Appunti del corso di Fondamenti di Matematica per Ingegneria Informatica*

Nicola Galesi†

Ultimo aggiornamento: 2 Gennaio 2023

WARNING/ATTENZIONE !

Si fa presente quanto segue

1. Questi sono appunti scritti dal docente durante il corso e quindi non soggetti a una revisione accurata. Possono dunque includere errori e sviste. nel caso si trovino errori e sviste si prega di segnalarle al docente stesso via email con un mail con `SUBJECT: REV NOTE FdM`
2. Le note sono destinate unicamente agli studenti del II canale del corso FONDAMENTI DI MATEMATICA.
3. **è fatto assoluto divieto** a chiunque di farne alcun uso tranne quello di usarle per studiare il corso. In particolare di distribuirle in qualunque forma e per qualunque ragione fino a quando io stesso non lo riterrò opportuno e nel caso ne deciderò le forme. Se dovessi accorgermi che sono distribuite sarò costretto a toglierle e a proteggere i miei scritti per quanto parziali.
4. Le note saranno aggiornate nel tempo.

---

*Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, II° Canale (Lett. L- Z), a.a. 22-23

†DIAG, Sapienza. galesi@diag.uniroma.it

Indice

1 Parte 1 - Preliminari, Logica, Insiemi, Dimostrazioni

Sommario

Simboli e quantificatori $\leq, \geq, \in, \forall, \exists, \exists!$.Variabili, proposizioni e predicati. Insiemi: Diagrammi di Venn, Definizione per elencazione, definizione, cardinalità. Operazioni su Insiemi. Implicazione Logica e Inclusione tra insiemi. Relazione binarie (n-arie) su insiemi. Relazioni d'equivalenza, relazioni d'ordine Insiemi numerici (definizione intuitive di $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$) Teoremi e Definizioni. Dimostrazioni e Controesempi. $A \Rightarrow B$ equivalente $\neg B \Rightarrow \neg A$. Dimostrazioni per costruzione, per contraddizione, per induzione. Controesempi.

Biblio

Cap 1.1 e 1.3 [BPS14]

1.1 Il linguaggio della Logica

La Logica Matematica è una disciplina vasta che studia i fondamenti della Matematica e dell' Informatica. Ci interessa qui specificare solo i mattoni della Logica che ci consentono di parlare di *verità* o *falsità* di una affermazione formale. Parleremo dunque di **valori di verità** in genere rappresentati come $\top$ (vero, anche scritto come 1) e $\bot$ (falso, anche scritto come 0).

Per esempio "2 **è un numero pari**" è un *enunciato* (o anche *proposizione*) vera mentre "1 **è un numero pari**" è un enunciato falso. I semplicissimi strumenti della Logica che useremo nel corso consentono di capire come è possibile comporre i valori di verità. Per esempio: qual è il valore di verità dell'affermazione: "2 è un numero pari **e** 1 è un numero pari" ?

Per rispondere a tale domanda in logica si definiscono delle operazioni su valori di verità, detti *operatori logici o Booleani* (dal matematico George Boole):

- la *congiunzione*, $\wedge$, definita nel modo seguente: la *congiunzione* di due enunciati è vera *se e soltanto se*[a] entrambi le enunciati sono veri (ovvero è falsa sse almeno uno dei due è falso).
- la *disgiunzione*, $\vee$, definita nel modo seguente: la *disgiunzione* di due enunciati è falsa *se e soltanto se* entrambi gli enunciati sono falsi (ovvero è vera sse *almeno una dei due è vera).*
- la *negazione*, $\neg$, definita nel modo seguente: la negazione di un enunciato è vero sse l'enunciato è falso (ovvero è falso sse l'affermazione è vera)

[a] La scrittura "se e soltanto se" sarà da ora in poi sempre abbreviata con **sse**.

Rifletti 1.1

- Quando scriviamo $x \leq 4$, intendiamo: $x < 4 \vee x = 4$
- Quando scriviamo "$3 < x < 5$", intendiamo: $x > 3 \wedge x < 5$.
- Quando scriviamo "$x < 3$ oppure $x > 5$", intendiamo: $x < 3 \vee x > 5$[a].

[a] Quindi fare attenzione alla differenza tra "oppure" nel linguaggio corrente e l'operatore di $\vee$.

Gli operatori logici possono essere descritti in modo rapido tramite le **tavole di verità**.

Definizione 1.1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Un connettivo particolarmente importante è quello della **implicazione logica** $\Rightarrow$ definito dalla seguente tavola di verità:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Per capire il comportamento del connettivo $\Rightarrow$ è utile osservare che tale connettivo deve modellare la verita/falsità del fatto che un dato enunciato B segue, ovvero è logicamente implicato, da un altro enunciato A. Si comprende meglio in questo modo che tale implicazione non potrà che essere falsa quando da un enunciato vero se ne deduce uno falso, mentre in ogni altro caso risulta essere vero. In particolare $\Rightarrow$ modella il fatto che dal falso segue qualunque cosa, ovvero la legge logica *ex falso sequitur quodlibet*. Si può verificare, per esempio tramite le tavole di verità, che $A \Rightarrow B$ non è altro che l'espressione $\neg A \vee B$ ed è per questo che l'implicazione logica può non essere definita tra gli operatori logici di base.

Un altro importante connettivo derivato e quello che modella l'**equivalenza logica** di due enunciati:

$$A \Leftrightarrow B \overset{\texttt{def}}{=} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \text{ (anche scritto come } A \equiv B\text{)}$$

Una *legge logica*, anche detta **tautologia**, è un enunciato il cui valore di verità è sempre vero. Alcune importanti leggi logiche:

Definizione 1.2 (Leggi Logiche)

- *commutatività di* $\wedge$ *e* $\vee$: $A \wedge B \equiv B \wedge A$, $A \vee B \equiv B \vee A$.
- *idempotenza*: $A \wedge A \equiv A$, $A \vee A \equiv A$.
- *distributività*: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
- *elementi nulli*: $A \wedge \bot \equiv \bot$, $A \vee \top \equiv \top$.
- *elementi neutri*: $A \wedge \top \equiv A$, $A \vee \bot \equiv A$.
- *annullamento doppia negazione*: $\neg\neg A \equiv A$.
- *leggi di De Morgan*:
  1. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
  2. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.
- *terzo escluso*: $A \vee \neg A$.
- *trasposizione*: $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$.
- *riduzione all'assurdo*: $(P \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg P$.

Rifletti 1.2

Verificare con le tavole di verità che le leggi logiche della Def. 1.2 sono tautologie.

A volte, come nell' Esempio 1.1, una affermazione contiene una o più variabili, ovvero un oggetto che può assumere differenti valori (nell'Esempio 1.1 possiamo pensare che x è un qualsiasi numero reale). Quindi non possiamo valutare la verità o falsità della affermazione "$x > 3$" fino a quando x non assume un preciso valore, ovvero non instanziamo x con un preciso valore da un dato dominio. Parleremo allora di un **predicato** (o anche di **proprietà** o **relazione**), in genere rappresentata come $P(x), Q(x), \ldots$, per specificare la dipendenza da x.

1.2 Insiemi

Gli insiemi si possono vedere come oggetti elementari della matematica oppure come parte del linguaggio logico. Noi li useremo in modo informale senza scendere nel dettaglio della teoria assiomatica degli insiemi di cui parleremo brevemente in seguito.

Definizione 1.3 (Intuitiva di insieme)

Un insieme è una *collezione di elementi* ed è determinato dai suoi elementi. Ovvero vi è un criterio *universale* (cioè accettato senza ambiguità) per decidere se un dato elemento appartiene o meno a quella collezione.

- Gli insiemi si denotano (ovvero ci si riferisce) con lettere maiuscole $A, B, C, \ldots$.
- per abbreviare il fatto che un elemento a *appartiene ad un insieme* B si usa la scrittura $a \in B$ (a volte anche $B \ni a$). Mentre per dire che a **non** *appartiene a* B si scrive $a \notin B$.

Un insieme si può specificare in differenti modi:

- per **estensione**, specificando uno ad uno i suoi elementi. Tale metodo può dunque usarsi solo quando il numero di elementi è **finito**.
- per **caratteristica** (o definizione **intensiva**), lì dove usiamo un proprietà per definire gli elementi dell'insieme.

Esempio 1.1

- $A := \{1, 3, 5, 9\}$ è l'insieme dei numeri naturali dispari minori di 10.
- $B := \{a \mid a$ è un numero primo >10$\}$.

Notiamo che nel secondo esempio gli elementi di B si specificano tramite una proprietà $P(a) \overset{\texttt{def}}{=}$ "" a è un numero naturale

Quantificatori

Consideriamo una proprietà $P(a)$ dove a può assumere valori in un certo *dominio* D. Ha senso interrogarsi sulla verità o falsità dei seguenti enunciati:

- Per ogni elemento $a \in D$, $P(a)$ è vera.
- Esiste un elemento $a \in D$, $P(a)$ è vera.

Si faccia attenzione al fatto che tali affermazioni sono degli enunciati e in quanto tali assumono un valore di verità. Per esempio il primo risulta essere falso se qualche elemento $a \in D$, rende $P(a)$ falsa. Il secondo risulta falso lì dove ogni elemento di D non verifica il predicato $P()$. I due enunciati possono scriversi in maniera formale e compatta tramite l'uso di altri due operatori logici: il **quantificatore universale** $\forall$ e il **quantificatore esistenziale** $\exists$.

- $\forall a \in D \;\; P(a)$.
- $\exists a \in D \;\; P(a)$.

Ricapitolando, $P(a)$ è un predicato la cui verità/falsità dipende dal particolare valore che può assumere la variabile a. Diremo in tale caso che in $P(a)$ la variabile a è **libera**. Invece $\forall a \in D \;\; P(a)$ e $\exists a \in D \;\; P(a)$ sono enunciati di cui possiamo decidere la verità/falsità e in cui la variabile a ancora compare ma **vincolata** (dai quantificatori).

Aggiorniamo dunque le leggi logiche della Definizione 1.2 includendo anche il caso dei quantificatori

Definizione 1.4 (Leggi Logiche +)

1. $\neg(\forall x \in D\ P(x)) \equiv \exists x \in D\ \neg P(x)$.
2. $\neg(\exists x \in D\ P(x)) \equiv \forall x \in D\ \neg P(x)$.

Nel corso a volte useremo questa notazione $\exists!$ per indicare che esiste uno ed un solo elemento. Per esempio

$$\exists! x \in \{2,3,4\}\ :\ x \text{ è dispari}$$

è una proprietà vera.

Esempio 1.2

Cerchiamo di capire con un esempio l'importanza dell'alternanza dei quantificatori. Tranne che in casi specifici se $P(x,y)$ è un predicato con x e y a valori in un dominio D le due affermazioni $\forall x \exists y P(x,y)$ e $\exists x \forall y P(x,y)$ possono avere valori di verità diversi.

Per esempio, supponiamo che il dominio sono i *numeri interi* $\{\ldots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots\}$ (che introdurremo poco più avanti) e che x, y possono prendere valore in questo insieme. Allora $\forall x \exists y(x+y=0)$ è chiaramente una proposizione vera (basta prendere come y il numero $-x$). Invece $\exists x \forall y(x+y=0)$ è chiaramente falsa (non è vero che esiste un numero x tale che sommato a qualunque intero y dia 0).

Consideriamo adesso alcune importanti osservazioni sul concetto di insieme. La prima importante osservazione è che in un insieme la *molteplicità* non conta: ogni elemento compare al più una volta.

Esempio 1.3

L'insieme delle soluzioni dell'equazione $(x-1)^2 = 0$ è l'insieme $\{1\}$ e non $\{1,1\}$[a].

[a] Collezioni di oggetti, come $\{1,1\}$ in cui la molteplicità conta, ovvero dove $\{1\}$ e $\{1,1\}$ non sono lo stesso insieme, sono detti **multi-insiemi**, ma non si considereranno questo corso.

Un *sottoinsieme* B di un insieme A è un insieme formato da zero o più elementi di A. Un insieme che contiene zero elementi è detto **insieme vuoto** e si denota con $\emptyset$. Diremo anche che B *è incluso in* A (o anche B *è contenuto in* A) e scriveremo

$$B \subseteq A$$

Dimostrare che un insieme B è contenuto in un insieme A se i due insiemi sono definiti per estensione è banale visto che basta osservare gli elementi. Se invece A e B sono definiti per caratteristica, dimostrare che $A \subseteq B$ significa far vedere che $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Per scrivere che B non è contenuto in A usiamo la notazione $A \subset B$ (o a volte $\not\subseteq$). Si faccia attenzione al fatto che $A \not\subseteq B$ significa dire che in B vi è qualche elemento che non è in A, ovvero che $\exists b$ tale che $b \in B \wedge b \notin A$[1].

[1] Da adesso in poi abbrevieremo tali scritture per esempio come $\exists b \in B\ :\ b \notin A$ evitando l'uso di $\wedge$ e $\vee$.

Rifletti 1.3

- $\{2,4,5\} \not\subseteq \{x \mid x$ è un numero naturale pari$\}$.
- $\{x \mid x$ soluzione di $(x-2)^2 = 0\} \subseteq \{x \mid x$ è un numero naturale $\}$
- $\emptyset \subseteq A$, per ogni insieme A

Due insiemi A e B sono uguali, e scriveremo $A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Definizione 1.5 (Operazioni su insiemi)

- *intersezione*: $A \cap B = \{x \; : \; x \in A \wedge x \in B\}$.
- *unione*: $A \cup B = \{x \; : \; x \in A \vee x \in B\}$.
- *complemento rispetto a un universo* U: $\overline{A} = \{x \; : \; x \in U \wedge x \notin A\}$.

Possiamo definire l'operazione di *differenza tra insiemi*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Pertanto $\overline{A} = U \setminus A$. Si può osservare come le operazioni su insiemi siano analoghe agli (e definite in termini degli) operatori logici su valori di verità $\wedge, \vee, \neg$. Nel contesto degli insiemi il ruolo del falso $\perp$ è giocato dall'insieme vuoto $\emptyset$, mentre il ruolo del vero $\top$ è giocato dall'universo U sul quale gli insiemi sono definiti. Tale analogia può essere descritta formalmente (cosa che si fa nel corso di Algebra), ma in definitiva porta ad avere sugli insiemi delle proprietà delle operazioni su insiemi del tutto analoghe alle leggi logiche.

Si possono dimostrare, usando la definizione di uguaglianza tra insiemi, le seguenti proprietà:

Proposizione 1.1 (Proprietà insiemi)

- *commutatività di* $\cap$ *e* $\cup$: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
- *idempotenza*: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.
- *distributività*: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- *elementi nulli*: $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup U = U$.
- *elementi neutri*: $A \cap U = A$, $A \cup \emptyset = A$.
- *annullamento doppio complemento*: $\overline{\overline{A}} = A$.
- *leggi di De Morgan*:
  1. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
  2. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- *terzo escluso*: $U = A \cup \overline{A}$.

Una operazione particolarmente importante su insiemi è il **prodotto cartesiano** $A \times B$, di due insiemi A e B e che include tutte le copie *ordinate ordinate* (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) \ : \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

In generale $A \times A$ si scrive anche come A^2. Inoltre la definizione può generalizzarsi al prodotto cartesiano di $n > 2$ insiemi:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \ : \ a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$$

Definizione 1.6 (Cardinalità di un insieme finito)

La cardinalità di un insieme finito A[a] è il numero di elementi di A e si indica con $|A|$[b].

[a] Intuitivamente un insieme è finito se ha un numero finito di elementi. Più avanti, e dopo aver introdotto il concetto di funzione, nella Lezione 3 vedremo come sono definiti formalmente gli insiemi finiti ed infiniti.

[b] Da non confondere con la funzione valore assoluto $|\cdot|$ definita più avanti.

Daremo una definizione di cardinalità di un insieme più precisamente più avanti nella Definizione 2.6 a pagina 22 in modo tale da includere anche il caso degli *insiemi con un numero infinito di elementi* (Definizione 2.22).

Un altro insieme notevole da ricordare è L'INSIEME DELLE PARTI DI UN INSIEME A, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. Tale insieme si denota con $\mathcal{P}(A)$ (o con 2^A).

Esempio 1.4

Se $A = \{1, 2, 3\}$ allora,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Come esercizio sulle cardinalità si possono provare le seguenti proprietà

Esempio 1.5

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Rifletti 1.4 (Digrammi di Venn)

Verificare con i diagrammi di Venn le proprietà degli insiemi della Proposizione 1.1.

1.2.1 Paradossi e limitatezza del concetto di insieme

Abbiamo visto che insiemi infinti possono definirsi solo *per caratteristica* o *intensionalmente*. Inoltre abbiamo detto che, per definizione, un insieme è una collezione per la quale possiamo decidere senza ambiguità, se un qualunque oggetto gli appartiene o meno. Vedremo che la definizione intensionale può produrre un paradosso, nel senso che esistono delle collezioni che non sono insiemi nella definizione che abbiamo dato.

Il paradosso è noto anche come *Paradosso di Bertrand Russel* (un importante Logico e Filosofo vissuto nel 1900).

(Paradosso di Russel – versione informale)

In un villaggio abita un solo barbiere. Il barbiere rade **tutti e solamente** gli uomini del villaggio che non si radono da soli. A quale insieme appartiene il barbiere ? A quello degli uomini che si radono da soli, oppure a quello degli uomini che si fanno radere dal barbiere ?

La versione formale della contraddizione è la seguente

Osservazione 1.1(Paradosso di Russel – versione formale)

Sia $A = \{X : X \text{ è un insieme e } X \notin X\}$. Ci si chiede: quali dei due casi è vero?

1. $A \in A$,
2. $A \notin A$

Risposta: nessuno dei due casi. Dunque A non è un insieme. La dimostrazione si trova a pagina 17 nell'Esempio 1.8

Tale risultato ha minato le basi della matematica, che però ha continuato ad usare la definizione (intuitiva) di insieme, evitando tali paradossi. Invece per avere una definizione matematicamente corretta di insieme si è introdotta una teoria assiomatica degli insiemi (detta di Zermelo-Fraenkel) dove l'assunzione di alcuni assiomi evita il sorgere di tali paradossi. (L'assunzione di assiomi per definire una teoria non è nuova. Per esempio la *geometria euclidea* si fonda su assiomi indimostrabili, per esempio l'assioma che afferma che due rette parallele non is incontrano mai).

È interessante notare che evoluzioni di questo paradosso hanno portato nel corso del 1900 ha importanti risultati della matematica (*Teoremi di Incompletezza* di Kurt Gödel, che si studia in *Logica Matematica*) e importanti risultati della informatica (esistono problemi che non sono *decidibili*, ovvero per i quali non esiste un algoritmo che può risolverli, per esempio il ben noto *Problema della Fermata di un Algoritmo*, che si studia in *Calcolabilità e Complessità Computazionale*).

1.3 Insiemi numerici

Il corso verte su alcuni insiemi di numeri che ricordiamo brevemente e la cui definizione formal verrà discussa in cenni più avanti.

$\mathbb{N}$ - Numeri naturali

$\mathbb{N} \stackrel{\texttt{def}}{=} \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (a volte scritto come $\mathbb{N}^*$).

$\mathbb{Z}$ - Numeri interi

$\mathbb{Z} \stackrel{\texttt{def}}{=} \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ - Numeri razionali

$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{m}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$[a]

[a]Osservare che $\mathbb{Q}$ può essere equivalentemente definito come $\mathbb{Q} := \{p : \exists m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \ : \ p = \frac{m}{n}\}$.

Rifletti 1.5

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

I numeri possono essere rappresentati attraverso un **allineamento decimale**, ovvero nella forma

$$\pm p.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots$$

dove $p \in \mathbb{N}$ e ogni numero α_i è in $\mathbb{N}$, ed è compreso tra 0 e 9, ovvero $0 \leq \alpha_i < 10$.

Per esempio $\frac{3}{2} = 1.5$ e $\frac{10}{3} = 3.\bar{3}$ sono numeri razionali in $\mathbb{Q}$ perché esprimibili tramite il rapporto di due interi. Si sa che i numeri in $\mathbb{Q}$ possono esprimersi attraverso *allineamenti decimali* detti **limitati**, ovvero tali che da un certo decimale in poi tutti gli α_i sono 0, oppure **periodici** quando un certo blocco finito di cifre decimali si ripete sempre uguale nella parte decimale.

Ma esistono anche dei numeri, per esempio $\sqrt{2} = 1.4142 \cdots$, che sono allineamenti decimali ma che non sono razionali, ovvero non sono né limitati né periodici (per una dimostrazione di questo fatto si veda la sezione seguente). Per includere tali numeri detti **irrazionali** si considera la classe di *numeri reali*.

$\mathbb{R}$ - Numeri reali

$\mathbb{R}$ è la classe dei numeri esprimilibili atttaverso un allineamento decimale generico.

$$\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \ : \ x = \pm p.\alpha_1\alpha_2 \cdots, \text{ dove } p \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha_i < 10\}$$

Introdurremmo più avanti un quarto insieme numerico, detto dei **numeri complessi** e indicato con $\mathbb{C}$ dove i numeri sono del tipo $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e i è quel numero il cui quadrato è -1 (che non esiste in $\mathbb{R}$).

1.4 Principio di Induzione, dimostrazioni e controesempi

La sviluppo della matematica si basa su tre elementi essenziali **Definizioni**, **Teoremi** e **Dimostrazioni**.

La *Definizioni* descrivono formalmente gli oggetti matematici e le nozioni che utilizziamo, possono essere semplici o anche volte complicate. Le definizioni consentono di formulare degli *enunciati matematici*. Tale enunciato potrebbe essere vero o falso ma grazie alle definizione, sarà formalmente corretto. Le *Dimostrazioni* sono dei ragionamenti formalmente corretti e *logicamente corretti* che un dato enunciato è vero. I *Teoremi* sono gli enunciati matematici per i quali esiste una dimostrazione della sua verità.

In questa sezione analizzeremo alcune forme di dimostrazione che in qualche modo permettono di inquadrare quasi tutte le dimostrazioni conosciute. Iniziamo dando delle regole logiche generali. L'enunciato di un Teorema può assumere differenti forme logiche:

- della forma $A \Rightarrow B$, ovvero assumendo per vera l'*ipotesi* A dobbiamo inferire la *tesi* B. In questo caso possiamo cercare una dimostrazione nelle forme descritte precedentemente della implicazione $A \Rightarrow B$. Tale dimostrazione è detta **dimostrazione diretta** di $A \Rightarrow B$. Si osservi che in base alla legge logica di *trasposizione* (Definizione 1.2, pag. 9) si può equivalentemente dimostrare $\neg B \Rightarrow \neg A$ (detta **dimostrazione inversa** di $A \Rightarrow B$.

- della forma $A \Leftrightarrow B$, ovvero un'*equivalenza*. In questo caso dobbiamo dimostrare le due implicazioni : $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$

- un'equivalenza tra più enunciati, della forma $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_{n+1}$. In questo caso dobbiamo dimostrare le n implicazioni $A_i \Rightarrow A_{i+1}$, per $i = 1, \ldots, n$ e poi l'implicazione $A_{n+1} \Rightarrow A_1$.

Esempio 1.6 (Trasposizione)

Dimostrare che : $\forall n \in \mathbb{N}$ n^2 pari sse n pari .

Dimostrare: "n pari" $\Rightarrow$ "n^2 pari" e, usando la trasposizione invece di dimostrare "n^2 pari" $\Rightarrow$ "n pari", dimostriamo "n dispari" $\Rightarrow$ "n^2 dispari".

La prima tecnica che introduciamo è il **principio di induzione**. Supponiamo di avere un predicato $P(n)$ che dipende da un indice $n \in \mathbb{N}$. Per esempio

$$P(n) = \text{" la somma dei primi } n \text{ numeri in } \mathbb{N}^+ \text{ è } \frac{n(n+1)}{2}.\text{"}$$

e supponiamo di voler dimostrare che è vera $\forall n \in \mathbb{N}^* P(n)$. Siccome ci sono un infinito numero di casi, $P(1), P(2), P(3) \ldots$, uno per ogni naturale $n \in \mathbb{N}^+$, non possiamo dimostrarli tutti. Ci viene in aiuto un principio che consente di concludere $\forall n \in \mathbb{N}^+ P(n)$ se abbiamo provveduto a dimostrare:

- il *caso base*, $P(1)$, cioè per $n = 1$
- il *passo induttivo* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, per ogni $n > 1, n \in \mathbb{N}^*$

In generale il Principio di Induzione si può enunciare in un teorema.

Teorema 1.1 (Principio di Induzione)

Sia $n_0 \in \mathbb{Z}$ e sia $P(n)$ un predicato che dipende da un indice $n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq n_0$. Se

1. $P(n_0)$ è vera, e
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è vera per ogni $n > n_0$,

allora è vera

$$\forall n \geq n_0 : P(n).$$

Il principio di induzione fornisce un utile strumento per dimostrare molte proprietà su naturali o oggetti matematici che possono codificarsi come naturali.

Esempio 1.7

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}^+ P(n)$ con $P(n) \stackrel{\texttt{def}}{=} 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dimostrazione

Dimostriamo il *caso base*: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Dimostriamo il *passo induttivo*: Abbreviamo la scrittura $1+2+3+\ldots+n$ con $\sum_{k=1}^{n} k$. Assumiamo $P(n)$ sia vera (per ipotesi induttiva) e dobbiamo dimostrare Sappiamo, per ipotesi induttiva, che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dobbiamo dimostrare che $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ma $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \stackrel{i.i.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Il secondo metodo dimostrativo che introduciamo è la **dimostrazione per assurdo** o **per contraddizione**.

Dimostrazione per assurdo

Supponiamo di dover dimostrare un enunciato P. Invece di dimostrare direttamente P, assumiamo come ipotesi che sia vera la negazione $\neg P$ di P e dimostriamo una contraddizione. (si veda la legge logica in Def. 1.2, pag 9 di riduzione all'assurdo). In sostanza in termini logici, invece di dimostrare P, dimostriamo che $\neg P \Rightarrow \perp$.

Esempio 1.8 (dimostrazione per assurdo)

Paradosso di Russell - Osservazione 1.1

Dimostrazione

Facciamo vedere che entrambi i casi portano a una contraddizione, ovvero non si possono verificare: se $A \in A$, allora per la definizione di A, $A \notin A$. Viceversa se $A \notin A$, allora, sempre per definizione di A, $A \in A$.

Esempio 1.9 (dimostrazione per assurdo)

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dunque, per definizione di $\mathbb{Q}$ esistono $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Possiamo assumere che almeno uno tra m e n sia dispari, altrimenti posso semplificare la frazione $\frac{m}{n}$ per 2 e ottenere altri due interi $m', n' \in \mathbb{Z}$ tali che $\sqrt{2} = \frac{m'}{n'}$. Se necessario ripeto questo processo fin quando uno dei due sarà dispari.
Dunque $n\sqrt{2} = m$ e quindi $2n^2 = m^2$ e $m^2, n^2 \in \mathbb{N}$. Siccome m^2 è 2 volte un numero intero, è necessariamente pari. Dunque dovrà essere dispari n. Proviamo che anche questo è impossibile. Abbiamo visto $m^2 = 2k$, per qualche $k \in \mathbb{N}$ e quindi $2n^2 = 4k^2$, ovvero $n^2 = 2k$. Dunque anche n^2 è pari. Siccome il quadrato di un numero pari è sempre pari (si veda Esempio 1.6 a pagina 16) allora n è pari. **Contraddizione**. $\square$
Dunque la ipotesi per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ è falsa e deve pertanto valere il suo opposto, ovvero che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Rifletti 1.6

Se p è un numero primo $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Molti teoremi affermano l'esistenza di un particolare oggetto con determinate proprietà (si pensi per esempio all'esistenza di un particolare numero con certe proprietà o di un algoritmo che risolva un determinato problema). In questo caso la dimostrazione del teorema consiste nel costruire questo oggetto e dimostrando formalmente che verifica la prorietà richieste (per esempio nel caso di un algoritmo, risolva esattamente il problema per cui è stato progettato). Tale tecnica è detta per **dimostrazione di esistenza costruttiva o per costruzione**.

Dimostrazione di esistenza costruttiva

Consiste nel costruire un oggetto che verifica le proprietà richieste dall'enunciato da dimostrare. È utile quando l'enunciato di un teorema afferma l'*esistenza* di un determinato oggetto o proprietà. La costruzione deve essere verificabile da un algoritmo e presentare l'oggetto richiesto.

Esempio 1.10

Molto spesso non è facile dimostrare costruttivamente l'esistenza di un oggetto matematico. In tali casi, specie quando abbiamo a che fare con insiemi finiti, possono venirci in aiuto tecniche dette **non costruttive**, in cui l'esistenza dell'oggetto non è costruita tramite un procedimento chiaro o algoritmico, ma è, per esempio, frutto di considerazioni sulla cardinalità di insiemi.

Dimostrazione di esistenza non costruttiva

Consiste nel dimostrare l'esistenza di un oggetto senza poterlo effettivamente mostrare o capire come è costruito.

Uno strumento classico usato nelle dimostrazioni non costruttive è il cosiddetto **principio di Dirichlet**, meglio noto come **principio della piccionaia** (*pigeonhole principle* in inglese), che informalmente afferma

Teorema 1.2 (Principio della Piccionaia - versione informale)

Siano $m, n \in \mathbb{N}, m > n$. Se m piccioni devono essere sistemati in n gabbiette, allora almeno una gabbietta conterrà 2 piccioni.

Esempio 1.11

Almeno due cittadini di Milano hanno lo stesso numero di capelli.

A Milano ci sono 1 milione di cittadini mentre il numero di capelli che abbiamo in testa è intorno a 100000. Usiamo il principio della piccionaia dove i piccioni sono i cittadini, dunque $m = 10^6$ e le gabbiette sono il numero di capelli, dunque $n = 10^5$. Quindi per il principio esistono due cittadini con lo stesso numero di capelli.

Come si può osservare la dimostrazione garantisce l'esistenza dei due cittadini con lo stesso numero di capelli ma non dice quali sono. C'è da osservare che il principio dell piccionaia è a sua volta un teorema, che può essere dimostrato per induzione su n, ma ciò è argomento di un corso di *Matematica Discreta*.

Infine è utile ricordare il concetto di **contro-esempio** che sarà usato spesso nel corso. Supponiamo di avere un enunciato che afferma che gli elementi di un dato insieme X verificano una data proprietà P. Per dimostrare che tale enunciato è falso, sarà sufficiente dimostrare l'esistenza di un elemento di X che **non verifica** la proprietà P (abbiamo visto un esempio di questo nell'esercizio 1 del Rifletti 1.3 a pag. 12). Un elemento con questa proprietà viene detto *contro-esempio* (alla proprietà P). Spesso nel trovare controesempi sono utili le dimostrazioni di esistenza sia costruttive che non costruttive.

2 Parte 2 - Struttura di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$. Maggioranti, minoranti, $\sup$ e $\inf$

Sommario

Relazioni e Funzioni. Campi Ordinati. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono campi ordinati. Sistemi assiomatici (cenni). Definizione induttiva di $\mathbb{N}$, definizione assiomatica di $\mathbb{R}$ (cenni).

Funzione *valore assoluto* e sue proprietà. Intervalli. Maggioranti minoranti, estremo superiore e inferiore. Massimo e minimo. Insiemi limitati superiormente ed inferiormente $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente e proprietà archimedea. Completezza di $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ non è completo. Primi esercizi su intervalli e estremi.

Biblio

Cap 1.2 [BDG11], Cap 1.3,1,4 [BPS14]

2.1 Relazioni e Funzioni

Abbiamo visto la nozione di coppia ordinata nella definizione di *prodotto cartesiano* di un insieme. Diamo ora una definizione di *coppia ordinata*.

Definizione 2.1

Siano A e B due insiemi. Una coppia ordinata (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ è l'insieme $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Proposizione 2.1

$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$

Dimostrazione

Dimostriamo solo la direzione$\Rightarrow$. $(a, b) = (a', b')$ implica $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Distinguiamo due casi (1) $a = b$ e (2) $a \neq b$. Se $a = b$, allora $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$, dunque $\{\{a'\}, \{a', b'\}\} = \{\{a'\}\}$. Questo può aversi se e solo se $\{\{a'\}\} = \{\{a\}\}$ e $\{\{a', b'\}\} = \{\{a\}\}$, dunque deve essere $a' = a$ e $\{a\} = \{a, b'\}$ e quindi deve essere $b' = a$.
Se $a \neq b$ allora deve necessariamente essere che anche $a' \neq b'$ (infatti se per assurdo fosse $a' = b'$ allora per il ragionamento del caso (1) dovrebbe essere $a = b$, che non è invece). Infine per la cardinalità degli insiemi deve essere $\{a\} = \{a'\}$, dunque $a = a'$ e $\{a, b\} = \{a', b'\}$ e siccome $a = a'$, allora $b = b'$.

Definizione 2.2 Relazione

Siano A e B due insiemi non vuoti. Una **relazione** R **tra** A **e** B è un sottoinsieme R di $A \times B$. Una *relazione binaria su* A è un insieme $R \subseteq A^2$ di coppie ordinate di elementi di A[a].

[a] Tipicamente ometteremo la specifica "binaria". Il concetto di relazione si estende facimente al caso di $k > 2$ elementi.

Quando due elementi $a, b \in A$ sono legati dalla relazione R, ovvero $(a, b) \in R$, scrive anche aRb.

Esempio 2.1

Consideriamo $X = \{2,3,4\} \subset \mathbb{N}$. $\{(2,3),(2,4),(3,4)\}$ è una relazione su X.

La relazione "minore" (simbolo $<$) è una relazione su $\mathbb{N}$. Quando scriviamo $3 < 4$ usiamo la notazione xRy.

Definizione 2.3 Relazione d'ordine

Sia X un insieme non vuoto. Una relazione R su X si dice **relazione d'ordine** se verifica le tre proprietà.

Riflessiva: $\forall x \in X \; xRx$;

Antisimmetrica: $\forall x, y \in X \;\; (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;

Transitiva: $\forall x, y, z \in X \;\; (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;

Quando su un insieme X definiamo una relazione d'ordine R diremo che X *è ordinato da* R. Inoltre una relazione d'ordine su X è **totale** se vale la ulteriore proprietà

Totalità: $\forall x, y \in X \;\; xRy \vee yRz$;

In questo caso X si dirà *totalmente ordinato* da R.

Rifletti 2.1

1. Comprendere la relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$ e dimostrare che $\leq$ ordina totalmente $\mathbb{N}$.

2. Sia X un insieme. Dimostrare che la relazione di inclusione $\subseteq$ definisce una relazione d'ordine per $\mathcal{P}(X)$. È una relazione d'ordine totale ?

