esiste)

Def. una soluzione di base ammissibile si dice DEGENERE se il numero delle sue componenti positive è minore di m → # equaz. di P

Teorema: se SBA è NON DEGENERE, allora $\exists!$ base ammissibile B tc (con SBA $= \bar{x}$):

$\bar{x}_B = B^{-1} b \geq 0$

$\bar{x}_N = 0$

se vale la non degeneratezza la corrispondenza basi $\Leftrightarrow$ SBA diventa biunivoca

esercizio $P: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + \tau x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Determinare i vertici (SBA) al variare di $\tau \in \mathbb{R}$

Metodo del simplesso → si applica a prob di PL in forma STANDARD

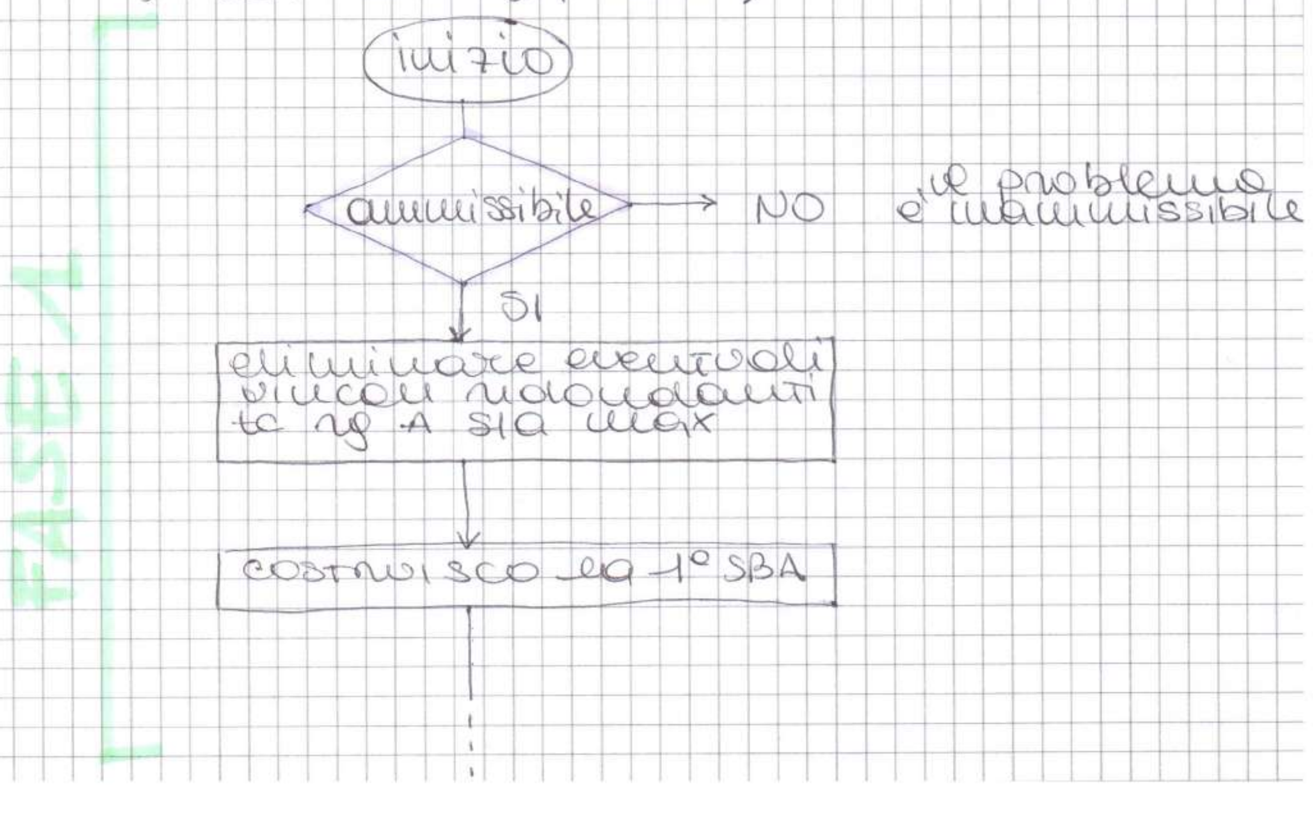
Fase I: verifica le 2 condizioni di lavoro, cioè, dato il problema di PL in forma standard

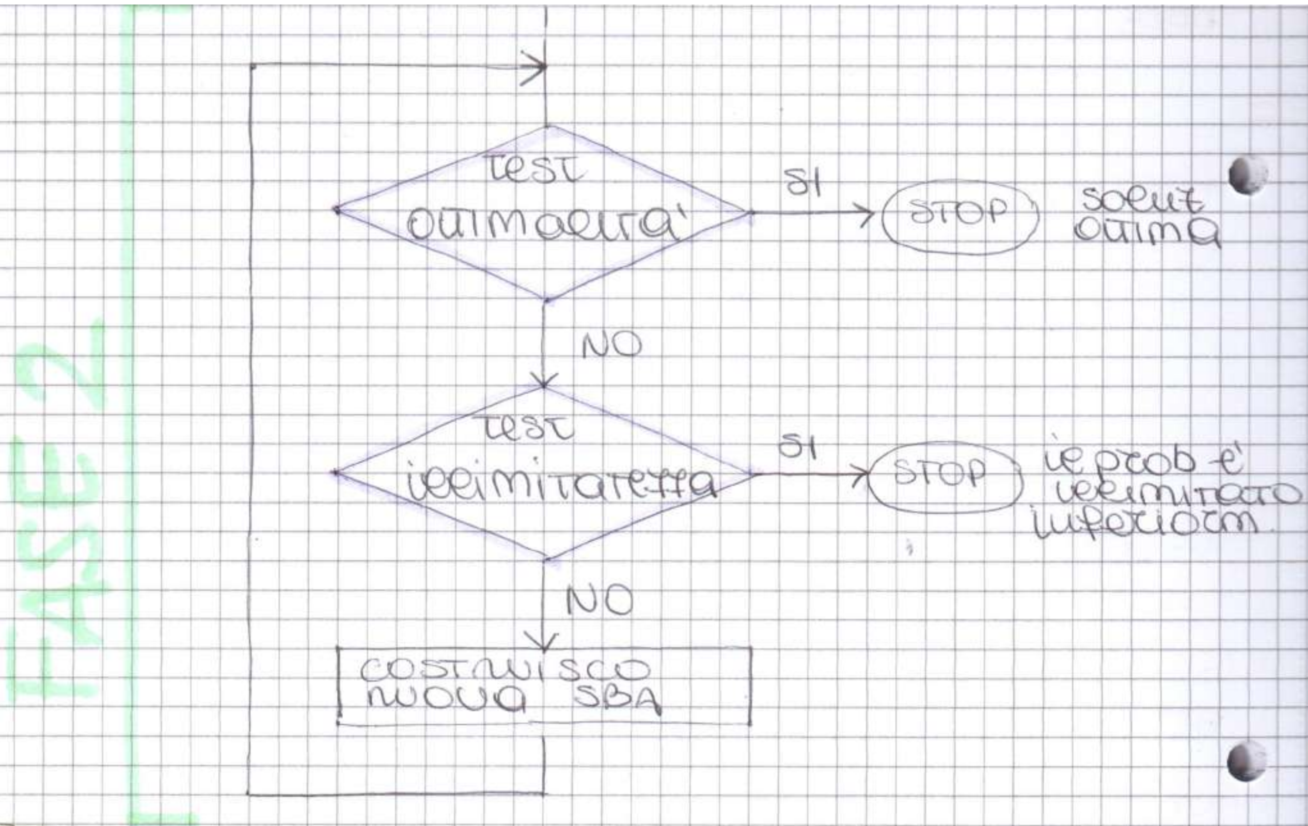
$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

verifica che $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ sia

1) $P \neq \emptyset$

2) $rg(A) = m$ (rg pieno)





Fase II

B nota dalla fase I → Base ammissibile SBA

$$\begin{cases} \min \ c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \boxed{B x_B + N x_N = b} \\ x_B \geq 0 \ , \ x_N \geq 0 \end{cases}$$

PROBLEMA ORIGINARIO

$$x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

$$c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c_N^T x_N =$$
$$= c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

$$\begin{cases} \min \ c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N \\ B^{-1} b - B^{-1} N x_N \geq 0 \\ x_N \geq 0 \end{cases}$$

PROBLEMA RIDOTTO

$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ prende il nome di VETTORE DEI COSTI RIDOTTI

scrivo in forma non trasposta $\gamma = c_N - (B^{-1} N)^T c_B$

questo è un vettore non lo calcolerai MAI

RICERCA OPERATIVA

- Def.
- (PO) (problema di ottimizz.) è illimitato se $\forall M > 0\ \exists$ 1 punto $x \in S$ tc $f(x) < -M$
- (PO) ammette sol ottima finita se $\exists x^* \in S$ tc $f(x^*) \leq f(x)\ \forall x \in S$
- valore ottimo = $f(x^*)$
- $S = \mathbb{R}^n$ OTTIMIZZ. NON VINCOLATA
  $S \subset \mathbb{R}^n$ OTTIMIZZ. VINCOLATA
- MODELLO: $\begin{cases} \min f(x) \\ g_1(x) \geq b_1 \\ g_2(x) = b_2 \end{cases}$ gener.: $\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \geq b_i \quad i=1,\dots,n \end{cases}$
- se 1 modello si può scrivere in forma gener. è 1 PROB di PROGRAMMAZ. MATEMATICA
- VINCOLO → VIOLATO
  → SODDISFATTO
  → ATTIVO
  → RIDONDANTE
- PROB DI PROGR LINEARE (le funz. sono lineari nelle var. di decisione)

modello: $\min c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$\dots$

$a_{m1} + \dots + a_{mn}x_n > b_m$

n coeff — n var — m vincoli

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

$A = [A]_{ij} = a_{ij}$

$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$

- modelli: ① ALLOCAZ. ottima di risorse → risorse concorrenti; risorse parallele; ~~ecc~~; invest. piani; invest periodo
  ② miscelazione → generale input-output
  ③ di TRASPORTO → trasporto generico

- FORMA GENERALE

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$$

FORMA STANDARD

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$Ax \geq b$, $u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0$ $\longrightarrow$ $Ax - u = b$

$Ax \leq b$, $u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0$ $\longrightarrow$ $Ax + u = b$

x_i $\longrightarrow$ $x_i = x_i^+ - x_i^-$, $x_i^+ \geq 0$, $x_i^- \geq 0$

$\longleftarrow$

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ x \geq 0 \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{A} \bar{x} \geq \bar{b}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

- metodo del simplesso
  - si applica a ~~pr~~ prob PL di forma STANDARD

I

INIZIO

ammiss. — NO → il prob. è inammiss.