Definizione 2.4 (Funzione)

Siano X e Y due insiemi non vuoti. Una **funzione** f **da** X **in** Y (in simboli $f : X \longrightarrow Y$) è un relazione R_f su $X \times Y$ con la proprietà che $\forall x \in X \exists! y \in Y : (x,y) \in R_f$. Quindi una funzione f è una *corrispondenza (legge)* che associa ad ogni elemento di $x \in X$ *uno ed un solo elemento* $y \in Y$. Tale elemento è detto **valore della funzione in** x e si indica con $y = f(x)$.

Sia $f : X \longrightarrow Y$. Si usano le seguenti importanti notazioni.

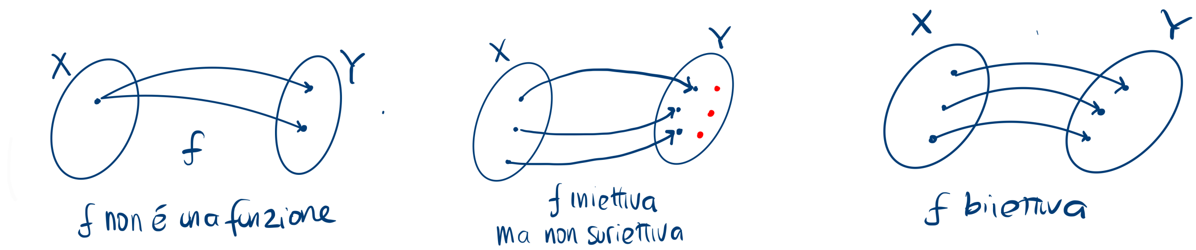


Figura 1: Esempi di funzioni

Notazioni

- X è il **dominio** di f, in simboli dom f (o dom(f)).
- Y è il **codominio** di f.
- Si osservi che non necessariamente per tutti gli elementi y di Y deve esistere un $x \in X$ tale che $y = f(x)$. Dunque ha senso definire l'**immagine** di f come l'insieme di tali elementi di Y, ovvero: $\text{im}(f) := \{y \in Y \ : \ \exists x \in X \ : \ y = f(x)\}$
- Il **grafico** di f è l'insieme delle coppie incluso in $X \times Y$: $\text{graf}(f) : \{(x, f(x)) : x \in X\}$

In genere quando $y = f(x)$, direno che y è **immagine di** x **sotto** f e che x **è contro immagine di** y **sotto f** che vieni indicato come $x = f^{-1}(y)$.

Abbiamo visto che una funzione da X in Y è una legge che associa ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y. Ma come si osserva non stiamo vietando che due elementi di X possano essere associati ad uno stesso elemento di Y. Inoltre non richiediamo che tutti gli elementi di Y siano immagine di qualche $x \in X$ ovvero non è detto che sia $\text{im}(f) = Y$.

Definizione 2.5

Una funzione f si dice

- **iniettiva** se $\forall x, x' \in X \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ (o equivalentemente per trasposizione $\forall x, x' \in X \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$).
- **surgettiva** (o surgettiva) se $\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$
- **biiettiva** (o bigettiva) se f è sia iniettiva che suriettiva, ovvero

$$\forall y \in Y \exists! x \in X \ : \ f(x) = y$$

Definizione 2.6

Sia A un insieme finito non vuoto. Diremo che la cardinalità di $|A|$ è $k \in \mathbb{N}^*$ se e soltanto se esiste una funzione biiettiva $f : A \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$. Se $A = \emptyset$ allora la sua cardinalità è $|A| = 0$.

Osservazione 2.1

Siano X e Y due insiemi finiti non vuoti. Se esiste una funzione f biiettiva da X in Y, allora $|X| = |Y|$.

Dimostrazione

Dimostriamo $|X| \leq |Y|$ e $|X| \geq |Y|$. Siccome f è suriettiva, allora $\mathsf{im}(f) = Y$ e dunque tutti gli elementi di Y sono immagine di qualche elemento di X. Siccome f è una funzione, ovvero $\forall x \in X \exists! y \in Y : f(x) = y$, allora dev essere che $|X| \geq |Y|$. D'altra parte f è anche iniettiva e dunque biiettiva e per tanto $\forall y \in Y \exists! a \in X : f(x) = y$. Da cui ricaviamo che $|Y| \geq |X|$.

2.2 Campi ordinati

Andiamo studiare con più precisione gli insiemi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$. Per prima cosa gli insiemi numerici da soli non sono altro che insiemi. Acquistano importanza nel *calcolo* e dunque abbiamo bisogno di capire come agiscono le operazioni di base sui numeri, in maniera analoga a quanto abbiamo visto per i connettivi logici, per esempio con le tavole di verità. Il concetto chiave per comprendere un insieme numerico come $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ è quello di campo. Qui si fornirà una introduzione al tema che serve ai fini del corso. Il corso di Algebra fornirà tutti i dettagli e gli approfondimenti sulle definizioni qui presentate.

Una *operazione* (binaria) su X associa ad ogni coppia $(x, y) \in X \times X$ un terzo elemento $z \in X$. Per esempio la somma $+$ è un'operazione su $\mathbb{N}, \mathbb{R} \cdots$. Un **campo** è una tripla formata da un insieme X e due **operazioni** su X che verificano le proprietà nella seguente definizione.

Definizione 2.7 (Campo)

Un *campo* è una terna $(X, +, \cdot)$ tale che le operazioni soddisfino le seguenti proprietà:

Proprietà per $+$.

1. *commutatività di* $+$: $\forall x, y \in X \ : \ x + y = y + x$,
2. *associatività di* $+$: $\forall x, y, z \in X \ : \ x + (y + z) = (x + y) + x$,
3. **0**, *elemento neutro per* $+$: Esiste ed è unico un elemento in X, detto, denotato con 0 tale che $\forall x \in X \ : \ x + 0 = 0 + x = x$,
4. *esistenza* **opposto**: per ogni elemento $x \in X$ esiste un elemento, $-x \in X$ tale che $x + (-x) = 0$.

Proprietà per $\cdot$.

1. *commutatività di* $\cdot$: $\forall x, y \in X \ : \ x \cdot y = y \cdot x$,
2. *associatività di* $\cdot$: $\forall x, y, z \in X \ : \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot x$,
3. **1**, *elemento neutro per* $\cdot$: Esiste ed è unico un elemento in X, denotato con 1 tale che $\forall x \in X \ : \ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$,
4. *esistenza* **reciproco**: per ogni elemento $x \in X$ con $x \neq 0$ esiste un elemento in X, denotato con x^{-1} (o con $\frac{1}{x}$), tale che $x \cdot x^{-1} = 1$.

1. *distributiva*: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Useremo le seguenti notazioni $\frac{x}{y} \stackrel{\texttt{def}}{=} x \cdot y^{-1}$ e $x^2 \stackrel{\texttt{def}}{=} x \cdot x$.

Abbiamo visto che sugli insiemi numerici abbiamo una relazione d'ordine canonica $\leq$. Quindi nel capire la struttura di calcolo degli insiemi numerici dobbiamo specificare in che modo l'ordine interagisce con le operazioni.

Definizione 2.8 (Campo Ordinato)

Un campo si dice *ordinato* se valgono le seguenti due proprietà:

- $\forall x, y, z \in X \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- $\forall x, y, z \in X \ x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$;

Rifletti 2.2

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sono campi ordinati;
- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non sono campi.

Le seguenti proprietà possono essere dedotte dalle definizioni precedenti per il campo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Proposizione 2.2

1. $\forall x : x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0,$
2. $\forall x, y : x \geq y \Rightarrow -x \leq -y;$
3. $\forall x : x \geq 0 \Rightarrow x^{-1} \geq 0,$
4. $\forall x, y : x \geq y > 0 \Rightarrow x^{-1} \leq y^{-1};$
5. $\forall x, y, z : x \leq y \wedge z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz;$
6. $\forall x \neq 0 : x^2 > 0.$

2.3 Densità

Ci sono due importanti proprietà che possono essere verificate in certi campi su insiemi dove è definita una relazione d'ordine $\leq$ (si ricordi che $x < y$ può essere definito come $x \leq y \wedge x \neq y$).

Definizione 2.9 (Densità)

Sia X un insieme ordinato totalmente da $\leq$. X si dice DENSO$\forall x, y \in X$ con $x < y$, esistono infiniti elementi $z \in X$ tale che $x < z < y$.

Proposizione 2.3 (Densità di $\mathbb{Q}$)

Il campo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ verifica la proprietà di densità.

Dimostrazione

Definiamo la seguente sequenza infinita di numeri razionali $z_1, z_2, \ldots$.
$z_1 = \frac{x+y}{2}$, $z_2 = \frac{z_1+y}{2}$. In generale $z_{n+1} = \frac{z_n+y}{2}$. Risulta dunque $x < z_1 < z_2 \ldots < z_n \ldots < y$.

Un'altra importante proprieta è la seguentà

Definizione 2.10 (Proprietà Archimedea)

$\forall x, y \in X$ con $x, y > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Vale il seguente teorema

Teorema 2.1 (Teoremi di Densità in $\mathbb{R}$)

1. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ovvero $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esistono infiniti numeri $z \in \mathbb{Q}$ (*razionali*) tai che $x < z < y$
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ovvero $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esistono infiniti numeri $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (*irrazionali*), tali che $x < z < y$.

Teorema 2.2 (proprietà Archimedea per $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^+$ ammette la proprietà archimedea. In particolare

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > x.$$

2.4 Intervalli

Abbiamo visto che $\mathbb{R}$ è dotato di un ordinamento lineare. possiamo dunque definire il concetto di **intervallo** con le seguenti notazioni

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, allora definiamo l'*intervallo di estremi a e b*:

$$\begin{aligned}
&[a,b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \textit{(chiuso)}\\
&[a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\\
&(a,b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \textit{(aperto a sinistra)}\\
&(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \textit{(aperto)}\\
&[a,+\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}\\
&(a,+\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\\
&(-\infty,b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \quad \textit{(chiuso)}\\
&(-\infty,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}
\end{aligned}$$

Casi particolari sono: $(a,a) = \emptyset$ e $[a,a] = \{a\}$ e $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Rifletti 2.3

In cosa sono differenti $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e $\mathbb{R}$?

2.5 Estremi Superiori e Inferiori

Definizione 2.11 (Maggioranti e Minoranti)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

1. $S \in \mathbb{R}$ è un MAGGIORANTE di A se $\forall a \in A$ $a \leq S$.
2. $s \in \mathbb{R}$ è un MINORANTE di A se $\forall a \in A$ $s \leq a$.

Definizione 2.12 (Insiemi Limitati)

A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE (rispettivamente INFERIORMENTE) se A ammette un maggiorante (rispettivamente un minorante).
A si dice LIMITATO se è limitato sia inferiormente che superiormente, ovvero sse

$$\exists l, L \in \mathbb{R} \; : \; l \leq a \leq L \;\; \forall a \in A.$$

Osservazione 2.2

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ **non** è limitato superiormente allora scriviamo $\sup A = +\infty$. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ **non** è limitato inferiormente allora scriviamo $\inf A = -\infty$.

Esempio 2.2

- $[-2, 1)$. $1, 2, 10, 10^4$ sono maggioranti di $[0, 1)$. Minoranti sono $-2, -3, -100$. Differenza tra -2 e 1.
- Prendiamo $A = \mathbb{N}$. Esiste un maggiorante di A ? No perché preso un qualunque $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N} : n > x$ (dalla Proprietà archimedea). Però $\mathbb{N}$ ammette minoranti cioè 0.
- Insieme non limitato né superiormente né inferiormente $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$,
- insieme limitati superiormente ma non inferiormente $[\infty, 1]$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Definizione 2.13 (Massimo e Minimo)

1. Un maggiorante di $A \subseteq \mathbb{R}$ che appartiene ad A si dice MASSIMO di A e si indica con $\max A$.
2. Un minorante di $A \subseteq \mathbb{R}$ che appartiene ad A si dice MINIMO di A e si indica con $\min A$.

Proposizione 2.4

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ ammette massimo (rispettivamente minimo), questo è unico.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che ci sono due massimi m_1 e m_2 di A con $m_1 \neq m_2$. Siccome m_1 è un maggiorante di A e $m_2 \in A$ quindi $m_2 \leq m_1$. Simmetricamente ottengo $m_1 \leq m_2$. Dunque $m_1 = m_2$.

Definizione 2.14 (Estremo superiore)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. $S \in \mathbb{R}$ si dice ESTREMO SUPERIORE di A se S è *il più piccolo dei maggioranti di* A. In simboli: $S = \sup A$ sse

1. S è un maggiorante di A, ovvero $S \geq a \; \forall a \in A$
2. $\forall \epsilon > 0$ $(s - \epsilon)$ **non** è un maggiorante di A, ovvero $\forall \epsilon > 0 \; \exists a \in A$ tale che $S - \epsilon < a$.

Definizione 2.15 (Estremo inferiore)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. $S \in \mathbb{R}$ si dice **estremo inferiore** di A se S è *il più grande dei minoranti di* A. In simboli: $s = \inf A$ sse

1. S è un minorante di A, ovvero $S \leq a \; \forall a \in A$
2. $\forall \epsilon > 0$ $(s + \epsilon)$ **non** è un minorante di A, ovvero $\forall \epsilon > 0 \; \exists a \in A$ tale che $a < s + \epsilon$.

Esempio 2.3

1. $A = [0, 1)$. 1 è $\sup A$, ma $1 \notin A$, 0 è $\inf A$ ma $0 \in A$.
2. $A = [-\pi, 3] \cup \{1\} \cup [1, +\infty)$. Allora $\inf A = -\pi$ e $\sup A = +\infty$. $\min A = -\pi$.
3. $A = \{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}^+\}$. A è limitato superiormente?. $A = \{1, 1/2, \ldots\}$. 1 è un maggiorante, e si vede facilmente che $\sup A = \max A = 1$. $\inf A = 0$, ma 0 non è il min. Dimostrare che $0 = \inf A$. Verificare che $0 = \min A$
4. $A = \{1 - \frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}^+\}$. Trovare $\inf, \sup \max, \min$. $A = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots\}$ 0 è minorante e 1 è un maggiorante. $0 = \min A = \inf A$. $1 = \sup A$ (Dimostrare)
5. $A = \{n + \frac{2}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}^+\}$. Siccome $n + \frac{2}{n} \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, allora ne ricavo che $\sup A = +\infty$. Vediamo l'$\inf A$ con precisione. $A = \{3, 3, \underbrace{3 + 2/3}_{\geq 3}, \underbrace{4 + 2/4}_{\geq 3}, \underbrace{5 + 2/5}_{\geq 3}, \ldots\}$. Congetturo dunque che $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $n + \frac{2}{n} \geq 3$ e lo dimostro (per induzione su $n \in \mathbb{N}^+$). Concludo dunque che 3 è un minorante di A, ma siccome $3 \in A$, dunque, $\inf A = \min A = 3$.

Soluzione

Vediamo come si dimostra in (5) che 3 è un minorante per A, ovvero che $n + \frac{2}{n} \geq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Per $n = 1$ e per $n = 2$ risulta $n + \frac{2}{n} = 3$ e quindi la tesi è vera. Se $n \geq 3$ allora $n + \frac{2}{n} \geq n \geq 3$.

2.5.1 Alcune utili proprietà

Proposizione 2.5

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

1. Se a è un maggiorante per A e $a \in A$, allora $a = \sup A = \max A$;
2. Se a è un un minorante per A e $a \in A$, allora $a = \inf A = \min A$;

Dimostrazione

Dimostriamo la (1). La (2) è analoga. Dobbiamo solo far vedere che $a = \sup A$, ovveor che a verifica i due casi della definizione di $\sup$. Per ipotesi a è un maggiorante e la prima è verificata. Supponiamo per assurdo che la seconda non valga, ovveor che $\exists \epsilon > 0 \forall x \in A x \leq a - \epsilon$. Ma $a \in A$ e dunque esiste un $\epsilon > 0$ tal eche $a \leq a - \epsilon$ che è un evidente contraddizione. Dunque $a = \sup A$ e poiché $a \in A$ allora $a = \max A$. $\square$

Proposizione 2.6

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e limitati superiormente. Allora $A \cup B$ è limitato superiormente e

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \tag{1}$$
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} \tag{2}$$

Proposizione 2.7

Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ e sia $B \subseteq A$ e sia B non limitato superiormente. Allora A non è limitato superiormente.

***Dimostrazione* (Cenni)**

Se per assurdo A fosse limitato superiormente, allora anche B dovrebbe esserlo. Ma per ipotesi non lo è. $\square$

Proposizione 2.8

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se $A \subseteq B$ e B limitato allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Soluzione

Osserviamo che dalla definizione di $\inf$ e $\sup$ si ha che $\inf A \leq \sup A$ per ogni insieme A limitato. Quindi siccome B è limitato $\inf B \leq \sup B$ e siccome $A \subseteq B$ anche A è limitato, dunque $\inf A \leq \sup A$. Osserviamo ancora che siccome $A \subseteq B$, allora $m(B) \subseteq m(A)$ dove $m(X)$ è l'insieme di minoranti di X (farsi un semplice esempio per capire questo passaggio). Dunque $\inf B = \max m(B) \leq \max m(A) = \inf A$. In modo del tutto simmetrico (ma eseguire i passaggi per completezza) vale che $\sup A = \min M(A) \leq \min M(B) = \sup B$, dove $M(X)$ è l'insieme de maggioranti di X e dunque $M(B) \subseteq M(A)$. Dunque ricapitolando abbiamo

$$\begin{array}{ll} (1) & \inf B \leq \inf A \\ (2) & \inf A \leq \sup A \\ (3) & \sup A \leq \sup B \end{array}$$

Definizione 2.16

Due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si dicono CONTIGUI se $\sup A = \inf B$. Se $x = \sup A = \inf B$, allora x si dice ELEMENTO SEPARATORE DI A E B.

Proposizione 2.9

A e B sono CONTIGUI se vale:

1. $a \leq b \, \forall a \leq A \, \forall b \in B$, e
2. $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A \, \exists b \in B \ : \ a > b - \epsilon$.

Direttamente dal proprietà Archimedea per $\mathbb{R}$ (Teorema 2.2, pagina 26), discende che

Proposizione 2.10 ($\mathbb{N}$ non limitato superiormente in $\mathbb{R}$)

$\mathbb{N}$ non è limitato superiormente in $\mathbb{R}$, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.

2.6 Completezza di $\mathbb{R}$

Siano A, B due insiemi numerici. Scriveremo che $A \leq B$ se risulta che

$$a \leq b \qquad \forall a \in A \ \ \forall b \in B.$$

Definizione 2.17 (Assioma di Completezza)

Un insieme numerico X è COMPLETO se per ogni due insiemi non vuoti $A, B \subseteq X$ tali che $A \leq B$ risulta che

$$\exists \lambda \in X \ : \ a \leq \lambda \leq b \ \ \forall a \in A \forall b \in B.$$

Teorema 2.3 (Caratterizzazione Completezza)

Un insieme numerico X è COMPLETO $\Leftrightarrow$.

1. *per ogni sottoinsieme* $A \subseteq X$ *e* $A \neq \emptyset$ *risulta che se* A *è limitato superiormente* $\Rightarrow$ A *ammette estremo superiore* $\sup A$, e

2. *per ogni sottoinsieme* $A \subseteq X$ *e* $A \neq \emptyset$ *risulta che se* A *è limitato inferiormente* $\Rightarrow$ A *ammette estremo inferiore* $\inf A$.

Dimostrazione

Dimostriamo prima il verso $\Rightarrow$ del $\Leftrightarrow$. Dobbiamo far vedere che se X è completo allora vale sia (1) che (2). Dimostriamo la (1) (la (2) si lascia per esercizio essendo simmetrica).
Sia B l'insieme dei maggioranti di A. Siccome A è limitato superiormente (quindi ammette almeno un maggiorante) B è non vuoto. Applichiamo l'assioma di completezza ad A e B. Quindi esiste $\lambda \in X$ tale che $a \leq \lambda \leq b \forall a \in A, b \in B$. Siccome $\forall a \in A \ : \ \lambda \geq a$, allora $\lambda \in B$. Inoltre $\lambda \leq b \forall b \in B$. Dunque λ è il minimo dei maggioranti di A, ovvero il $\sup A$.
Facciamo vedere adesso il verso $\Leftarrow$ del $\Leftrightarrow$. Usando entrambi le ipotesi (1) e (2) devo far vedere che X è completo. Considero due insieme generici A e B non vuoti e tali che $A \leq B$, ovvero

$$a \leq b \ \ \forall a \in A \forall b \in B. \tag{3}$$

Devo dimostrare che esiste un $\lambda \in X$ tale che $a \leq \lambda \leq b \ \ \forall a \in A \forall b \in B$. Osserviamo per prima cosa che A è limitato superiormente, ovvero ammette maggioranti: la ragione è che per 3 gli elementi di B sono dei maggioranti per A e B è non vuoto per ipotesi. Simmetricamente ossserviamo che B è limitato inferiormente: A sono minoranti per B e A è non vuoto. Dunque ad A e B possiamo applicare le ipotesi di $\Leftarrow$ (1) e (2) e dire che esistono $\sup A = \lambda_A$ e $\inf B = \lambda_B$. Andiamo a far vedere che $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$. Da qui per le proprieta del $\sup$ e $\inf$ immediatamente discende che $a \leq \lambda \leq b \ \ \forall a \in A \forall b \in B$.
Per far vedere che $\lambda_A = \lambda_B$ dimostriamo che valgono entrambi $\lambda_A \leq \lambda_B$ e $\lambda_B \leq \lambda_A$. Le dimostrazioni sono simmetriche e dimostriamo la prima. Chiamiamo $M(A)$ l'insieme de maggioranti di A e $m(B)$ l'insieme dei minoranti di B. Sappiamo che $\lambda_A = \sup A = \min M(A)$ e $\lambda_B = \inf A = \max m(B)$. D'altra parte $B \subseteq M(A)$ (infatti se $b \in B$, allora $b \leq a \ \ \forall a \in A$ e dunque $b \in M(A)$). Quindi $\lambda_A \leq b \ \ \forall b \in B$. Dunque $\lambda_A \in m(B)$ e quindi $\lambda_A \leq \lambda_B$ perché $\lambda_B = \max m(B)$. Riassumendo le implicazioni logiche sono le seguenti:

$$\begin{array}{cc}
\lambda_A = \min M(A) & (1) \\
B \subseteq M(A) & (2) \\
\Downarrow & \\
\lambda_A \leq b \ \ \forall b \in B & \text{da (1) e (2)} \\
\Downarrow & \\
\lambda_A \in m(B) & \text{da def } m(B) \\
\Downarrow & \\
\lambda_A \leq \max m(B) = \lambda_B &
\end{array}$$

□

In base al Teorema 2.3 posso usare come assioma di completezza per $\mathbb{R}$ che ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$, A limitato superiormente ammette estremo superiore (e simmetricamente per A limitato inferiormente). Facciamo vedere che $\mathbb{Q}$ non ammette tale proprietà.

Teorema 2.4 ($\mathbb{Q}$ non è completo)

Esiste un intervallo $A \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoto e limitato superiormente (rispettivamente inferiormente) che **non** ammette $\sup A$ (rispettivamente $\inf A$).

Dimostrazione

Prendiamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Quindi $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. $1 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e quindi A è non vuoto. Inoltre, $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \ : \ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Dunque $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è limitato inferiormente e superiormente. Facciamo vedere che A non ammette né $\inf$ né $\sup$ in $\mathbb{Q}$. Procediamo con il caso del $\sup$, perché per l'$\inf$ è una dimostrazione analoga. Supponiamo per assurdo che esiste $\exists S \in \mathbb{Q}$ tale che $S = \sup A$. Siccome $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ allora $S \neq \sqrt{2}$ e quindi deve essere: (1) $S > \sqrt{2}$ oppure (2) $S < \sqrt{2}$. Nel primo caso per il Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. (Teorema 2.1 pagina 25) esiste un $q \in \mathbb{Q}$ tale che $\sqrt{2} < q < S$, ma allora S non è il $\sup$ di A. Contraddizione. Nel secondo caso sempre per il Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ esiste un razionale q' tale $S < q' < \sqrt{2}$, e dunque $q' \in A$, ma allora S non è un maggiorante di A. Contraddizione. □

La dimostrazione che $\mathbb{R}$ è completo discende dal fatto che la Definizione 2.17 viene assunta come assioma per $\mathbb{R}$ detto appunto ASSIOMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$.

Teorema 2.5

$\mathbb{R}$ è completo.

Vediamo alcune importanti proprietà che discendono dall' assioma di completezza per $\mathbb{R}$. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, con A, B non vuoti, ovvero $A, B \neq \emptyset$. Diremo che A e B sono *separati* in $\mathbb{R}$ se $\sup A \leq \inf B$. Il numero λ, se esiste, tale che $\sup A \leq \lambda \leq \inf B$ si dice *elemento separatore* di A e B.

Teorema 2.6 (Caratterizzazione della continuità di $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ è completo $\Leftrightarrow$ ogni coppia (A, B) di separatori di $\mathbb{R}$ ammette elemento separatore.

Infine facciamo vedere due proprietà dando una definizione preliminare.

Definizione 2.18

Una sequenza di intervalli $I_0, I_1, \ldots$ denotata con $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *monotona decrescente* se

$$\forall n \in \mathbb{N} \ I_{n+1} \subset I_n.$$

Esempio 2.4

Una sequenza di intervalli monotona decrescente può aver intersezione vuota.

Soluzione

Prendiamo $I_n \overset{\texttt{def}}{=} (0, \frac{1}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Risulta chiaro che $I_{n+1} \subset I_n$. Supponiamo per assurdo

$$\exists x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Allora $0 < x < \frac{1}{n+1}$. Ma per il principio Archimedeo se $x > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n + 1 < x$. Ovvero $x > \frac{1}{n+1}$. Contraddizione.

Un risultato simile si può dimostrare prendendo come intervalli $I_n \overset{\texttt{def}}{=} [n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

Gli intervalli dell'esempio precedente hanno la caratteristica di essere intervalli aperti o non limitati di $\mathbb{R}$. Vediamo che nel caso di intervalli chiusi e limitati in $\mathbb{R}$ invece possiamo dimostrare un risultato differente che verrà usato in seguito in varie dimostrazioni

Proposizione 2.11 (Principio degli intervalli incapsulati)

Sia $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sequenza *monotona decrescente* di intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ e sia $I \overset{\texttt{def}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Valgono le seguenti proprietà:

1. $I \neq \emptyset$;
2. $\inf\{|I_n| \ : \ n \in \mathbb{N}\} = 0 \Leftrightarrow |I| = 1$.

2.7 Cenni su definizione assiomatica di $\mathbb{N}$

Abbiamo visto una definizione intuitiva dei numeri naturali. Come se fossero un concetto dato. In realtà anche i numeri naturali possono essere definiti all'interno della teoria formale degli insiemi (che però non abbiamo introdotto). Qui daremo un breve cenno a come si definiscono i numeri naturali in tale teoria. Iniziamo spiegando l'euristica (cioè l'intuizione informale) per costruirli. Definiamo $0 \overset{\texttt{def}}{=} \emptyset$, cioè l'insieme vuoto. Poi $1 \overset{\texttt{def}}{=} 0$ come l'insieme che contiene lo 0 come suo unico elemento, cioè $1 \overset{\texttt{def}}{=} \{\emptyset\}$; $2 \overset{\texttt{def}}{=} \{0, 1\}$, ovvero l'insieme $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; poi $3 \overset{\texttt{def}}{=} \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, e così via.

Tale euristica dunque ci permette di esprimere numeri naturali come insiemi. Consideriamo ora la seguente notazione.

Per ogni insieme x sia $\hat{x} \overset{\texttt{def}}{=} x \cup \{x\}$.

Definizione 2.19

Diremo un insieme X **induttivo** se vale la seguente proprietà $I(X)$:

1. $\emptyset \in X$, e
2. $\forall x(x \in X \Rightarrow \hat{x} \in X)$.

In una formula scriveremo

$$I(X) \stackrel{\texttt{def}}{=} \emptyset \in X \wedge (\forall x(x \in X \Rightarrow \hat{x} \in X))$$

In generale dunque avremo che se X è un insieme induttivo, allora $0 \in X$ e $n + 1 = \hat{n} \in X$, per ogni $n \geq 0$. Dunque ci aspettiamo che in un insieme induttivo ci siano sicuramente tutti i numeri naturali (più eventualmente altri oggetti) e dunque possiamo dire che:

Definizione 2.20 (Numeri Naturali)

n è un numero naturale se $n \in X$, per ogni insieme induttivo X:

Si osservi che perché la definizione di *insieme induttivo* sia coerente e abbia senso, la classe degli insiemi induttivi deve essere non vuota, ovvero deve esistere almeno un insieme induttivo. Per questo si usa considerare nella teoria formale degli insiemi un assioma detto *assioma dell'infinito* che asserisce quanto richiesto, ovvero che

Definizione 2.21 (Assioma dell'infinito)

$$\exists X \ \ I(X).$$

2.8 Insiemi infiniti e loro cardinalità

Per prima cosa diamo la definizione di *insieme finito*, si rivedano anche la Definzione 1.6 a pagina 13 e La Definizione 2.6 a pagina 22. La definizione afferma che un insieme è finito se i suoi elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i primi k numeri naturali diversi da 0.

Definizione 2.22

Un insieme A *è finito* se *è l'insieme vuoto* oppure se non vuoto, allora esiste una biiezione f da A nell'insieme $\{1, 2, \ldots k\}$, per un certo $k \in \mathbb{N}^*$. ovvero $\exists k \in \mathbb{N}^*$ e $\exists f : A \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ con f biiezione. In questo caso diremo che la cardinalità di A è k. Se $A = \emptyset$ la sua cardinalità è 0.

In particolare questa definizione e argomementi analoghi a quelli usatinella Osservazione 2.1 a pagina 23 ci consente di definire con precisione la relazione tra le cardinalità di due insiemi.

Osservazione 2.3

Siano A e B due insiemi. Allora

1. $|A| = |B|$ se esiste un biiezione $f : A \longrightarrow B$;
2. $|A| \leq |B|$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \longrightarrow B$;
3. $|A| < |B|$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \longrightarrow B$ che non è un biiezione;

Esempio 2.5

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4\}$ $f(1) = 3, f(2) = 4$ è una funzione iniettiva ma non suriettiva (quindi non biiettiva) tra A e B. Infatti $|A| < |B|$.

Tale definizione suggerisce anche la maniera di definire insiemi infiniti. Potremo infatti definire come infinito un insieme che può essere messo in biiezione con un insieme infinito come $\mathbb{N}$,$\mathbb{Q}$, o $\mathbb{R}$. Ma quali di essi esattamente ? Inoltre tutti questi insiemi sono infiniti, ma abbiamo visto per esempio che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dunque, come stanno le cose ? tutti gli infiniti sono uguali ? Vedremo in un attimo che esistono infinite nozioni di infinito per la cardinalità di insiemi.

Iniziamo dalla classe di insiemi infiniti più semplice. Un'importante classe di insiemi infiniti sono quelli detti **numerabili**.

Definizione 2.23

Un insieme A è detto numerabile se può essere messo in biiezione con l'insieme $\mathbb{N}$. Ovvero se esiste una biiezione $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

La cardinalità di $\mathbb{N}$ si indica in matematica con il simbolo $\aleph_0$ (aleph-0). Il fatto che un insieme infinito sia numerabile non è cosi scontato come potrebbe apparire al prima vista. Per esempio a una vista approssimata potremmo aspettarci che $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ e perfino $\mathbb{N}^2$ non siano numerabili visto esistono elementi di $\mathbb{Q}$ che non sono in $\mathbb{N}$. Invece la risposta è differente.

Teorema 2.7

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}^2$ sono insiemi numerabili.

Dimostrazione

Iniziamo col provare la numerabilità di $\mathbb{Z}$. Dobbiamo costruire un mappa biunivoca tra $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ e $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\}$.

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...

Questa mappa è catturata dalla funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$f(i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \frac{i-1}{2} & i \in \mathbb{N}^+, i \text{ dispari} \\ -\frac{i}{2} & i \in \mathbb{N}^+, i \text{ pari} \end{cases}$$

Proviamo ora che $\mathbb{N}^2$ è numerabile dando una mappa biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$. Immaginiamo $\mathbb{N}^2$ organizzato in una tabella del tipo:

$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	...
$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	...
$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	...
$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

La mappa $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ può essere definita ordinando gli elementi della tabella attraversandola per diagonali di lunghezza crescente a partire da $(0, 0)$. Quindi nell'ordine

$$\overbrace{(0,0)}, \overbrace{(1,0),(0,1)}, \overbrace{(0,2),(1,1)(2,0)}, \overbrace{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)}, \ldots.$$

Ora l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è *numerabile* perché ogni razionale positivo è identificato da una coppia di numeri naturali (m, n) primi fra loro e si può far vedere (Esercizio 2.1) che se $A \subseteq B$ e B numerabile allora A è numerabile. Infine tutto $\mathbb{Q}$ è numerabile perché si può far vedere che l'unione di due insiemi numerabili è ancora numerabile (Esercizio 2.1).

Esercizio 2.1

Dimostrare che dati A e B due insiemi,

- $A \subseteq B$ e B numerabile, allora A è numerabile;
- A, B numerabili, allora $A \cup B$ numerabile.

Dunque $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ hanno un numero di elementi infinito equipotente a quello dei numeri naturali, pur essendoci elementi di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ non in $\mathbb{N}$. Quindi ci chiediamo se possiamo concludere la stessa cosa per $\mathbb{R}$. Sappiamo che in $\mathbb{R}$ oltre a razionali ci sono dei numeri irrazionali. Possiamo forse concludere che anche $\mathbb{R}$ è numerabile ? La risposta è **no** e il prossimo teorema, dovuto a G. Cantor (1845-1918), si basa su una tecnica chiamata **diagonalizzaione** che è stata precursore e ha ispirato alcuni tra i più importanti teoremi in Matematica, Logica Matematica e Informatica Teorica. Tra i quali lo stesso paradosso di Russel che abbiamo visto.

Teorema 2.8 (Diagonalizzazione di Cantor)

$\mathbb{R}$ non è numerabile.

Dimostrazione

Faremo vedere che l'intervallo $[0,1]$ non è numerabile. Il risultato su $\mathbb{R}$ segue dalla proprietà che $A \subseteq B$ e B numerabile $\Rightarrow A$ numerabile. (Perché? Dimostrarlo per esercizio).
La dimostrazione che $[0,1]$ non è numerabile è *per riduzione a contraddizione*. Supponiamo per assurdo che esiste una biiezione $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$. Dunque esistono dei numeri tra 0 e 1 associati ad ogni numero naturale. Per esempio $f(0) = 0.44673\ldots$, $f(1) = 0,652477\ldots$ ecc. In generale possiamo scrivere che

$$f(i) = 0.\alpha_0^i\alpha_1^i\alpha_2^i \ldots \alpha_i^i\alpha_{i+1}^i \ldots \qquad i \in \mathbb{N} \;\; \alpha_j^i \in \{0,1,2\ldots,9\}.$$

Consideriamo ora il seguente numero reale, detto *diagonale*:

$d = 0.\beta_0\beta_1\beta_2\ldots$ tale che che $\beta_i \in \{0,1,2\ldots,9\}$ e $\beta_i \neq \alpha_i^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Per esempio se $f(0) = 0.44673\ldots$, $f(1) = 0,652477\ldots$ allora β_0 può essere un numero qualunque diverso da 4 (per esempio 9), $\beta_1 \neq 5$ (per esempio 7) e cosi via.
Il numero d è in $[0,1]$ e dunque siccome f è una biiezione tra $\mathbb{N}$ e $[0,1]$ dovrebbe esistere un $k \in \mathbb{N}$ tale che $f(k) = d$. Dimostreremo che questo non è possibile andando a esaminare la k-esima cifra decimale di d. Infatti se $f(k) = d$ allora la k-cifra di $f(k)$ dovrebbe essere diversa dalla k-esima cifra decimale di d per definizione di d stesso. Dunque non esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che che $f(k) = d$. E questa è una contraddizione con il fatto che f è una mappa biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $[0,1]$. $\square$

Dunque abbiamo trovato un insieme infinito la cui cardinalità non è $\aleph_0$. La cardinalità di $\mathbb{R}$ viene denotata dal simbolo $\aleph_1$ e il fatto che non esista una biiezione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ si indica scrivendo $\aleph_0 < \aleph_1$. Si può far vedere che esiste una gerarchia infinita di cardinalità infinite, facendo vedere (sempre usando la diagonalizzazione), che un insieme A non può essere messo in biiezione con l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle sue parti e dunque la sequenza

$$\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \ldots, \mathcal{P}(\cdots\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\cdots)$$

definisce una sequenza infinita di insiemi infiniti con cardinalità strettamente crescenti.

2.9 Esercizi

Esercizio 2.2

Trovare sup e inf dei seguenti insiemi:

1. $A = \{\frac{(-1)^n}{2+n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
2. $A = \{\frac{|3-n|}{3+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3. $A = \{(-1)^n + \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

Soluzione

Svolte in classe vedere i lucidi

3 Parte 3 - Calcolo combinatorio, coefficienti binomiali, richiami di trigonometria

Sommario

I parte: Disposizioni, Fattoriale, Coefficiente binomiale: definizione ed interpretazione. Triangolo di Tartaglia. Sommatorie, Proprietà delle Sommatorie. Binomio di Newton. Applicazioni e dimostrazioni con il principio di induzione (Disuguaglianza Bernoulli).

II parte: Richiami di Trigonometria.

Biblio

Cap 1.3.3 [BDG11]

3.1 Fattoriale e Coefficiente Binomiale

Introduciamo alcune quantità che sono legate ai numeri naturali. Il numero di *disposizioni* di k elementi tra n elementi dati è

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1).$$

Il numero di disposizioni di n elementi tra gli n è dunque

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$$

una disposizione di tutti gli n elementi dati è una *permutazione* degli n elementi.

Definizione 3.1

Dato $n \in \mathbb{N}$ si dice **fattoriale di** n e scriviamo $n!$ al seguente quantità

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n & n > 0 \end{cases}$$

Dunque il numero di permutazioni di n elementi è $n!$. Ogni permutazione definisce un'ordine degli n elementi. Dunque Il fattoriale è una quantità importante perché conta il il numero di possibili ordinamenti di n oggetti

Esempio 3.1

Contare i modi di ordinare 3 oggetti $\{a, b, c\}$.

Osserviamo che in base alla definziione di fattoriale

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Una *combinazione* di k elementi tra n dati è un sottoinsieme (non ordinato) di k elementi. Ovvero in una combinazione consideriamo uguali due disposizioni che hanno gli stessi elementi anche se in ordine differente. Ci interessa ora contare quante *combinazioni* di k elementi ci sono. Sappiamo che ci sono $\frac{n!}{(n-k)!}$ disposizioni di k elementi e che tutte le dispozioni definite sulllo stesso sottoinsieme di k elementi di n

contano solo una volta. Ci sono $k!$ ordini di k elementi. Dunque il numero di combinazioni di k elementi su n è:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Definizione 3.2

Siano $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Si definisce **coefficiente binomiale di** n **in classe** k e si scrive $\binom{n}{k}$ il numero definito come segue

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Osservazione 3.1

Sia A un insieme finito di cardinalità n. La quantità $\binom{n}{k}$ conta il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità k. Sia $X = \{B \subseteq A \ \ ; |B| = k\}$, allora $|X| = \binom{n}{k}$. Detto in altro modo il coefficiente binomiale conta quanti modi *distinti* ci sono di scegliere k elementi da un insieme di n elementi.

Esempio 3.2

$\binom{n}{5}$, Esempio elementi di un insieme.

Rifletti 3.1

$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$

Proposizione 3.1

1. $\binom{n}{k} \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n$;
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \ \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n$;
4. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \ \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n$.

Dimostrazione

Per esercizio. (*Aiuto*: Dimostrare dalla definizione per calcolo diretto (2) e (3) e poi dimostrare (1) per induzione su $n \in \mathbb{N}$

Ricordiamo gli sviluppi del potenze dei binomi senza specificare i coefficienti dei termini dello sviluppo (mettiamo un $*$).

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1\\
&(a+b)^1 = *a + *b\\
&(a+b)^2 = *a^2 + *ab + *b^2\\
&(a+b)^3 = *a^3 + *a^2b + *ab^2 + *b^3\\
&(a+b)^4 = *a^4 + *a^3b + *a^2b^2 + *ab^3 + *b^4\\
&(a+b)^5 = *a^5 + *a^4b + *a^3b^2 + *a^2b^3 + *ab^4 + *b^5\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tali coefficienti risultano essere i valori del Triangolo di Pascal-Tartaglia che sono ottenuti

$$
\begin{aligned}
&\tbinom{0}{0} = 1\\
&\tbinom{1}{0} = 1, \tbinom{1}{1} = 1\\
&\tbinom{2}{0} = 1, \tbinom{2}{1} = 2, \tbinom{2}{2} = 1\\
&\tbinom{3}{0} = 1, \tbinom{3}{1} = 3, \tbinom{3}{2} = 3, \tbinom{3}{3} = 1\\
&\tbinom{4}{0}, \tbinom{4}{1}, \tbinom{4}{2}, \tbinom{4}{3}, \tbinom{4}{4}\\
&\tbinom{5}{0}, \tbinom{5}{1}, \tbinom{5}{2}, \tbinom{5}{3}, \tbinom{5}{4}, \tbinom{5}{5}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

e che vengono rappresentati con la seguente tavola

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & \tbinom{0}{0} & & & & \\
n=1 & & & & \tbinom{1}{0} & & \tbinom{1}{1} & & & \\
n=2 & & & \tbinom{2}{0} & & \tbinom{2}{1} & & \tbinom{2}{2} & & \\
n=3 & & \tbinom{3}{0} & & \tbinom{3}{1} & & \tbinom{3}{2} & & \tbinom{3}{3} & \\
n=4 & \tbinom{4}{0} & & \tbinom{4}{1} & & \tbinom{4}{2} & & \tbinom{4}{3} & & \tbinom{4}{4}
\end{array}
$$

(Simbolo di sommatoria)

Una maniera di abbreviare una scrittura breve come $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ è quella di usare la scrittura $\sum_{i=1}^{n} i^2$. i si intende un indice che assume valori da 1 a n. La i, come la variabile nei quantificatori, è un *chiusa* e dunque e poco importante se invece di i usiamo k o l e quindi del tutto equivalente scrivere $\sum_{k=1}^{n} k^2$ o $\sum_{l=1}^{n} l^2$. Abbiamo visto per esempio che la somma dei primi n naturali è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$. Ovvero che $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Definizione 3.3

Dato un insieme di numeri reali $A = \{a_i \in \mathbb{R} \ : \ i \in \{1, 2, \dots, N\}, N \in \mathbb{N}^+\}$. Allora la somma degli elementi di A, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ posso scriverla come $\sum_{i=1}^{N} a_i$ o equivalentemente $\sum_{a \in A} a$.

Proposizione 3.2

Valgono le seguenti proprietà:

1. $\sum_{i=1}^{N} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i$;
2. $\sum_{i=1}^{N} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i + \sum_{i=1}^{N} b_i$
3. il nome dell'indice non conta: $\sum_{i=1}^{N} a_i = c \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j$.

Proposizione 3.3

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per $a, b \in \mathbb{R}$, vale la seguente formula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

3.2 Esempi sul principio di Induzione

Facciamo vedere preliminarmente alcuni esempi di dimostrazione con il principio di induzione

Esempio 3.3

- $2^n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}^+$
- $n^2 + n$ è pari, $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

Soluzione

Svolti in classe, vedere i lucidi

3.3 Disuguaglianza di Bernoulli

Teorema 3.1 (Disuguaglianza di Bernoulli)

$(1+x)^n \geq 1+xn, \forall x \geq -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione

La proprietà che devo dimostrare è. $P(n) = (1+x)^n \geq 1+xn$. Proviamo a dimostrarla per induzione su n.
Caso Base. $P(0)$, ovvero $(1+x)^0 = 1$ e $1 + x \cdot 0 = 1$ e $1 \geq 1$.

Caso Induttivo. Devo far vedere che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Ovvero assumendo che sia vero $P(n)$, devo dimostrare $P(n+1)$. $P(n+1)$ è $(1+x)^{n+1} \geq 1 + x(n+1)$.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) && (4)\\
&\geq (1+xn)(1+x) \qquad \textit{per i.i. e } (1+x) \geq 0 \textit{ per i.} && (5)\\
&= 1 + xn + x + x^2n && (6)\\
&= 1 + (n+1)x + x^2n && (7)\\
&\geq 1 + (n+1)x \qquad \textit{perché } x^2n \geq 0 && (8)
\end{aligned}$$

□

3.4 Esercizi su Induzione e calcolo combinatorio

Esempio 3.4 (Somma Geometrica)

Dimostrare la formula $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1$.

Soluzione

Dimostriamola per induzione. La nostra $P(n)$ è $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Base: per $n = 0$ la prporietà è $\sum_{k=0}^{0} q^k = \frac{1 - q}{1 - q} \Leftrightarrow q^0 = 1$. Quindi è vera.

Passo induttivo: Devo dimostrare che $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, ovvero

$$\overbrace{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}^{\text{ipotesi}} \Rightarrow \overbrace{\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}}^{\text{tesi}}$$

Partiamo dalla tesi:

$$= \sum_{k=0}^{n+1} q^k \tag{9}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \tag{10}$$

$$\stackrel{i.i.}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \tag{11}$$

$$= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \tag{12}$$

$$= \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} \tag{13}$$

□

Esempio 3.5 (Binomio di Netwton)

Dimostrare la formula $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Soluzione

La proprietà $P(n)$ che vogliamo dimostrare è $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Per dimostrarla per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo provare a dimostrarla per induzione su n.

Caso Base. Devo dimostrare $P(0)$, ovvero $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. $(a+b)^0 = 1$ (per def di elevamento a potenza) e $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. $\square$

Passo induttivo. Devo far vedere che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Assumo dunque che la proprietà $P(n)$ sia vera, ovvero che $(a.+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Dobbiamo dimostrare che

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n && (14)\\
&\overset{i.i.}{=} (a+b)\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right] && (15)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{(n+1)-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n+1)-k} && (16)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{(n+1)-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n+1)-k} && (17)\\
&= a^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{(n+1)-k} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n+1)-k} && (18)\\
&= a^{n+1} + b^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{(n+1)-k} && (19)\\
&= a^{n+1} + b^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k} && (20)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k} && (21)
\end{aligned}
$$

Il passaggio nell'equazione 17 è dovuto a un traslazione (nella prima sommatoria) dall'indice $k = 0, \ldots, n$ all' indice $j = k+1$ che varia da 1 a $n+1$ e poi rinominato k. L'equazione 20 si ottiene dalla proprietà (3) del coefficiente binomiale (Proprieta 3.1 pag 40). L'equazione finale 21 si ottiene portando nella sommatiroa a^{n+1} e b^{n+1} osservando che possono essere scritti prendendo rispettivamente $k = n+1$ e $k = 0$ $a^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}$ e $b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$. $\square$

Esercizio 3.1

Siano A, B due insiemi initi e non vuoti

1. dimostrare che $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
2. dimostrare che $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Soluzione

Dimostriamo pima la (2): $A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, b \in B\}$, dunque per ogni elemento a di A $A \times B$ ci sono tante coppie quanti sono gli elementi di B, ovvero $|B|$ coppie. Siccome gli $a \in A$ sono $|A|$, allora in totale in $A \times B$ ci sono in $|A| \cdot |B|$ coppie distinte.

Vediamo ora la (1). Supponiamo che A abbia $k \in \mathbb{N}$ elementi. Dobbiamo dimostrare $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$. Consideriamo la seguente *rappresentazione vettoriale v_B di un sottoinsieme B di A*:

1. v_B è un vettore con k coordinate $v_B(i), i = 1, 2, \dots, k$
2. ad ogni coordinata $i = 1, \dots, k$ contiene 0 o 1 a secondo che l'elemento i-esimo di A è o meno in B, in simboli:
$$v_B(i) = \begin{cases} 1 & i \in A \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

Vediamo un esempio per capire la rappresentazione vettoriale. Supponiamo che $A = \{3, 4, 5, 7, 8\}$ e consideriamo il sottoinsieme $B = \{3, 4, 7\}$. B ha vettore $v_B = (1, 1, 0, 1, 0)$. Se $B = \emptyset$ allora $v_B = (0, 0, 0, 0, 0)$ allora se $B = A$, $v_B = (1, 1, 1, 1, 1)$.
Contare quanti elementi ha $|\mathcal{P}(A)|$ dalla sua definizione significa contare quanti sottoinsiemi B di A ci sono e, grazie alla rappresentazione vettoriale, quanti possibili vettori con k coordinate ci sono. Ma questo è facile da contare: infatti ogni coordinata in un vettore può avere due valori 0 oppure 1 e dunque ci saranno $\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}^{k \text{ volte}} = 2^k$ possibili vettori distinti. □
Il risultato si può dimostrare anche per induzione: farlo come esercizio.

Esercizio 3.2

Una classe è formata da 10 studenti 4 donne e 6 uomini. Calcolare il numero di modi in cui

- Formare un comitato di 4 studenti;
- formare un comitato con 2 uomini e 2 donne
- eleggere un presidente un vicepresidente e un tesoriere

Soluzione

(1) $\binom{10}{4}$; (b) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$; (c) $6 \cdot 5 \cdot 4$.

3.5 Richiami di Trigonometria

Si veda il [MS13] capitolo 2.

3.6 Esercizi

Esercizio 3.3

Sia $A = (0, 1]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa dimostrando la risposta

1. $\inf B = 0, \forall B \subseteq A$.
2. $\forall B \subseteq A$, B ammette minimo.
3. $\forall B \subseteq A$, A è costituito da un numero finito di elementi.
4. $\forall B \subseteq A$, B ammette maggioranti.

Esercizio 3.4

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente e/o inferiormente e determinare se esistono i loro $\max$, $\min$, $\sup$ e $\inf$.

1. $A = \{\frac{(-1)^n(2n+1)}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $A = \{\sqrt{n^2+3} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 3.5

Dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

1. $10^n > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $(1-a)^n < \frac{1}{1+na}, \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \ \forall a \in (0, 1)$.

Esercizio 3.6

Dire a quali intervalli di $\mathbb{R}$ corrispondono i seguenti insiemi (la notazione di $\complement_B(A)$ sta per il complemento di A rispetto a B).

1. $(0, 1) \cap (1, 2)$,
2. $(0, 1) \cup (1, 2)$,
3. $(0, 1] \cap [1, 2)$,
4. $(0, 1] \cup [1, 2)$,
5. $\complement_{\mathbb{R}}([0, 1])$,
6. $\complement_{\mathbb{R}}((0, 1))$,
7. $\complement_{\mathbb{R}}((-\infty, 0) \cup (1, +\infty))$
8. $\complement_{\mathbb{R}}((-\infty, 1) \cap (1, +\infty))$

Esercizio 3.7

Siano A, B due insiemi finiti non vuoti. Si dica se sono vere o false, dimostrando la risposta, le seguente affermazioni:

1. $|A| < |B| \Rightarrow$ esiste una funzione suriettiva $f : A \longrightarrow B$
2. $|A| > |B| \Rightarrow$ esiste una funzione iniettiva $f : A \longrightarrow B$

4 Parte 4 - Numeri complessi e struttura $\mathbb{C}$

Introduzione, definizione e motivazioni per la loro introduzione. $\mathbb{R}^2$ e operazioni di $+$ e $\times$ su $\mathbb{R}^2$. Unità immaginaria i e sua proprietà. Esempi di numeri complessi. *Rappresentazione algebrica* di numeri complessi. Piano di Gauss. Coniugato di un numero complesso e sue proprietà. Interpretazione geometrica del modulo. *Rappresentazione trigonometrica* di numeri complessi. Esempi. Rapporto e prodotto di numeri complessi. Formula di de Moivre. Esempi. *Formula di Eulero*: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e sue formule inverse.*Rappresentazione esponenziale* di numeri complessi. Esempi. Radici di numeri complessi. Teorema fondamentale dell'algebra. Esempi. Esercizi.

Biblio

Cap. 1.4 [BDG11], Cap. 1.8 [BPS14]

4.1 Motivazioni e struttura di $\mathbb{C}$

Le motivazioni per l'introduzione delle soluzioni di equazioni delle radice 2 e 3 grado. Va indietro ai Greci, poi nel rinascimento. Fra fien 700 e inizio 800 con Gauss si definiscono in modo assiomatico i numeri complessi

Esempio 4.1

$x^2 = -1$ e eq di terzo grado. Devo vedere

Introduciamo una nuova struttura e dimostriamo che definisce un campo:

Definizione 4.1 (Campo dei numeri complessi)

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ove

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in R\}$ e
- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d))$;
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ si denota con $\mathbb{C}$.

Proposizione 4.1

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo.

Dimostrazione

Verifichiamo alcune proprietà

- $(0,0)$ è l'elemento neutro di $+$. Infatti $(a,b) + (0,0) = (a,b)$
- $(-a,-b)$ è l'opposto di (a,b). Infatti $(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$.
- $(1,0)$ è l'elemento neutro di $\cdot$. $(a,b) \cdot (1,0) = (a,b)$.
- Verificare che $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b) \neq (0,0)$ si ha che $(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{-b^2}{a^2+b^2})$ è l'inverso di (a,b) per $\cdot$.

Esercizio 4.1

Verificar le altre proprietà di campo per $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

4.2 Forma algebrica dei complessi

Osserviamo ora che $\mathbb{R}$ può essere definito a partire da $\mathbb{C}$. Informalmente possiamo pensare che $\mathbb{C}$ è una *estesione* di $\mathbb{R}$.
Consideriamo l'insieme $\mathbb{C}_0 = \{(a,0) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$. Chiaramente $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$. Osserviamo che $(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$ e che $(a,0) \cdot (b,0) = (b \cdot b, 0)$. Dunque osservo che se prendo le operazioni di $+$ e $\cdot$ su C e mi restringo al solo insieme $\mathbb{C}_0$ ho un maniera per definire il campo $\mathbb{R}$ attraverso la corrispondenza $a \in R \mapsto (a,0) \in \mathbb{C}_0$. Inoltre se definisco su $\mathbb{C}_0$ il seguente ordine $(a,0) < (b,0) \Leftrightarrow a < b$, allora $(\mathbb{C}_0, +, \cdot)$ definisce un campo ordinato corrispondente a $\mathbb{R}$

Abbiamo dunque visto che i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{C}_0$ e quindi se ho un complesso $(a,0) \in \mathbb{C}_0$, posso scrivere più semplicemente a. Naturalmente non sappiamo come (e non possiamo infatti) associare a un generico complesso (a,b) un numero reale in $\mathbb{R}$. Posso però cercare di semplificare le mia notazioni cercando di capire come *definire* (a,b) in termini di a e b, ovvero di $((a,0)$ e $(b,0)$. Ossevando al deifntion di $+$ e $\cdot$ su $\mathbb{C}$ è facilissimo osservare che

$$(a,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0)$$

Osserva dunque che la costante complessa $(0,1)$ gioca un ruolo un fondamentale per esprimere (a,b) in termini di a e b. $(0,1)$ viene detta **unità immaginaria**[2] Per cui posso scrivere che:

$$(a,b) = a + ib$$

[2]il nome deriva da ...

Definizione 4.2 (Forma algebrica dei complessi)

La scrittura
$$z = a + ib$$
è detta **forma algebrica** dei numeri complessi. a è la *parte reale* e si dica con $\Re(z)$. b la *parte immaginaria* e si indica con $\Im(z)$.

Tale scrittura è molto comoda perché consente di semplificare le scritture di numeri ed equazioni sui numeri complessi senza dover ricordare la regola astratta

Proposizione 4.2

Valgono le seguenti proprietà

1. $i^2 = -1$;
2. $(a + ib) + (c + id) = (a, b) + (c, d)$
3. $(a + ib) \cdot (c + id) = (a, b) \cdot (c, d)$

Dimostrazione

(1) Dobbiamo far vedere che $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.
(2) e (3) Esercizio

Esempio 4.2

1. $3 + i + 6 + 2i$. Questo è $(3 + 6) + (1 + 2)i = 9 + 3i$;
2. $4 + 2i + 3i = 4 + 5i$;
3. $(1 + i)(2 + 3i) = \ldots = -1 + 5i$;
4. $2i(3 + 6i) = \ldots = -12 + 6i$;
5. nel numero $z = -2i$, $\Re(z) = 0$ e $\Im(z) = -2$

Osservazione 4.1

se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $\Re(z) = 0$, allora z si dice *immaginario puro*.

Piano di Gauss

È una rappresentazione dei numeri complessi mediante vettori in un asse cartesiano dove le ascisse rappresentano la parte reale $\Re(z)$ di $z \in \mathbb{C}$ e le ordinate la parte immaginaria $\mathsf{im}(z)$.

Esempio 4.3

1 è $(1,0)$, i e $(0,1)$. Per esempio $1+i$ la coppia $(1,1)$ $(a,b)+(c,d)=$

4.3 Coniugato e modulo

Definizione 4.3 (Coniugato di un numero complesso)

Dat un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ con $z = a + ib$ si definisce il **coniugato di** z il numero complesso $\bar{z} = a - ib$, ovvero tale che $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ e $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$.

Proposizione 4.3 (Proprietà del coniugato)

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$; $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ se $z = a + ib$.
- $\overline{\overline{z}} = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione

Esempio 4.4

Calcolare la forma algebrica del numero complesso $\frac{1+i}{1+2i}$. Procediamo in questo modo: moltiplichiamo e dividiamo per uno stesso numero complesso, il *coniugato del denominatore*, $1-2i$ cosi da avere $\frac{1+i}{1+2i} = \frac{1+i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3-i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{i}{5}$.

Definizione 4.4 (Modulo di un numero complesso)

Dato $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ si definisce **modulo di** z, $|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Osservazione 4.2

- Se $z \in \mathbb{R}$, ovvero se $z = a$, allora $z = \sqrt{a^2} = |a|$. Ovvero la nozioni di modulo per i reali non è altro che il *valore assoluto*.
- Nella rappresentazione dei vettori come vettori nel Piano di Gauss, il modulo di z non è altro che il modulo del vettore .

Dimostrazione

(1) Calcoli. (2) con rappresentazione grafica

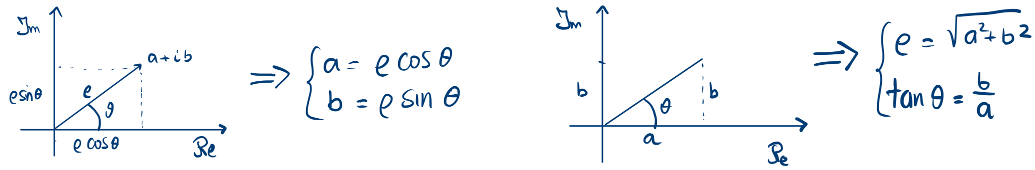


Figura 2: Dimostrazione grafica delle osservazioni 4.3 e 4.4

Proposizione 4.4 (Proprietà del modulo)

Valgono le seguenti proprietà

1. $|z| \geq 0$;
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
3. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (disuguaglianza triangolare);
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

4.4 Forma trigonometrica

Per rappresentare un punto $P = (x, y)$ nel piano cartesiano, oltre che mediante le *coordinate cartesiane*, si può usare una **rappresentazione polare**, in cui le informazioni che identificano univocamente il punto nel piano sono: (1) il *modulo* (lunghezza) del vettore posizione ρ che congiunge il punto P all'origine e (2) l'angolo θ che il vettore posizione forma con l'asse delle ascisse. Quindi $\theta \in [0, 2\pi)$.

Osservazione 4.3 (Da coordinate polari a cartesiane)

$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Osservazione 4.4 (Da coordinate cartesiane a polari)

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \theta = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Quindi

Definizione 4.5 (Forma trigonometrica di un complesso)

Sia $z \in \mathbb{C}$, con $z = a + ib$ e $z \neq 0$. Allora si ha che

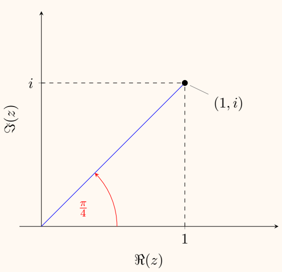
$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove: $\begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(\frac{b}{a}) \end{cases}$

θ viene chiamato *argomento di* z e si indica con $\arg(z)$ e ρ viene detto *modulo* di z e si indica con $|z|$.

Esempio 4.5 (Forma trigonometrica)

(1) Trovare la forma trigonometrica di $z = 1 + i$. Dobbiamo calcolare $\rho = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. E devo calcolare $\theta \in [0, 2\pi]$ tale che $\tan(\theta) = \frac{1}{1} = 1$. $\theta = \frac{\pi}{4}$ direttamente oppure posso valutare nella rappresentazione cartesiana di z l'angolo formato dal vettore che dall'origine va in $(1, 1)$.



Quindi la forma trigonometrica di z è: $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

(2) trovare la forma trigonometrica di $z = -5$. $\rho = |z| = 5$, $\theta = \arg(z) = \pi$. Quindi $z = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$;

(3) se $z = i$, $|z| = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dunque $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

4.5 Operazioni con i numeri complessi

A secondo delle operazioni che vogliamo sui numeri complessi potrebbe essere conveniente usare una forma piuttosto che un'altra. Vediamo alcune delle proprietà della notazione trigonometrica.

Proposizione 4.5

Siano $z_i, z_2 \in \mathbb{C}$, dove $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_1(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Allora

1. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$;
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$.

Dimostrazione

Dimostriamo la (1).

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) && (22)\\
&= \rho_1\rho_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 \ldots && (23)
\end{aligned}
$$

Direttamente dall precedentemente proposizione possiamo dimostrare la seguente formula.

Proposizione 4.6 (Formula di De Moivre)

Sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $n \in \mathbb{N}$, allora

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Esempio 4.6

Scrivere la forma algebrica di $(i+5)^5$. Se consideriamo $z = (1+i)$ allora dobbiamo calcolare z^5. Per usare la formula di De Moivre dobbiamo trovare la rappresentzione trigonometrica di z. Convien rappresentarlo sul piano di Gauss e si vede subito che $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ quindi $z^5 = z^{\frac{5}{2}}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}))$. Se adesso voglio tornare alla forma algebrica devo trovare gli angoli $(\frac{5\pi}{4})$ a cosa corrispondono e poi calcolarne sin e cos. $\sin(\frac{5\pi}{4}) = \cos(\frac{5\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dunque $z = 4 - 4i$ dopo qualche calcolo

4.6 Formula di Eulero e rappresentazione esponenziale

Introduciamo adesso la rappresentazione esponenziale per i numeir complessi. alla base vi è una uguaglianza che dimostreremo in seguito.

Definizione 4.6 (Formule di Eulero)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Proposizione 4.7

$\forall\theta \in \mathbb{R}$ vale che
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

Dimostrazione

Dimostriamo la prima, la seconda è simile. Dalla formula di Eulero abbiamo che $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e dunque $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta + i\sin(-\theta))$. Siccome $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, si ha che
$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta}{2} = \frac{2\cos\theta}{2} = \cos\theta.$$

Dalla formula di Eulero si può ricavare immediatamente un formula famosa
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esempio 4.7

Un altro esempio di elevamento a potenza di numeri complessi

4.7 Teorema fondamentale dell'algebra

Definizione 4.7 (Radice n-esima di un numero complesso)

Dato $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^+$, allora $z \in \mathbb{C}$ è la **radice n-esima di** w se
$$z^n = w.$$

In $\mathbb{C}$ è sempre possibile calcolare le radici. Il seguente Teorema afferma che esistono e anche come calcolarle.

Teorema 4.1 (Teorema di esistenza di radici complesse)

Sia $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in C$ un numero complesso e sia $n \in \mathbb{N}^+$. Allora esistono esattamente n radici complesse distinte z_k, $k \in [n]$ di w.
In particolare $z_k = r(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ dove

$$\begin{cases} r = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \theta_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots n-1\} \end{cases}$$

Dimostrazione

Dato $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e sia $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ una generica radice di w . Dalla formula di De Moivre dsi ha che $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. Dalla definizione di radice dobbiamo imporre che $z^n = w$, ovvero che

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Perché tale uguaglianza valga deve essere che il modulo e l'argomento di w e z^n siano uguali. Quindi deve essere che (1) $\rho = r^n$ e (2) $n\varphi = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. La (2) è vera sse $\varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Manca osservare che è sufficiente prendere $k \in [n]$. Vediamo un esempio per capire che questo è possibile. Nel caso $k = 1$ abbiamo che $\varphi = \frac{\theta+2\pi}{n}$. Facciamo vedere che per $k = n+1$ definiscono la stessa soluzione. Per $k = n+1$ si ha che $\varphi = \frac{\theta+2(k+1)\pi}{n} = \dots = \frac{\theta+2k\pi}{n} + 2\pi$. E dunque $\sin$ e $\cos$ non cambiano valore. Lo stesso ragionamento si estende al generico caso $i > n$.

Esempio 4.8

Calcolare del numero complesso $z = \sqrt{-1}$. Scriviamo $\sqrt{-1}$ in forma trigonometrica. $\sqrt{-1} = \cos\pi + i\sin\pi$, quindi $\rho = 1$ e $\theta = \pi$. Il teorema precedente si dice che abbiamo due radici $z_k = \rho^{1/2}(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{2}))$ per $k = 0, 1$. Quindi $z_0 = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$ e $z_1 = \cos(\frac{\pi+2\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi+2\pi}{2}))$. Dopo pochi calcoli vediamo che $z_0 = i$ e $z_1 = -i$. Infatti $i^2 = -1 = (-i)^2$.

Esempio 4.9

Calcolare le radici quadrate del numero $z = i$.

Si può osservare che le radici n-esime di un numero complesso z sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\rho^{\frac{1}{n}}$ dove ρ è il modulo di z. (vedere esercizi)

Teorema 4.2 (Teorema fondamentale dell'algebra - Gauss)

L'equazione algebrica $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 z^0$ dove $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ammette n soluzioni nel campo complesso, contate con la propria molteplicità.

Alcune osservazioni finali. abbiamo visto che $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo. In base la teorema precedente si dice che è *algebricamente chiuso* ovvero che una equazione polinomiale ammette sempre soluzioni in $\mathbb{C}$, mentre sappiamo che in $\mathbb{R}$ non è un campo algebricamente chiuso. A differenza di $\mathbb{R}$ che ammette un ordine totale $\mathbb{C}$ non può essere ordinato.

Teorema 4.3 (cenni)

$\mathbb{C}$ non può essere totalmente ordinato.

Dimostrazione

Se per assurdo $\mathbb{C}$ fosse ordinabile dovrebbero valere le due proprietà

- $z \in \mathbb{C}$ allora $z^2 \geq 0$
- $z \in \mathbb{C}$ allora $z \geq 0 \Rightarrow -z \leq 0$.

Ma $i^2 = -1$ e se $1 \geq 0$, allora dovrebbe essere $-1 \leq 0$. contraddizione.

4.8 Esercizi

Esempio 4.10

Scrivere in forma algebrica $\frac{(1+i)}{(1-i)}$.

Soluzione

Esempio 4.11

Risolvere $z + \bar{z} = 0$.

Soluzione

Esempio 4.12

Risolvere $(\bar{z})^4 = |z|$.

Soluzione

Esempio 4.13

Calcolare $\sqrt[3]{i-1}$ (forma trig. via Piano di Gauss).

Soluzione

Esercizi a scelta da Cap. 2 e Cap. 3 del [MS13].

5 Parte 5- Funzioni reali di variabile reali: definizioni ed esempi

Sommario

Prime definizioni e generalità. dominio e codominio. operazioni su funzioni (somma prodotto, divisione e composizione). Funzioni iniettive, suriettive e biietitive. Funzione inversa. Funzioni limitate. Funzioni simmetriche. Monotonia e funzioni monotone. Funzioni periodiche. Funzioni pari e dispari. Funzioni elementari. Polinomi. Ulteriori operazioni su funzioni: combinazione lineare, parte positiva, parte negativa, traslazioni, riscalamento, riflessione. Funzioni elementari: lineari, valore assoluto, polinomi, funzioni razionali, radici, funzioni esponenziali e logaritmiche. Funzioni iperboliche. Formule di Eulero. Catenaria e identità fondamentale. Funzioni trigonometriche.

Biblio

Cap. 2 [BPS14], Cap. 2 [Rad10]
Cap 2.2, 2.3 [BPS14]

5.1 Funzioni reali: definizioni preliminari

Abbiamo visto nella Lezione **??** il concetto di funzione tra due insiemi X e Y. A noi interessa il caso in cui X e Y sono insiemi numerici e in particolare quando sono sottoinsiemi $\mathbb{R}$

Definizione 5.1

Una funzione reale di variabile reali è una funzione $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Questo si può scrivere come $x \mapsto y = f(x)$. X è detto dominio della funzione f e si indica con $\mathsf{dom}\, f$.