SI ↓

eliminare eventuali vincoli ridondanti tc rg sia max

↓

COSTRUISCO 1ª SBA

II

↓

ottimalità — SI → STOP (sol ott)

NO ↓

illimitatezza — SI → STOP (illimit. inf.)

NO ↓

nuova SBA → (torna a ottimalità)

CRITERIO DI OTTIMALITÀ

TEOREMA: sia data una base ammissibile B.
se $\gamma \geq 0_{n-m}$ (cioè a componenti non negat)
allora la SBA $\bar{x}$ associata a B è ottima.
NON VALE IL VICEVERSA, POICHÈ IL TEOREMA
È CONDIZIONE SUFFIC. MA NON NECESS.
(se la cond non è verificata, non è
detto che SBA non sia ottima)

COROLLARIO: sia data una base ammissibile B.
se $\gamma > 0$ allora la SBA associata a B
è l'unica soluzione ottima.

esempio:
$$\begin{cases} \min x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

problema di PL in forma standard

$\boxed{1^a, 3^a, 4^a}$ $I_B = \{1, 3, 4\}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det \neq 0$

$\gamma^T = C_N^T - C_B^T B^{-1} N$ con $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → coeff di x_2, x_5, x_6 nelle equazion

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^T = (2\ 1\ 1) - \tfrac{1}{3}(1\,1\,1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 1\ 1) - \frac{1}{3}(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 11 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \\ -20 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 1\ 1) - \frac{1}{3}(-4\ \ 2\ \ -4) = (2\ 1\ 1) + \left(\frac{4}{3}\ \ -\frac{2}{3}\ \ \frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{3}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{7}{3}\right) > 0 \text{ termine a termine}$$

la SBA è ottima

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}, \quad \bar{x}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix}$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione ottima del problema di P

$\boxed{1^a, 4^a, 6^a}$ $\quad I_B = \{1, 4, 6\} \quad I_N = \{2, 3, 5\}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det B \neq 0$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

coeff var fuori base → coeff var di base

sono presi da funz obiettivo !!!

$$\gamma^T = \underbrace{(2\ 1\ 1)}_{c_N^T} + \frac{1}{2} \underbrace{(1\ 1\ 1)}_{c_B^T} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

criterio di ottimalità NON soddisfatto (non possiamo aggiungere altro)

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sarà 1 SBA che non verifica il crit. di ottimalità

la 1ª SBA trovata, essendo la γ^T corrispondente > 0, sarà l'UNICA SOLUZIONE.
infatti, la 2ª SBA trovata, nonostante non soddisfi il criterio, è uguale alla 1ª.
!NB! la 1ª SBA è degenere, infatti siamo stati in grado di trovare 1 altra base ≠ dalla 1ª tc ne è risultata la stessa soluzione ottima (che qui è unica per $\gamma^T > 0$)

esercizio $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ SBA con $I_B = \{1, 2\}$, $\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma_1 \to x_3$, $\gamma_2 \to x_4$

se la funz. obiett. (che non è data) in $\bar{x}$ vale 12 (cioè $c^T \bar{x} = 12$) quanto vale la f.o. in $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$c^T \bar{x} = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T \bar{x}_N = c_B^T B^{-1} b = 12$$

$$c^T \hat{x} = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T \hat{x}_N = 12 + (-1\ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = $$

$$= 12 - 3 = 9$$

6 NOV 2019 (1°C)

II fase -
CRITERIO DI ILLIMITATEZZA (ci si arriva sse fallisce TEST di OTTIMALITA')

- $A e_i = [A]_i$

$v^T e_i = v_i$

$\exists\, i \in \{1, \dots, n-m\}$ tc $\gamma_i < 0$

TEOREMA: sia data una base ammissibile B di A. Se per qualche $i \in \{1, \dots, n-m\}$ si ha che

1) $\gamma_i < 0$ → per forza, altrimenti varrebbe test di ottimalità

2) la i-esima colonna della matrice $B^{-1}N$ e' non positiva cioe' $(B^{-1}N)_i \leq 0_m$

allora il problema e' illimitato (inferiormente poiche' e' un problema di minimo)

- ESEMPIO $\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

• $I_B = \{1,4\}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\gamma^T = (-1 \;\; 0) - (-1 \;\; 0)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \;\; 1)$

il crit di ottimalita' NON e' verificato $(-2 < 0)$

crit di illimitatezza → perche' γ_1 e' < 0

$-2 < 0$ → vado a vedere se la 1ª colonna di $B^{-1}N$ e' non positiva e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$

segue che il problema e' illimitato inferiormente

• $I_B = \{3,4\}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-1 \;\; -1) - (0 \;\; 0)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \;\; -1)$, con $-1 < 0$, $-1 < 0$

C. ottimalita' non verificato

$\gamma_1 = -1 < 0$ 1ª colonna di $B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$

$\gamma_2 = -1 < 0$ 2ª colonna $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq 0 \\ > 0 \end{matrix}$

il criterio di illimitatezza NON e' verificato

ora, rispetto al metodo del simplesso, bisognerebbe spostarsi a una nuova SBA, costruendone 1 nuova

COSTRUZIONE NUOVA SBA

$\bar{x}$ $\quad \bar{x}_B = B^{-1}b$

$\bar{x}_N = 0$

do 1 nome alle colonne della matrice $B^{-1}N$

$B^{-1}N = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m})$

$(B^{-1}N)_i = \pi_i$

a questo punto del metodo, sono falliti i criteri di ottimalità e illimitatezza. nego questi due criteri (cioè la situazione è:)

$\exists i \in \{1, \dots, n-m\}$ tc $\gamma_i < 0$

$\forall h \in \{1, \dots, n-m\}$ tc $\gamma_h < 0$

$\pi_h \geq 0$ cioè $\pi_h \nleq 0$

mi voglio spostare da $\bar{x}$ a $\tilde{x}$: $\bar{x} \longrightarrow \tilde{x}$

cioè devo cambiare ALMENO 1 componente del vettore dei fattori base

il metodo cambia 1 sola componente, da zero a un valore positivo

cambiare da 0 ad 1 val positivo 1 componente (h-esima) del vettore $\bar{x}_N$.

lo faccio usando la stessa semiretta usata nel criterio di illimitatezza

$x(\rho)$, $x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}N\, x_N(\rho)$

$\rho \geq 0 \quad x_N(\rho) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \rho \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \cdot e_h$ ← componente h-esima

1) come lo scelgo h?

2) come lo scelgo ρ?

1) Scelta di h:

Teorema: sia data la base ammissibile B, sia $\bar{x}$ la SBA associata $\bar{x}_B = B^{-1}b$ $\bar{x}_N = 0$, sia inoltre γ il vettore dei costi ridotti.
Se l'indice h ~~[illegible]~~ $h \in \{1, \dots, n-m\}$, è tale che $\gamma_h \leq 0$ allora il punto $x(\rho)$, $\rho \geq 0$ è tale che se $c^T x(\rho) \leq c^T \bar{x}$
(funz. obiett. in $x(\rho) \leq$ funz. obiett. in $\bar{x}$)
(se $\gamma_h < 0$, vale $c^T x(\rho) < c^T \bar{x}$)

2) Scelta di ρ: (poi la chiama k)

$$B = \begin{pmatrix} a_{j_1} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_m} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a_{j_{m+1}} & \cdots & a_{j_n} \end{pmatrix}$$

colonna 1 di B

NO DIM! Teorema: sia data la base ammissibile B, sia γ il vettore dei costi ridotti. Sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ (h-esima componente di γ, < 0). Sia $\bar{\rho}$ dato da

$$\bar{\rho} = \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}$$

con $(\pi_h)_i > 0$

→ vett. termini noti
→ compon. i-esima del vettore
→ componente i-esima della colonna π_h

se c'è qualche componente negativa in quella colonna, quel rapporto si salta

$$\text{e} \quad \bar{\rho} = \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k}$$

con k = indice per cui ho raggiunto il minimo di questi rapporti.

Allora $x(\bar{\rho})$ è una SBA, e la matrice di base ad essa associata $\tilde{B}$ (con $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$) si ottiene scambiando la h-esima colonna fuori base con la k-esima colonna in base.

$$B = \begin{pmatrix} a_{j_1} & \cdots & \boxed{a_{j_k}} & \cdots & a_{j_m} \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$N = \begin{pmatrix} a_{j_{m+1}} & \cdots & \boxed{a_{j_{m+h}}} & \cdots & a_{j_n} \end{pmatrix}$$

Inoltre $\tilde{x}$: $\tilde{x}_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1}b$ sono tali che →
$\tilde{x}_{\tilde{N}} = 0$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j1} \\ \boxed{x_{jk}} \\ x_{jm} \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{jm+1} \\ \boxed{x_{jm+h}} \\ x_{jn} \end{pmatrix}$$

vengono scambiate queste due componenti, visto che sono cambiate $\tilde{B}, \tilde{N}$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} x_{j1} \\ x_{jm+h} \\ x_{jm} \end{pmatrix} \quad \tilde{x}_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} x_{jm+1} \\ x_{jk} \\ x_{jn} \end{pmatrix}$$

~~criterio per calcolare~~ H

Esempio:

$$\begin{cases} \min\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

PL in forma standard

$I_B = \{4, 5, 6\}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B^{-1}N = N$

$$\begin{cases} \min\ (1\ 1\ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}}_{x_B} + (1\ 2\ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x_N} \\ I x_B + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}N} x_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}b} \\ x_B \geq 0,\ x_N \geq 0 \end{cases}$$

SISTEMA PARTIZIONATO. Il sistema così è FORMA CANONICA RISPETTO ALLA BASE B

$$\gamma^T = (1\ 2\ 1) - (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (-3\ -1\ 4)$$

questo è il vett dei costi ridotti

CRIT. DI OTTIMALITÀ NON VERIFICATO!