Ad esempio $x \mapsto f(x) = x^2$. Ricordiamo le seguenti definizioni

$$\mathsf{im}(f) = f(X) \stackrel{\texttt{def}}{=} \{y \in \mathbb{R} \ : \ y = f(x)\} \tag{24}$$

$$\mathsf{graf}(f) \stackrel{\texttt{def}}{=} \{(x, y) \ ; \ x \in X, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{25}$$

(26)

5.1.1 Domini, immagini e restrizioni

Alcune definizioni (resticione,immaigne controimmagine) e alcuni esempi su calcolo di imagini e domini

Definizione 5.2

Sia data una funzione $f : X \longrightarrow Y$e sia $A \subseteq X$. Si dice *restrizione di f ad A* la funzione $f{\restriction_A} : A \longrightarrow Y$ tale che $f{\restriction_A}(x) = f(x), \forall x \in A$.

Esempio 5.1 (Imagine di f)

Esempio 5.2 (Dominio naturale di f)

Esercizio 5.1 (Dominio e immagine di funzioni reali)

1. $x \in \mathbb{R} \mapsto x^4$
2. $x \in R \mapsto \log_2(x^2 + 4)$
3.
4.

5.1.2 Grafici e rappresentazione cartesiana

Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora $\mathsf{graf}(f)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e quindi può essere rappresentato nel piano cartesiano.

$$f(x) = x \tag{27}$$
$$f(x) = 2x + 1 \tag{28}$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{29}$$
$$f(x) = \sqrt{x} \tag{30}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{31}$$

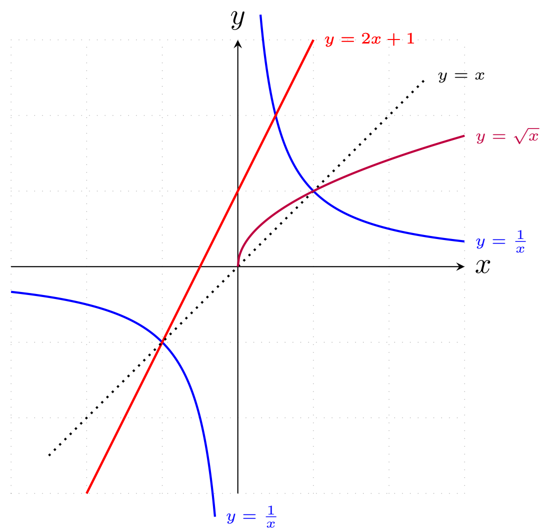


Figura 3: Esempi di rappresentazione grafica di funzioni sul piano cartesiano.

5.2 Operazioni su Funzioni

Definizione 5.3 (operazioni su funzioni)

Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ allora definiscono le seguenti funzioni

1. $f + g$ tale che $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come $(f+g)(x) \stackrel{\texttt{def}}{=} f(x) + g(x)$;
2. $f \cdot g$ tale che $f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come $(f \cdot g)(x) \stackrel{\texttt{def}}{=} f(x) \cdot g(x)$;
3. $(\frac{f}{g})$ tale che $(\frac{f}{g}) : X \setminus g^{-1}(0) :\longrightarrow \mathbb{R}$, definita come $(\frac{f}{g})(x) \stackrel{\texttt{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}$;
4. per $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita come $(\alpha f)(x) \stackrel{\texttt{def}}{=} \alpha \cdot f(x)$.

Definizione 5.4 (Composizione di funzioni)

Siano $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ si definisce la *funzione composta* $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\texttt{def}}{=} g(f(x))$$

Vediamo alcuni esempi

Esempio 5.3

1. Siano $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto f(x) = \cos x$ e sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto g(x) = x^3$. Allora $(g \circ f) = g(f(x)) = g(\cos(x)) = \cos^3(x)$. Invece $(f \circ g) = f(g(x)) = f(x^3) = \cos(x^3)$.
2. Sia $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto h(z) = e^x$. Allora $(h \circ g \circ f) = h(g(f(x))) = h(\cos^3 x) = e^{\cos^3 x}$.

Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ due funzioni. Diciamo che f e g *sono uguali su* X sse $\forall x \in X \ : \ f(x) = g(x)$. Osserviamo che non è affatto detto che $(f \circ g)$ e $(f \circ g)$ sono uguali. Per dimostrarlo facciamo vedere un esempio:

Esempio 5.4

Prendiamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. $g(f(x)) = \sin(|x|)$, mentre $f(g(x)) = |\sin x|$. Prendiamo il punto $x = \frac{3\pi}{2}$. Allora $|\sin(\frac{3\pi}{2})| = |-1| = 1$, mentre $\sin(|x|) = \sin|\frac{3\pi}{2}| = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$. Le funzioni differiscono in $x = \frac{3\pi}{2}$ e dunque non possono essere uguali.

Proposizione 5.1

L'operazione $\circ$ di composizione di funzioni è associativa.

Ricordiamo brevemente el definizioni di funzioni iniettiva, suriettiva e biiettiva.

Definizione 5.5

$f : X \longrightarrow Y$ si dice

- *iniettiva* se $\forall x_1, x_2 \in A\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *suriettiva* se $\forall y \in B \exists x \in A\ :\ y = f(x)$
- *biiettiva* se f è iniettiva e suriettiva, ovvero $\forall y \in Y \exists! x \in X\ :\ y = f(x)$.

Osservazione 5.1

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ è.

- *iniettiva* se una retta parallela all'asse x, che interseca l'asse y nel codominio B, incontra $\mathsf{graf}(f)$ al più un volta;
- *suriettiva* se una retta parallela all'asse x, che interseca l'asse y nel codominio B, incontra $\mathsf{graf}(f)$ almeno una volta;
- *biiettiva* se una retta parallela all'asse x, che interseca l'asse y nel codominio B, incontra $\mathsf{graf}(f)$ una ed una sola volta.

Esercizio 5.2 Dimostrazioni bieittività

Stabilire se le seguenti funzioni sono inittetive, suriettive, biiettive dando il loro dominio naturale in $\mathbb{R}$. (1) $f(x) = \sqrt{x}$; (2) $f(x) = x^2 + 4x$ (3) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ (4) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x > a \\ x^3 & \text{se } x \leq a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$

5.3 Invertibilità e restrizioni

In una funzione $f : X \longrightarrow Y$ biiettiva valgono le due proprietà $\forall x \in X \exists!\ y \in Y : y = f(x)$ (f è una funzione) e $\forall y \in Y \exists!\ x \in X : y = f(x)$ (f è biettiva) dunque la mappa inversa di f continua ad essere una funzione. In questo caso la funzione f si dice **invertibile**. Diamo una definizion accurata di funzione inversa

Definizione 5.6 (Funzione inversa)

Data una funzione biiettiva $f : X \longrightarrow Y$, una funzione inversa di f, è una funzione $g : Y \longrightarrow X$ tale che:

$$\begin{cases} (g \circ f)(x) = x & \forall x \in X \\ (f \circ g)(y) = y & \forall y \in Y \end{cases}$$

Proposizione 5.2 (Esistenza ed unicità di funzione inversa)

Data una funzione biiettiva $f : X \longrightarrow Y$ esiste ed unica la funzione inversa di f che si indica con[a] f^{-1}.

Dimostrazione

Sia $f : X \longrightarrow Y$ biiettiva. La funzione $g : Y \longrightarrow X$ definita in modo tale che

$$\forall y \in Y, g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

per la biettività di f definisce una funzione. Osserviamo che $f(g(y)) = f(x) = y$ e che $g(f(x)) = g(y) = x$. Per dimostrare che è unica, supponiamo per contraddizione che esiste un altra funzione $h : Y \longrightarrow X$, $f \neq g$ che è anche inversa di f. Ma essendo h e g le inverse di f hanno lo stesso valore su $h(y)$ e $g(y)$ $\forall y \in Y$. Invece siccome $h \neq g$ dovrebbe esistere un valore $y \in Y$ su cui differiscono. Contraddizione. $\square$

[a] Si faccia attenzione a non confondere la notazione $f^{-1}(x)$ che indica la funzione inversa di f, con la notazione $f(x)^{-1}$ che invece indica la funzione $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Introduciamo qualche notazione. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $Y \subseteq \mathbb{R}$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X \ : f(x) \in Y\}[3]. \tag{32}$$

Osservazione 5.2

Si noti che in una funzione (reale o meno) ogni $x \in X$ è mappato ad un unico $y \in \mathbb{R}$. Tuttavia è possibile che distinti elementi $x_1, x_2 \in X$ vengano mappati da f nello stesso $y \in \mathbb{R}$, ovvero $f(x_1) = f(x_2) = y$. In questo caso dunque $f^{-1}(\{y\}) \supseteq \{x_1, x_2\}$.

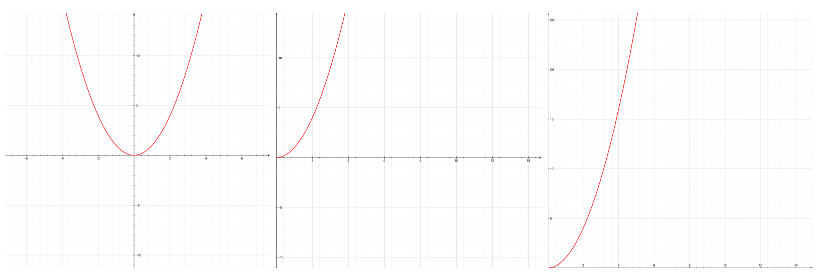
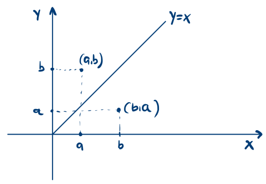


Figura 4: (1) La funzione $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$; (2) la funzione $f_2(x) = x^2 : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con dominio $[0, +\infty)$ e codominio $\mathbb{R}$; (3) La funzione $f_3(x) = x^2 : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ con dominio $[0, +\infty)$ e codominio $\mathbb{R}^+$. $f(x)$ non è iniettiva (infatti $f(x) = f(-x) = x^2$) e non è suriettiva (infatti esistono dei valori $y \in \mathbb{R}$ (i reali negativi) che non sono immagine di alcun elemento del dominio). Dunque $f(x)$ non è biiettiva. $f_2(x)$ è iniettiva sul dominio $[0, +\infty)$ ma non è suriettiva, come $f(x)$ (esistono dei valori $y \in \mathbb{R}$ (i reali negativi) che non sono immagine di alcun elemento di $[0, +\infty)$ sotto $f_2(x)$). $f_3(x)$ è iniettiva e suriettiva è dunque biiettiva. *In conclusione una stessa funzione può variare le sue proprietà a secondo del dominio e codominio di definizione.*

Supponiamo di avere una funzione $f : X \longrightarrow$Y biiettivia e dunque invertibile. Osserviamo che

$$(x, y) \in \mathsf{graf}(f) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathsf{graf}(f^{-1})$$

Dunque abbiamo che i punti che definiscono sul piano cartesiano graf(f) graf$(f^{-}1)$ e sono simmetrici rispetto alla diagonale del I quadrante (identificata dalla retta $y = x$).



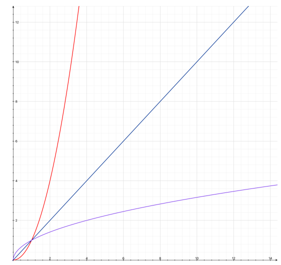


Figura 5: in (1) il punti (a, b) e (b, a) sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$. In (2) Se considero la funzione biiettiva $x^2 : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ (in rosso), allora la funzione è invertibile. La sua inversa (in viola), è la *radice quadrata* $\sqrt{y} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$. Si noti che e i grafici di f e f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$.

Dunque la ragione per cui la funzione $\sqrt{x}$ è definita solo su $\mathbb{R}^+$ è proprio che è l'inversa della funzione x^2 con dominio $[0, +\infty)$ e codominio $[0, +\infty)$. Molte delle funzioni che introdurremo saranno definite proprio come inverse di alcune funzioni invertibili date.

Esempio 5.5 (Esempi funzioni inverse)

Dopo avere determinato che si tratta di funzioni biiettive. Determinare la funzione inversa di

1. $f(x) = 2x + 3$ e
2. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{2x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Esercizio 5.3

Determinare il dominio naturale e l'immagine delle seguenti funzioni $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$- dire se sono suriettive iniettive e biiettive. Se non sono biiettivie restringerne il dominio (lasciando invariata l'immagine) per renderle tali. Scrivere una forma esplicita della funzione inversa dandone dominio e codominio

1. $f(x) = x^5 + 1$
2. $f(x) = \frac{x^3+1}{8-x^3}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{3 - 2x^2}$
4. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 3 - x & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases}$

5.4 Funzioni limitate, pari, dispari

Definizione 5.7

Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice

1. LIMITATA SUPERIORMENTE $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M\ \forall x \in X$.
2. LIMITATA INFERIORMENTE se esiste un $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m\ \forall x \in X$.
3. LIMITATA se è limitata sia inferiormente che superiormente.

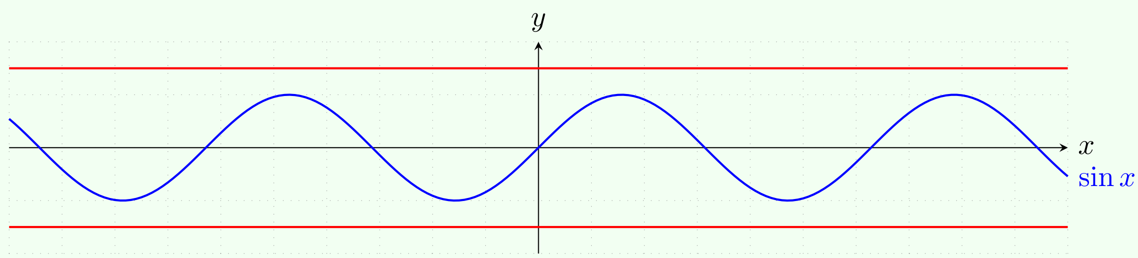


Figura 6: $\sin(x)$ è una funzione limitata su tutto $\mathbb{R}$ con $M = 1.5$ e $m = -1.5$.

Esempio 5.6

1. La funzione $x \mapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$ non è limitata né superiormente né inferiormente.
2. La funzione $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$ è limitata inferiormente, infatti $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
3. La funzione $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ è limitata sia superiormente sia inferiormente. Infatti $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.

Definiamo un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ SIMMETRICO se $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$

Definizione 5.8

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia X simmetrico. f si dice

1. PARI se $f(x) = f(-x)\ \forall x \in X$.
2. DISPARI se $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in X$.

La notazione PARI e DISPARI viene dal fatto che la funzione potenza con esponente *pari*(per esempio x^2) è una funzione pari. mentre la funzione potenza con esponente *dispari*(per esempio x^3) è una funzione dispari.

Osservazione 5.3

1. Se f è pari il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre una funzione pari non è mai iniettiva

2. Se f è dispari il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine O.

Dimostrazione

Dimostriamo la (1). Devo far vedere che che $(x, y) \in \mathsf{graf}(f) \Leftrightarrow (-x, y) \in \mathsf{graf}(f)$. per il verso $\Rightarrow$: se $(x, y) \in \mathsf{graf}(f)$ allora $y = f(x)$, dunque, siccome f è pari $y = f(-x)$ e dunque $(-x, y) \in \mathsf{graf}(f)$. Per il verso $\Leftarrow$: se $(-x, y) \in \mathsf{graf}(f)$, allora $f(-x) = y$ e quindi per la parità di f, $y = f(x)$ e quindi $(x, y) \in \mathsf{graf}(f)$. $\square$

Esercizio 5.4

Dimostrare la proprietà (2) della precedente Osservazione.

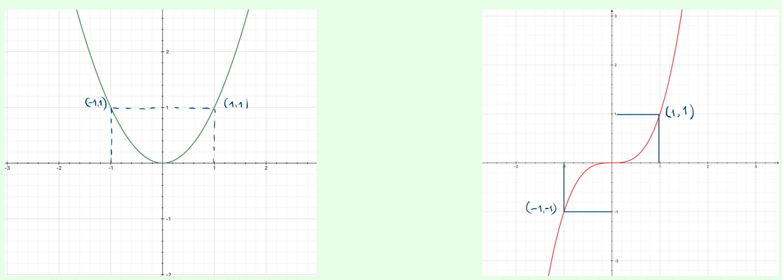


Figura 7: In (1) La funzione $f(x) = x^2$ su dominio $\mathbb{R}$ è simmetrica rispetto all'asse delle y. In (2) la funzione $f(x) = x^3$ è simmetrica rispetto all'origine.

5.5 Funzioni monotone

Definizione 5.9

Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice MONOTÒNA in X se verifica una dell seguenti proprietà

1. CRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X$ se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
2. STRETTAMENTE CRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X$ se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
3. DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X$ se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
4. STRETTAMENTE DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X$ se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

Se f verifica una tra la (2) e la (4) si dice STRETTAMENTE MONOTONA IN X.

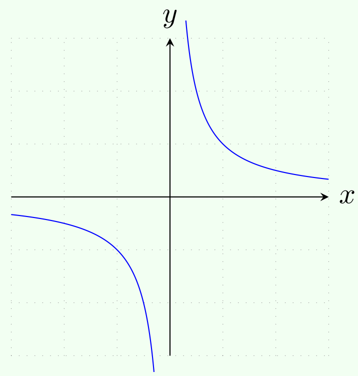


Figura 8: La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è *decrescente* sia nel dominio $(0, +\infty)$ che nel dominio $(-\infty, 0)$, ma non è né crescente né decrescente nel dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Dimostriamo un importante proprietà (seppur semplice) che ci sarà utile in seguito.

Teorema 5.1

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ una funzione (suriettiva su B) e strettamente monotona in A, allora f è invertibile.

Dimostrazione

Per dimostrare che f è invertibile su A è sufficiente provare che $f : A \longrightarrow B$ è biiettiva e siccome f è suriettiva, allora basta prova la iniettività di f. Dobbiamo provare quindi che presi $x_1, x_2 \in A$, allora $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Infatti se $x_1 \neq x_2$, allora o $x_1 < x_2$, oppure $x_2 < x_1$. supponiamo il primo caso (il secondo è identico), dunque a causa della stretta monotonia di f o accade che $f(x_1) < f(x_2)$ oppure che $f(x_2) < f(x_1)$. In entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

È utile osservare che talvolta le proprietà di monotonia si conservano rispetto a certe operezioni

Teorema 5.2 (Monotonia sotto operazioni)

1. Se f e g sono funzioni crescenti allora $f+g$ è crescente.
2. Se f e g sono funzioni decrescenti allora $f+g$ è decrescente.
3. Se f e g sono funzioni non negative e crescenti allora $f \cdot g$ è crescente.
4. Se f e g sono funzioni non negative e decrescenti allora $f \cdot g$ è decrescente

Dimostrazione

Dimostriamo la (1)

Teorema 5.3 (Monotonia e Composizione)

Siano f e g funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e sia $A \subseteq \mathsf{dom}(f \circ g)$. Allora

1. g **crescente** in A e e f **crescente** in $g(A)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ **crescente** in A.
2. g **crescente** in A e e f **decrescente** in $g(A)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ **decrescente** A.
3. g **decrescente** in A e e f **crescente** in $g(A)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ **decrescente** A.
4. g **decrescente** in A e e f **decrescente** in $g(A)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ **crescente** A.

Dimostrazione

Dimostriamo la (1):

Esempio 5.7

La funzione $\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)^{-2}$ è strettamente decrescente in $[0,+\infty)$.

Esercizio 5.5

1. Dare il dominio naturale di $f, g, f \circ g, g \circ f$ dove (1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$; (2) $f(x) = \sqrt{1-x}$ e $g(x) = \sqrt{x}$; (3). $f(x) = \sqrt{x-a}, g(x) = x^2 - 1 \quad (a \in \mathbb{R})$.
2. Esercizio Epsilon 1 1.9.3 pag . Dire quali delle seguente funzioni sono (strettamente) monotone nell'insieme A. (1) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)\, z^4$, $A = \mathsf{dom}\, f$; (2) $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^4$, $A = [1, +\infty)$; (3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $A = [2, +\infty)$.

5.6 Funzioni periodiche

Definizione 5.10 (Funzione Periodica)

Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice PERIODICA se $\exists T \neq 0$ tale che:

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in X \text{ tale che } T + x \in X.$$

Il più piccolo $T > 0$ tper cui vale la proprietà precedente si dice PERIODO di f.

Esempio 5.8

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni di periodo 2π e dunque

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \ldots = \cos(x + 2k\pi) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{33}$$

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \ldots = \sin(x + 2k\pi) \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

2π è il più piccolo $T >=$ per cui $\sin$ e $\cos$ risultano essere periodiche di periodo T.

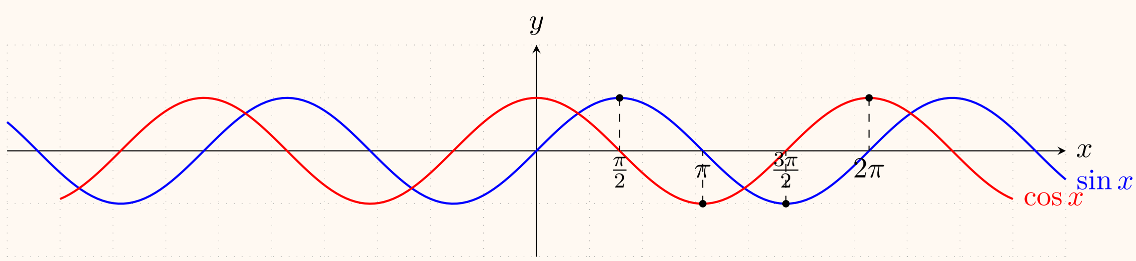


Figura 9: Il grafico delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$

Osservazione 5.4

Se f è una funzione di periodo $T > 0$, allora $f([0,T)) = f([kT,(k+1)T))$ for all $k \in \mathbb{N}^+$.

Esempio 5.9

La funzione MANTISSA di x definita come $(x) \overset{\texttt{def}}{=} x - [x]$ ha periodo $T = 1$ e si ripete identica come nell'intervallo $[0,1)$.

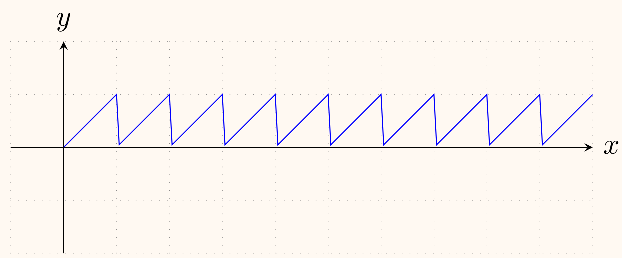


Figura 10: Il grafico della funzione mantissa.

5.7 Funzioni lineari

Definizione 5.11

Si chiama FUNZIONE LINEARE una funzione del tipo

$$y = mx + q \qquad m, q \in \mathbb{R} \tag{35}$$

Se $q = 0$ la funzione è detta AFFINE. m è il COEFFICIENTE ANGOLARE.

Osservazione 5.5

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare.

1. f è monotona su $\mathbb{R}$ e strettamente monotona se $m \neq 0$.
2. Se $m > 0$, allora f è strettamente crescente
3. Se $m < 0$, allora f è strettamente decrescente

Se $m = 0$ allora $f(x) = q$ è crescente e decrescente e si dice funzione COSTANTE.

Dimostrazione

Proviamo la (1).

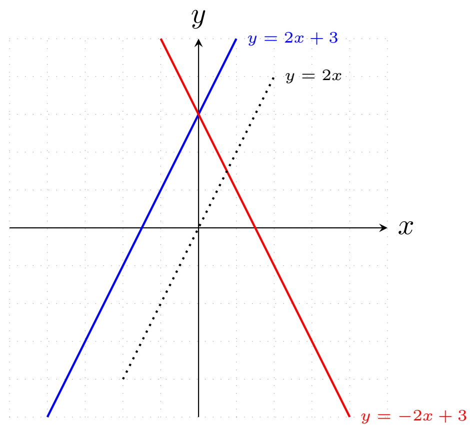


Figura 11: Esempi di funzioni lineari crescenti e decrescenti.

Esempio 5.10

Se $m \neq 0$ allora f è strettamente monotona ma allora è invertible (Proposizione 5.1 pagina 68). Dunque le funzioni lineari non costanti sono invertibili. quindi se $f(x) = mx + q$ risulta, ponendo $f(x) = y = mx + q$ e quindi $x = \frac{y-q}{m}$ che la sua inversa è

$$f^{-1}(y) = \frac{y-q}{m} \tag{36}$$

Rifletti 5.1

Se $m = 0$, la funzione $f(x) = q$ non è invertibile. Perché?

Consideriamo ora una speciale funzione lineare, il valore assoluto.

5.8 Valore assoluto

Un'importante funzione che viene introdotta per misurare la distanza tra due numeri è la funzione **valore assoluto** o *modulo*.

Dato un $x \in \mathbb{R}$, definiamo il *valore assoluto di* x, in simboli $|x|$:

$$|x| \overset{\texttt{def}}{=} \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Osservazione 5.6

Il valore assoluto $|x - y|$ misura la distanza tra i punti x e y sulla retta reale.

Esempio 5.11

$|4| = |-4| = 4$. $|3.4| = 3.4$
Se considero la funzione $f(x) = |x| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora l'immagine di f è $\mathsf{im}(f) = [0, +\infty)$ e il grafico di f è $\mathsf{graf}(f) \subset \mathbb{R}^2$.

La funzione valore assoluto gode di importanti proprietà:

Proposizione 5.3

1. $|x| \geq 0$ (*positività*);
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $|x| < l \Leftrightarrow -l < x < l \Leftrightarrow x \in (-l, l)$;
4. $|x| \leq l \Leftrightarrow -l \leq x \leq l \Leftrightarrow x \in [-l, l]$;
5. $|x| \geq l \Leftrightarrow x \leq -l \vee x \geq l \Leftrightarrow x \in (-\infty, -l] \cup [l, +\infty)$;
6. $|x| = |-x|$ e $||x|| = x$;
7. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ e $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$;
8. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*disuguaglianza triangolare*);
9. $||x| - |y|| \leq |x - y|$;

Dimostrazione

Punto (8). Per definizione di valore, è chiaro che se

$$x \leq k \wedge -x \leq k \Rightarrow |x| \leq k \tag{37}$$

Dimostriamo: (a) che $(x + y) \leq |x| + |y|$, e (b) che $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Da (a),(b) e (1) otteniamo la tesi che $|x + y| \leq |x| + |y|$. Per dimostrare (a), osserviamo

$$\begin{aligned} x &\leq |x| && \textit{def. di } |\cdot| && (38)\\ y &\leq |y| && \textit{def. di } |\cdot| && (39)\\ x + y &\leq |x| + |y| && && (40) \end{aligned}$$

Per (b), osserviamo (dimostrare con cura (5)) che

$$\begin{aligned} -x &\leq |x| && \textit{def. di } |\cdot| && (41)\\ -y &\leq |y| && \textit{def. di } |\cdot| && (42)\\ -x - y &\leq |x| + |y| && && (43)\\ -(x + y) &\leq |x| + |y| && && (44) \end{aligned}$$

Le funzioni *massimo* e *minimo* tra due numeri sono definite come segue

$$\max\{x, y\} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} x & y \leq x \\ y & x \leq y \end{cases} \qquad \min\{x, y\} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} y & y \leq x \\ x & x \leq y \end{cases}$$

Si può far vedere che una maniera equivalente di definire il valore assoluto $|x|$ è tramite la funzione $\max$, ovvero $|x| \stackrel{\mathsf{def}}{=} \max\{x, -x\}$. Analogamente le due funzioni $\max\{x, 0\}$ e $\max\{-x, 0\}$ chiamate rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa di* x sono definite come:

$$x_+ \stackrel{\texttt{def}}{=} \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad\qquad x_- \stackrel{\texttt{def}}{=} \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

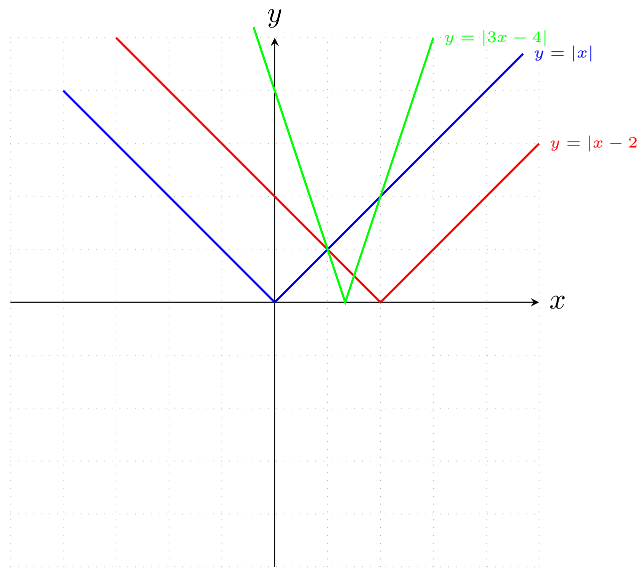


Figura 12: Esempi di funzioni valore assoluto.

Esempio 5.12

$|x - 3| < |x - 2|$ risolvere con metodo algebrico e grafico.

Esercizio 5.6

Determinare se esistono le soluzioni delle seguenti disequazioni (epislon pag 39 1.10.2): (1)$|3x - 7| \leq 2 - x$; (2) $|\frac{2x-5}{x+1}| > 1$; (3) $\frac{1}{4-|x|} \leq \frac{4}{2-x}$; (4) $||2x - 1| - x| < 1$; (5) $|x + 2| \leq |2x + 3| + 1$.

Teorema 5.4 (Proprietà della funzione modulo)

La funzione $f(x) = |x| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha le seguenti proprietà:

1. dom $f = \mathbb{R}$;
2. im $f = [0, +\infty)$. Quindi f è positiva.
3. f è simmetrica rispetto all' asse y e quindi è una funzione pari.
4. f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.

5.9 Funzioni potenza e radice

La radice r-esima è la funzione *inversa* della elevamento a potenza r-esima. Sappiamo dalla scuola che quando r è un *naturale*

$$x^r = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}$$

Inoltre sappiamo che quando r è un *razionale* $r \in \mathbb{Q}$, e quindi $r = \frac{m}{n}$, con $n \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

Si osservi che a seconda che n sia pari o dispari questa definizione vale per solo gli $x \in \mathbb{R}, x > 0$ oppure per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Quindi bisogna prestare molta attenzione.

Ovviamente è del tutto lecito allora chiedersi che cosa sia l'elevamento a potenza x^r (e dunque anche la sua funzione inversa, la radice) quando $r \in \mathbb{R}$ è un *numero reale*.

Diamo la seguente definizione, che poi estenderemo in seguito.

Sia $r = p.\alpha_1\alpha_2 \dots$. Per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$, consideriamo $p.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$. Si osservi che l'insieme di reali $\{p.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ è limitato superiormente da a^{p+1} e quindi per la completezza di $\mathbb{R}$, ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$. Quindo è lecito definire:

$$a^r = \sup\{a^{p.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$$

Si osservi che la definizione di a^r come estremo superiore esprime il fatto che i numeri $a^{p.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n}$ approssimano (con sempre maggiore precisione) il numero r, e quindi, all'infinito, il $\sup$ di questo insieme è il valore di a^r. Vedremo più in dettaglio questa definizione dopo aver introdotto il concetto di limite.

Sia $r = p.\alpha_1\alpha_2 \dots$. Possiamo riassumere questa definizione in questo modo

- $x \in (1, +\infty), r > 0$, allora $x^r = \sup\{x^{p.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$
- $x \in (0, 1), r > 0$, allora $x^r = \frac{1}{(\frac{1}{x})^r}$,
- $x \in (0, 1), r < 0$, allora $x^r = \frac{1}{x^{-r}}$,
- $0^r = 1$ e $1^r = 1$ $\forall r \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora alcune proprietà della potenza che ci permetteranno di trattare il calcolo di potenze.

Proposizione 5.4 (Proprietà delle potenze)

Siano $a, b, \in \mathbb{R}^+$ [a], e siano $r, s \in \mathbb{R}$.

1. $a^0 = 1, \forall a \neq 0, 1^r = 1, \forall r;$
2. $a^{r+s} = a^r \cdot a^s;$
3. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r;$
4. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}.$
5. $a^{-c} = \frac{1}{a^c};$
6. $\begin{cases} a^r > 1 & \text{se } (a > 1 \wedge r > 0) \vee (a < 1 \wedge r < 0) \\ a^r < 1 & \text{se } (a < 1 \wedge r > 0) \vee (a > 1 \wedge r < 0) \end{cases}$
7. $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1 \end{cases}$
8. $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} a^r < b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r > b^r & \text{se } r < 0 \end{cases}$
9. $\forall a \neq 1, a^r = a^s \Rightarrow r = s.$

[a] $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

Consideriamo la funzione POTENZA CON ESPONENTE IN $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n}$$

Osservazione 5.7 (x^n **con** n **pari**)

1. x^n è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ quindi il suo dominio è $\mathbb{R}$;
2. Se n è pari l'immagine di x^n è $[0, +\infty)$
3. è strettamente crescente per $x \geq 0$, ovvero in $[0, +\infty)$,
4. è strettamente decrescente per $x \leq 0$, ovvero in $(-\infty, 0]$,
5. è pari.
6. x^n con n pari non è biiettiva su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$ è biettiva.

Dimostrazione

(2) $x^{2k} = (x^k)^2$ e dunque è un numero ≥ 0. (3) immediato dal fatto che se $x_1, x_2 \geq 0$ (ovvero $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$), allora $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$. (4) Supponiamo che $x_1, x_2 < 0$. Dobbiamo dimostrare che $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$. Siccome $x_1, x_2 < 0$, allora $x_1 = -x_1'$ e $x_2 = -x_2'$ e quindi $x_1' > x_2$ e $x_1' > x_2'$. Quindi dalla (3) risulta $(x_1')^2 > (x_2')^2$. Siccome $x_1^2 = (x_1')^2$ e $x_2^2 = (x_2')^2$ risulta che $x_1^2 = (x_1')^2 > (x_2')^2 = x_2^2$. $\square$

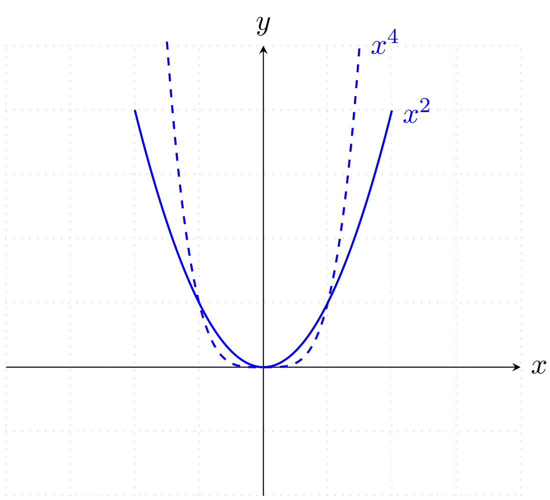


Figura 13: Esempi di funzione potenza x^n con n naturale pari.

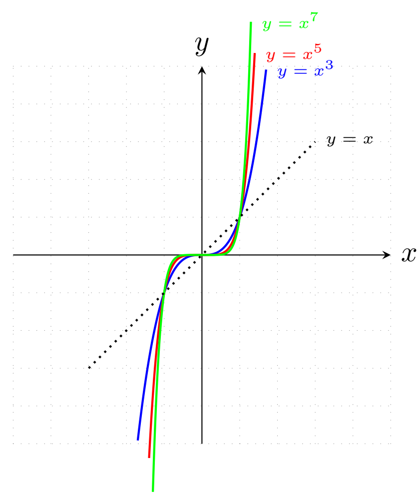


Figura 14: Potenze dispari

Osservazione 5.8 (x^n **con** n **dispari)**

1. x^n è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ quindi il suo dominio è $\mathbb{R}$;
2. Se n è dispari l'immagine di x^n è $\mathbb{R}$,
3. è strettamente crescente in $\mathbb{R}$,
4. è dispari.
5. x^n con n dispari è biiettiva su tutto $\mathbb{R}$

Dimostrazione

5.9.1 Radici

In questa parte richiamiamo velocemente le definizione e le principali proprietà. Un trattamento più accurato e la comprensione di certe assunzioni le capiremo nella Lezione 2.2 dove studieremo queste funzioni con il sussidio degli strumenti dell'analisi, in particolare il concetto di limite e le proprietà delle funzioni sui numeri reali.

Teorema 5.5

Sia $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$. x è detta **la radice** n**-esima di** y e si scrive $x = \sqrt[n]{y}$ oppure come $x = y^{\frac{1}{n}}$.

La dimostrazione di questo teorema nella sua forma più generale la daremo più avanti. Per il momento ricordiamo le seguenti importanti proprietà sulla radice n-esima.

Per definizione la radice n-esima di un numero non-negativo è un numero non-negativo, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$. Dunque se $x < 0$ $\sqrt{x^2} \neq x$, ma $\sqrt{x^2} = |x|$. Per esempio $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3| = |x|$.

n **pari**
Se n è pari, allora $\sqrt[n]{y}$ **non** è definita se $y < 0$. Quindi quando $y < 0$, $\sqrt[n]{y}$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

n **dispari**
Se n è dispari, allora $\sqrt[n]{y}$ **è** definita anche quando $y < 0$. In particolare per $y < 0$, si ha che $\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{(-y)}$. Per esempio se $y = -27$, e $n = 3$, allora $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{-(-27)} = -\sqrt[3]{27} = -9$.

Osservazione 5.9 ($\sqrt[n]{x}$ **con** $n \geq 2$ **pari)**

1. è definita per $x \geq 0$ quindi il suo dominio è $[0, +\infty]$;
2. l'immagine di x^n è $[0, +\infty)$
3. è strettamente crescente nel suo dominio,

Dimostrazione

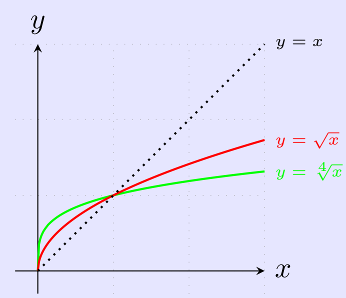


Figura 15: Funzione x^b con $b \leq 1$.

Osservazione 5.10 ($\sqrt[n]{x}$ n **dispari)**

1. è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ quindi il suo dominio è $\mathbb{R}$;
2. la sua immagine è $\mathbb{R}$
3. è strettamente crescente nel suo dominio,
4. dispari.

Dimostrazione

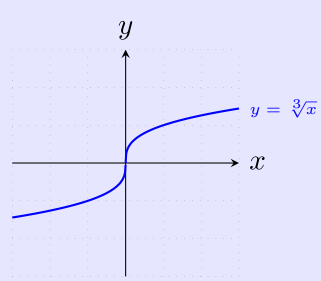


Figura 16: La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(Dis)Equazioni con radici

(Richiami su Disequazioni con radici)

n dispari

$$\sqrt[n]{P(x)} \lesseqgtr Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \lesseqgtr Q(x)^n \tag{45}$$

$$\tag{46}$$

n pari

$$\sqrt[n]{P(x)} = Q(x)^{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = Q(x)^n \end{cases} \tag{47}$$

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \\ P(x) < Q(x)^n \end{cases} \tag{48}$$

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > Q(x)^n \end{cases} \tag{49}$$

---

[a] $P(x)$ deve essere ≥ 0.
[a] $P(x)$ deve essere ≥ 0.

Esempio 5.13

1. Semplificare le seguenti espressioni: (1) $\sqrt[6]{x^3}, x \geq 0$; (2) $\sqrt[3]{x^6}, x \in \mathbb{R}$; (3) $\sqrt[3]{x^{6a}}, x > 0, a \in \mathbb{R}$; (3) $\sqrt[6]{x^{3a}}, x \geq 0,\ a \in \mathbb{R}$.
2. Risolvere le seguenti disequazioni :(1) $\sqrt{2-|x|} \leq x$; (2)$\sqrt{3-|x|} \geq 1-x$. (3) $3-x \geq \sqrt{x^2-12}$.

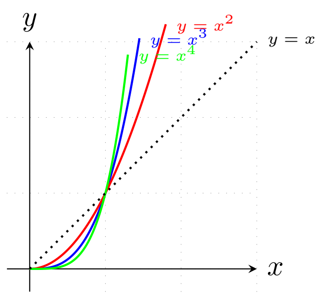


Figura 17: Funzione x^b con $b \geq 1$.

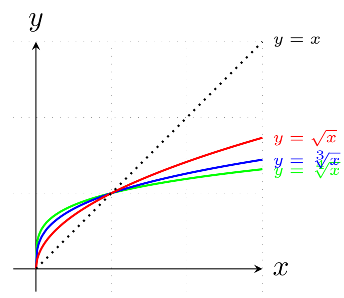


Figura 18: Funzione x^b con $b \leq 1$.

Esempio 5.14 (x^q per $q \in \mathbb{Q}$)

Pag 40 Epsilon $x^{\frac{3}{5}}$, $x^{\frac{5}{3}} x^{-\frac{3}{5}}$, $x^{-\frac{5}{3}}$

5.10 Funzioni esponenziale e logaritmiche

Esponenziali

Definizione 5.12

Si dice esponenziale in base $a > 0$ la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definita da $f(x) = a^x$.

Osservazione 5.11 (funzione esponenziale a^x)

1. $a > 0$
2. a^x è sempre positiva, quindi $\operatorname{im} f = (0, +\infty)$;
3. per $a > 1$ a^x è *strettamente crescente* e si avvicina a 0 per gli x molto grandi e negativi.
4. $0 < a < 1$ a^x è *strettamente decrescente* avvicina a 0 per gli x molto grandi e positivi.
5. passa sempre dal punto $(0, 1)$
6. dispari.

Dimostrazione

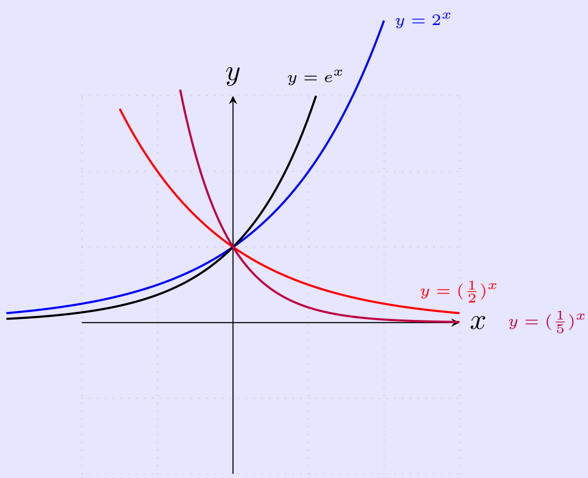


Figura 19: Funzione a^x con $a \leq 1$ (in blu) e con $1 < a < 0$ (in rosso).

Esempio 5.15

Determinare i reali x che verificano le disuguaglianze $1 < (\frac{1}{9})^{2x-3} \leq 27$. $27 = 3^3 = (\frac{1}{3})^{-3}$. $(\frac{1}{9})^{2x-3} = (\frac{1}{3})^{2(2x-3)}$ e 1=$(\frac{1}{3})^0$. Dunque a disuguaglinaza è equivalente a:

$$(\frac{1}{3})^0 < (\frac{1}{3})^{2(2x-3)} \leq (\frac{1}{3})^{-3}$$

.
Questo è vero sse (è il caso $a < 1$)

$$-3 \leq 2(2x-3) < 0.$$

Da cui si ricava: $x \in [3/4, 3/2)$.

Logaritmi

Teorema 5.6

Siano $a, y \in \mathbb{R}^+$ con $a \neq 1$. Allora esiste uno ed uno solo $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. La soluzione x di tale equazione si chiama **logaritmo in base** a **di** y e si indica con $x = \log_a y$, ovvero $y = a^{\log_a y}$.

Si osservi che l'equazione $a^x = y$ non ha, per definizione di elemento a potenza, soluzioni se $y \leq 0$. Mentre se $a = 1$ tale equazione non ha soluzione se $y \neq 1$ e invece ne ha infinite se $y = 1$. si può far vedere che la soluzione dell'equazione $y = a^x$ è:

$$x = \begin{cases} \sup\{s \in \mathbb{R} : a^s \leq y\} & a > 1 \\ \inf\{s \in \mathbb{R} : a^s \leq y\} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Proposizione 5.5 (Proprietà del Logaritmo)

Siano $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$, $a, b \neq 1$.

1. $a^{\log_a x} = x$ (definizione);
2. $\log_a 1 = 0, \;\; \log_a a = 1, \;\; \log_a(\frac{1}{a}) = -1$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
4. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$;
5. $\log_a(\frac{1}{y}) = -\log_a x$;
6. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (cambio base);
8. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$;
9. $x > y > 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > \log_a y & a > 1 \\ \log_a x < \log_a y & 0 < a < 1 \end{cases}$

Osservazione 5.12 (Funzione $\log_b x$)

1. dominio è $(0, +\infty)$. immagine è $\mathbb{R}$
2. passa per il punto $(1, 0)$
3. strettamente crescent ein $\mathbb{R}^+$ se $a > 1$
4. strettamente decrescnte in $\mathbb{R}^+$ se $a \in (0, 1)$.

5.11 Funzioni polinomiali e razionali

Una funzione POLINOMIALE è una funzione del tipo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k n^k$$

dove $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Il dominio di f è $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{R}$. Il GRADO DI f è il grado del polinomio p, ovvero n se $a_n \neq 0$.

Una funzione RAZIONALE è del tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dove p e q sono polinomi. il GRADO DI f $\deg(f)$ è $\deg(p) - \deg(q)$. il dominio di f $\mathsf{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \;:\; q(x) \neq 0\}$.

5.12 Funzioni trigonometriche

5.13 Funzioni iperboliche

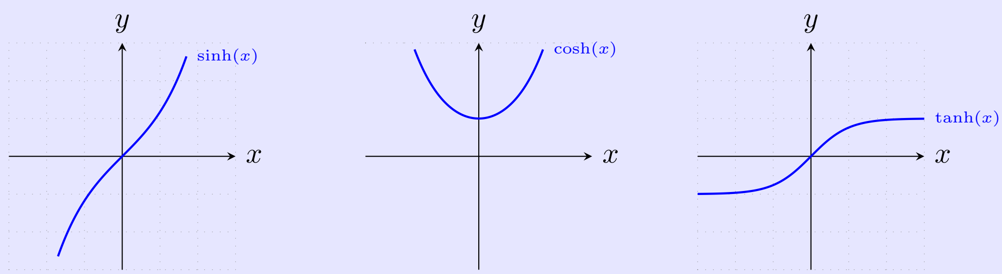
Le funzioni iperboliche sono

Definizione 5.13

1. $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$,
2. $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$,
3. $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Osservazione 5.13

1. $\cosh(x)$ è una funzione pari limitata inferiormente da 1 e non limitata superiormente. Il dominio è $\mathbb{R}$ e l'immagine è $[1, +\infty)$
2. $\sinh(x)$ è una funzione dispari non limitata.
3. $\tanh(x)$ è una funzione dispari e limitata sia superiormente che inferiormente. con dominio $\mathbb{R}$ e immagine $(-1, 1)$.



Proposizione 5.6

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Dimostrazione

5.14 Funzioni inverse elementari

5.15 Operazioni su funzioni

5.16 Esercizi

6 Parte 6 - Limiti e successioni

Sommario

I: Topologia della retta e punti di accumulazione. Definizione di Limite. Esempi. Proprietà Elementari dei limiti (somma, prodotto, funzione composta).

II:Successioni e limiti di successioni (Lez 7 [?]). Successioni. Definizione di *"definitivamente"*. Definizione di limite di una successione: diretta e come caso particolare della definizione di limite di una funzione. Convergenza. Successioni infinitesime. Esempi. Teorema di unicità del Limite (con dimostrazione).

III: Successioni divergenti. Esempi. Successioni irregolari. Successione geometrica. successione armonica. Successione limitata. Operazioni algebriche su limiti di successioni. Reali estesi. Forme determinate. Forme indeterminate.

IV: Proprietà utili nel calcolo dei limiti. Limiti ed ordinamento. Teorema del confronto (enunciato). Teorema dei carabinieri (corollario del confronto). Permanenza del segno. Esempi su Teorema del confronto e sue conseguenze. Regole sui reali estesi. Successioni monotone, crescenti, decrescenti, strettamente crescenti e strettamente decrescenti. Teorema di regolarità delle successioni monotone (con dimostrazione). Successione di Nepero.

V: Confronto tra successioni. Successioni asintotiche e osservazioni notevoli. Principio di sostituzione e osservazioni notevoli. Successione geometrica e armonica. Gerarchia degli infiniti e osservazioni notevoli. Altri limiti notevoli. Criterio di Cesàro.

Biblio

Parte I. Cap. 3.1–3-3 [BDG11]

Parte II: Cap. 3.1 [BPS14], Cap. 1 [?], Cap. 4.1– 4.6 [BDG11]

Parte III: Cap. 4.1– 4.6 [BDG11], Cap. 1 [?], Cap 1. [BPS14]

Parte IV:

6.1 Concetto di Limite

6.2 Successioni

Definizione 6.1

Una SUCCESIONE è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. cioè una $f : A \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, ovvero $n \in A \mapsto f(n) \in \mathbb{R}$.

Esempio 6.1

(1) $n \mapsto n^2$; (2) $n \mapsto (-1)^n$; (3) $n \mapsto \frac{1}{n}$.

Le successioni possono codificare osservazioni di fenomeno/misure a tempi discreti e si vogliono fare previsioni sulle previsioni di tale misure quando n cresce. Dal punto di vista notazione ci semplifichiamo la vita e invece di scrivere $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $n \mapsto a_n$. scriveremo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che rappresenta l'insieme dei valori della funzione $f(n)$.

La seguente definizione è molto importante

Definizione 6.2

Si dice che una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa DEFINITIVAMENTE una certa proprietà $P(n)$ definita sui naturali se

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } P(n) \text{ è vera } \forall n \geq n_0.$$

Esempio 6.2

(1) Per esempio $\{n - 100\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente positiva. Basta prendere $n_0 = 100$ per verificare che per ogni $n > 100$ $n - 100 > 0$.
(2) la successione $\{(-1^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ **non** è definitivamente positiva: infatti per ogni $n_0 \in \mathbb{N}$ esiste un numero $n \in \mathbb{N}$, per esempi $n = 2k + 1$, per cui $n < 0$.
Si faccia attenzione che ...

6.3 Limiti di Successioni

Definizione 6.3 (Limite di una successione)

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e dat un $\ell \in \mathbb{R}$ diremo che la SUCCESSIONE CONVERGE A ℓ PER n CHE TENDE A $+\infty$ e scriveremo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, se

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon) \; : \; \forall n \geq n_0 |a_n - \ell| < \epsilon$$

Osservazione 6.1

La condizione $|a_n - \ell| < \epsilon$ equivale a $\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon$

$$\Leftrightarrow |a_n - \ell| < \epsilon \tag{50}$$
$$\Leftrightarrow -\epsilon < a_n - \ell < \epsilon \tag{51}$$
$$\Leftrightarrow \ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon \tag{52}$$

Andiamo a vedere un primo esempio

Esempio 6.3

Facciamo vedere che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Discutere l'esempio graficamente.

Soluzione

Per definizione dobbiamo far vedere che $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. Per verificarlo parto dalla disequazione $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ e cerco di trovare se esiste un n_0 a partire dal quale tale disuguaglianza vale sempre. Osserviamo che $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ (perché $\frac{1}{n}$ è sempre positiva). Quindi è sufficiente verificare che $\frac{1}{n} < \epsilon$ e questo è vero per ogni $n > \frac{1}{\epsilon}$. Quindi se fissiamo $n_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$, dato ϵ, abbiamo trovato un n_0 a partire dal quale è sempre vero che $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$, ovvero $\forall n \geq n_0$.

Definizione 6.4 (Successione infinitesima)

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice INFINITESIMA.

Andiamo a vedere un atro esempio

Esempio 6.4

Facciamo vedere che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Soluzione

Basta osservare che $|a_n - \ell| = |\frac{n-1}{n} - 1| = |1 - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$. Possiamo quindi procedere come nel precedente esempio

6.4 Fondatezza del concetto limite

Teorema 6.1 (Unicità del Limite di successioni)

Se il $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste allora è unico.

Dimostrazione

Assumiamo per assurdo che esiste $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed esistono $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $\ell_1 \neq \ell_2$ tali che valgono entrambi:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_1$ e
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_2$.

Siccome $\ell_1 \neq \ell_2$ allora $|\ell_1 - \ell_2| \neq 0$. Sia dunque $\delta = |\ell_1 - \ell_2| > 0$. Fisso $\bar{\epsilon} = \delta/2$. Dunque per definizione dei limiti (1) e (2) (che valgono per ogni $\epsilon > 0$ (quindi in particolare per $\bar{\epsilon}$) avremo che

1. $\exists n_1$ tale che $\forall n > n_1 \ : \ |a_n - \ell_1| < \bar{\epsilon}$,
2. $\exists n_2$ tale che $\forall n > n_2 \ : \ |a_n - \ell_2| < \bar{\epsilon}$

Prendiamo $\bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$ dunque deve essere che per ogni $n > \bar{n}$ valgono entrambi

1. $|a_n - \ell_1| < \bar{\epsilon}$,
2. $|a_n - \ell_2| < \bar{\epsilon}$.

Mettendo tutto insieme abbiamo che $\forall n > \bar{n}$

$$2\bar{\epsilon} = \delta \tag{53}$$
$$= |\ell_1 - \ell_2| \tag{54}$$
$$= |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \tag{55}$$
$$\leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| \quad \text{(dis. triang.)} \tag{56}$$
$$= |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| \tag{57}$$
$$< \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \tag{58}$$
$$\tag{59}$$

In conclusione abbiamo che $2\bar{\epsilon} < 2\bar{\epsilon}$ che è una evidente contraddizione.

Esempio 6.5

Esempio di $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ come successione non limitata. Disegno.

Definizione 6.5 (successioni divergenti)

Si dice che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ DIVERGE A $+\infty$ e scriveremo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > M$$

Si dice che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ DIVERGE A $-\infty$ e scriveremo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < M$$

Esempio 6.6

Dimostriamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.
Devo far vedere che $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0\ :\ n^2 > M$. Se $M < 0$ è sempre vero per ogni $n \in \mathbb{N}$ che $n^2 > M$, perche n^2 è positivo. Se $M > 0$ allora basta prendere $n_0 = \lceil\sqrt{M}\rceil = [\sqrt{M}]+1$ per verificare che la disuguaglianza vale.

Esempio 6.7

La successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge né diverge.

Definizione 6.6 (successioni irregolari)

Se la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge né diverge si dice IRREGOLARE O OSCILLANTE.

Altri esempi di successioni irregolari.

Esempio 6.8

I limiti delle seguenti successioni non esistono e per tanto sono irregolari

1. $n \cdot (-1)^n = \begin{cases} n & n = 2k \\ -n & n = 2k+1 \end{cases}$;
2. $(-n)^n$.
3. $2^n \cdot (-1)^n$
4. $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oppure $\{\cos n\}_{n\in\mathbb{N}}$ [a]

[a] In generale le successioni $\sin(nx)$ per $x \in \mathbb{R}$ possono convergere o non convergere. Per esempio se $x = \pi$ $\sin(\pi n)$ converge a 0, mentre $\sin(\frac{\pi n}{n})$ non converge.

Proposizione 6.1 (sulle Successioni $\sin n$ e $\cos n$)

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$, allora entrambi $\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n)$ e $\lim_{n\to+\infty} \cos(a_n)$ non esistono.

6.5 Intorni e proprietà verificate definitivamente

Abbiamo visto che la definizione di limite è centrata sul concetto limitatezza di intorno dei punti a_n. Nel seguito estenderemo il concetto di limite a funzioni da $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$. Diamo ora una definizione di limite equivalente ma più compatta e basata sul concetto di intorno

Definizione 6.7

Dato un $\ell \in \mathbb{R}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ si dice INTORNO (sferico) di ℓ di raggio ϵ l'intervallo

$$B_\epsilon(\ell) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ |\ell - y| < \epsilon\} = (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$$

Alcune importanti proprietà degli intorni sono le seguenti

Proposizione 6.2

Sia $\mathcal{I}(x)$ la famiglia degli intorni di x, ovvero $\mathcal{I}(x) = \{B_\epsilon(\ell) \ : \ \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

1. se $I \in \mathcal{I}(x)$, allora $x \in I$: ovvero se I è un intorno di x allora $x \in I$.
2. se $I, J \in \mathcal{I}(x)$, allora anche $I \cap J \in \mathcal{I}(x)$.
3. se $I \in \mathcal{I}(x)$ e $y \in I$, allora $\exists J \in \mathcal{I}(y)$ tale che $J \subseteq I$.
4. (**separazione**) se $x \neq y$ allora esistono $I \in \mathcal{I}(x)$ e $J \in \mathcal{I}(y)$ tale che $I \cap J = \emptyset$.

Per compattare le definizioni di limite che abbiamo visto differire nel caso di convergenza e divergenza è utile considerare una estensione della retta reale .

Definizione 6.8 (Retta reale estesa)

$$\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Si faccia attenzione che $\pm\infty$ non sono numeri e $\overline{\mathbb{R}}$ non è da ocnsdierare un insime numerico visto che le operazioni aritmetiche non sono definite su $\overline{\mathbb{R}}$. Invece l'ordinamento di $\mathbb{R}$ può essere esteso a $\overline{\mathbb{R}}$ imponendo che $\forall x \in \mathbb{R} \ -\infty < x < +\infty$.

Per definire gli intorni di $\pm\infty$ introduciamo in $\overline{\mathbb{R}}$ anche intervalli che contengono $\pm\infty$. Per esempio $(3, +\infty] = (3, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Definizione 6.9 (intorni di $\pm\infty$)

1. Si definisce intorno di $+\infty$ un qualunque intervallo del tipo $(M, +\infty]$, $\quad M \in \mathbb{R}$;
2. Si definisce intorno di $-\infty$ un qualunque intervallo del tipo $[-\infty, M)$, $\quad M \in \mathbb{R}$.

Come abbiamo visto nella definizione di limite convergente (sia grafica che formale) un punto fondamentale è il fatto che i valori di a_n cadano in un intorno di ℓ di raggio ϵ avvenga per tutti i naturali a partire da un certo n_0 e non necessariamente per tutti i naturali. Consideriamo una definizione che permette di descrivere questo (e altri) fenomeni in modo compatto.

Definizione 6.10

Una proprietà $P(n)$ (che dipende da un naturale n) è VERIFICATA DEFINITIVAMENTE (per $n \to +\infty$) se

esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$

Esempio 6.9

1. $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ definitivamente. Basta scegliere $n_0 = 1001$
2. La successione $n^2 - 100n$ è definitivamente crescente. Basta prendere $n_0 > 99/2$.
3. La successione $(-1)^n$ **non** è definitivamente > 0. Infatti malgrado sia vera per un infinito numeri di n (quelli pari) non si può affermare da un certo n_0 in po essendo falsa per tutti gli indici dispari.

Si osservi che è la definizione per una proprietà di essere vera definitivamente è equivalente se $n_0 \in \mathbb{R}$, invece che $n_0 \in \mathbb{N}$.

Introdotti questi concetti non è difficile vedere che le definizione di limite di una successione può essere dat nel seguente modo compatto:

Definizione 6.11

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che ℓ è il limite di a_n per $n \to +\infty$ e si scriverà $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se

per ogni intorno I di ℓ si ha che $a_n \in I$ *definitivamente.*

6.6 Successioni Limitate

Definizione 6.12

una successione si dice LIMITATA se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$|a_n| < M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

o equivalentemente

$$-M < a_n < M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si ricordi che abbiamo definito un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato sse esistono L e l reali tali che $l \leq a \leq L \quad \forall a \in \mathbb{R}$. Ora è facile far vedere che tale definizione è equivalente a dire che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $-M \leq a \leq M \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (un implicazione è ovvia, per l'altra basta prendere $M = \max\{|l|, |L|\}$. Dunque Il fatto che una successione sia LIMITATA non è altro che asserire che l'insieme $\{a_n \in \mathbb{R} \ : \ n \ \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

Teorema 6.2

Ogni successione convergente è limitata

Dimostrazione

Sia a_n una successione convergente a un valore ℓ. Prendiamo la definizione di limite e scegliamo $\epsilon = 1$. Dunque esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ $|a_n - \ell| < 1$. Si ha dunque che per ogni $n > \bar{n}$

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - \ell + \ell| && && (60) \\ &\leq |a_n - \ell| + |\ell| && \text{(dis. triang.)} && (61) \\ &< 1 + |\ell| && \text{(convergenza } a_n\text{)} && (62) \end{aligned}$$

In conclusione ho che $\forall n > \bar{n}|a_n| < 1 + |\ell|$ che, ponendo $M = 1 + |\ell|$ differisce dalla def di a_n limitata solo perché non vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ ma solo per per ogni $n > \bar{n}$. Ma $\bar{n}$ è un numero finito, dunque considero l'insieme di valori di $a_n \in \mathbb{R}$ per $n = 1, \ldots, \bar{n}$, ovvero $\{a_1, \ldots a_{\bar{n}}\}$ e prendo $M = \max\{1 + |\ell|, |a_1|, \ldots |a_{\bar{n}}|\}$. Chiaramente adesso $|a_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Il viceversa di questo teorema (ovvero che *ogni successione limitate è convergente*) **non è vero**. Per farlo vedere troviamo un controesempio all'enuncitao che ogni successione limitata è convergente: ovvero mostriamo un esempio di successione limitata che **non** converge

Osservazione 6.2

La successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata ma non convergente. (Dunque l'implicazione inversa del Teorema 6.2 non vale).

Dimostrazione

abbiamo visto in un esempio precedente che $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è convergente. Siccome assume solo valori 1 e -1 per ogni $n \in \mathbb{N}$ è facile vedere che è limitata scegliendo come $M = 1$.

6.7 Calcolare i limiti e operazioni con limiti

Teorema 6.3 (Limiti e operazioni algebriche)

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = m$. Allora valgono le seguenti proprietà

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = l \pm m$,
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = l \cdot m$,
3. $\lim_{n\to+\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot l$,
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$ se $m \neq 0$,
5. $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{(b_n)} = l^m$, se $l > 0$[a]
6. $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |l|$

Dimostrazione

Vediamo solo la (1).

[a] Si ricordi che se $l, m \in \mathbb{R}$ l^m è definito solo se $l > 0$.

Esempio 6.10

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n}{3n^2 - 1} = \frac{1}{3}$. Osserviamo che non posso applicare il teorema precedente perché n^2 diverge.

Dunque procedo come segue: divido numeratore denominatore per n^2 e ottengo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2} \cdot (1 - \frac{1}{n})}{\cancel{n^2}(3 - \frac{1}{n})}$.

La successione $1/n$ tende a 0 e la somma tende alla somma dei limiti. Dunque $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n}{3n^2 - 1} = \frac{1}{3}$.

Proposizione 6.3

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$, $\lim_{n\to+\infty} c_n = \mp\infty$ $\lim_{n\to+\infty} d_n = \pm\infty$ allora

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \pm\infty$
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} \pm\infty & \ell > 0 \\ \mp\infty & \ell < 0 \end{cases}$
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
4. $\lim_{n\to+\infty} b_n \cdot d_n = +\infty$
5. $\lim_{n\to+\infty} b_n \cdot c_n = -\infty$
6. $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{(b_n)} = \begin{cases} +\infty & \ell > 1 \\ 0 & \ell < 1 \end{cases}$

Vediamo la tabella riassuntiva delle forme determinate sui reali estesi.

Tabella riassuntiva forme determinate

$$\begin{array}{l}
\ell \pm \infty = \pm\infty \\
\ell \cdot \pm\infty = \pm\infty \\
\pm\infty + \pm\infty = \pm\infty \\
\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty \\
\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty \\
+\infty \cdot \ell = \begin{cases} +\infty & \ell > 0 \\ -\infty & \ell < 0 \end{cases} \\
\frac{\ell}{\pm\infty} = 0 \\
a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & a < 1 \end{cases}
\end{array}$$

6.8 Esempi di calcolo di limiti con forme determinate

Vediamo ora due esempi di successioni che sono importanti perché includono molti casi di succcessioni.

La prima è la successione geometrica: $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Teorema 6.4 (Successione Geometrica)

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 0 & q \in (-1,1) \\ 1 & q = 1 \\ \nexists & q \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

Dimostrazione

1. Il caso per $q = 1$ si osserva che $1^n = 1$ per ogni $n \in N$ e dunque $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$.
2. vediamo il caso $q \in (-1,1)$. Se $q = 0$ allora $q^n = 0$ e dunque il limite è 0. Se $q \in (-1,1)$ con $q \neq 0$ allora $|q| < 1$. Dunque $q_n = |q|^n$ e questa $\to 0$ per il caso della potenza.
3. Vediamo il caso $q > 1$. $q = 1 + d$ con $d > 0$. Quindi $q^n = (1+d)^n$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli sappiamo che $(1+d)^n \geq 1+nd$. Possiamo dimostrare (vedi Esercizio) che $\lim_{n\to+\infty} 1+nd = +\infty$. Dunque per $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n \geq \lim_{n\to+\infty}(1+nd) = +\infty$ e dunque vale $+\infty$.
4. Nel caso $q = -1$ $q^n = (-1)^n$ che già abbiamo visto non esistere.
5. Nel caso $q < -1$ allora q^n lo posso scrivere come $(-1 \cdot (-q))^n = (-1)^n \cdot (-q)^n$. Naturalmente $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. Dunque la successione $(-1)^n \cdot (-q)^n$ sui numeri pari tende a $+\infty$, mentre sui numeri dispari tende a $-\infty$ e dunque non può esistere (vedi Esempio **??**)

Esercizio 6.1

Dimostrare che per $d > 0$.

1. $\lim_{n\to+\infty} 1 + nd = +\infty$.

Definizione 6.13 (Accessione armonica)

$\{n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$, per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esempio 6.11

Esempi di successioni armoniche: $n^{1/2}$, n^4

Teorema 6.5

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione

Il caso banale se $\alpha = 0$, $n^\alpha = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 6.12

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 + \frac{1}{n} + 3^n = +\infty.$$

6.9 Forme indeterminate

Le forme indeterminate che non abbiamo considerato prima sono:

(Forme indeterminate)

$$\begin{cases} \pm\infty - \pm\infty \\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\ell}{0}, \ell \in \mathbb{R} \quad 0 \cdot \pm\infty \\ 0^0 \quad 1^{\pm\infty} \quad (+\infty)^0 \end{cases}$$

Esempio 6.13

(1) $\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$. $\lim_{n\to+\infty} n+1-n = 1$
(2) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$. $\lim_{n\to+\infty} n-n = 0$
(3) $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2 = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \infty$.
(4) $\lim_{n\to+\infty} 2n^3 = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} n^3 = \infty$. F.I. $\lim_{n\to+\infty} n = 2$
Se applicando le operazioni algebriche ottengo una forma indeterminate allora non posso concludere nulla sul limite. quindi devo trasformarlo in modo da ottenere una forma determinata.

Alcune osservazioni sulla forma indeterminata $\frac{\ell}{0}$.

Esempio 6.14

$a_n = 1$ e $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$. a_n converge a 1 e b_n converge a 0. Se considero $\frac{a_n}{b_n}$ questo è una forma indeterminata del tipo $\frac{\ell}{0}$. Osservo però che $\frac{a_n}{b_n} = n(-1)^n$ che non esiste come abbiamo visto.

Proposizione 6.4

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata.

1. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$ (una successione limitata per una infinitesima è infinitesima) ;
2. $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Vediamo un esempio

Esempio 6.15

(1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$. $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione irregolare ma è limitata. Siccome $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, allora per la proposizione $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.
(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos 2^n}{2^n}$. 2^n tende a $+\infty$, quindi $\cos(2^n)$ non ammette limite (vedi Proposizione **??**). Invece la successione converge a 0 (visto che è una successione geometrica di ragione $1/2$). Siccome $\cos n \in [-1, 1]$, allora in particolare $\cos(2^n) \in [-1, 1]$. Dunque per la proposizione il $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(2^n)}{2^n} = 0$.

6.10 Teoremi di confronto

Andiamo a studiare come si comporta l'operazione di limite rispetto all'ordinamento

Proposizione 6.5

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$, allora esiste un numero n_0 tale che $a_n > 0, \forall n > n_0$.

Dimostrazione

Siccome $a > 0$, prendiamo $\bar{\epsilon} = \frac{a}{2}$ e per la definizione di limite abbiamo che esiste n_0 tale che $\forall n > n_0 - a/2 < a_n - a < a/2$. In particolare $a - a/2 < a_n = a/2 > 0$. $\square$

Un importante teorema sulla relazione tra limiti e ordinamento è il teorema del confronto.

Teorema 6.6 (Teorema del confronto)

Siano $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, e se $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a \geq b$.

Dimostrazione

Consideriamo la successione $a_n - b_n$. Si osservi che $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = a - b$. Inoltre Siccome $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a_n - b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che $a - b \geq 0$ per assurdo. Supponiamo quindi che $a - b < 0$. Se $a - b < 0$ allora $b - a > 0$. Consideriamo la successione $b_n - a_n$. Abbiamo dalle ipotesi che $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = b - a > 0$. Dalla permanenza del segno deve esistere un n_0 tal eche per ogni $n > n_0$ $b_n - a_n > 0$. Ma questo contraddice con l'ipotesi che $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Contraddizione $\square$.