$-3, -1 < 0$

CRIT DI ILLIMITAT:
$-3<0$ 1ª col di $B^{-1}N$ non tutta ≤ 0
$-1<0$ 2ª col di $B^{-1}N$ non tutta ≤ 0
CRIT illimitatezza NON soddisfatto
vado e cerco nuova SBA (cioè cerco h, k)
$h=1$ (corrisponde a $\gamma_1=-3$ poiché solo per convenzione si sceglie l'h corrispondente al valore negativo + piccolo in valore)
$\boxed{h=1}$ è il valore della variabile ENTRANTE IN BASE (l'indice**)
uso crit del rapp. minimo per determinare K
cioè $\min\left\{\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1}\right\}$
$i=1/2/3$
posso prendere $K=2$ o $K=3$ (anche qui, per convenzione, scelgo l'indice + piccolo)
$\boxed{K=2}$
quindi scambio 1ª col fuori base con la 2ª col in base. la nuova base è

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}, \quad \tilde{N}=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&-1&-5\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_{\tilde{B}}=\begin{pmatrix}x_4\\x_1\\x_6\end{pmatrix} \quad \tilde{x}_{\tilde{N}}=\begin{pmatrix}x_5\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

- se l'indice K non è univocamente determinato allora la SBA che si determina è degenere
- se bisognasse saltare un indice, es $\min\left\{\frac{3}{1}, \frac{2}{-2}, \frac{1}{1}\right\}$, $\frac{-2}{2}$ va saltato
$\Rightarrow \min\left\{\frac{3}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ RICORDATI che $\frac{1}{1}$ corrisponde a $i=3$, non a $i=2$
- SBA degenere è condiz necessaria (non suff) affinché $\bar{\rho}$ sia 0
- $\bar{\rho}=0$ significa che NON mi sto SPOSTANDO e si chiama ITERAZIONE DEGENERE (questo è il problema principale del metodo del simplesso)

8 NOV 2019

$$\begin{cases} \min \; c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ I_m x_B + B^{-1} \\ x_B \geq 0_m \quad x_N \geq 0_{n-m} \end{cases}$$

$B \to \tilde{B}$

$\bar{x} \to \tilde{x}$

$$\begin{cases} \min \; c_{\tilde{B}}^T x_{\tilde{B}} + c_{\tilde{N}}^T x_{\tilde{N}} \\ I_m x_{\tilde{B}} + \tilde{B}^{-1} \tilde{N} x_{\tilde{N}} = \tilde{B}^{-1} b \\ x_{\tilde{B}} \geq 0 \quad x_{\tilde{N}} \geq 0 \end{cases}$$

$$I_B x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

$$(e_1 \; e_2 \; e_k \; e_m) x_B + (\tilde{\pi}_1 \; \tilde{\pi}_2 \; \tilde{\pi}_h \; \tilde{\pi}_{n-m}) x_N = B^{-1} b$$

$$T(e_1 \; e_2 \ldots e_{k-1} \; \tilde{\pi}_h \; e_{k+1} \ldots e_m) x_B +$$

$$+ T(\tilde{\pi}_1 \ldots \tilde{\pi}_{h-1} \; e_k \; \tilde{\pi}_{h+1} \ldots \tilde{\pi}_{n-m}) x_n = T B^{-1} b$$

$$\boxed{\begin{matrix} T e_i = e_i \\ T \tilde{\pi}_h = e_k \end{matrix}}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & (-\tilde{\pi}_h)_1/(\tilde{\pi}_h)_k & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(\tilde{\pi}_h)_k} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & (-\tilde{\pi}_h)_m/(\tilde{\pi}_h)_k & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \text{k-esima colonna} \end{array} = I_m + \frac{1}{(\tilde{\pi}_h)_k} (e_k - \tilde{\pi}_h) e_k^T$$

Teorema: T e' invertibile ed e' tc:

$T e_i = e_i, \; \forall i \neq k, \; T \tilde{\pi}_k = e_k$

Teorema: $\tilde{B}^{-1} = T B^{-1}$

Teorema: $\tilde{B}^{-1} \tilde{N} = T(\tilde{\pi}_1 \cdots \tilde{\pi}_{h-1} \; e_k \; \tilde{\pi}_{h+1} \cdots \tilde{\pi}_{n-m})$

$\tilde{B}^{-1} b = T B^{-1} b \to (e_k \cdots \tilde{B}^{-1} \tilde{N} \cdots \tilde{B}^{-1} b)$

operazione di pivot

1) dividere la k-esima riga di M per $(\tilde{\pi}_R)_k$

2) sommare a ciascuna riga i-esima di M, con $i \neq k$, la riga k-esima ottenuta al punto precedente moltiplicata per $(-\tilde{\pi}_R)_i$

(prosegue esercizio dell'ultima lezione)

$$M = \left(\tilde{\pi}_R \;\vdots\; \tilde{\pi}_1 \; \tilde{\pi}_2 \cdots \tilde{\pi}_{R-1} \; e_k \; \tilde{\pi}_{R+1} \cdots \tilde{\pi}_{n-m} \;\vdots\; B^{-1}b\right)$$

$$\begin{array}{c} (\tilde{\pi}_R)_k \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & k=1 & 0 & 2 & 3 & & 3 \\ 2 & k=2 & 1 & -1 & -5 & & 2 \\ 1 & k=3 & 0 & 2 & -1 & & 1 \end{array}\right) \\ \qquad \tilde{\pi}_1 \quad\quad e_2 \quad \tilde{\pi}_2 \quad \tilde{\pi}_3 \quad B^{-1}b \end{array}$$

$T\tilde{\pi}_1 = e_2$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1/2 & 5/2 & -11/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right)}_{\tilde{B}^{-1}\tilde{N} \quad \tilde{B}^{-1}b} \begin{array}{l} \to 1^a - 2^a \\ \to 2^a / (\tilde{\pi}_R)_{k=2} \\ \to 3^a - 2^a \end{array}$$

$$\Rightarrow \min (1\ 1\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}}_{\text{in base}} + (1\ 2\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{fuori base}}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & -11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ nuova SBA (nuovo vertice del poliedro)

13 NOV 2019

da es precedente:

$$\gamma^T = (1\ 2\ 1) - (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}\ \ \underset{\gamma_2}{-\frac{5}{2}}\ \ \underset{\gamma_3}{-\frac{7}{2}}\right)$$

scelgo γ_3, $h=3$ (3 var fuori base e' var entrante)

$$\min\left\{\underset{i=1}{\frac{2}{11/2}},\ \underset{i=2}{V},\ \underset{i=3}{\frac{0}{3/2}}\right\} = 0 \Rightarrow k=3$$

$\to \bar{\rho}$ rho segnato

scambio 3ª var in base con 3ª var fuori base

" 3ª col " 3ª col "

$$M = (\pi_3\ \ \pi_1\ \ \pi_2\ \ e_3\ \ B^{-1}b)$$

$$\begin{pmatrix} 11/2 & -1/2 & 5/2 & 0 & 2 \\ -5/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & 5/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

questo deve diventare pivot e quelli sopra devono diventare $=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4/3 & -20/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & -1/3 & 11/3 & 5/3 & 1 \\ 1 & \underbrace{-1/3\ \ \ 5/3\ \ \ 2/3}_{B^{-1}N} & & & \underbrace{0}_{B^{-1}b} \end{pmatrix}$$

$1^a \to 1^a - \frac{11}{2}3^a$

$2^a \to 2^a + \frac{5}{2}3^a$

questa e' la 3^a

cioe' prima trasformo la 3ª riga e poi modifico le altre

nuovo problema forma canonica

$$\begin{cases} \min (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma^T = (1\ 2\ 1) - (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\ \ \frac{16}{3}\ \ \frac{7}{3}\right) > 0$$

$\Rightarrow$ SBA e' OTTIMA

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ punto di ottimo

LA MATRICE T E' QUELLA CHE DETERMINA L'OPERAZIONE DI PIVOT.

esempio

$$\begin{cases} \min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

è in forma standard? Sì

la forma canonica è già "disponibile":

$$\begin{cases} \min & (3\ 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1\ 1)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 5 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma^T = (1\ 1) - (3\ 2)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (\underset{\geq 0}{0} \quad -3)$$

$h = 2$

$K = ?$ $\quad \min\left\{\underset{i=1}{\frac{5}{2}}, \underset{i=2}{V}\right\} \Rightarrow K = 1$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\pi_2)_1} & 0 \\ -\frac{(\pi_2)_2}{(\pi_2)_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$ → questa è la mat corrispondente alle operazioni di pivot

cioè la k-esima colonna è sostituita

$$\tilde{B}^{-1}\tilde{N} = T\,(\pi_1 \quad e_1) = T\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^{-1}b = T\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}$$

prosegui l'es con la matrice T (con iterazioni) e trova soluz ottima. Poi rifai usando il pivot. Deve venire $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}$

CONVERGENZA della FASE II del METODO DEL SIMPLESSO

TEOREMA: se durante le iterazioni della fase II non viene mai generata 2 volte la stessa base allora $\exists\, \bar{k} \geq 1$ (indice $\bar{k}$) tc $B_{\bar{k}}$ nella sequenza $\{B_k\}$ delle basi generate è tc sia soddisfatto il criterio di ottimalità oppure quello di illimitatezza.

PROPOSIZIONE: se ogni SBA è NON degenere allora non può essere generata 2 volte una stessa SBA

$\Downarrow$

le iterazioni della fase II si arrestano dopo un # finito di passi per il soddisfacimento del criterio di ottimalità oppure del criterio di illimitatezza

es
$$\begin{cases} \min \frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$I_{B_1} = \{1, 2, 3\}$ SBA $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_N = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$I_{B_2} = \{4, 2, 3\}$, $I_{B_3} = \{4, 5, 3\}$, $I_{B_4}\{6, 5, 3\}$
$I_{B_5} = \{6, 7, 3\}$, $I_{B_6} = \{1, 7, 3\}$, $I_{B_7} = \{1, 2, 3\}$

questo è un esempio di ciclaggio, cioè genererei sempre le stesse 7 basi.
come se ne esce?

REGOLE ANTICICLAGGIO

Regola di Bland: scegliere per h l'indice più piccolo. Scegliere per k l'indice più piccolo nel criterio del rapporto

Teorema: supponiamo di applicare la Fase II del metodo del simplesso utilizzando la regola di Bland. Allora non viene mai generata due volte una stessa base e quindi esiste un indice $\bar{k} \geq 1$ tc $B_{\bar{k}}$ (la $\bar{k}$-esima base della sequenza) soddisfa il criterio di ottimalità o il criterio di illimitatezza.

FASE I del metodo del simplesso

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$

1. $P \neq \emptyset$
2. $\text{rg} A = m$
3. disponibilità di una 1ª SBA

QUESTE ASSUNZIONI ORA VERRANNO MENO

$\boxed{\text{ASSUNZIONE: } b \geq 0}$

Metodo delle variabili artificiali

Si introducono m variabili artificiali (cioè 1 per ogni riga): $\alpha_1 \dots \alpha_m$
e si considera un altro problema di PL:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \\ Ax + I_m(\alpha) = b \quad \text{con } \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_m)^T \\ x \geq 0, \ \alpha \geq 0 \end{cases}$$

che viene detto PA (artificiale/ausiliario)
Riconosco la matrice identità, che mi serve per far partire la Fase II. (!)
Potrò applicare la Fase II su PA dopo aver verificato le condizioni ①, ②, ③

verifico ① : $\begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ (e io so $\alpha, x, b \geq 0$)

verifica $Ax + I_m \alpha = b$

$\Rightarrow$ appartiene all'insieme ammissibile di PA

verifico ②: $(A \;\; I) \Rightarrow rg(A \;\; I) = m$ → mat dei vincoli di uguaglianza

verifico ③: avendo l'identità, ho anche 1 SBA

$\hat{B} = I_m$, $\hat{B}^{-1} b = b \geq 0$, $\hat{B}^{-1} \hat{N} = N$

$\Rightarrow$ PA soddisfa le proprietà ①, ②, ③

può essere risolto con la fase II del MdS.

Applico:

CRIT ottimalità: soddisfatto

CRIT illimitatezza: soddisfatto (poiché f.o. è Σ di elem ≥ 0)

PA è ammiss. e non è ill inf

$\Rightarrow$ PA ammette SEMPRE soluzione ottima

si risolve con fase II.

15 NOV 2014

$\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ è l'ottimo di PA

teorema: il problema originario PO di PL ammette soluzione ammissibile sse la $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* = 0$ → funz obiett. di PA

cioè sse: $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \dots = \alpha_m^* = 0$

esempio
$$\begin{cases} \max -x_1 - x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$
PO
α_1, α_2

$$PA: \begin{cases} \min \alpha_1 + \alpha_2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + \alpha_1 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + \alpha_2 = 1 \\ x_i \geq 0, \ \alpha_1 \geq 0, \ \alpha_2 \geq 0 \end{cases}$$

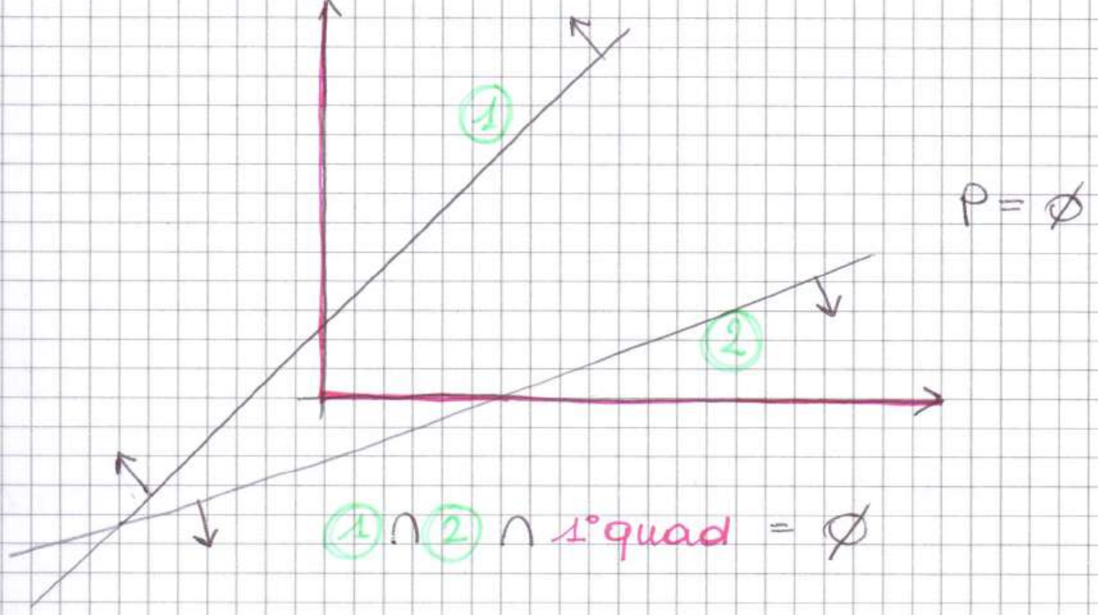
$$I_B: \{5, 6\} \begin{cases} \min (1\ 1)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha_1 \geq 0 \ \alpha_2 \geq 0 \ x_i \geq 0 \end{cases} \leftarrow \text{forma canonica}$$

itero
$$\gamma^T = (0\ 0\ 0\ 0) - (1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0\ 1\ 1\ 1) \geq 0$$

SBA corrente:
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
→ questa sono α^* e x^*

applico il risultato del teorema prec.
⇒ il PO è inammissibile

graficamente:



① ∩ ② ∩ 1°quad = ∅

q variabili artificiali in base
p variabili ordinarie in base
$p + q = m$

$$I_m \begin{pmatrix} \alpha_B \\ x_B \end{pmatrix} + \hat{B}^{-1}\hat{N} \begin{pmatrix} \alpha_N \\ x_N \end{pmatrix} = \hat{B}^{-1} b$$

avrò:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_q & \\ & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overset{m-q \text{ colonne}}{G} & \underset{n-p \text{ colonne}}{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{q+1} \\ \vdots \\ \alpha_m \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{pmatrix}}_{\text{forma canonica a fine FASE I}}$$

sono = 0 poiché suppongo che P.O. sia ammiss.

ora sono possibili 2 casi:

CASO 1 $q = 0$ cioè nessun α in base ($\Rightarrow p = m$)

CASO 2 $q \geq 1$ cioè c'è almeno 1 variabile artificiale in base ($\Rightarrow p < m$)

CASO 1 $\hat{B}$ è una sottomatrice di base di A
$\hat{B}$ è già la base da cui far partire la FASE II $\Rightarrow$ diventa la base per il PO (si semplifica la forma canonica scritta sopra) ottengo:

$$I_m x_B + H x_N = \hat{B}^{-1} b$$

quindi

$$\begin{cases} \min \ c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ I_m x_B + H x_N = \hat{B}^{-1} b \\ x_B \geq 0 \quad x_N \geq 0 \end{cases}$$

diventa forma canonica del PO

es CASO 1:

$$\begin{cases} \min \ -4x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{PO}$$

è ~~in~~ in forma standard, non canonica
applico fase I:

$$\begin{cases} \min \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \alpha_1 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + \alpha_2 = 3 \\ x \geq 0 \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

PA

ovviamente in base metto colonna 4 e 5

$$\begin{cases} \min (1 \; 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + (0 \; 0 \; 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \alpha \geq 0 \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma^T = (0 \; 0 \; 0) - (1 \; 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-5 \; -4 \; -3)$$

nuova SBA

$h = 1 \quad k = 2$ scambio

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

PIVOT

divido per 3 la 2^ riga e cambio la 1^

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & -1 & 4/3 & 2 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \min (1 \; 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + (1 \; 0 \; 0) \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha \geq 0 \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma^T = (1 \; 0 \; 0) - (1 \; 0) \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{3} \; 1 \; -\frac{4}{3}\right)$$

$h = 3 \quad k = 1$ scambio

$$M = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -1 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -3/4 & 3/4 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 5/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

PIVOT

$$\begin{cases} \min (0 \; 0) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + (1 \; 0 \; 1) \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & -3/4 & 3/4 \\ 1/2 & 5/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma^T = (1 \; 0 \; 1) - (0 \; 0) (\quad) = (1 \; 0 \; 1) \geq 0$$

questo è l'ottimo della fase I

fine fase I

siamo nel caso 1

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

il PO è ammissibile

$$\begin{cases} \min\ -4x_1 - x_2 - x_3 \\ \begin{pmatrix}x_3\\x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3/4\\5/4\end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix}3/2\\1/2\end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

inizio Fase II

$$\gamma^T = -1 - (-1\ \ -4)\begin{pmatrix}-3/4\\5/4\end{pmatrix} = -1 + \frac{17}{4} = \frac{13}{4} > 0$$

la SBA corrente è quella ottima

$x^* = \begin{pmatrix}1/2\\0\\3/2\end{pmatrix}$ è soluzione ottima

PL risolto :)

CASO 2 c'è qualche var artificiale in base quindi la base ottima contiene qualche α e quindi non c'entra niente col PO!

la SBA la cui base include delle var artificiali è degenere, ma questo implica che c'è un'altra base che corrisponde alla stessa SBA. Vogliamo quindi scambiare le var. artificiali in base (nulle) con var originarie fuori base (nulle)

es caso 2 (teoria):

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_q \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix} + H \begin{pmatrix}x_{p+1}\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_p^*\end{pmatrix}$$

caso 2, fine Fase I

sostituisco k-esima α ($\boxed{\alpha_k}$) con p+h-esima x ($\boxed{x_{p+h}}$)

considero $H = \hat{B}^{-1}\hat{N}$

vado sulla k-esima riga di $\hat{B}^{-1}\hat{N}$

$(\tilde{n}_h)_k \neq 0$ (così scelgo h)

cosa può capitare?

1) la riga k è composta da tutti elementi nulli $\Rightarrow$ vincolo ridondante $\Rightarrow$ il k-esimo vincolo del PO è ridondante e si può eliminare

2.) ∃ sulla riga k 1 elemento (1 o +) diverso da zero, supponiamo in corrispondenza della colonna h-esima
⇒ scambio α_k con x_{p+h}
questo scambio si chiama
SCAMBIO DEGENERE (non altera SBA)
abbiamo allora un nuovo problema con cui possiamo attuare la FASE II

20 NOV 2019

supponiamo di aver applicato la fase I e di essere arrivati al P.A. nella seguente forma canonica:

$$\begin{cases} \min \ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cancel{-2} & -1 & 0 \\ 2 & \cancel{6} & 4 & 2 \\ 0 & \cancel{-4} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \cancel{\alpha_3} \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0, \ \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$

$\alpha_2 \Leftrightarrow k=3 \Rightarrow 3^a$ riga risulta RIDONDANTE

la 3^a riga è ridondante quindi elimino la 3^a riga

$$\begin{cases} \min \ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$\alpha_1 \Leftrightarrow k=1 \Rightarrow 1^a$ riga (che NON è formata da tutti zeri)

in base alla 1^a riga definisco $h=2$

PIVOT

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

π_h

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad}_{B^{-1}N} \quad \underbrace{\qquad}_{B^{-1}b}$

la SBA $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ cambia in $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

questa operazione si chiama SCAMBIO DEGENERE

riscrivo forma canonica

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ \cancel{\alpha_1} \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

quindi si può riscrivere come

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Da qui si applica fase II e si risolve PL

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} d_i \\ Ax + I_m d = b \\ x \geq 0,\ d \geq 0 \end{cases}$$

esempio

$$\begin{cases} \min -x_1 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PL non in forma standard

$$\begin{cases} \min -x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

→ NON CAMBIARE SEGNO ALTRIMENTI ESCI DALL'INSIEME DI SOLUZIONI AMMISSIBILI

ora è in forma standard

introduco solo 1 variabile artificiale

$$\begin{cases} \min d_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + d_1 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0 \quad d_1 \geq 0 \end{cases}$$

e questo ↑ è il PA

ora:

$$\begin{cases} \min d_1 \\ \begin{pmatrix} d_1 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ x_i \geq 0 \\ d_1 \geq 0 \end{cases}$$

→ PA da risolvere

da finire per esercizio.

risultato: il problema originario è inammissibile

DUALITÀ nella PL

$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$ A è $m \times n$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