Teorema 6.7 (Carabinieri)

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n \leq c_n \leq b_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n_n = \ell$, allora $\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$.

Dimostrazione

Per esercizio. Applicare il teorema del confronto prima alla coppia (a_n, c_n) e poi alla coppia (c_n, b_n)

Teorema 6.8 (Permanenza del Segno

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

1. Se $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ allora $a \geq 0$
2. se $a_n \in [\alpha, \beta], \forall n \in \mathbb{N}$, allora $a \in [\alpha, \beta]$

Osservazione 6.3

Il punto (1) nel precedente corollario non vale se invece di $\geq$ abbiamo solo $>$. Ovvero che che se $a_n > 0$, allora $a > 0$. un controesempio. è la successione $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Infatti $1/n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$. I limiti preservano le disuguaglianze deboli ma non quelle strette.

Esempio 6.16

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5^n + \cos n}$. 5^n tende a è ∞ ma $\cos n$ non ammette limite. siccome $|\cos n| < 1$, allora $5^n - 1 \leq 5^n + cosn \leq 5^n + 1$. Passando al denominatore abbiamo $\frac{1}{5^n+1} \leq \frac{1}{5^n+\cos n} \leq \frac{1}{5^n-1}$. Ma ora entrambi $\frac{1}{5^n+1}$ e $\frac{1}{5^n+1}$ tendono a 0 dunque del teorem dei carabinieri la successione converge a 0.

Esercizio 6.2

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$. Vediamo prima il caso $a \geq 1$. questo è equivalente a dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} - 1 = 0$. Sia $d_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Devo dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$. Se $d_n = \sqrt[n]{a} - 1$ allora $a_n = (1 + d_n)^n$. Uso la disuguaglianza di Bernoulli ($(1 + a)^n \geq 1 + an, a > -1$). Quindi $a_n = (1 + d_n)^n \geq 1 + dn$. In totale ho che $d_n \leq \frac{a-1}{n}$, Ma inoltre $d_n \geq 0$. Quindi applico il teorema dei carabinieri e ottengo che $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$.

Se $0 < a < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$. Ma se $a < 1$, allora $1/a > 1$ e quindi applico il caso precedente

Abbiamo visto che la forma $\frac{a}{0}$ è indeterminata. Inalucni caso tale indetermminazione si può togliere-

Definizione 6.14

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

1. Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora diciamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0^+$
2. Se $a_n \leq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora diciamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0^-$

Proposizione 6.6 (ulteriori forme determinate su $\overline{\mathbb{R}}$)

Diciamo che

$$\frac{\ell}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \ell > 0 \\ -\infty & \ell < 0 \end{cases} \qquad \frac{\ell}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \ell > 0 \\ +\infty & \ell < 0 \end{cases}$$

Esempio 6.17

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{n}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

6.10.1 Successioni monotone e limiti

Per le successioni valgono le definizioni di monotonia date per le funzioni reali. In particolare

Definizione 6.15

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è CRESCENTE (risp. DECRESCENTE) se $a_n \leq a_{n+1}$ (risp. $a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. è MONOTONA se è crescente o decrescente.

Nel caso le disuguaglianza siano strette si usa il termine *strettamente monotona*.

Esempio 6.18

(1) $a_n = \frac{n-1}{n}$ è strettamente crescente
(2) $a_n = 1/n$ è strattamente decrescente
(3) Un esempio di successione crescente e limitata $-1/n$ o $-\sqrt{n}$. Una successione che non è né crescente né decrescente $(-1)^n$ non è monotona.

Teorema 6.9 (regolarità successione monotone)

Una successione monotona è regolare (ovvero ammette limite). In particolare

1. se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.
2. se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Dimostrazione

Dimostriamo la (1). La dimostriamo solo nel caso sup è un numero finito, ovvero $\ell = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Nel caso $\ell = +\infty$ si procede in maniera analoga. Voglio dimostrare che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$. Ma questo è equivalente a dimostrare che $\forall \epsilon > 0 \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0 \ \ |a_n - \ell| < \epsilon$ (che equivale a dire che $-\epsilon < a_n - \ell < \epsilon$). Ma dalla definizione di sup ℓ è un maggiorante di $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Quindi $a_n \leq \ell, \forall n \in \mathbb{N}$, ovvero $a_n - \ell \leq 0 < \epsilon$ e dunque la prima disuguaglianza è mostrata.
Dimostriamo la seconda disuguaglianza ovvero che $-\epsilon < a_n - \ell$. Preso un generico $\epsilon > 0$ considero il numero $\ell - \epsilon$. Siccome ℓ è il sup di $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è il minimo dei maggioranti e dunque $\ell - \epsilon < \ell$ non è può essere un maggiorante di $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Questo vuol dire che esiste un n_0 tale che $\ell - \epsilon < a_{n_0}$. Poiché a_n è crescente $a_n \geq a_{n_0}$ per ogni $n > n_0$ e dunque ottengo che $\ell - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n$ per ogni $n > n_0$. Quindi preso un generico $\epsilon > 0$ abbiamo trovato n_0 (che dipende da ϵ) tale che per ogni $n > n_0$ si ha che $-\epsilon < a_n - \ell < \epsilon$. $\square$

subsubsectionSuccessioni asintotiche e principio di sostituzione

Definizione 6.16

Due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dicono ASINTOTICHE e scriveremo $a_n \sim b_n$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

La prima osservazione importante è che

Osservazione 6.4

Se $a_n \sim b_n$, allora

1. se a_n converge allora b_n converge e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.
2. se a_n diverge allora b_n diverge e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.
3. se a_n è irregolare anche b_n è irregolare,

Esempio 6.19

$a_n = n^2 - 3n + 2$ e $b_n = n^2 + 1$. Dimostriamo che sono asintotiche. Devo studiare $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.
Semplifico $\frac{a_n}{b_n}$ mettendo in evidenza n^2.
In generale si vede facilmente che se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $a_n = \sum_{i\in A} \alpha_i n^i$ allora a_n è asintotica alla successione $b_n = \{n^{\max\{i\,:\,i\in A\}}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esempio.

Osservazione 6.5

In generale se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \not\Rightarrow a_n \sim b_n$. Per esempio $a_n = n^2$ e $b_n = n$. Ma $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

In generale sia dato l'insieme di tutte le possibili successioni di numeri reali, allora la relazione di asintoticita è una relazione d'equivalenza. Dare def.

Teorema 6.10

Se $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$ e $c_n \sim c'_n$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n}$$

Esempio 6.20

Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n+4}{3n^4-3n^2+3}$. Osserviamo che $n^3+2n+4 \sim n^3$ e $3n^4-3n^2+3 \sim n^4$. Dunque per il principio di sostituzione, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n+4}{3n^4-3n^2+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{3n^4} = 0$.

Osservazione 6.6

Si osservi che il principio di sostituzione vale solo per prodotti e rapporti. Non per somme e differenze e elevazioni a potenze. Cioè $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$ **non implica** che $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to+\infty} a'_n + b'_n$, $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to+\infty} a'_n + b'_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} (a'_n)^{b'_n}$

Dimostrazione **(controesempi)**

(1) $a_n = n+ \sim n$ e $b_n = -n \sim -n$. Si vede facilmente che $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n 1 \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} a'_n + b'_n$.

(2) Prendo $a_n = 1 + \frac{1}{n} \sim 1$ (questo perché se una successione a_n ammette limite ℓ , allora posso dire che $a_n \sim \ell$: infatti $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\ell} = 1$ e quindi $a_n \sim \ell$). Poi prendo $b_n = n$. Osservo che $\lim_{n\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n = e$ ma d'altra parte $\lim_{n\to+\infty} 1^n = 1$ (perché ?).

6.11 Il numero di Nepero e

Una importante conseguenza del Teorema 6.9 è che se si riesce a dimostrare la monotonia della successione allora so che il limite esiste, senza doverlo calcolare. Coma applicazione vediamo la successione il cui limite definisce il numero di Nepero e . e è una della costanti fondamentali in matematica.

Teorema 6.11 (Definizione el numero di Nepero)

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Dimostrazione

Chiamiamo $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Per induzione si può far vedere che

1. a_n è crescente, ovvero $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.
2. $2 \leq a_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Proprietà (1): a_n crescente
Il binomio di Newton afferma che $(a+b)^n$ si può sviluppare come $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Applico lo sviluppo al $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ con $b = 1$ e $a = \frac{1}{n}$. Dunque abbiamo che

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$, per tanto la somma precedente la possiamo scrivere come

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \overbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}}^{k}$$

Con identico ragionamento applicato a $a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$, otteniamo che

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \overbrace{\frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n+1-1}{n+1} \cdots \frac{n+1-k+1}{n}}^{k}$$

Il termine della somma per $k = n+1$ è certamente positivo e dunque

$$a_{n+1} > b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \overbrace{\frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n+1-1}{n+1} \cdots \frac{n+1-k+1}{n}}^{k}.$$

Adesso mostriamo che per ogni $k = 1, \ldots n$, l'elemento k-esimo nella somma di a_n è minore del corrispondente elemento k-esimo nella somma b_n. Basta osservare che per ogni

$$j = 1, \ldots, n \quad \frac{n-j}{n} = (1 - \frac{j}{n}) < (1 - \frac{j}{n+1}) = (\frac{n+1-j}{n+1}).$$

Dunque $a_n < b_{n+1} < a_{n+1}$. □

6.1 (Continuazione Teorema 6.11)

Dimostrazione

Proprietà (2): $a_n \in [2,3]\ \forall n \in \mathbb{N}^+$
Dimostrare che $a_n \geq 2$ è facile. Infatti $a_1 = 2$ e siccome a_n è crescente $a_n > a_1 = 2, \forall n \geq 1$.

Per dimostrare che $a_n \leq 3$ procediamo come segue. Per prima cosa osserviamo che

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k > 1 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}^{(k-1)\ volte} = 2^{k-1} \tag{63}$$

Ricordiamo inoltre che la somma geometrica $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ e che dunque per $q = 1/2$ la somma$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$
Dal punto (1) abbiamo che

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} && (64)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \overbrace{(1 - \frac{1}{n})}^{<1} \cdots \overbrace{(1 - \frac{k-1}{n})}^{<1} && (65)\\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} && (66)\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} && (67)\\
&< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \text{oss. } 63 && (68)\\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \qquad \text{cambio indice} && (69)\\
&= 1 + 2\,\overbrace{(1 - \frac{1}{2^n})}^{<1} \qquad \text{somma geom.} && (70)\\
&\leq 3 && (71)
\end{aligned}$$

Conclusione
Da (1) e (2) dunque segue che la successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona e limitata. Quindi dal teorema precedente e dal teorema dei carabinieri posso immediatamente concludere che $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente a un un numero in $[2,3]$, ovvero che $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \in [2,3]$ che chiamo proprio e.

Corollario 6.1

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione che diverge a $+\infty$ per $n \to \infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e.$$

Dimostrazione

Siccome $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, dalla definizione di limite si ha che

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon\ \forall n > n_\epsilon |(1+\frac{1}{n})^n| < \epsilon \tag{72}$$

Sia $\lfloor x\rfloor = \max\{n \in \mathbb{N}\ :\ n \leq x\}$. Facciamo vedere che, dal fatto che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$ e usando la definizione di limite di una successione, possiamo ottenere

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor})^{\lfloor a_n\rfloor} = e \qquad \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1})^{\lfloor a_n\rfloor+1} = e \tag{73}$$

Ottenuti questi due risultati il teorema segue dal teorema dei carabinieri perché è facile vedere che $\lfloor a_n\rfloor \leq a_n \leq \lfloor a_n\rfloor + 1$.
Dimostriamo la prima delle due perché sono molto simili. $a_n \to +\infty$, e siccome $\lfloor a_n\rfloor > a_n - 1$, allora, per il teorema del confronto, anche $\lfloor a_n\rfloor \to +\infty$. Siccome $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$, dalla definizione di limite sappiamo che

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon\ :\ \forall n > n_\epsilon\ |(1-\frac{1}{n})^n - e| < \epsilon \tag{74}$$

Siccome $\lfloor a_n\rfloor \to +\infty$ deve esistere un $\bar{n}$ tale che $\lfloor a_n\rfloor \to +\infty > n_\epsilon$, $\forall n > \bar{n}$. Dunque per questi valori di $\lfloor a_n\rfloor \to +\infty$ posso usare la definizione in e dire

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\bar{n}\ :\ \forall n > \bar{n}\ |(1-\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor})^{\lfloor a_n\rfloor} - e| < \epsilon \tag{75}$$

che equivale a dire che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor})^{\lfloor a_n\rfloor} = e$. □

Corollario 6.2

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione che diverge a ∞ per $n \to \infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e.$$

Dimostrazione

Sia $b_n = -a_n - 1$ siccome $a_n \to -\infty$, allora $b_n \to +\infty$. Con semplici passaggi algebrici si può far vedere che

$$(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = (1+\frac{1}{b_n})^{b_n} \cdot (1+\frac{1}{b_n})$$

e quindi il risultato segue.

Corollario 6.3

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. In particolare $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$.

Dimostrazione

Se $x \neq 0$, osserviamo che

$$(1+\frac{x}{n})^n = (1+\frac{1}{\frac{n}{x}})^n \tag{76}$$

$$= \left[(1+\frac{1}{\frac{n}{x}})^{\frac{n}{x}}\right]^x \tag{77}$$

Sia b_n la successione $\{n/x\}_{n\in\mathbb{N}}$. Siccome $n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$. Dal Corollario precedente ottengo dunque che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \left[\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{b_n})^{b_n}\right]^x = e^x$.
Se $x = 0$, allor $e^x = 1$ e $(1+\frac{x}{n})^n = 1^n$ che tende a 1 (successione geometrica di ragione 1). E dunque il risultato segue. $\square$

6.12 Gerarchia degli infiniti e limiti notevoli

Per poter trattare la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ introduciamo una gerarchi degli infiniti studiando i limiti del rapporto di funzioni che tendono ad infinito. Informalmente tali limiti usano il fatto che alcune funzioni crescono veros infinito più veolcement di altre funzioni. La dimostrazione la vedremo in seguito.

Teorema 6.12 (Gerarchia degli infiniti)

Le seguenti successioni tendono ad infinito per n che tende ad infinito nella seguente GERARCHIA DEGLI INFINITI: $\{\ln n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha > 0$, $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q > 1$, $\{n!\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Quindi in particolare valgono le seguenti

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ se a_n precede b_n nella gerarchia
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$ se a_n precede b_n nella gerarchia

Esempio 6.21

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Infatti $n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. ora $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ quindi $e^0 = 1$

Esempio 6.22

$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{2}{n^2+1})^{(n^2+1)} = e^2$

Teorema 6.13 (Limiti Notevoli e asintoticità)

Se a_n è infinitesima ovvero $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$;
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$;
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$;
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$.

Esempio 6.23

(1) $\lim_{n\to+\infty} n\sin(1/n)$ è una forma indeterminata $\infty 0$ (perche?) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n}$ e per il rpimo limite il risultato è 1
(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ perchè successione limitata fratta una divergente va a 0 (Proposizione 6.4).

6.13 Criterio di Cesàro e successioni definite per ricorrenza

Teorema 6.14

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

1. a_n è positiva, ovvero $a_n \geq 0 \quad \forall \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Allora
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

Esempio 6.24

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{2^n+1}}$

Esercizio 6.3

SI consideri al seguente successione definita per ricorrenza
$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \sqrt{1+a_n} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1. Dimostrare per induzione che a_n è crescente
2. Dimostrare per induzione che$a_n \in [1,2]$.
3. Trovare $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

6.14 Esercizi

7 Parte 7 - Limiti di Funzioni

Sommario

Definizione Topologica e Successionale. Teorema Ponte. Limiti di Funzioni. Limiti ed Ordinamento: Teorema dei carabinieri. Teorema di permanenza del segno del segno. Limiti notevoli.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Limiti e Monotonia. Esercizio sulla soluzione di un limite tramite la definizione. Dimostrazione che $\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$ e $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$ non esistono.

7.1 Definizione di limite

Abbiamo visto nella definizione di limite di successioni che ogni intorno di $[k, +\infty]$ contiene un infinito numero di elementi in $\mathbb{N}$. Nel caso di una funzione $f(x)$ per esempio con dominio $\mathrm{dom}\, f = [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ non ha senso andare a studiare il limite per x che tende a $+\infty$. Andiamo dunque a generalizzare il concetto di punti in cui ha senso studiare il limite.

Definizione 7.1 (Punto di accumulazione)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE per X se *ogni* intorno di x_0 contiene infiniti punti di $X \setminus \{x_0\}$.
Un punto x_0 che non è di accumulazione per X si dice PUNTO ISOLATO di X

Si osservi che un punto di accumulazione pr X potrebbe non appartenere a X e viceversa non tutti i punti di X sono necessariamente punti di accumulazione per X.

Esempio 7.1

1. L'insieme $\mathbb{N}$ consiste di punti isolati. Infatti preso $n \in \mathbb{N}$ l'intorno $(n-1, n+1)$ contiene uno e un solo punto di $\mathbb{N}$, ovvero n. L'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$

2. Tutti i punti dell'insieme $X = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ sono isolati e l'unico punto di accumulazione per X è 0. Proviamo questo fatto. Preso un generico intorno di 0 $I = (-\epsilon, +\epsilon)$ I contiene gli infiniti punti di X $\frac{1}{n}$ tali che $n\epsilon < 1$.

3. Analogamente $X = \{\frac{n}{2n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è costituito da punti isolati e il suo unico punto di accumulazione è $1/2$. Anche in questo caso $1/2 \notin X$.

Andiamo ora a modificare la definizione di proprieta verifcata definitivamente (si veda per un confronto a pag 90 per la definizione nel caso di $X = \mathbb{N}$ e come unico punto di accumulazione $+\infty$).

Definizione 7.2

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{P}(x)$ una proprietà dipendente da $x \in X$. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X. Diremo che $\mathcal{P}(x)$ è VERA DEFINITIVAMENTE PER $x \to x_0$

$$\exists I \in \mathcal{I}(x_0) \text{ tale che } \mathcal{P}(x) \text{ è vera } \forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\}$$

In altre parole stiamo dicendo che esiste un intorno I di x_0 tale che $\mathcal{P}(x)$ è verificata da ogni elemento x dell'intorno I che è anche elemento del dominio X (eccetto che x_0).

È facile verificare che questa definizione è del tutto analoga a quella di pag. 90 quando $x_0 = +\infty$ e $X = \mathbb{N}$.

Esempio 7.2

1. $3x + 1 > 0$ defintivamente per $x \longrightarrow 0$.
2. $f(x) = 1/x$ con dominio $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e definitivamente limitata e negativa per $x \to -\infty$. Infatti preso, per esempio l'intorno $I = [-\infty - 1)$ di $-\infty$ si ha che $-1 < 1/x < 0$ per ogni $x \in \mathrm{dom}\, f \cap I$. Si noti che f non è definitvamente limitata per $x \to 0$.

Abbiamo adesso gli strumenti per dare la definizione di limite e poi andremo a vedere varie definizioni equivalenti

Definizione 7.3 (Limite - prima versione)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X. ℓ si dice LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE A x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

punto di accumulazione del dominio di f
cioè contiene infiniti punti del dominio di f

se

se ∀ intorno di l, f(x) appartiene a tale intorno definitivamente per x→x0

$$\forall I \in \mathcal{I}(\ell),\ f(x) \in I \text{ definitivamente per } x \to x_0.$$

O in altre parole, per ogni intorno I di ℓ, $f(x) \in I$ definitivamente per $x \to x_0$

SI noti che dalla definizione di proprietà vera definitivamente per $x \to x_0$, deve necessariamente essere che x_0 è un punto di accumulazione per X.

Quindi esplicitando la definizione di "proprietà vera definitivamente" la definizione di limite può essere data equivalentemente nella seguente forma:

Definizione 7.4 (Limite - versione)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \overset{1}{\forall I \in \mathcal{I}(\ell)}\ \overset{2}{\exists J \in \mathcal{I}(x_0)} : \overset{3}{f(x) \in I}\ \overset{4}{\forall x \in J \cap X \setminus \{x_0\}}$$

1 per ogni intorno I di l
2 esiste un intorno J di x0
3 Tale che f(x) appartiene ad I
4 per ogni x appartenente all'intersezione tra J e il dominio di f escluso x0

Infine se nella precedente definizione esplicitiamo gli intorni I e J otteniamo una terza definizione equivalente di limite che è quella più conosciuta. Siccome in questo caso gli intorni cambiano nel caso di numeri reali o di $\pm\infty$ andiamo a vedere le varie definizioni nei vari casi interpretando anche il concetto di limite

Esempio 7.3 (caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$)

Esplicitiamo gli intorni nella definizione di limite

Definizione 7.5

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \overset{1}{\forall \epsilon > 0}\ \overset{2}{\exists \delta > 0}\ :\ \overset{3}{|f(x) - \ell| < \epsilon}\quad \overset{4}{\forall x \in X}\ \overset{5}{\text{t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta}.$$

1 Per ogni epsilon maggiore di zero piccola a piacere
2 Esiste delta maggiore di zero
3 Tale che la differenza tra la funzione e il limite é minore di epsilon in modulo
4 Per ogni x appartenente al dominio della funzione
5 Tale che la differenza tra x e il punto di accumulazione xo sia compreso tra zero e delta

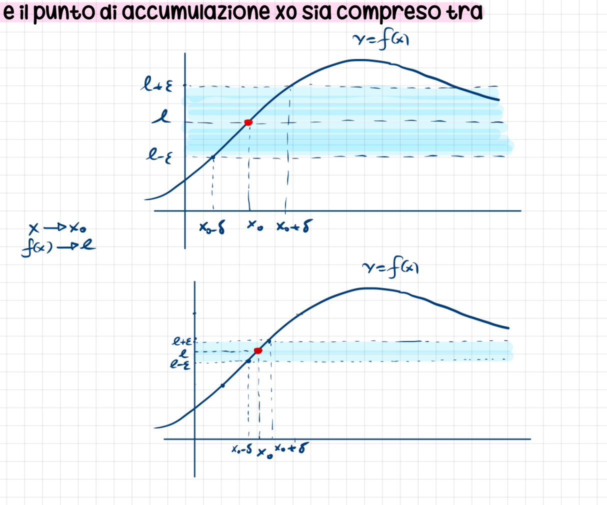


Figura 20: Interpretazione grafica del limite quando $x_0, \ell \in \mathbb{R}$. Si osservi come al variare di ϵ anche δ deve variare e in genere deve diminuire. Quindi si vede chiaramente come δ dipenda da ϵ.

1 Per ogni epsilon >0 piccolo a piacere
2 Esiste k appartenente ad R
3 Tale che la differenza tra la funzione e il valore del limite è minore di epsilon in modulo
4 Per ogni x del dominio tale che x > k

Esempio 7.4 (caso $x_0 = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$)

In questo caso gli intorni di ℓ e x_0 sono del tipo $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$ e $(k, +\infty)$ con $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{R}$. Così la definizione può essere scritta come

Definizione 7.6

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $+\infty$ un punto di accumulazione per X, allora

$$\lim_{x \to \cancel{x_0}\,\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \overset{1}{\forall \epsilon > 0}\ \overset{2}{\exists k \in \mathbb{R}}\ :\ \overset{3}{|f(x) - \ell| < \epsilon}\ \overset{4}{\forall x \in X \text{ t.c. } x > k}.$$

Si noti che questa è **esattamente** la definizione data per successioni dove $X = \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

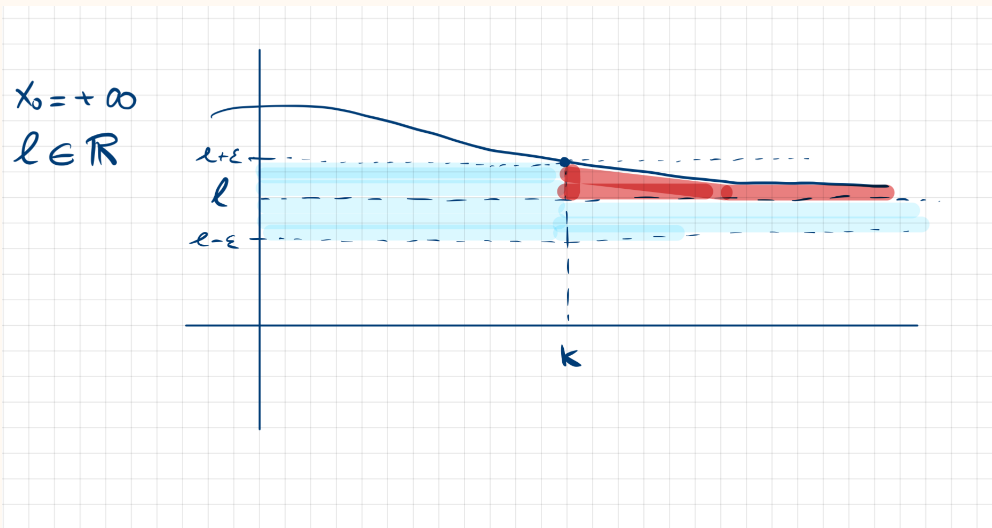


Figura 21: Interpretazione grafica del limite quando $x_0 = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$. .

1 Per ogni M grande a piacere
2 Esiste delta maggiore di zero
3 Tale che la funzione è minore di M
4 Per ogni x del dominio tale che la differenza tra x e x0 (punto di accumulazione) in modulo è compresa tra zero e delta

Esempio 7.5 (caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = -\infty$)

In questo caso gli intorni di ℓ e x_0 sono del tipo $(-\infty, M)$ e $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$ e $M \in \mathbb{R}$. Così la definizione può essere scritta come

Definizione 7.7

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $+\infty$ un punto di accumulazione per X, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \overset{1}{\forall M \in \mathbb{R}}\ \overset{2}{\exists \delta > 0}\ :\ \overset{3}{f(x) < M}\quad \overset{4}{\forall x \in X \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta}.$$

Per l'intorno di ℓ, in questo caso possiamo limitarci a M negativo che può anche essere scritot nella forma con $-M > 0$ come

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0\ :\ f(x) < -M \quad \forall x \in X \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

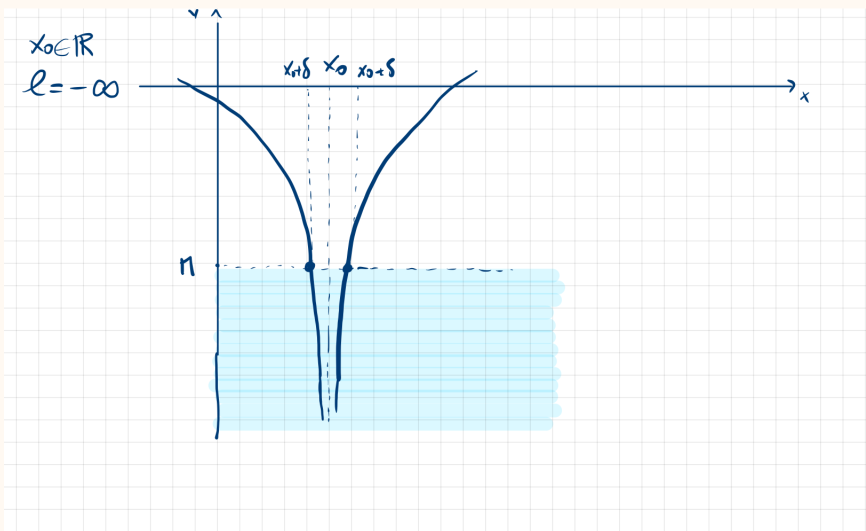


Figura 22: Interpretazione grafica del limite quando $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = -\infty$.

Esempio 7.6 (caso $x_0 = +\infty$, $\ell = +\infty$)

In questo caso gli intorni di ℓ e x_0 sono del tipo $(M, +\infty)$ e $(k, +\infty)$ con $M > 0$ e $k \in \mathbb{R}$. Così la definizione può essere scritta come

Definizione 7.8

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $+\infty$ un punto di accumulazione per X, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k \in \mathbb{R}\ :\ f(x) > M \quad \forall x \in X \text{ t.c. } x > k.$$

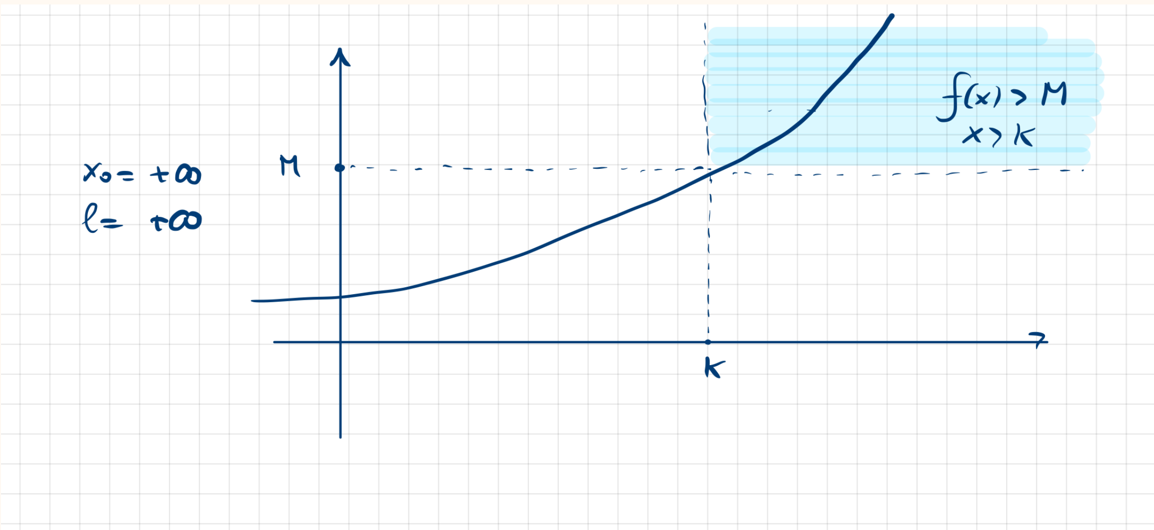


Figura 23: Interpretazione grafica del limite quando $x_0 = +\infty$ e $\ell = +\infty$.

Esempio 7.7 (caso $x_0 = -\infty$, $\ell = +\infty$)

In questo caso gli intorni di ℓ e x_0 sono del tipo $(M, +\infty)$ e $(-\infty, k)$ con $M > 0$ e $k \in \mathbb{R}$. Così la definizione può essere scritta come

Definizione 7.9

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $+\infty$ un punto di accumulazione per X, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R} > 0\ :\ f(x) > M \quad \forall x \in X \text{ t.c. } x < k.$$

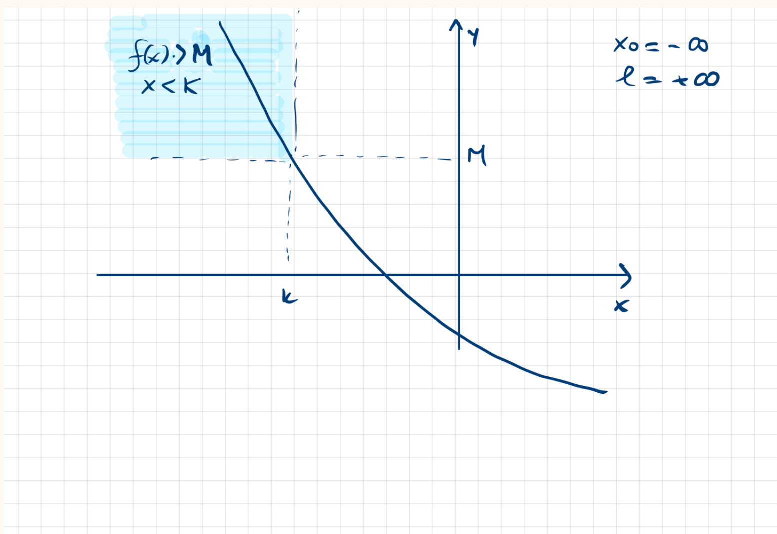


Figura 24: Interpretazione grafica del limite quando $x_0 = -\infty$ e $\ell = +\infty$.

Esercizio 7.1

Verificare i seguenti limiti

1. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Fissato un $\epsilon > 0$ osservo che $|x^2 - 0| < \epsilon \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon})$. Quindi basta prendere $\delta = \sqrt{\epsilon}$ per soddisfare la deifnizione di limite.

2. $\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty$. Infatti preso un $M > 0$ la definizione di limite è per questo caos è verificata sse $(-\frac{1}{x^2}) < -M \Leftrightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{M}, 0) \cup (0, \frac{1}{M})$. Dunque basta prendere $\delta = \frac{1}{M}$

3. $\lim_{x\to +\infty} 2^x = +\infty$. Preso un generico $M > 0$ si ha che $2^x > M \Leftrightarrow x > \log_2 M$. Dunque basta prendere $k = \log_2 M$ per soddisfare la def di limite in questo caso.

4. $\lim_{x\to 3} \frac{x}{x+1} = +\frac{3}{4}$. Considerato un generico $\epsilon > 0$ vogliamo trovare un $\delta > 0$ tale che $|\frac{x}{x+1} - \frac{3}{4}| = \frac{|x-3|}{4|x+1|} < \epsilon$, per ogni x tale che $0 < |x - 3| < \delta$.

7.1.1 Limite destro e sinistro

Consideriamo la funzione $\mathsf{sgn}(x)$ definita da

$$\mathsf{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Non è difficile far vedere che $\mathsf{sgn}(x)$ e $1/x$ non ammettono limite per $x \to 0$ (si considerino i grafici per averne una intuizione). Tuttavia osservando i grafici se approcciamo 0 da destra (ovvero da valori $x > 0$) o da sinistra (ovvero per $x < 0$) vorremo porter affermare che $\mathsf{sgn}(x)$ tende a 1 (rispettivametne a -1) e $1/x$ tende a $+\infty$ (rispettivamente $-\infty$).

Definizione 7.10 (punto di accumulazione destro e sinistro)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DESTRO PER X se x_0 è un punto di accumulazione per $X \cap (x_0, +\infty)$.

$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE SINISTRO PER X se x_0 è un punto di accumulazione per $X \cap (-\infty, x_0)$.