$\tilde{x}$ soluzione ammissibile del problema

Φ è il valore di f.o. in $\tilde{x}$

$\Phi \longleftrightarrow c^T \tilde{x}$

$c^T x^*$ con x^* soluzione ottima

dato $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$ → DA CONFRONTARE

$c^T x^* + u^T (b - A\tilde{x})$

considero $A\tilde{x} \geq b \Rightarrow b - A\tilde{x} \leq 0$

quindi $u^T (b - A\tilde{x}) \leq 0$

quindi $c^T x^* \geq c^T x^* + u^T (b - A\tilde{x})$

allora $c^T x^* + u^T (b - A\tilde{x}) = b^T u + (c^T - u^T A) x^*$

ma x^* non lo conosco, quindi impongo condizione su u: $A^T u = c$ cioè $u^T A = c^T$

oltre alla condizione $u \geq 0$.

allora $(c^T - u^T A) x^*$ diventa $= 0$

quindi sto cercando di trovare

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

questo è detto PROBLEMA DUALE del problema assegnato, che prende il nome di PROBLEMA PRIMALE

$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$ $\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0 \end{cases}$

↓ duale ↓ primale

si fa riferimento a questa coppia come coppia PRIMAL-DUALE

P. primale: n-variabili (le x) dette primali

P. Duale: m-variabili (le u) dette duali

Esempio Generale

$$\binom{x}{y}\begin{cases} \min\ c^T x + d^T y \\ Cx + Dy = h & \text{I } q \\ Ex + Fy \geq g & \text{I } m-q \\ x \geq 0 \end{cases}$$

x vett a p componenti

y vett a n-p componenti

I q vincoli di uguaglianza

I m-q vincoli di disuguaglianza

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ Cx + Dy \geq h \\ -Cx - Dy \geq -h \\ Ex + Fy \geq g \\ I_p x \geq 0 \end{cases}$$

→ prob reso in forma primale

ora sfrutto la forma duale

che ha come coeff i termini noti del problema primale:

$$\begin{cases} \max\ h^T t - h^T w + g^T v + (0^T(z)) \\ C^T t - C^T w - E^T v + I z = c \\ D^T t - D^T w + F^T v + (0(z)) = d \\ t \geq 0,\ w \geq 0,\ v \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$

con mat variabili $(t\ w\ v\ z)^T$

mat coeff $\begin{pmatrix} C & D \\ -C & -D \\ E & F \\ I & 0 \end{pmatrix}$ → va trasposto x usarlo nel problema primale

metto in evidenza h

$$\begin{cases} \max\ h^T(t-w) + g^T v \\ C^T(t-w) + E^T(v) \leq c \\ D^T(t-w) + F^T(v) = d \\ t \geq 0,\ w \geq 0,\ v \geq 0 \end{cases}$$

→ ho tolto Iz e quindi il vincolo = diventa ≤

$$\begin{cases} \max\ h^T u + g^T v \\ C^T u + E^T v \leq c \\ D^T u + F^T v = d \\ v \geq 0 \end{cases}$$

con $u = t - w$

↳ questo è il problema duale per quello primale

Primale:

$$\begin{array}{l} \\ u \\ v \\ \\ \end{array}\begin{cases} \min c^T x + d^T y \\ Cx + Dy = h \\ Ex + Fy \geq g \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Duale:

$$\begin{array}{l} \\ x \\ y \\ \\ \end{array}\begin{cases} \max h^T u + g^T v \\ C^T u + E^T v \leq c \\ D^T u + F^T v = d \\ v \geq 0 \end{cases}$$

- il problema duale di un prob. di min è un problema di max. simmetricamente il duale di un prob. di max è un prob di min
- ad ogni vincolo di uguaglianza del primale corrisp. 1 variabile duale NON vincolata in segno
- ad ogni vincolo di disuguaglianza del primale corrisp. 1 variabile duale vincolata in segno
- ad ogni variabile vincolata in segno del primale corrisponde 1 vincolo di disuguagl. del duale che ha come termine noto il coeff di costo della f.o.
- ad ogni variabile non vincolata in segno del primale corrisponde 1 vincolo di uguaglianza del duale il cui termine noto è il coeff di costo che tale variabile ha nella f.o. del primale

es
$$\begin{cases} \min 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 11x_1 - 6x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ x_1 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1, 2, 3 $\Rightarrow$ 3 var nel DUALE

associo ad ogni vincolo 1 variabile nel duale u_1, u_2, u_3

con min devo avere vincoli con $=, \geq$

con max devo avere vincoli con $=, \leq$

il duale è:

$$\begin{cases} \max 2u_1 + u_2 + 3u_3 \\ 2u_1 + u_2 + 11u_3 \leq 3 \\ -u_1 + 7u_2 - 6u_3 = -2 \\ 3u_1 - 4u_2 + u_3 \leq 1 \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 = -5 \\ u_1 \geq 0 \quad u_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ è il duale

u_2 non è vincolato (vedi vincolo sopra)

22 NOV 2019

$$\begin{cases} \min \\ \geq \\ = \end{cases} \qquad \begin{cases} \max \\ \leq \\ = \end{cases}$$

primale $\qquad$ duale

es.
$$\begin{cases} \min\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 \\ ①\quad 2x_1 + x_3 - 7x_4 \leq 2 \quad \rightarrow -2x_1 - x_3 + 7x_4 \leq -2 \\ ②\quad x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 12 \\ ③\quad x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \geq -7 \\ x_1 \geq 0 \qquad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

PL primale assegnato (↑). faccio il duale:

①, ②, ③ ⇒ u_1, u_2, u_3 (3 vincoli ⇔ 3 variabili)

$$\begin{array}{l} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array} \begin{cases} \max\ -2u_1 + 12u_2 - 7u_3 \\ -2u_1 + u_2 + u_3 \leq 3 \\ 5u_2 + u_3 = -1 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = 7 \\ 7u_1 + 2u_3 \leq 9 \\ u_1 \geq 0 \qquad u_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P) \begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \max\ b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases} (D)$$

è detta COPPIA PRIMALE DUALE SIMMETRICA

Teorema della dualità debole:
per ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ di (P) e per ogni soluzione ammissibile $\bar{u}$ di (D) vale $b^T \bar{u} \leq c^T \bar{x}$

Corollario: se $\bar{x}$ è sol. amm. per (P) e $\bar{u}$ è sol amm. per (D), queste sol. sono tali che valga
$$c^T \bar{x} = b^T \bar{u}$$
segue che $\bar{x}, \bar{u}$ sono sol. OTTIME per i rispettivi prob.

Corollario: se (P) di min è illimitato inf allora il (D) è inammissibile.
se (D) ~~ecc~~ di max è illimitato sup allora (P) è inammissibile.

Teorema della dualità forte: NO DIM

se (P) ammette sol ottima x^* allora anche (D) deve ammettere sol ottima u^*.
se (D) ammette sol ottima u^* allora anche (P) deve ammettere sol ottima x^*
ed inoltre deve valere $c^T x^* = b^T u^*$

Primale \ Duale	OTTIMO	ILLIM.	INAMM.
OTTIMO	SI	NO	NO
ILLIM.	NO	NO	SI
INAMM.	NO	SI	SI

1/2

Teorema: $\bar{x}, \bar{u}$ sono sol ott. per (P), (D) se e solo se:

1) $A\bar{x} \geq b$, $\bar{x} \geq 0$
2) $A^T\bar{u} \leq c$, $\bar{u} \geq 0$
3) $c^T\bar{x} = b^T\bar{u}$

cioè devono valere: ammissibilità primale, ammissibilità duale, assenza di gap di dualità

CONDIZIONI DI COMPLEMENTARITÀ:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} (P), \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases} (D)$$

Teorema: sia $\bar{x}$ sol ammissibile di (P) e sia $\bar{u}$ sol ammissibile per (D). Allora $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono sol ottime per i rispettivi problemi sse valgono:

$$\bar{u}^T (A\bar{x} - b) = 0$$
$$\bar{x}^T (c - A^T\bar{u}) = 0$$

queste si dicono CONDIZIONI di COMPLEMENTARITÀ

$$\bar{u}^T \underbrace{(A\bar{x}-b)}_{\geq 0} = 0 \qquad \bar{u}^T \geq 0$$

$$\bar{x}^T \underbrace{(c - A^T\bar{u})}_{\geq 0} = 0 \qquad \bar{x}^T \geq 0$$

$A\bar{x} \geq b$ $\qquad$ $A^T\bar{u} \leq c$

$A\bar{x} - b \geq 0$ $\qquad$ $c - A^T\bar{u} \geq 0$

$$v^T w = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i w_i = 0$$

se $v_i \geq 0$

$w_i \geq 0$

$v_1 w_1 + \dots + v w = 0$

sse sono tutti nulli

allora $\boxed{\bar{u}_j (A\bar{x}-b)_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$

$\boxed{\bar{x}_i (c - A^T\bar{u})_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

corollario: $\bar{x}$ ammiss per (P), $\bar{u}$ ammiss per (D)

$\bar{x}, \bar{u}$ sono ottime per (P), (D) sse valgono:

$\boxed{\bar{u}_j (A\bar{x}-b)_j = 0} \qquad j = 1, \dots, m$

$\boxed{\bar{x}_i (c - A^T\bar{u})_i = 0} \qquad i = 1, \dots, n$

$\Updownarrow$

le soluz sono ottime se e solo se:

- per ogni variabile duale NON NULLA (j-esima), il j-esimo vincolo è ATTIVO, cioè vincolo appartenente a (P)
- per ogni variabile primale NON NULLA (i-esima), il i-esimo vincolo duale è ATTIVO

2/12 teorema: $\bar{x}, \bar{u}$ ottime di (P), (D) sse valgono:

1) $A\bar{x} \geq b$, $\bar{x} \geq 0$

2) $A^T\bar{u} \leq c$, $\bar{u} \geq 0$

3) $\left.\begin{array}{l} \bar{u}^T (A\bar{x} - b) = 0 \\ \bar{x}^T (c - A^T\bar{u}) = 0 \end{array}\right\}$ condizioni di complementarità

condizione necessaria e suff per l'ottimalità

27 NOV 2019

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

(P) (D)

$\bar{x}$ $\bar{u}$

$\left\{ \begin{matrix} A\bar{x} \geq b \\ \bar{x} \geq b \end{matrix} \right\}$ $\left\{ \begin{matrix} A^T\bar{u} \leq c \\ \bar{u} \geq 0 \end{matrix} \right\}$ → ammissibilità primale o duale

$c^T \bar{x} = b^T \bar{A}$ → assenza di GAP

$\left\{ \begin{matrix} \bar{x}^T (c - A^T \bar{u}) = 0 \\ \bar{u}^T (A\bar{x} - b) = 0 \end{matrix} \right\}$ → cond. di complementarietà