Definizione 7.11 (Limite destro e sinistro)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un punto di accumulazione destro per X. Allora ℓ è LIMITE DESTRO DI f PER $x \to x_0$ se la restrizione di f a $X \cap (x_0, +\infty)$ tende a ℓ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f\restriction_{X \cap (x_0, +\infty)}(x) = l$$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ un punto di accumulazione sinistro per X. Allora ℓ è LIMITE SINISTRO DI f PER $x \to x_0$ se la restrizione di f a $X \cap (-\infty, x_0)$ tende a ℓ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f\restriction_{X \cap (-\infty, x_0)}(x) = l$$

Osservazione 7.1 (Non esistenza di un limite)

Supponiamo di voler mostrare $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste. È sufficiente mostrare che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Per esempio è facile far vedere che $\lim_{x \to 0^+} \mathsf{sgn}(x) = 1 \neq -1 \lim_{x \to 0^-} \mathsf{sgn}(x)$. Basta osservare che $\mathsf{sgn}(x)\restriction_{(0,+\infty)} = 1$ e $\mathsf{sgn}(x)\restriction_{(-\infty,0)} = -1$.

Vediamo il perché nel prossimo teorema.

Teorema 7.1

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cap \overline{X}$.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Dimostrazione **(Cenni)**

Supponiamo per assurdo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Trattiamo il caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$. Dunque $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ f(x) \in (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$. ℓ deve essere diverso da almeno uno tra i limiti desto e sinistro che sono diversi tra loro. Diciamo dal destro. E supponiamo che $\ell_1 > \ell$ (il caso simmetrico è analogo). Dunque dalla definizone di limite destro deve valere $\forall \epsilon_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)\ f(x) \in (\ell_1 - \epsilon_1, \ell_1 + \epsilon)$. Questa definizione deve valere per ogni ϵ_1. Ma se fisso ϵ_1 in mod che $\ell < \ell_1 - \epsilon_1 < \ell - \epsilon$, si vede subito che ci sono dei valori di $f(x)$ che non sono nell'intorno $(\ell_1 - \epsilon_1, \ell_1 + \epsilon)$, in particolare sono $< f(x) - \ell_1)$, contraddicendo dunque la definizione di limite destro. Quindi la ipotesi per assurdo non può darsi.

Definizione 7.12 (Funzioni infinitesime e infinite)

Si f una funzione

1. f si dice INFINITESIMA PER $x \to x_0$ e si scrive $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
2. f si dice INFINITA (O DIVERGENTE) PER $x \to x_0$ se $f(x) = +\infty$ oppure $f(x) = -\infty$ per $x \to x_0$.

Esempio 7.8

1. $\sqrt{x} = o(1)$ per $x \to 0^+$,
2. $\frac{1}{x}$ è infinta per $x \to 0^-$,
3. $x^{-2} = o(1)$ per $x \to +\infty$
4. $\frac{1}{x}$ non esiste per $x \to 0$

Osservazione 7.2

Non è difficile osservare usando la definizione di limite che se $\ell \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - \ell = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0$$

Per tanto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow f(x) = \ell + o(1) \text{ per } x \to x_0$$

ovvero $f(x)$ è somma di ℓ e una funzione infinitesima per $x \to x_0$

7.2 Definizione di limite per successioni e teorema ponte

Per prima cosa andiamo a vedere una definizione di punto di accumulazione equivalente quella data (Definizione 7.1 a pagina 108) ma che usa il concetto di successione e limite di una successione.

Definizione 7.13

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *tende a x_0 compatibilmente con X* se valgono le seguenti proprietà:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{x_0\}$, ovvero
   (a) $x_n \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
   (b) $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$.

Definizione 7.14 (Punto di accumulazione)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che x_0 è PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER X se esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che tende a x_0 compatibilmente con X.

Mostriamo che le due definizioni sono equivalenti

Teorema 7.2

Def. 7.1 $\Leftrightarrow$ Def. 7.14.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare le due implicazioni. Iniziamo da $\Leftarrow$ che è più semplice. In base a Def. 7.1 dobbiamo dimostrare che $\forall I \in \mathcal{I}(x_0) I \cap X \neq 0$. Siccome per Def. 7.14 $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, allora (usanso la definizione compatta di limite di una successione) sappiamo che

$$\forall I \in \mathcal{I}(x_0) x_n \in I \text{definitivamente}$$

ovvero esiste un $\bar{n}$ tale che $\forall n > \bar{n}\ x_n \in I$. Siccome in base a Def. 7.1 sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in X$ questo vuol dire che $\forall n > \bar{n}\ x_n \in I \cap X$, ovvero che $I \cap X$ contiene almeno un elemento.

Per la implicazione inversa $\Rightarrow$ invece procediamo come segue: In base a Def. 7.1 sappiamo che $\forall I \in \mathcal{I}(x_0) I \cap X \neq 0$. In altri termini questo vuol dire

$$\forall \epsilon > 0\ (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap X \setminus \{x_0\} \neq 0$$

In particolare siccome $\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora

$$(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap X \setminus \{x_0\} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{78}$$

Quindi l'intorno $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ di x_0 contiene un numero infinto di punti in $X \setminus \{x_0\}$. Per soddisfare la Def. 7.14 devo costruire una successione con le proprietà specificate. Dalla proprietà 78 osservo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ che esiste un elemento a_n in $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap X \setminus \{x_0\}$ Prendo dunque la successione $x_n \stackrel{\text{def}}{=} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. È facile osservare che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ visto che $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e dunque basta scegliere $\bar{n} > 1/\epsilon$ nella definizione di limite. Le altre due proprietà della Def. 7.14 sono immediate. In particolare la prima è vera per la proprietà in 78.

A partire da questa definizione di punto di accumulazione possiamo dare una nuova definizione di limite equivalente che usa il concetto di limite di successione.

Definizione 7.15 (Limite di funzione)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{per ogni} \text{ successione } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ che } \textit{tende a } x_0 \textit{ compatibilmente con } X, \\ \text{si ha che } \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell. \end{cases}$$

Si noti che la definizione è ben posta in quanto sappiamo dalla definizione di punto di accumulazione che esiste almeno una successione che tende a x_0 compatibile con X e quindi tale insieme è non vuoto.

Il teorema ponte asserisce l'equivalenza delle due definizioni di limite e ci permette di interscambiare a piacere nel lavorare con i limiti.

Teorema 7.3 (Teorema Ponte)

Def. 7.3 $\Leftrightarrow$ Def. 7.15.

Osservazione 7.3

Si osservi che ℓ non dipende da quale successione x_n scegliamo che tende a x_0 compatibilmente con X.

Andiamo ad usare questa definizione nel caso di due funzioni $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ e $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ per $x \to 0$. Andiamo a disegnare le due funzioni

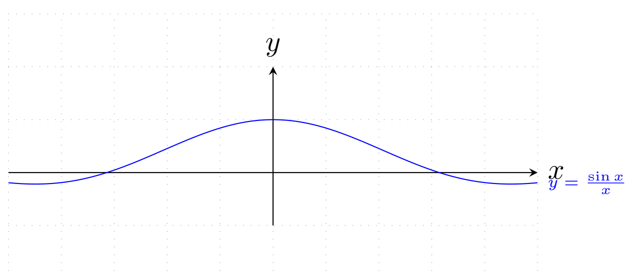


Figura 25: La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

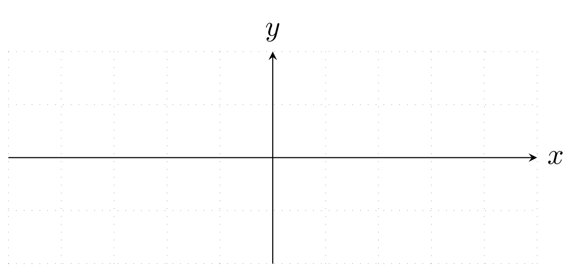


Figura 26: La funzione $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

Osservazione 7.4

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Innanzitutto osserviamo che $0 \in \overline{\mathsf{dom}(f)}$[a], ovvero è un punto di accumulazione per $\mathsf{dom}\, f$. Dobbiamo far vedere che comunque prendiamo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che tende 0 compatibilmente con $\mathsf{dom}\, f$, ovvero tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, allora risulta che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$. Ma quest'ultimo risultato lo conocsiamo dai limiti notevoli sulle successioni

[a] L'insieme dei punti di accumulazione per un un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si denota con $\overline{X}$.

Per far vedere che non esiste il limite di una funzione $f(x)$ per $X \to x_0$ sarà sufficiente trovare due successioni x_n e y_n che tendono a x_0 e compatibili con $\mathsf{dom}\, f$ tali che $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq \lim_{n\to+\infty} y_n$. Vediamo nel caso di $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ come fare.

Osservazione 7.5

Considero le due successioni $x_n \stackrel{\texttt{def}}{=} \frac{1}{2\pi n}$. Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ e che x_n soddisfa le altre due proprietà. Calcoliamo ora $g(x)$ nella successione x_n. questa è $\sin(2\pi n)$. Ma dunque $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = 0$.

Definisco $y_n \stackrel{\texttt{def}}{=} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ e y_n verifica le altre due proprietà. D'altra parte osservo che $g(y_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$. Ma $\lim_{n\to+\infty} g(y_n) = 1$. E duque posso concludere che il limite di $g(x)$ non esiste.

Osservazione 7.6

è importante notare che non necessariamente il $\lim_{x\to x_0} f(x)$ deve essere uguale al valore che f assume in x_0, ovvero $f(x_0)$. anzi in alcuni casi il punto di accumulazione x_0 non è neanche incluso nel $\mathsf{dom}\, f$ e dunque la funzione non è neanche definita in x_0. è importante ricordare q questo proposito che nelle Definizioni di limite si richiede sempre $|f(x)-\ell| < \epsilon$ per $x \in (X\setminus\{x_0\})\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$. E quindi il valore di f in x_0 non è rilevante nella definizione di limite.

Esempio 7.9

sia $f(x) \stackrel{\texttt{def}}{=} \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ Si vede subito che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

Esempio 7.10

Prendiamo la funzione $f(x) = \frac{x}{|x|} = \mathsf{sgn}(x)$. Per far vedere che il limite non esiste possiamo prendere le due successioni $x_n = \{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ e $y_n = \{-\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Entrambi x_n ey_n tendono a 0 per $n \to +\infty$. Ma $f(x_n) \to 1$ per $n \to +\infty$ e $f(y_n) \to -1$ per $n \to +\infty$.

Diamo allora le definizioni di limite destro e sinistro mediante successioni

Definizione 7.16

Data $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, diremo che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0^+ \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \\ x_n \geq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0^- \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \\ x_n \leq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Definizione 7.17 (Limite di funzione)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{per ogni } \text{ successione } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ che } \textit{tende a } x_0^+ \textit{ compatibilmente con } X, \\ \text{si ha che } \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{per ogni } \text{ successione } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ che } \textit{tende a } x_0^- \textit{ compatibilmente con } X, \\ \text{si ha che } \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell. \end{cases}$$

Quindi tramite le successioni che abbiamo usato nell'Esempio 7.10 si vede subito che non abbiamo fatto altro che dimostrare che $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathsf{sgn}(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathsf{sgn}(x) = -1$.

Esempio 7.11

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$. anche qui basta prendere $x_n = 1/n$ e $y_n = -1/n$ per vedere che in 0 non c'è limite per $1/x$. D'altra parte esistono il limite destro e sinistro. Prendo una successione x_n tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0^+$. Da qui $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = 1/0^+ = +\infty$. Quindi $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. In modo analogo si vede che $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

7.3 Asintoti

Definizione 7.18

Se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, allora diremo che la retta $y = \ell$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE PER f in $\pm\infty$.

Definizione 7.19

Se $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \in \mathbb{R}$, allora diremo che la retta $x = c$ è un ASINTOTO VERTICALE PER f in $\pm\infty$.

7.4 Limite, operazioni algebriche e composizione

Proposizione 7.1

Se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to c} fg(x) = \ell_2$ con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, allora

1. $\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = \ell_1 \pm \ell_2$
2. $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$
3. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad \ell_2 \neq 0$
4. $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \ell_1^{\ell_2} \quad \ell_1 > 0$
5. $\lim_{x\to c} |f(x)| = |\ell_1|$.

Osservazione 7.7

Le proprietà precedenti possono estendersi al caso $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ a patto che si ottenga una forma determinata. Se ottengo una forma indeterminata allora devo risolverla.

Esempio 7.12

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 3x + 1}{5x^3 + 3x^2 - 7} = -11/35$.

(Forme determinate)

1. SOMMA

$$\begin{aligned} \pm\infty + \ell &= \pm\infty \\ +\infty + \infty &= +\infty \\ -\infty - \infty &= +\infty \end{aligned}$$

2. PRODOTTO

$$\begin{aligned} (\pm\infty)\cdot\ell &= \begin{cases} \pm\infty & \ell > 0 \\ \mp\infty & \ell < 0 \end{cases} \\ (+\infty)\cdot(+\infty) &= +\infty \\ (-\infty)\cdot(-\infty) &= +\infty \\ (-\infty)\cdot(+\infty) &= -\infty \end{aligned}$$

3. QUOZIENTE

$$\tfrac{\ell}{\pm\infty} = \begin{cases} 0^{\pm} & \ell > 0 \\ 0^{\mp} & \ell < 0 \end{cases}$$

$$\tfrac{\ell}{0^{\pm}} = \begin{cases} \pm\infty & \ell > 0 \\ \mp\infty & \ell < 0 \end{cases}$$

$$\tfrac{\pm\infty}{0^{+}} = \pm\infty \qquad \tfrac{\pm\infty}{0^{-}} = \mp\infty$$

4. ELEVAMENTO A POTENZA

$$\ell^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \ell > 1 \\ 0^{+} & 0 < \ell < 1 \\ 0^{+} & \ell = 0^{+} \end{cases}$$

$$\ell^{-\infty} = \begin{cases} 0^{+} & \ell > 1 \\ +\infty & 0 < \ell < 1 \\ +\infty & \ell = 0^{+} \end{cases}$$

$$(+\infty)^{\ell} = \begin{cases} +\infty & \ell > 0 \\ 0^{+} & \ell < 0 \end{cases}$$

(Forme indeterminate)

$$+\infty - \infty, \quad \infty\cdot 0, \quad \tfrac{0}{0}, \quad \tfrac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0.$$

Si ricorda che come nel caso delle successione valgono le seguenti proprietà dall'algebra dei limiti

Proposizione 7.2

1. se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ è limitata inferiormente allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = +\infty$
2. se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $g(x)$ è limitata superiormente allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = -\infty$
3. se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ è limitata inferiormente allora $\lim_{x\to-\infty} f(x) + g(x) = +\infty$
4. se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $g(x)$ è limitata superiormente allora $\lim_{x\to-\infty} f(x) + g(x) = -\infty$

Esempio 7.13

$\lim_{x\to-\infty} x - \sin x = -\infty$. x è infinita per $x \to +\infty$ e $\sin x$ limitata per $x \to +\infty$

7.5 Limiti e composizione

Teorema 7.4 (Limite della funzione composta)

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ e $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $c \in \overline{X}$. Se

1. $\lim_{x\to c} f(x) = y_0$
2. $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$
3. $\exists\delta > 0$ tale che $f(x) \neq y_0$ $\forall x \in X$ tali che $0 < |x - c| < \delta$,

allora

$$\lim_{x\to c} g \circ f = \lim_{x\to c} g(fx) = \ell.$$

Esempio 7.14

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ Pongo $y = 1/x^2$. per $x \to \pm\infty$, $y = \frac{1}{x^2} \to 0^+$. dunque il limite cercato e equivalente a $\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{x^2})$. $\sin(\frac{1}{x^2})$ è al composizione di funzioni $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(y) = \sin(y)$. Per calcolare questo limite posso calcolare il limite della funzione più esterna calcolato nel limite della funzione più interna. $\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{x^2}) = \lim_{y\to c} \sin(y)$ dove $c = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Quindi $\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{x^2}) = \lim_{y\to 0} \sin y = 0$.

   Questo può essere scritto in mod più diretto come segue: posto $y \overset{\texttt{def}}{=} \frac{1}{x^2}$ osservo, usano il limite precedente, che per $x \to +\infty$, $y \to 0$. Dunque operando la sostituzione nel limite cercato in accordo al teorema sui limite delle funzione composte ottengo che $\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{x^2})) = \lim_{y\to 0} \sin y = 0$.

Vediamo perché la terza condizione è necessaria. Sia $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione è $g(x) \overset{\texttt{def}}{=} \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & xt = 0 \end{cases}$ Se studio il limite di $g(f(x))$ per $x \to 0$ questo è uguale a $g(0) = 0$. Mentre il limite $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$. il motivo è che la terza condizione non è rispettata.

7.6 Limiti e ordinamento

Teorema 7.5 (Teorema del confronto)

Date $f, g :\longrightarrow \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X. Se

1. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$,

allora $\ell \leq m$.

Una prima conseguenza del confronto è il

Teorema 7.6 (Teorema dei carabinieri)

Date $f, g, h :\longrightarrow \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X. Se

1. $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} g(x)$,

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Una seconda conseguenza è il

Teorema 7.7 (Teorema permanenza del segno)

Date $f :\longrightarrow \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X. Se

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$,

allora $\ell \geq 0$.
In particolare se $f(x) \in [a, b] \quad \forall x \in \mathbb{R}$, allora $\ell \in [a, b]$.

Osservazione 7.8

Come abbiamo visto nel caso delle successione il teorema è vero se le disugauglianza sono deboli ma **non è sempre vero** nel caso in cui le disuguaglianze sono strette. Per esempio $f(x) = 1/x > 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Ma $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Quindi per disuguaglianza strette il teorema non vale.

7.7 Limiti e monotonia

Teorema 7.8

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

1. Se f è crescente, allora
   (a) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) \ : \ x \in X, x \leq x_0\}$.
   (b) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) \ : \ x \in X, x \geq x_0\}$.
2. Se f è decrescente, allora
   (a) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf\{f(x) \ : \ x \in X, x \leq x_0\}$.
   (b) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup\{f(x) \ : \ x \in X, x \geq x_0\}$.

Aggiungere delle figure

7.8 Asintoticità

Definizione 7.20

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni definitivamente diverse da zero per $x \to x_0$ con x_0 punto di accumulazione per X. f e G si dicono ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI e scriveremo se

$$f(x) = g(x)(1 + o(1)) \text{ per } x \to x_0 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Scriveremo in questi casi $f(x) \sim g(x)$ per $\to x_0$.

Esempio 7.15

1. $x^2 \sim x$ per $x \to 1$
2. $x^2 + 3x \sim x^2$ per $x \to +\infty$
3. $x^2 + 3x \sim 3x$ per $x \to 0$
4. $\sqrt{x+5} \sim \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$

7.9 Limiti di funzioni elementari

7.9.1 Funzione potenza

Osservazione 7.9 (Funzione potenza x^b, con $b \in \mathbb{R}, b > 0$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^b = +\infty & b > 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0} x^b = 0 & b > 0 \end{cases}$$

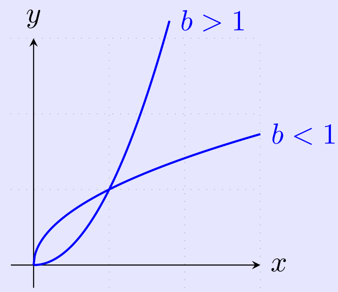


Figura 27: Funzione x^b con $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

Osservazione 7.10 (Funzione potenza x^b, con $b \in \mathbb{R}, b < 0$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^b = 0 & b < 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0} x^b = +\infty & b < 0 \end{cases}$$

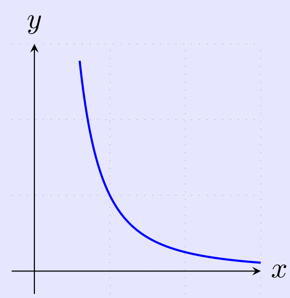


Figura 28: Funzione x^b con $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$.

Osservazione 7.11 (Funzione potenza - Sintesi)

$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

Osservazione 7.12 (Funzione potenza x^n con $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} \lim_{x\to \pm\infty} x^n = +\infty & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \\ \lim_{x\to \pm\infty} x^n = \pm\infty & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

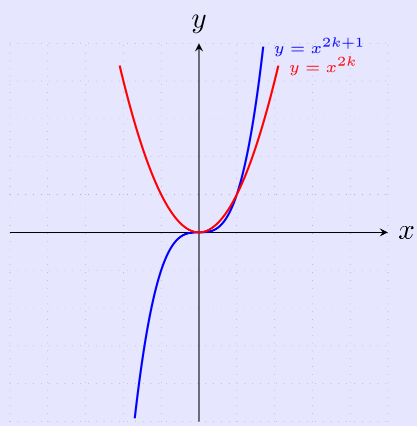


Figura 29: Funzione x^n, $n \in \mathbb{N}$

7.9.2 Funzione esponenziale

Osservazione 7.13 (Funzione esponenziale - Sintesi)

$$\lim_{x\to x_0} b^x = b^{x_0} \quad \forall b \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0^+ & 0 < b < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to -\infty} b^x = \begin{cases} 0^+ & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ +\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

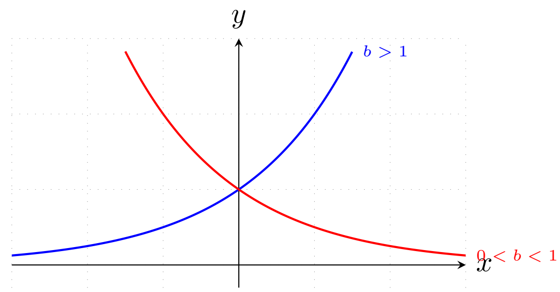


Figura 30: Funzione b^x nei due casi $b > 1$ e $0 < b < 1$.

7.9.3 Funzione logaritmo

Osservazione 7.14 (Funzione logaritmo - Sintesi)

$$\lim_{x \to x_0} \log_b x = \log_b x_0 \quad \forall b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1, x_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ -\infty & 0 < b < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^+} \log_b x = \begin{cases} -\infty & b > 1 \\ +\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

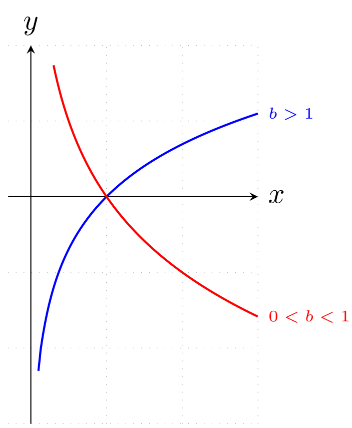


Figura 31: Funzione $\log_b(x)$ nei due casi $b > 1$ e $0 < b < 1$.

7.9.4 Funzioni trigonometriche

Osservazione 7.15 (Sintesi)

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} \tan x = \begin{cases} \tan x_0 & x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ +\infty & x_0 = \frac{\pi}{2}^- \\ -\infty & x_0 = -\frac{\pi}{2}^+. \end{cases}$$

7.10 Limiti notevoli

Osservazione 7.16 (Limiti notevoli)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Ricordiamo che che una disuguaglianza fondamentale trigonometrica $\sin x \leq x \leq \tan x$. Analizziamo prima il caso in cui $x \in (0, \pi/2)$ dove $\sin x > 0$. Quindi $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$. Divido per $\sin x > 0$ e dunque $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \cos x$. Passo ai reciproci e ottengo $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Ora il $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$ e dunque per il teorema dei carabinieri $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Stesso risultato con le disuguaglianze invertite si può fare se $x \in (-\pi/2, 0)$ quando $x \to 0^-$.

Osservazione 7.17 (Limiti notevoli)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1.$

Moltiplico e divido per $(1 + \cos x)$ quindi ho

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2} \dfrac{1}{1+\cos x}$ e siccome $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ottengo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}$

Osservazione 7.18 (Limiti notevoli)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

Osservazione 7.19 (Limiti notevoli)

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$
Faremo vedere che:

1. se $0 < x < 1$, allora $1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$
2. se $x < 0$, allora $\frac{1}{1-x} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq 1$

E quindi il limite cercato discende dal teorema dei carabinieri.
Per dimostrare le due relazioni partiamo da limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x.$$

Dalla disuguaglianza di Bernoulli segue che $(1+\frac{x}{n})^n \geq (1+\frac{xn}{n}) = 1+x \quad n \geq -x$. Quindi possiamo affermare che e $(1+\frac{x}{n})^n \geq 1+x$ defintivamente e dunque per il teorema sul confronto possiamo concludere che

$$e^x \geq 1+x$$

In modo del tutto analogo sostituendo $-x$ con x nel precedente ragionamento possiamo concludere che

$$e^{-x} \geq 1-x$$

quindi ottengo che $1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1+x}$
Da cui sottraendo uno e dividendo per x ottengo la relazione cercata $1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$.
La seconda si dimostra in modo del tutto analogo.

Osservazione 7.20

$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha$

Osservazione 7.21

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ si ricava dal precedente. vediamo come. Considero $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}$ Pongo $x = 1/y$ ovvero $y = 1/x$. Osservo che quando $x \to 0^+$ $1/y \to +\infty$. Dunque usano la composizione di funzioni Ottengo $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} y\ln(1+\frac{1}{y})$. E questo $\lim_{y\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{y})^y$. Di nuovo dal limite della funzione composta questo $\ln e = 1$.
Adesso devo trattare $\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}$ che è uguale.

Osservazione 7.22 (Gerarchia degli infiniti)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{a^x} = 0$ con $r > 0, a > 1$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ con $r > 0$.

$\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0, r > 0$

Osservazione 7.23

$\lim_{x\to 0^+} x^x$. Si può scrivere come $\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$. Per il limite di primo e la composizione questo tende a $e^0 = 1$.

$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. $y = \frac{1}{x}$ composizione di funzione e limite precedente

7.11 Esercizi

Esercizio 7.2

Verificare che $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$

Dimostriamolo con le successioni.
$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{R}$, Devo quindi dimostrare che comunque prendo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *compatibile con* $\mathsf{dom}\, f$ *che tende a* 0 risulta che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x_n^2} = 1$. Dalla definizione di limite di una successione devo fare vedere $\forall\epsilon > 0 \exists n_0$ tale che $|\frac{1}{1+x_n^2} - 1| < \epsilon \quad \forall n > n_0$. Studio la disequazione $|\frac{1}{1+x_n^2} - 1| < \epsilon$. Dopo averla sviluppata e tolto il valore assoluto ottengo $x_n^2 < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ e questo si verifica sse $-\sqrt{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}} < x_n < \sqrt{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}$. Sono sicuro che questa disuguaglianza è verificata da un certo punto in poi perché $x_n \to 0$. Quindi la tesi è dimostrata.

Esercizio 7.3

$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \sin x$ e $\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$

Devo costruire due successioni X_n e y_n che convergono al punto di accumulazione $\pm\infty$.
Per esempio posso prendere una successione di valori in cui il seno sempre si annulla $x_n \overset{\mathtt{def}}{=} 2\pi n \quad n \in \mathbb{N}$. E una successione di valori in cui il seno vale sempre 1 $y_n \overset{\mathtt{def}}{=} \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{N}$. ora è chiaro che $\lim_{n\to+\infty} \sin x_n \neq \lim_{n\to+\infty} \sin y_n$.
Analogo ragionamento si può fare per il $\cos x$. Ed inoltre lo stesso ragionamento lo possiamo fare per qualunque funzione periodica che non sia la funzione costante andando a prendere x_n e y_n

Esercizio 7.4

$\lim_{x \to +\infty} 3x^3 - x^2 + 1 = +\infty.$

Come nel caso delle successione metto in evidenza il termine di grado massimo

Esercizio 7.5 rapporto di polinomi per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 2} = +\infty$. Raccolgo i temrini di grado massimo e semplifico

Esercizio 7.6 rapporto di polinomi per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + x} =$. Raccolgo i temrini di grado minimo e semplifico. $\lim_{x \to 0} \frac{2x(x^2/2 + x/2 + 1}{x^2(1 + 1/x)} =$ 2

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x^{2/3}}{x^4 + x^{1/2}}$. Raccolgo i temrini di grado massimo e semplifico $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{1/6}(x^{4/3} + 1)}{x^{3/2} + 1} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2 + x^5}$. $\lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x^2(1 + x^3)}$ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \frac{(x+1)}{(1 + x^3)}$
Quindi se $x \to 0^+$, allora $1/x \to +\infty$, $x \to 0^-$, allora $1/x \to -\infty$. il limite non esiste.

Esercizi più complessi

Esercizio 7.7

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\tan x}$. Verifichiamo che è una FI $[0/0]$. Pongo $y = \sin x$. Osservo che quando $x \to 0$ allora $y \to 0$. uso quindi il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ più il fatto che $\cos(0) = 1$

Esercizio 7.8

$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = 2$. Se divido e moltiplico per x^2 ottengo il prodotto di due limiti notevoli

Esercizio 7.9

$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1 - \cos x}}$. Moltiplico e divido per $x \ln 2$ e scrivo 2^x come $e^{x \ln 2}$. ottengo $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x \ln 2} \cdot \frac{x \ln 2}{\sqrt{1 - \cos x}}$. Ottengo $\ln 2\sqrt{2}$.

Esercizio 7.10

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{x^2}-1}{x^2}$. Gerarchi degli infiniti.

Esercizio 7.11

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{x}}$. Provo il teorema del confronto devo maggiorare e minorare. Osservo che $-2 \leq \sin x - \cos x \leq 2$. Divido tutto per $\sqrt{x}$. Teo Carab. $= 0$

Esercizio 7.12

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ moltiplico e divido per $2x3$. $= 2/3$

Ulteriori esercizi

Esercizio 7.13

$\lim_{x\to 0^+} (1 + |\sin x|)^{\frac{1}{x}}$. E' una forma indeterminata 1^∞ quindi provo a riportarla a limite di Nepero.
Viene scritto come:

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{|\sin x|}}\right)^{\frac{1}{|\sin x|}}\right]^{\frac{|\sin x|}{x}}$$

. Il risultato è e

Esercizio 7.14

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+x^2)}{\ln x}$. FI $[\infty/\infty]$. Quando $x \to 0$ guardare le potenze di grado piu basso. scrivo $\ln(x + x^2) = \ln x + \ln(1+x)$

8 Parte 8 - Continuità

Sommario

Definizioni ed esempi. Proprietà delle funzioni continue. Punti di Discontinuità. Classi di funzioni continue. Metodo di bisezione, Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Continuità e Funzioni inverse, Teorema di continuità della funzione inversa. Esempio di funzioni inverse. Teorema di Weierstrass (con dimostrazione).

Biblio

Cap. 6 [BDG11], Cap. 3.3 e 3.4 [BPS14]

Biblio

8.1 Definizione preliminari

Abbiamo visto che, in punto in cui sono definite, le funzioni elementari e le funzioni razionali ammettono limite finito esattamente uguale al valore della funzione nel punto.

Abbiamo inoltre visto che anche nel caso in cui il punto di accumulazione $x_0 \in \mathsf{dom}\, f$, quando andiamo a calcolare il limite le successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathsf{dom}\, f$ tali che $x_n \neq x_0$. Non è important eciò che succede nle punto di accumluaione anzi prendiamo successioni che escludono il punto x_0

Esempio 8.1

$\lim_{x\to 1} \log x = \log 1 = 0$

Diamo un nome a questa proprietà

Definizione 8.1 (Continutà)

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X} \cap \mathbb{R}$. f si dice CONTINUA in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

oppure se x_0 è un punto isolato.

f si dice continua in $A \subseteq X$ se f è continua ain ogni punto $x_0 \in A$

Osservazione 8.1 (Punti isolati)

Se x_0 è isolato per X la funzione si considera continua per difetto

Definizione 8.2 (Continuità destra e sinistra)

Una funzione si dice continua in un suo punto del dominio e di accumulazione destro (rsip. sinistro) se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (risp $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).
f continua in x_0 sse è contniua da destra e sinistra in x_0.

Definizione 8.3

f è continua in un intervallo I se f è continua in ogni $x \in I$.

Esempio 8.2

Sia $f(x) = e^x$. dom $f = \mathbb{R}$. devo dimostrare che f è continua in $\mathbb{R}$. cioè devo far vedere che

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$$

Dimostrazione

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0} \tag{79}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^x - e^{x_0} = 0 \tag{80}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1) = 0 \tag{81}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (x - x_0)e^{x_0} \cdot \frac{(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = 0 \tag{82}$$

$$\tag{83}$$

Il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0}$ è un limite notevole e tende a 1. Infatti pongo $y = x - x_0$e osservo che per $x \to x_0$ per $y \to 0$. Quindi tutto il limite tende a 0

Osservazione 8.2

Se prendiamo la definizione di limite con gli intorni, allora una funzione è continua sse

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Si osservi che in questo caso posso omettere di dire $0 < |x - x_0|$ perche non si richiede che $x \neq x_0$.

Notazione

$C(x) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ è continua in } X\}$.
Quindi nella precedente osservazione abbiamo dimostrato che $e^x \in C(\mathbb{R})$.

8.2 Proprietà delle funzioni continue

Teorema 8.1 (Algebra delle funzioni e continuità)

Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in X$, allora

1. $f \pm g$ è continua in x_0;
2. $f \cdot g$ è continua in x_0;
3. $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 se $g(x_0) \neq x_0$ (in $X \setminus \{x \ : \ g(x) \neq 0\}$)
4. f^g è continua in x_0 se $f(x_0) > 0$ (in $X \setminus \{x \ : \ f(x) > 0\}$)

Dimostrazione

Le dimostrazioni sono immediate dal teorema sull'algebra dei limiti (Proposizione **??** pagina 20). Infatti se f, g sono continue in x_0, dunque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Ma $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$.

Teorema 8.2l

abel=teo:contfuzncomp (Continuità della funzione composta) Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : y \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni rispettivamente continue in X e Y. Allora la funzione $h = g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in X.

Teorema 8.3 (Permanenza del segno di funzione continua)

Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in X$ e $f(x_0) > 0$ (risp. $f(x) < 0$), allora esite un intorno I di x_0 tale che $f(x) > 0$(risp. $f(x) < 0$), $\forall x \in X \cap I$.

8.3 Continuità delle funzioni elementari

Possiamo vedere che dall'algebra della continuità segue che le funzioni elementari sono continue nei domini dove sono definite

Proposizione 8.1

1. i polinomi $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in C(\mathbb{R})$, ovvero sono continue in $\mathbb{R}$.
2. Le funzioni razionali $\frac{p(x)}{q(x)}$ sono continue nel loro dominio di definizione ovvero sono in $C(\mathbb{R} \setminus x \ : \ g(x) = 0)$
3. Le funzioni trigonometriche $\sin x, \cos x$ sono in $C(\mathbb{R})$. $\tan(x) \in C(\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{n} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\})$.
4. La funzione $f(x) = a^x$, con $a > 0$ è continua in $\mathbb{R}$.
5. La funzione x^r, con $r \in R$ è continua in $(0, +\infty)$
6. Le funzioni $\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x)$ sono continue in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione

Abbiamo visto il caso di e^x. Dimostriamo il caso di $\sin x$.
Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}. \tag{84}$$

Dimostriamo preliminarmente che

1. $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$
2. $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

Vediamo la (1).
Dalla definizione di $\sin x$ (si consideri la circonferenza di raggio 1) si vede che $|\sin x| \leq x$ e quindi dalle prop del $|\cdot|$) che $0 \leq |\sin x| \leq x$. Quindi in particolare vale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq |\sin x_n| \leq x_n \tag{85}$$

Dalla defiinizione di limite devo far vedere che per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ risulta che $\lim_{n \to +\infty} \sin x_n = 0$.
Ma se $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ dalla proprietà 85 e il Teorema dei carabinieri ottengo che $\lim_{n \to +\infty} |\sin x_n| = 0$ e quindi in particolare che $\lim_{n \to +\infty} \sin x_n = 0$.