↓

$\left\{ \begin{matrix} \bar{x}_i \, (c - A^T \bar{u})_i = 0 \\ \bar{u}_j \, (A\bar{x} - b)_j = 0 \end{matrix} \right\}$ cond di complem. sono riscrivibili così

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \qquad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u = c \\ \underline{u \geq 0} \end{cases}$$

(P) (D)

$\bar{u}^T (A\bar{x} - b) = 0$

$\bar{x}^T (c - A^T \bar{u}) = 0$

↓ vuol dire $= 0$

↓

il vincolo sarebbe $0 = 0$ → tautologia

quindi basta $\bar{u}^T (A\bar{x} - b) = 0$ per definire problemi del tipo come sopra

es

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 \leq 3 \quad \xrightarrow{*} -2x_1 + x_2 - x_4 \geq -3 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_2 + x_3 - 7x_4 \geq 5 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

voglio scrivere il suo (D)

intanto cambio (P) *

$$\begin{cases} \max \; -3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \\ -2u_1 + u_2 \leq 3 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 2 \\ u_3 = 3 \\ -7u_4 = -1 \\ u_1 \geq 0 \; , \; u_3 \geq 0 \end{cases}$$

è (D) di (P)

$u_1 \, (-2x_1 + x_2 - x_4 + 3) = 0$

$u_3 \, (2x_2 + x_3 - 7x_4 - 5) = 0$

$x_1 \, (3 + 2u_1 - u_2) = 0$

$x_2 \, (2 - u_1 - u_2 - 2u_3) = 0$

Sono le cond. di complementarietà

es.

$$\begin{cases} \min \; 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

è (P).

$$\begin{cases} \max \; 2u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ u_1 \leq 3 \\ u_1 \leq 1 \\ 3u_2 \leq 1 \end{cases}$$

è (D) di (P).

$c^T x^*$

il (P) ammette sol $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. f.o. in x^* vale $\frac{7}{3}$

il (D) ammette sol $u^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ f.o. in u^* vale $\frac{7}{3}$

$b^T u^*$

$\overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_1}} (2 - u_1 - 2u_2) = 0 \rightarrow$ OK

$0 = x_2 \, (3 - u_1) = 0 \rightarrow$ OK

$x_3 \, (1 - u_1) = 0$ $\quad x_3 \neq 0 \Rightarrow 1 - u_1 = 0 \rightarrow$ OK

$x_4 \, (1 - 3u_2) = 0$ $\quad x_4 \neq 0 \Rightarrow 1 - 3u_2 = 0 \rightarrow$ OK

es.
$$\begin{cases} \min \; 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 \\ u_1 \quad -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ u_2 \quad x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

$$\begin{cases} \max \; u_1 + u_2 \\ x_1 \quad -2u_1 + u_2 \leq 2 \\ x_2 \quad 2u_1 + 4u_2 \leq 9 \\ x_3 \quad u_1 - u_2 \leq 3 \\ u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (D)$$

$u^* = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ dato questo voglio x^* di (P)

scrivo cond. di compl.:

$$\begin{cases} x_1(2 + 2u_1 - u_2) = 0 \\ x_2(9 - 2u_1 - 4u_2) = 0 \\ x_3(3 - u_1 + u_2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1(-2x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) = 0 \\ u_2(x_1 + 4x_2 - x_3 - 1) = 0 \end{cases} *$$

sostituisco u_1^* e u_2^* in tutto:

$$\begin{cases} x_1(2 + 2(7/2) - 1/2) = 0 \\ x_2(9 - 2(7/2) - 4(1/2)) = 0 \\ x_3(3 - 7/2 + 1/2) = 0 \end{cases}$$

$x_1\left(\frac{17}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0$

$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\}$ si può risolvere anche sviluppando queste come quelle sopra, oppure:

da * so che $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

e quindi $x_2^* = \frac{1}{3}$ e $x_3^* = \frac{1}{3}$

allora $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

modello sugli shadow prices
es. generale

ingredienti	deluxe	standard	disponibilità
I_1	3 kg	2 kg	1200 kg
I_2	4 kg	1 kg	1000 kg
ore di lavoro	2 h	1 h	700 h
prezzo prodotto	24 €	14 €	

variabili: x_1 = quantità deluxe
x_2 = " standard

f.o.: $\max\ 24x_1 + 14x_2$

vincoli:
$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 1200 \\ 4x_1 + x_2 \le 1000 \\ \boxed{2x_1 + x_2 \le 700} \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

ora analizzo la dualità

$$(D): \left\{\begin{array}{l} \min\ 1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 2u_3 \ge 24 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \ge 14 \\ u_1 \ge 0 \quad u_2 \ge 0 \quad u_3 \ge 0 \end{array}\right.$$

le soluzioni ottime di (P) e (D) sono:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 360 \end{pmatrix} \qquad u^* = \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calcoliamo f.o. in x^*

$24(160) + 14(360) = 8880$

calcoliamo f.o. in u^*

$1200(6.4) + 1000(1.2) + 700(0) = 8880$

cond. di complementarietà

$x_1^*(3u_1^* + 4u_2^* + 2u_3^* - 24) = 0$ $\quad 160(\ )=0$

$x_2^*(2u_1^* + u_2^* + u_3^* - 14) = 0$ $\quad 360(\ )=0$

$u_1^*(1200 - 3x_1^* - 2x_2^*) = 0$ $\quad 6.4(\ ) = 0$

$u_2^*(1000 - 4x_1^* - x_2^*) = 0$ $\quad 1.2(\ ) = 0$

$u_3^*(700 - 2x_1^* - x_2^*) = 0$ $\quad \boxed{0(\ ) = 0}$ OK

$\boxed{0\ (20) = 0}$

questo vuol dire che 20 ore non le "uso"
infatti risulta $680 \le 700$!

si potrebbero aumentare le materie prime x sfruttare quelle 20 ore di lavoro "sprecate"
x fare questo non rifaccio il PL ma sfrutto i teo sulla dualità forte
uso i calcoli sulla f.o. in x^*, u^*

$24(160) + 14(360) = 8880$

$\cancel{1200}(6.4) + 1000(1.2) = 8880$

1201

↳ es (aumento di 1 kilo il 1° ingrediente

questo si chiama ANALISI POST OTTIMALE :)

allora $1201(6.4) + 1000(1.2) > 8880$:)

e la produzione aumenta di 6.4

se aumento il 2° ingrediente aumenta di 1.2

per questo u_1, u_2, u_3 vengono chiamate
PREZZI OMBRA

PL con variabili intere binarie 0,1
per uso di
- assegnazione
- indicazione

MODELLI DI PLI Progr. Lineare Intera
- interezza dovuta al fatto che le variabili di decisione rappresentano quantità indivisibili
- uso di variabili binarie
  possono assumere valori $\{0,1\}$
  alcune classi di problemi che usano var. bin:

PROBLEMA DI ASSEGNAMENTO

esempio di prob di assegn.:
azienda. 3 mansioni. 3 lavoratori. 3 salari diversi a seconda del lavoro e del lavoratore

	Lavoratore 1	Lav 2	Lav 2
Lavoro C1	5	4	7
C2	6	7	3
C3	8	11	2

introduco variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } C_i \text{ assegnato a Lav}_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} \min 5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + \\ \quad + 3x_{23} + 8x_{31} + 11x_{32} + 2x_{33} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad , i = 1, \dots, 3 \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$L_1 \quad \dots \quad L_n$

P_1

$\vdots$

P_n

c_{ij} = costi di assegnamento

$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } P_i \text{ è ass. a } L_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\begin{cases} f.o. \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \text{ , chi scrive } j = 1, \dots, n \quad (?) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \text{ , chi scrive } i = 1, \dots, n \quad (?) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

questa è la FORMA GENERALE

a parte la natura binaria (ultima condizione) la struttura è come quella dei problemi di trasporto

x far valere il teorema per cui ∃ sol ottima intera dei prob di trasporto, cambio l'ultima condizione in:

$0 \leq x_{ij} \leq 1$

che restringo a:

$x_{ij} \geq 0$

esempio

5 Aerei, 5 voli in partenza
in tabella c'è numero di passeggeri che rimangono a bordo da 1 HUB all'altro

aereo/volo	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
A_1	15	20	8	16	12
A_2	17	9	15	25	12
A_3	12	32	16	9	20
A_4	/	15	9	7	30
A_5	/	/	35	10	18

vuol dire che A_5 arriva troppo tardi x fare volo P_1

variabili $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se volo } P_j \text{ è assegnato all'aereo } A_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

le variabili che non si possano verificare si pongono come non esistenti o uguali a zero

$$x_{41} = 0$$
$$x_{51} = 0$$
$$x_{52} = 0$$

$$\begin{cases} \max\ (15\, x_{11} + 20\, x_{12} + 8\, x_{13} + 16 x_{14} + 12 x_{15} + \\ \quad + 17\, x_{21} + 9\, x_{22} \ldots \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ x_{21} + \ldots = 1 \\ x_{31} + \ldots = 1 \\ x_{41} + \ldots = 1 \\ x_{51} + \ldots = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \\ x_{14} + \ldots = 1 \\ x_{15} + \ldots = 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

la soluz ottima è

$x_{11} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{53} = 1$

e le altre $= 0$

//

altro problema da risolvere con var. binarie

PROBLEMA DEL KNAPSACK BINARIO (BISACCIA)

quali oggetti portare in base ai vincoli di capacità x massimizzare l'utilità

esempio

budget 18000 € . 4 investimenti/progetti (non è possibile investimento parziale) che hanno costi e ricavi

	P_1	P_2	P_3	P_4
COSTO	8	6	5	4
RICAVO	40	24	15	18

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se faccio } P_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\ 40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 18\,000 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

FORMA GENERALE

	P_1	...	P_n
COSTO	c_1	...	c_n
RICAVO	r_1	...	r_n

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se faccio } P_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\ \sum r_i x_i \quad i = 1, \dots, n \\ \sum c_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

$\sum c_i x_i \leq b$ → detto VINCOLO DI KNAPSACK

con b = budget

29 NOV 2019

PROBLEMI DI CAPITAL BUDGETING

$T = \{1, \dots, t\}$ periodi

$a_i = (a_{i1}, \dots, a_{it})$

a_{ij} = flusso di cassa generato dall'investimento dall'investimento i-esimo nel periodo j-esimo

n = # investimenti possibili

flusso di cassa $< 0 \Rightarrow$ guadagno

$> 0 \Rightarrow$ costo

es. $a_i = (5, 3, -7, 9)$

$c_i = - \sum_{j=1}^{t} a_{ij}$

$j = 1, \dots, t$

b_j budget disponibile

$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se i-esimo investim è realizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \ (*) \quad b_j \text{ budget del periodo} \\ x_i \in \{0, 1\} \\ (*) \ j = 1, \dots, t \end{cases}$$

$x_i \in \{0, 1\}$ $\qquad$ $x_i \in [0, 1]$

$\nVdash$

VARIABILI INDICATRICI

$x \geq 0$ variabile vincolata non negativa

$\delta \in \{0, 1\}$ variabile binaria

voglio usare δ per descrivere x:

$\boxed{x > 0 \Rightarrow \delta = 1}$

$\boxed{\delta = 0 \Rightarrow x = 0}$ poichè $A \Rightarrow B$ $\neg B \Rightarrow \neg A$

$M \gg x$

$x - M\delta \leq 0$ questa è equivalente a quelle sopra

da qui:

$\delta = 1 \Rightarrow x > 0 \longrightarrow \boxed{\delta = 1 \Rightarrow x \geq \varepsilon > 0}$

e:

$\boxed{x = 0 \Rightarrow \delta = 0}$

$x - \varepsilon\delta \geq 0$ questa è equivalente a quelle sopra

ESEMPIO (DIETA)

se è presente l'ingrediente 1 $\Rightarrow$ non deve essere presente l'ingrediente 5

$x_i \geq 0$

se $x_1 > 0 \Rightarrow x_5 = 0$

introduco δ binaria, $\delta \in \{0, 1\}$ che marca la presenza degli ingredienti

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{ingrediente presente} \\ 0 & \text{ingr. non presente} \end{cases}$$

$x_1 > 0 \Rightarrow \delta = 1$

$\delta = 1 \Rightarrow x_5 = 0$

$M \gg x_1$

(1) $x_1 - M\delta \leq 0$

$\delta = 1 \Rightarrow x_5 = 0$

$1 - \delta = 0 \Rightarrow x_5 = 0$

(2) $x_5 - M(1 - \delta) \leq 0$

$$\begin{cases} x_1 - M\delta \leq 0 \\ x_5 - M(1 - \delta) \leq 0 \end{cases}$$

PROBLEMA DEL COSTO FISSO (costo produzione unitario)

1 macchina, 1 prodotto, x quantità

$x \geq 0$

c costo unitario di produzione

f costo fisso (di set-up)

$$f(x) = \begin{cases} cx + f & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f non lineare perché discontinua

introduco $\delta = \begin{cases} 1 & \text{se produzione è avviata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

allora $x > 0 \Rightarrow \delta = 1$

$x = 0 \Rightarrow \delta = 0$

$x - M\delta \leq 0$, $M > x$

$$\begin{cases} \min(cx + f\delta) \\ [\dots] \text{ vincoli} \\ x - M\delta \leq 0 \\ x \geq 0, \ \delta \in \{0,1\} \end{cases}$$

quando x=0 rimane solo min ($f\delta$) che ha min quando $\delta=0$

$i = 1, \dots, n$

$x_i \geq 0$

$f_i > 0$

introduco:

$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se i esimo prodotto realizzato} \\ 0 & \text{altrim} \end{cases}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i \\ [\dots] \text{ vincoli} \\ x_i - M_i \delta_i \leq 0 \\ M_i > x_i \\ x_i \geq 0 \\ \delta_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

problema generale

$$\begin{cases} x_i \le b_i \\ x_i - M_i \delta_i \le 0 \end{cases}$$

se prendi $M_i = b_i$
si riduce a 1 solo vincolo
$x_i - b_i \delta_i \le 0$

Esempio

centrale elettrica. 3 generatori A, B, C
ogni giorno si decide quali usare di giorno e quali di notte x avere almeno 4000 Megawatt di giorno e 2800 MW di notte
Il personale viene pagato (costi di attivazione) a seconda del generatore e del giorno/notte

	Costi attivazione giorno	Costi attivazione notte	Costo unitario per Megawatt
Gen A	750	1000	3
Gen B	600	900	5
Gen C	800	1100	6

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{costi attivazione dei generatori}}$

	Capacità produttiva x periodo
Gen A	2000
Gen B	1700
Gen C	2500

variabili di decisione:

x_{Ai} quantità prodotta in periodo i-esimo
x_{Bi}
x_{Ci}
con $i = 1$ giorno
$i = 2$ notte
e con $x_{Ai}, x_{Bi}, x_{Ci} \ge 0$
$\delta_{Ai} \in \{0,1\}$
$\delta_{Bi} \in \{0,1\}$
$\delta_{Ci} \in \{0,1\}$

con $\delta_{A/B/C\ i} = \begin{cases} 1 & \text{se il gen } A/B/C \text{ è attivo nel periodo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

f.o. $3X_{A1} + 3X_{A2} + 5X_{B1} + 5X_{B2} + 6X_{C1} + 6X_{C2} +$

COSTI DI ATTIVAZIONE $\begin{cases} + 750\,\delta_{A1} + 1000\,\delta_{A2} + 600\,\delta_{B1} + 900\,\delta_{B2} + \\ + 800\,\delta_{C1} + 1100\,\delta_{C2} \end{cases}$

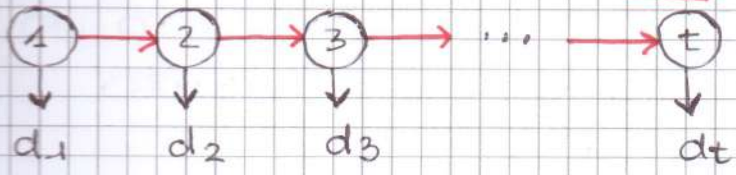
da minimizzare

$$\begin{cases} \min\ 3(X_{A1} + X_{A2}) + 5(X_{B1} + X_{B2}) + 6(X_{C1} + X_{C2}) + \\ \quad 750\,\delta_{A1} + 1000\,\delta_{A2} + 600\,\delta_{B1} + 900\,\delta_{B2} + \\ \quad 800\,\delta_{C1} + 1100\,\delta_{C2} \\ x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \geq 4000 \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \geq 2800 \\ \cancel{\begin{bmatrix} x_{A1} \leq 2000 & x_{A2} \leq 2000 \\ x_{B1} \leq 1700 & x_{B2} \leq 1700 \\ x_{C1} \leq 2500 & x_{C2} \leq 2500 \end{bmatrix}} \quad X - M\delta \leq 0 \\ x_{A1} - 2000\,\delta_{A1} \leq 0 \\ x_{A2} - 2000\,\delta_{A2} \leq 0 \\ x_{B1} - 1700\,\delta_{B1} \leq 0 \\ x_{B2} - 1700\,\delta_{B2} \leq 0 \\ x_{C1} - 2500\,\delta_{C1} \leq 0 \\ x_{C2} - 2500\,\delta_{C2} \leq 0 \\ x_{Ai}, x_{Bi}, x_{Ci} \geq 0 \qquad i = 1,2 \\ \delta_{Ai}, \delta_{Bi}, \delta_{Ci} \in \{0,1\} \qquad i = 1,2 \end{cases}$$

diventa superfluo se pongo M uguale alla capacità massima

MODELLI DI LOT-SIZING (gestione delle scorte)

$T = \{1, \dots, t\}$ periodi, c_i costi unit di produz.
richiesta su periodo $(d_1, \dots, d_T)$



→ = merce rimasta, immagazzinata fino al t successivo

b_i costi unit di immagazzinamento
possono esserci periodi inattivi
f_i costi fissi di attivazione della produzione
nel periodo i-esimo
i va sempre da 1 a t
COSTO TOT = COSTI PROD + COSTI STOCKAGGIO + COSTI SET-UP

variabili
$x_1, x_2, x_3 \dots x_t$ cioè x_i = quantità di prodotto da produrre nel periodo i esimo
$s_1, s_2, s_3 \dots s_{t-1}$ costo immagazzinam.
$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se la produz. è attiva nel periodo i-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

f.o.
$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{t} c_i x_i + \sum_{i=1}^{t-1} s_i b_i + \sum_{i=1}^{t} f_i \delta_i \\ x_1 = d_1 + s_1 \\ s_{i-1} + x_i = d_i + s_i & i = 2, \dots, t-1 \\ s_{t-1} + x_t = d_t \\ * \; x_i - M\delta_i \leq 0 & i = 1, \dots, t \\ M > x_i \quad \forall i = 1, \dots, t \\ x_i \geq 0 & i = 1, \dots, t \\ \delta_i \in \{0, 1\} & i = 1, \dots, t \end{cases}$$

* rappresenta le condizioni $x_i > 0 \Rightarrow \delta_i = 1$

4 DIC 2019

PROBLEMI DI LOCALIZZAZIONE DI IMPIANTI

q impianti da posizionare in delle località a scelta tra m aree disponibili ($q \leq m$). La scelta va in base alle proprietà del luogo (es. distanza luogo - cliente)

area disponibile A_1 ... A_m

capacità max dell'impianto in quell'area p_1 ... p_m

costo fisso di costruzione in quell'area f_1 ... f_m

} IMPIANTI

CLIENTI {
C_1 ... C_m → clienti
r_{c_1} ... r_{c_m} → richiesta del cliente

costo costruz. strada da i a j f_{ij} $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$

costo trasporto unitario merce da i a j C_{ij} $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$

capacità max su tratta da i a j M_{ij} $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$

} ROTTE

si dà per scontato:

- si costruisce al più 1 impianto in ogni area
- q = # impianti costruiti $\leq m$ = # aree disponibili

Introduco variabili:

x_{ij} = quantità merce trasportata da origine i a destinazione j

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'impianto è costruito in area } i\text{-esima } A_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se è costruita la strada da } i \text{ a } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}}_{\text{COSTI MERCI}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i}_{\text{COSTI COSTRUZIONE IMPIANTI}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} y_{ij}}_{\text{COSTI COSTRUZIONE STRADE}}$$

vincoli: • soddisfacimento richieste clienti

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = r_j$$

• se arriva merce da 1 impianto, questo deve essere stato costruito

se $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} > 0 \Rightarrow \delta_i = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - p_i \delta_i \le 0$

• se si trasporta merce su una tratta, questa deve essere stata costruita

se $x_{ij} > 0 \Rightarrow y_{ij} = 1 \Rightarrow x_{ij} - M_{ij} y_{ij} \le 0$

• # impianti ≤ # aree

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \le q$$

• $x_{ij} \ge 0, \quad \delta_i \in \{0,1\}, \quad y_{ij} \in \{0,1\}$

esempio: 1 azienda. 5 clienti in 5 luoghi diversi

3 aree disponibili, 2 impianti da costruire

	COSTO COSTR.	CAPACITA'
Dep 1	10'000	180
Dep 2	15'000	230
Dep 3	13'000	500

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
RICHIESTA	91	170	135	153	110
COSTO TRASP DA:					
Dep 1	15	13	27	9	7
Dep 2	12	21	34	21	3
Dep 3	7	10	2	17	12

x_{ij} = quantità da trasport. da Dep i a C_j

$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se Dep i è costruito} \\ 0 & \text{altrim} \end{cases}$

$$\begin{cases}
\min \underbrace{15x_{11} + 13x_{12} + 27x_{13} + 9x_{14} + 7x_{15} + 12x_{21} + 21x_{22} + 34x_{23} + 21x_{24} + 3x_{25} + 7x_{31} + 10x_{32} + 2x_{33} + 17x_{34} + 12x_{35}}_{\text{COSTI PROD MERCE}} + \underbrace{10000\,\delta_1 + 15000\,\delta_2 + 13000\,\delta_3}_{\text{COSTI COSTRUZ}} \\
\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} x_{i1} &= 91 \\ \sum x_{i2} &= 170 \\ \sum x_{i3} &= 135 \\ \sum x_{i4} &= 153 \\ \sum x_{i5} &= 110 \end{aligned}\right\} \text{VINCOLI MERCE} \\
\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{5} x_{1j} - 180\,\delta_1 &\le 0 \\ \sum x_{2j} - 230\,\delta_2 &\le 0 \\ \sum x_{3j} - 500\,\delta_3 &\le 0 \end{aligned}\right\} \text{vincoli capacità} \\
\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \le 2 \quad \rightarrow \text{max 2 impianti costruiti} \\
x_{ij} \ge 0 \quad \delta_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,\ j = 1,2,3,4,5
\end{cases}$$

→

PROBLEMI DI SCHEDULING (vincoli disgiuntivi)

macchina che lavora prodotti e ha capacità unitaria
con compiti non divisibili e non interrompibili
n lavori da fare
p_i tempo di occupazione macchina per lavoro i-esimo (cioè durata)
t_i istante di tempo di inizio del lavoro i-esimo

il problema è che non sappiamo a priori quale lavoro viene eseguito prima/dopo.

idealmente (1) $t_j \geq t_i + p_i$ se i precede j

(2) $t_i \geq t_j + p_j$ se j precede i

questi sono i vincoli disgiuntivi

si introducono

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se lavoro } i \text{ precede } j \\ 0 & \text{se lavoro } j \text{ precede } i \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (1) diventa $y_{ij} = 1$

(2) diventa $y_{ij} = 0$

se:

$y_{ij} = 1 \Rightarrow t_j \geq t_i + p_i$

$y_{ij} = 0 \Rightarrow t_i \geq t_j + p_j$

e ora sappiamo modellare queste implicazioni logiche

$y_{ij} = 0 \Rightarrow t_i \geq t_j + p_j \longrightarrow t_j + p_j - t_i \leq M y_{ij}$

$y_{ij} = 1 \Rightarrow t_j \geq t_i + p_i \longrightarrow t_i + p_i - t_j \leq M(1 - y_{ij})$

con $t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$

$1 \leq i < j \leq n$

Tempo medio di permanenza nel sistema di 1 lavoro (cioè occupazione della macchina

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i + p_i)}{n}$$

tempo tot di uso della macchina

$$\max (t_i + p_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

questi 2 tempi vanno minimizzati

es. macchina a capacità unitaria. 3 lavori da fare
durata: $p_1 = 2h$
$p_2 = 3h$
$p_3 = 4h$

se 1° lavoro precede il 2°, l'inizio del 3° deve aspettare
1 tempo $\Delta_3 = 2h$ dal termine del 2°

se 3° lavoro precede il 1°, l'inizio del 2° deve aspettare
1 tempo $\Delta_2 = 3h$ dal termine del 1°

t_1, t_2, t_3 (istanti di inizio lavorazione) ≥ 0

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se lavoro } i \text{ precede lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$1 \leq i < j \leq 3$

cioè se metto $y_{1,2}$ non metto $y_{2,1}$

M supera sia $t_i - t_j + p_i$ sia $t_j - t_i + p_j$

$$\left.\begin{aligned} t_1 - t_2 + 2 &\leq M(1 - y_{12}) \\ t_2 - t_1 + 3 &\leq M\, y_{12} \\ t_1 - t_3 + 2 &\leq M(1 - y_{13}) \\ t_3 - t_1 + 4 &\leq M\, y_{13} \\ t_2 - t_3 + 3 &\leq M(1 - y_{23}) \\ t_3 - t_2 + 4 &\leq M\, y_{23} \end{aligned}\right\} \text{vincoli di scheduling (di sequenziamento)}$$

- $t_2 + 3 + 2 - t_3 \leq M(1 - y_{12})$

poiché $y_{1,2} = 1 \Rightarrow M(1 - y_{12}) = 0 \Rightarrow t_2 + 3 + 2 \leq t_3$

- $t_1 + 2 + 3 - t_2 \leq M(y_{13})$

poiché $t_1 + 2 + 3 \leq t_2$

Tempo medio da minimizzare

$$\begin{cases} \min \frac{1}{3}(t_1 + 2 + t_2 + 3 + t_3 + 4) \\ \text{vincoli di scheduling} \\ \text{vincoli aggiuntivi } (\bullet, \bullet) \\ t_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \\ y_{12}, y_{13}, y_{23} \in \{0,1\} \end{cases}$$

H

che è già il valore più piccolo. Si aggiorna l'ottimo corrente: $\tilde{x} = \bar{x}^{(j)}$
$\tilde{z} = c^T \bar{x}^{(j)} = L_j$
e si chiude il problema $P^{(j)}$. Se $\bar{x}^{(j)} \notin S_j$
faccio branching su $P^{(j)}$ generando sottoproblemi di $P^{(j)}$ che inserisco in $\mathcal{L}$.
Itero di nuovo.

1) BOUNDING

$$P^{(j)} = \begin{cases} \min c^T x \\ x \in S_j \end{cases}$$

$P^{(j)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^j x \geq b^j, x \geq 0\}$
1 delle possibili formulazioni di $P^{(j)}$

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P^j \cap \mathbb{Z}^n = S_j \end{cases}$$

- rilassamento lineare:

determino lower bound risolvendo il prob rilassato $\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P^j \end{cases}$

$L^j = c^T \bar{x}^{(j)}$ dove $\bar{x}^{(j)}$ è solut. del rilassam. lineare

- rilassamento qualsiasi:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in \bar{P}^j \end{cases} \quad \text{con } S_j \subseteq \bar{P}^j$$

(non è lineare perché non è detto che $\bar{P}^j$ sia esattamente S_j)

2) BRANCHING

binario

IN QUESTI CASI NON FACCIO BRANCHING
- $\bar{x}^j \in S_j \Rightarrow \bar{x}^j$ sol ottima di $P^j \Rightarrow$ chiudo problema
- $\tilde{z} \leq L_j \Rightarrow$ problema non promettente $\Rightarrow$ chiudo

quando non valgono le condiz sopra e $L_j < \tilde{z}$ e $\bar{x}^{(j)}$ non è tutta a componenti intere allora faccio branching.

deduco che c'è almeno 1 componente non intera, supponiamo la k-esima, di $\bar{x}^{(j)}$.
k: indice di comp. non intera di $\bar{x}^{(j)}$

$P^{(j)}$: $\begin{cases} \min c^T x \\ x \in S_j \end{cases}$ genera:

$P^{(j,1)}$

$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in S_j \\ x_k \leq \underbrace{\lfloor \bar{x}_k^{(j)} \rfloor} \end{cases}$

PARTE INTERA INFERIORE

→ l'unione dà tutto S_j ←

$P^{(j,2)}$

$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in S_j \\ x_k \geq \underbrace{\lceil \bar{x}_k^{(j)} \rceil} \end{cases}$

PARTE INTERA SUPERIORE

3) SCELTA DEL SOTTOPROBLEMA

scelta di tipo
- FIFO
- LAST IN FIRST OUT LIFO
- $\boxed{\text{MINIMO LOWER BOUND}}$ scelta + efficiente e promettente!

branching binario: genera 1 $x_k = 0$ e 1 $x_k = 1$!

es
$$\begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

applichiamo tecnica di B&B a questo prob che è il $P^{(0)}$
1 punto ammissibile da cui partire è $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\tilde{x} = (3,2)^T$, $\tilde{z} = 22$.

→

Faccio Bounding per trovare lower bound L_0
uso rilassamento lineare (elimino vincolo di interezza), ottengo
$\bar{x}^{(0)} = (21/5 \quad 23/10)$, $L_0 = -2\cdot\frac{21}{5} - 8\cdot\frac{23}{10} = -26.8$

il punto è a coord intere? NO
$L_0 > \tilde{z}$? NO, anzi $L_0 < \tilde{z}$
devo avviare l'algoritmo e fare branching su P^0:

$$\begin{tikzcd} & P^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ P^1 & & P^2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \geq \lceil 21/5 \rceil = 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \leq \lfloor 21/5 \rfloor = 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\mathcal{L} = \{P^1, P^2\}$
iterazione
estraggo 1 prob dalla lista $\mathcal{L}$, ad es P^1:
(quando lo studio lo tolgo dalla $\mathcal{L}$)
faccio bounding su P^1
la sol del rilassam lineare mi dà:
$\bar{x}^{(1)} = (5, \frac{3}{2})^T$, $L_1 = -22$

confronto con l'ottimo corrente.
poiché risulta $L_1 = \tilde{z} = -22$, chiudo P^1
(non potrà mai migliorarmi la soluz)
itero di nuovo
prendo P^2 da $\mathcal{L}$

prendo P^2 da $\mathcal{L}$. (ora $\mathcal{L}$ ora è vuota $\mathcal{L}=\emptyset$)
faccio bounding su P^2. ottengo:

$\bar{x}^{(2)} = (4, 9/4)^T$, $L_2 = -26$

$-26 = L_2 < \tilde{z} = -22$ quindi questo è 1 prob promettente. la sua soluz non è a componenti intere quindi ~~[illegible]~~ non posso chiuderlo.
Faccio branching su P^2

P^3
$$\begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq \lceil \frac{9}{4} \rceil = 3 \\ x_{1,2} \geq 0,\ x_{1,2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

P^4
$$\begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq \lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2 \\ x_{1,2} \geq 0,\ x_{1,2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \{P^3, P^4\}$$

prendo P^3. Faccio bounding su P^3. ottengo 1 problema INAMMISSIBILE. si chiude P^3

$$\mathcal{L} = \{P^4\}$$

prendo P^4. Faccio bounding su P^4. dalla risoluzione del rilassamento lineare ottengo:

$\bar{x}^{(4)} = (4,2)^T$, $L_4 = -24$

noto $-24 = L_4 < \tilde{z} = -22$
questo è 1 prob promettente. la sol. è tutta a componenti intere. AGGIORNO OTTIMO CORRENTE $\tilde{x} = x^4 = (4,2)^T$

$\tilde{z} = -24$

itero ancora: $\mathcal{L} = \emptyset$
quindi fermo l'algoritmo e la soluz ottima intera coincide con l'ottimo corrente: $x^* = \tilde{x} = (4,2)^T$

$z^* = \tilde{z} = -24$