Per la (2) ragioniamo come segue. Sempre osservando la circonferenza trigonometrica is osserva che $1 - \cos \leq \sin x$ se $x \in [0, \pi/2]$ e $1 - \cos x \leq \sin x|$ se $x \in [-\pi/2, 0]$. Siccome $1 - \cos x \geq 0$, dunque sfruttando il teorema dei carabinieri e il precedente limite su $\sin x$, entrambi i limiti $\lim_{x \to 0^\pm} 1 - \cos x = 0$ e dunque $\lim_{x \to 0^\pm} \cos x = 1$.

Infine osserviamo che il limite in 84, dopo la sostituzione $h \overset{\texttt{def}}{=} x - x_0$ non è altro che

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) && \qquad (86)\\
&= \lim_{h \to 0} (\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0) \qquad \text{formule di somma per il } \sin x && \qquad (87)\\
&= \sin x_0 && \qquad (88)
\end{aligned}$$

Sapere che una funzione è continua è un grossissimo vantaggio. Perché se devo fare un limite è le funzioni coinvolte sono continue allora il limite è banale.

8.4 Punti di discontinuità

$Se f$ non è continua in x_0, allora f si dice discontinua in x_0. Esistono diversi tipi di discontinuità e alcune sono eliminabili.

Definizione 8.4

1. f ha una DISCONTINUITÀ ELIMINABILE in x_0 se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed è finito ma è diverso da $f(x_0)$.
2. f ha una DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE O SALTO in x_0 se esistono finiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.
3. f ha una DISCONTINUITÀ DI SECOND SPECIE negli altri casi.

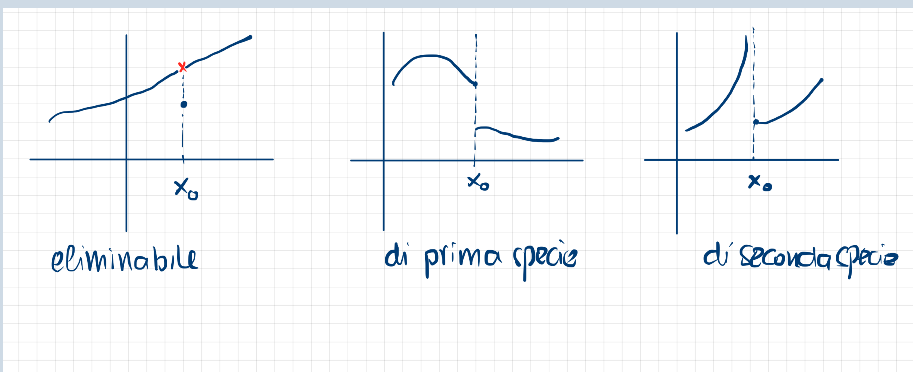


Figura 32: Differenti punti di discontinuità.

Esempio 8.3

Le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$.

Le funzioni $\mathsf{sgn}(x)$ ha un salto in x_0 La funzione parte intera $[x]$ e mantissa (x) hanno discontinuitàa di salto in ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

e la funzione

$$h(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

hanno discontinuità di seconda specie

Proposizione 8.2 (Funzione di Dirichlet)

Si consideri la funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

è discontinua in ogni punto irrazionale.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che la Dè continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Dunque deve essere che $\lim_{x \to x_0} D(x) = D(x_0) = 1$. Per la definizione di limite ciò equivale a dire che

per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ compatibile con $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, quindi tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ deve essere che $\lim_{n \to +\infty} D(x_n) = 1$.

Costruisco una successione z_n che (1) è compatibile con $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ e quindi tale che $\lim_{n \to +\infty} z_n = x_0$, ma (2) $\lim_{n \to +\infty} D(z_n) \neq 1$. Questo contraddice la proprietà precedente che avrebbe dovuto valere per ogni successione.

Costruzione di z_n
x_0 è un numero irrazionale e duqnue un allineamento decimale del tipo $p.\alpha_1\alpha_2\cdots$ con infinte cifre decimali. Sia $z_n = p.\alpha_1, \cdots \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Si osservi i numeri $p.\alpha_1, \cdots \alpha_n$ sono tutti razionali e che nessuno di loro arriva mai ad essere $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dunque $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} \setminus \{x_0\}$. Asserisco ora che è vero anche che $\lim_{n \to +\infty} z_n = x_0$. Infatti dalla definizione di limite si deve far vedere che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ |z_n - x_0| < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Che ciò è vero basta osservare che $|x_0 - z_n| = 0.\overbrace{00\ldots0}^{n}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdots$ e dunque risulta sempre che $|x_0 - z_n| < \frac{1}{10^{n+1}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, preso un ϵ piccolo a piacere Esiste sempre un n_1 tale che $\frac{1}{10^{n_1}} < \epsilon$. Se prendo quindi $\bar{n} = n_1 - 1$ ottengo $|x_0 - z_{\bar{n}}| < \frac{1}{\bar{n}+1} = \frac{1}{n_1} < \epsilon$, ed inoltre lo stesso vale per ogni $n \geq \bar{n}$.
A questo rimane da dimostrare al contraddizione che $\lim_{n \to +\infty} D(z_n) \neq 1$. Ma siccome $z_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e $D(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$, la funzione $D(z_n)$ è la funzione costante di valore 0 il cui limite è $0 \neq 1$. $\square$

Diremo che una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ammette uno zero in X se esiste $x \in X$ tale che $f(x) = 0$

8.5 Teorema degli zeri e applicazioni

Teorema 8.4 (Teorema degli Zeri)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora f ammette uno 0 in $[a, b]$

Dimostrazione

Supponiamo di aver definito una sequenza $[a_n, b_n]$ *intervalli incapsulati* che verificano le seguenti tre proprietà $\forall n \in \mathbb{N}$

1. $\begin{cases} [a_0, b_0] = [a, b] \\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \end{cases}$
2. $f(a_n) - f(b_n) < 0$
3. $|b_n - a_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$

Dalla prima proprietà segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_0 \leq a_1 \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \ldots \leq b_0$. Dunque le due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono rispettivamente crescente e decrescente. Inoltre siccome $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e $a, b \in \mathbb{R}$, le successioni sono entrambi limitate. Dunque siccome monotone e limitate, entrambi ammettono limite finito. Siano essi $\lim_{n\to+\infty} a_n = c_1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = c_2$. Dalla terza proprietà:

$$\begin{aligned} & c_2 - c_1 && (89) \\ & = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n && (90) \\ & = \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n && (91) \\ & = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} && (92) \\ & = 0. && (93) \end{aligned}$$

Dunque $c_1 = c_2 = c$
D'altra parte

$$\begin{aligned} f(c) &= \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) && (94) \\ \Rightarrow f(c)^2 &= \lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) && (95) \end{aligned}$$

Siccome dalla seconda proprietà degli intervalli incapsulati $f(a_n)f(b_n) < 0$, allora per il teorema di perrmaneza del segno (che vale solo per il $\leq$) deve essere $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$. E siccome $f(c)^2 \geq 0$ (trattandosi di un quadrato), può solo essere che $f(c) = 0$, che era la tesi. rimane da costruire gli intervalli incapsulati con le loro proprietà.

8.1 (Continua dimostrazione del Teorema 8.4

Dimostrazione

Costruzione degli $[a_n, b_n]$
Consideriamo $c_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_n+b_n}{2}$. Siccome $f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno segno opposto, allora $f(c)$ avrà segno opposto ad almeno uno tra $f(a_n)$ e $f(b_n)$.
Se $f(c_n)$ ha segno oppoosto a $f(a_n)$ definiamo

$$a_{n+1} = a_n \qquad b_{n+1} = c_n.$$

Se $f(c_n)$ ha segno oposto a $f(b_n)$ definiamo

$$a_{n+1} = c \qquad b_{n+1} = b_n.$$

Siccome c_n è il punto a metà tra a_n e b_n si vede subito che $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. L'intervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ è definito in modo tale che la f negli estremi abbia segno opposto, e dunque vale la seconda proprietà. Dimostriamo terza per induzione.
Caso base: Siccome $[a_0, b_0] = [a, b]$ dunque $|a_0 - b_0| = |a - b| = \frac{|a-b|}{2^0}$.
Caso induttivo: Supponiamo che sia vero $|b_n - a_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$. Dimostriamo che $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{|b-a|}{2^{n+1}}$. Siccome $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ allora

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{|b_n - a_n|}{2} \qquad \text{def di } c \tag{96}$$

$$\leq \frac{|b-a|}{2 \cdot 2^n} \qquad \text{ipot. induz.} \tag{97}$$

$$= \frac{|b-a|}{2^{n+1}} \tag{98}$$

□

(Applicazione 1)

Tramite il teorema degli zeri possiamo deifnre un algoritmo per approssimare gli zeri di una funzioni con una precisione variabile. Per esempio supponiamo di voler calcolare uno zero di $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$ con un errore di $1/8$.
Come prima cosa troviamo un intervallo piccolo $[a, b]$ tale che $f(a)f(b) < 0$. Per esempi se $a = 0$ e $b = 1$ abbiamo che $f(0) = -2$ e $f(1) = 5$soddisfa. Il teorema degli zeri mi dice che in $[0, 1]$ c'è almeno uno zero di $f(x)$. Devo trovare $x_0 \in [0, 1]$ tale che $f(x_0) = 0$

$$a_0 = 0, b_0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 1/2 \text{ e } f(1/2) > 0 \tag{99}$$
$$a_1 = 0, b_1 = 1/2 \tag{100}$$

Osservo che siccome $c_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ posso dire che a_1 e b_1 approssimano x_0 con un errore di $1/2$ ovvero che $0 \leq x_0 - a_1 \leq \frac{(b_0-a_0)}{2} = 1/2$ e $0 \leq b_1 - x_0 \leq \frac{(b_0-a_0)}{2} = 1/2$
Ancora non sono arrivato ad un ottavo quindi calcolo a_2, b_2

$$a_1 = 0, b_0 = 1/2 \Rightarrow c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 1/4 \text{ e } f(1/4) > 0 \tag{101}$$
$$a_2 = 0, b_1 = 1/4 \tag{102}$$

Per questi due punti avrò dunque che l'errore è $0 \leq x_0 - a_2 \leq \frac{(b_0-a_0)}{4} = 1/4$ e $0 \leq b_2 - x_0 \leq \frac{(b_0-a_0)}{2} = 1/2$
Terminare l'esercizio per arrivare ad un errore di $1/8$.
In generale se ho preso l'intervallo $[a_0, b_0]$ come intevrallo iniziale da cui far partire il metodo al passo n-esimo l'errore e limitato da $0 \leq x_0 - a_n \leq \frac{(b_0-a_0)}{2^n}$ e $0 \leq b_n - x_0 \leq \frac{(b_0-a_0)}{2^n}$

Teorema 8.5 (Teorema dei valori intermedi)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo e f è continua in I. Posto $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$ e $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$, allora

$$\forall y \in (m, M) \quad \exists y \in I\ f(x) = y$$

(DIsegno)

Dimostrazione

Sia $y \in (m, M)$. Applico il teorema degli zeri alla funzione $F(x) = y - f(x)$. nell' intervallo ...

Osservazione 8.3

Se f fosse discontinua anche solo in un punto il teorema non sarebbe più vero.

8.6 Continuità e funzioni inverse

Usando il teorema dei valori intermedi argomenteremo sulla definizione delle funzioni inverse

Esempio 8.4

Consideriamo un caso specifico: $f(x) = e^x$ e dom $f = \mathbb{R}$ e f è continua su $\mathbb{R}$. Osservo che $m = 0$ e $M = +\infty$. Per il Teorema dei valori intermedi implica che $\forall y \in (0, +\infty) \exists x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$. Questo vuol dire che e^x è *suriettiva* da $\mathbb{R} \in (0, +\infty)$. Inoltre e^x è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e quindi questo implica che f è iniettiva (infatti $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1 < f(x_2))$. Qundi e^x è bieitiiva da $\mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ e quindi f è invertibile. Quinid posso definire la funzione $(e^x)-1 : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Questa funzione la chiamo $\ln(y)$. Per cui vale che $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$ o equivalentemente dal fatto che $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ ho che $\ln e^x = x$ e $e^{\ln(y)} = y$.

Proposizione 8.3 (Proprietà dei logaritmi)

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \forall x, y \in (0, +\infty)$
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y), \quad \forall x, y \in (0, +\infty)$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$
4. $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln a}$
5. $\log_a(a) = 1$, $\log_a(1) = 0$

Dimostrazione

Dimostriamo la (1) per ln. Siano $z = \ln(xy), z_1 = \ln x, z_2 = \ln y$. Dalla discussione precedente sulla inversa abbiamo che $e^z = xy, e^{z_1} = x, e^{z_2} = y$ e dunque $e^z = e^{z_1}e^{z_2} = e_{z_1+z_2}$ e quindi per l'iniettivita di e^x deve essere che $z = z_1 + z_2$ ovvero la tesi.
Per la (4). Dalla discussione precedente abbiamo che $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y)$.

$$y = a^x \tag{103}$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{x \ln a} \qquad \text{dalla (3)} \tag{104}$$
$$\Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(a) \qquad \text{dalla iniettività} \tag{105}$$
$$\tag{106}$$

Quindi $x = \frac{\ln y}{\ln a}$

Teorema 8.6 (Continuità della funzione inversa)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo f è continua in I

1. f è iniettiva in I sse f è strettamente monotona
2. se f è biiettiva da I in J allora $f^{-1} : J \longrightarrow I$ e continua in J (ovvero l'inversa di una funzione continua è continua)

Osservazione 8.4

Il teorema precedente vale se I è un intervallo. Se I non è un intervallo potrebbe essere falsa. Vediamo un controesempio $f(x) = |x|$ in $X = (0,1) \cup [1,2]$ (disegnare). Notiamo che f è biiettiiva da X in $(0,2]$. Assume ogni valore compreso tra $(02]$. Quindi esiste la sua funzione inversa $f^{-1} : (0,2] \longrightarrow X$. $f^{-1}(y) = -y$ se $y \in (0,1)$ e $f^{-1}(y) = y$ se $y \in [1,2]$ e questa funzione non è continua perché ha un salto in 1. Quindi I non può essere unione di intervalli.

Corollario 8.1

La funzione $\ln x$ è continua in $(0, +\infty)$ perché è l'inversa di e^x che abbiamo visto essere continua. Analogamente per $\log_b(x)$

8.6.1 Inverse funzioni trigonometriche

Per definire le funzioni inverse si deve avere che la funzione è biietiiva. Sappiamo che $\sin x$ e $\cos x$ non sono iniettive su tutto $\mathbb{R}$. Cerchiamo dunque un intervallo massimale in cui la funzione $\sin x$ è biiettiva. Tale intervallo è $[\pi/2, \pi/2]$ (si prende questo perché contiene lo 0. In ogni intervallo più grande la funzione non è più iniettiva e dunque non + biettiva.

Quindi $\sin x \restriction_{[-\pi/2, \pi/2]}$: $[\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ è una funzione biiettiva e quindi possimao definire la sua inversa $\sin^{-1}(x) : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ la funzione si chiama $\arcsin x$.

8.7 Massimi e minimi: Teorema di Weierstrass

Data una funzione uno dei problemi interessanti è quello di cercare i massimi o i minimi di una funzione (ottimizzazione). A priori nessuno garantisce che tali massimi o minimi esistono. Trovare delle condizioni che garantiscono l'esistenza di punti estremali è quindi di grande aiuto. A questa domand risponde il teorema di Weierstrass.

Teorema 8.7 (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e f continua in $[a,b]$. Allora f ammette Massimo e minimo in in $[a,b]$. Ovvero esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in [a,b]$

Osservazione 8.5

1. il teorema afferma l'esistenza del massimo e del minimo, ma non dice quali sono. è dunque una dimostrazione di esistenza non costruttiva.
2. possono esistere più di un massimo e di un minimo.
3. il Teorema di Weierstrass è una condizione sufficiente ma non necessaria per la esistenza di massimo e minimo. Ovvero una funzione discontinua può assumere massimo e minimo. Per esempio la funzione di Dirichlet è discontinua in ogni punto ma siccome assume solo valori 0 e 1, ammette massimo e minimo.

(Importanza delle ipotesi nel Teorema di Weierstrass)

1. **Intervallo non chiuso**: L funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua ma in $(0, 1]$, che non è chiuso, non esiste il $\max f$, visto che il $\sup_{(0,1]} f = +\infty$.
2. **Intervallo non limitato**: La funzione $2x$ con $x \in [0, +\infty)$ è continua, ma $[0, +\infty)$ è limitato. $\sup_{[0,+\infty)} f = +\infty$ e la funzione non ammette massimo.
3. **Funzione non continua**.- Consideriamo la funzione $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \end{cases}$$

   f non è continua in 0 (limite destro e sinistro sono differenti), $\sup f = +\infty$ e non esiste $\max f$ (Fare figura)

***Dimostrazione* (Del Teorema di Weierestrass)**

Sia $S = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Verifichiamo che esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = S. \tag{107}$$

$S = +\infty$.
allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > n$. Devo provare che $\forall M > 0\ \exists \bar{n}\ :\ f(x_n) > M \quad \forall n \geq \bar{n}$. Preso un generico $M > 0$, per la proprietà archimedea, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq M$, e dunque per la proprietà precedente $f(x_n)\ n \geq M$ e quindi $f(x_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

$S = \ell \in \mathbb{R}$.
allora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che

$$|f(x_n) - S| < \frac{1}{n}.$$

Infatti poiché $S = \sup_{[a,b]} f$, allora $f(x_n) \leq S < S+\frac{1}{n}$. Ma il sup è anche il minimo dei maggioranti e dunque $\forall n \in \mathbb{N}$, $S - \frac{1}{n}$ non è più un maggiorante di $f(x)$ per $x \in [a, b]$ e dunque $f(x_n) > S - \frac{1}{n}$. Dunque preso $\epsilon > 0$ esiste un $\bar{n}$ (basta prendere $\bar{n} > \frac{1}{\epsilon}$) tale che $\frac{1}{\bar{n}} < \epsilon$. Dalla proprietà precedente deduciamo che $\forall n \geq \bar{n}$, $|f(x_n) - S| < \frac{1}{n} < \epsilon$. E dunque $f(x_n) \to S$ per $n \to +\infty$
Dal Teorema di Bolzano-Weirestrass (che non abbiamo dimostrato) esiste una successione estratta x_{k_n} da x_n in $[a, b]$ e un punto $x_0 \in [a, b]$. Tale che $x_{k_n} \to x_0$ per $k_n \to +\infty$. Siccome f è continua, allora $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e dunque dalla relazione (107) si ha che

$$S = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \tag{108}$$

Quindi $f(x_0) = S = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ed inoltre $S \in \mathbb{R}$ proprio perché in x_0 la funzione f essendo continua deve avere un valore finito e dunque $S = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Per il minimo si ragiona nel medesimo modo. $\square$

8.8 Monotonia e continuità

Un approccio diverso al Teorema 8.6.

Teorema 8.8 (Limite delle funzioni monotone)

Sia $f(x)$ una funzione monotona in $[a, b]$. allora esistono e sono finiti i limiti

1. $\lim_{x \to a^+} f(x)$
2. $\lim_{x \to b^-} f(x)$
3. $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, per ogni $x_0 \in (a, b)$

Teorema 8.9 (Continuità per le funzioni monotone)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona nell'intervallo chiuso $[a, b]$. Allora f è continua in $[a, b]$ se e solo se l'immagine di $f(x)$ è tutto l'intervallo $[f(a), f(b)]$.

Teorema 8.10 (Continuità delle funzioni inverse)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona nell'intervallo chiuso $[a, b]$. Se f è continua in $[a, b]$ allora anche la funzione inversa f^{-1} è continua in $[f(a), f(b)]$.

8.9 Funzioni Lipschitziane

Definizione 8.5

Il RAPPORTO INCREMENTALE $P(x, y)$ di una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si definisce come

$$P(x.y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \qquad x, y \in X, x \neq y.$$

e rappresenta il coefficiente angolare della retta $r_{x,y}$passante per i punti $(x, f(x))$,e $(y, f(y))$ del grafico di f. Ovvero $P(x.y) = \tan \alpha$ dove α e l'angolo sotteso dalla retta $r_{x,y}$ con l'asse delle x.

Le funzioni il cui rapporto incrementale è sempre limitato indipendentemente da come scegliamo x e y hanno un nome

Definizione 8.6

Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice LIPSICHTZIANA IN X se esiste una costante $L > 0$ (detta COSTANTE DI LIPSICHTZ) tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \qquad \forall x, y \in X, x \neq y$$

Teorema 8.11 (Continuità delle funzioni Lipschitziane)

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e lipschitziana in X , allora f è continua in X

Dimostrazione

Se $L = 0$, allora f è necessariamente la funzione costante di valore 0 che è continua in X. se $L \neq 0$ si deve far vedere che $\forall x_0 \in X$, il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Usiamo la definizione di limite con intorni. Preso un $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ per ogni $x \in X$ tale che $|x - x_0| < \delta$. Fisso $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Infatti preso $x \in X$ tale che $|x - x_0| < \delta$, dalla Lipschitzianità di f si ha che $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < \epsilon$.

Esempio 8.5

1. Le funzioni lineai sono chiaramente lispichitiziane con $L = 1$. Anche la funzione $f(x) = |x|$ sono tali per $L = 1$. infatti risulta

$$||x - |y|| \leq |x - y|$$

2. Anche $\sin x$ è lipsichtiziana per $L = 1$. Infatti risulta

$$|\sin x - \sin y| \leq 2 \sin \left|\frac{x - y}{2}\right| \cos \left|\frac{x + y}{2}\right| \leq |x - y|$$

che segue dalle relazioni seguenti che valgono per ogni $x \in \mathbb{R}$; (2) $|\sin x| \leq |x|$; (2) $-\sin x = \sin(-x)$; $\cos -x = \cos x$; (4) $\cos x \leq 1$; (5) formule di prostaferesi.

3. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è lipsichtiziana in $[0, 1]$. Infatti $P(x, 0) = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} \to +\infty$ per $x \to 0^+$

8.10 Continuità uniforme

Definizione 8.7

una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice UNIFORMENENTE CONTINUA in X se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X \text{ tali che } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

.

Osservazione 8.6

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Se f è lipschitziana in X allora f è uniformemente continua in X.
2. Esistono funzioni che sono unifomermente continue ma non lipsichtziane.
3. Se f è uniformemente continua in X, allora f è continua in X.

8.11 Esercizi

9 Parte 9 - Serie Numeriche

Sommario

Esempio del paradosso di Zenone. Definizione di Serie. Convergenza, divergenza e Irregolarità. Serie Geometrica. Serie Armonica. Serie Telescopica. Serie Geometrica che parte da 1 con $|q| < 1$. Criteri per stabilire il carattere delle serie: Criterio necessario per la convergenza. Serie a termini positivi è sempre regolare. Criteri per serie a termini positivi: Criterio del confronto. Esempio: criterio del confronto asintotico, criterio del rapporto, criterio della radice. (cenni dimostrazioni). Criterio di Cesàro. Serie a segno alterno: definizione, esempio. Criterio di Leibniz. Esempio: serie armonica generalizzata. Criterio di convergenza assoluta.

Biblio

Cap 5.1 [**?**] Cap. 4.7 [BDG11]

9.1 Definizioni Preliminari

Supponiamo di muoverci lungo un percorso rettilineo compiendo una successione di spostamenti nella stessa direzione ciascuno pari alla metà del precedente. Supponendo che il primo spostamento sia $s_0 = 1$ le posizioni raggiunte dopo il primo spostamento saranno

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + 1/2 \\ s_2 &= 3/2 + 1/4 \\ s_3 &= 7/4 + 1/8 \end{aligned}$$

è naturale chiedersi quale sarebbe la posizione raggiunta dopo un infinito numero di spostamenti secondo la regola precedente. $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}$. Ricordando la somma geometrica sappiamo che $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$. Per studiare cosa succede dopo infiniti passi dobbiamo quindi studiare il $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$ che sappiamo essere 2.

Definizione 9.1

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiamo una successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (detta delle somme parziali n-esime o delle ridotte n-esime) come

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Quindi

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_1 &= a_0 + a_1, \\ S_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ S_n &= a_n + S_{n-1} \end{aligned}$$

Esempio 9.1

Supponiamo che $a_n = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$. quindi $a_n = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ e $S_n = \{0, 1, 3, 6, 9, 15 \dots\}$.

A questo punto al crescere di n si sommano un numero sempre più grande di elementi della successione. Allora ha senso chiedersi cosa succede se portiamo all'infinito il numero di elementi della successione a_n da sommare. Denoto dunque con $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$ (che chiamiamo SERIE NUMERICA la somma di infiniti elementi di a_n.

Definizione 9.2

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che la SERIE NUMERICA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$

1. CONVERGE se $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. In questo caso diremo che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n = S$
2. DIVERGE se $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$.
3. IRREGOLARE se non esiste il $\lim_{n\to+\infty} S_n$, ovvero se $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare

Nel promo caso scrivo che $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Vediamo degli esempi per capire il concetto di serie. In generale calcolare il limite della somma $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ non è facile, perché serve sapere una forma esplicita di S_n e non sempre è facile averla.

9.2 Serie Geometrica

Teorema 9.1 (Serie geometrica)

Si parla di SERIE GEOMETRICA quando la successione che la definsce è proprio la successione geometrica. Quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$.

In questo caso per $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ consociamo una forma chiusa. Ricordiamo infatti che

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1. \end{cases}$$

Avendo una forma chiusa per S_n, possiamo studiare facilmente il $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$.

Caso $q \neq 1$.

Dobbiamo studiare il $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Per farlo dobbiamo ricordare come lavora la successione geometrica $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq 1 \end{cases}$$

A questo punto è facile vedere che

1. per $q > 1$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = +\infty$
2. $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$
3. $q \leq 1$, non esiste il $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q}$

Caso $q = 1$.

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$.

In conclusion il comportamento dell serie geometrica al limite in funzione di q si può riassumere come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq 1 \end{cases}$$

Esempio 9.2 (su serie geometrica)

1. Per $q = 1/2$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 1 + 1/2 + 1/4 + /1/8 + /1/16 + \cdots$. Dal limite osserviamo che $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 2$.
2. Per $q = 3$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} 3^{k} = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots$. Dal limite risulta $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = +\infty$
3. se $q = -1$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$. Osserviamo che $S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 1 \ldots$

9.3 Serie Armonica

Teorema 9.2

Scriviamo la SERIE ARMONICA GENERALIZZATA in questo modo $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad, \alpha \in \mathbb{R}$.
Vediamo il caso $\alpha = 1$ in cui la serie è detta SERIE ARMONICA

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Non c'è nessun modo in cui si possa trovare una forma chiusa (o esplicita) per S_n in questo caso e quindi non sappiamo come studiare il limite facilmente.

Sappiamo che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ e ci sono vari modi per dimostrarlo. Vediamo uno dei metodi principali

Scrivo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \overbrace{\frac{1}{2}}^{2^0\ termini} + \overbrace{(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}^{2^1\ termini} + \overbrace{(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})}^{2^2\ termini} + \overbrace{(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16})}^{2^3\ termini} + \cdots$$

con $T_1 = 1/2, T_2 = (\frac{1}{3}+\frac{1}{4}), T_3 = (\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}) \cdots$. Si può dimostrare facilmente per induzione che $T_i \geq 1/2$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. E siccome per n della forma 2^l, ovvero $l = \log_2 n$, $S_n = 1+T_0+T_1+\ldots T_l$ si ricava che $S_n \geq 1 + \frac{\log_2 n}{2}$.

Infine si ha che : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\log_2 n}{2} = +\infty$. Dunque $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

9.4 Serie telescopica

Consideriamo la seguente serie

Definizione 9.3 (Serie di Mengoli)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$$

Osservazione 9.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Dimostrazione

è facile vedere che $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)})$$

Quindi se ora scriviamo $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = (1 - \cancel{\frac{1}{2}}) + (\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}) + (\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}) + (\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}) + \cdots + (\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$
Ma ora il $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$. Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Definizione 9.4 (serie telescopica)

Si dice SERIE TELESCOPICA una serie del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ con $\{b_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione reale.

Teorema 9.3

Sia $\{b_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Dimostrazione

La somma parziale n-esima di una serie telescopica è $S_n = b_0 - b_{n+1}$.. Il risultato segue dal fatto che $\sum_{k=0}^{\infty} b_k - b_{k+1} = \lim_{n\to+\infty} S_n$. $\square$

Esempio 9.3

$\sum_{k=0}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = -\infty.$
Basta osservare che $\log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log k - \log(k-1)$. Per cui questa è una serie telescopica e dunque $\sum_{k=0}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log 1 - \lim_{n\to+\infty} \log k = -\infty.$

Esercizio 9.1

Dimostrare che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}.$

9.5 Proprietà elementari

Proposizione 9.1

Valgono le seguenti due proprietà:

1. (Linearità) per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$$\sum_k^\infty a_k < +\infty \quad \sum_k^\infty b_k < +\infty \quad \Rightarrow \sum_k^\infty \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k < +\infty$$
e in tal caso le somme verificano la relazione
$$\sum_k^\infty \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k = \lambda_1 \sum_k^\infty a_k + \lambda_2 \sum_k^\infty b_k$$
2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\sum_k^\infty a_k = +\infty \Rightarrow \sum_k^\infty -a_k = -\infty \text{ e } \sum_k^\infty \lambda a_k = \begin{cases} +\infty & \lambda > 0 \\ -\infty & \lambda < 0 \end{cases}$$
$$\sum_k^\infty a_k = +\infty \text{ e } \sum_k^\infty b_k = s \neq -\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_k^\infty (a_k + b_k) = +\infty$$

9.6 Metodi per stabilire il carattere di una serie

Condizioni necessarie e sufficienti

Siano A una proposizione. Diremo che una proposizione B è:

1. CONDIZIONE NECESSARIA PER A se $A \Rightarrow B$,
2. CONDIZIONE SUFFICIENTE PER A se $B \Rightarrow A$,

Teorema 9.4 (Condizione necessaria per convergenza)

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Equivalentemente possiamo dire che se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ non è convergente.

Dimostrazione

Per ipotesi $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. D'altra parte deve essere $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = 0$. Ma $S_n - S_{n-1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n - (a_0 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. $\square$

Osservazione 9.2

Si osservi che il Teorema si può usare per concludere informazioni su una serie (cioè che non **non converge**) solo se il limite della successione a_n è diverso da 0. In questo caso il teorema afferma che allora necessariamente.
Dalla sola informazione che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non ricavo nulla sulla serie. infatti ci sono serie (per esempio la armonica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ che divergono pur essendo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

9.7 Serie a termini positivi

Definizione 9.5

Una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ si dice A TERMINI NON NEGATIVI (RISP. POSITIVI) se $a_n > 0$ (risp. $a_n \geq 0$).

Proposizione 9.2

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è a termini positivi, allora $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e dunque regolare (ovvero converge o diverge)

Dimostrazione

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. Siccome $a_n \geq 0$ allora $S_{n+1} \geq S_n$. Quindi $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e dunque regolare.

Esempio 9.4

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ è a termini positivi. La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ non è a termini positivi.

9.7.1 Criterio del confronto

Proposizione 9.3

Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ due serie a termini positivi tali che $a_k < b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (o anche solo $a_k < b_k$ definitivamente per $k \to +\infty$). Allora valgono le seguenti:

1. se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = +\infty$
2. se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$

***Dimostrazione* (Cenni)**

Siccome $a_k \leq b_k$, allora $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$. Quindi se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = +\infty$ e dunque anche $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = +\infty$. Ma $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Esempio 9.5

Studiare $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Verifico che la condizione necessaria $\lim_{n \to +\infty} n! = 0$ è verificata e quindi non posso concludere nulla sulla serie. Osservo che (come abbiamo visto nella dimostrazione del numero di Nepero, pagina 20) posso dire che $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \geq 2^{k-1}$. E quindi $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Ho quindi a disposizione una serie maggiorante $\{\frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una serie geometrica.

Osservo che $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2^k} = s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}^k$. Abbiamo visto che questa serie converge a 2. Dunque la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-1}$ converge e dal Teorema precedente posso concludere che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < +\infty$, ovvero converge.

SI noti che non possiamo dire nulla sul valore a cui converge la serie. Cmq si può vedere che la serie converge proprio a e (si veda esercizi settimana 7-12 Novembre)

9.7.2 Criterio del confronto asintotico

Proposizione 9.4

Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$, tali che $a_k, b_k > 0$ definitivamente per $k \to +\infty$. Allora valgono le seguenti:

1. se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$ con $0 < \ell < +\infty \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty$$
ovvero le due serie hanno lo stesso carattere.

2. se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$$
o equivalentemente
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = +\infty$$

3. se $\ell = +\infty$, allora vale la (2) con i ruoli di a_k e b_k scambiati.

Dimostrazione

(1) Se $0 < \ell < +\infty$, allora per la permanenza del segno $\ell/2 \leq \frac{a_k}{b_k} \leq 2\ell$[a] Il che equivale a dire che $\frac{\ell}{2} b_k \leq a_k \leq 2\ell b_k$. Quindi per il metodo del confronto le due serie devono avere lo stesso carattere.
(2) se $\ell = 0$ si ha che $\frac{a_k}{b_k} \to 0$ e dunque $a_k < b_k$ definitivamente per $k \to +\infty$. Quindi il risultato segue dal Metodo del confronto.

[a]

Teorema 1 (corollario della permanenza del segno)**.** *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ *e siano* $M, m \in \mathbb{R}$.

- $m \leq \ell$ *allora* $a_n > m$ *definitivamente,*
- $M \geq \ell$*, allora* $a_n < M$ *definitivamente.*

Esempio 9.6 (Serie armonica generalizzata)

Abbiamo visto che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Vediamo il caso $\alpha = 2$ della serie armonica generalizzata. Sia $a_k = \frac{1}{k^2}$ consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = +\infty$.

Affermo che $a_k = \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)} = b_k$. Infatti $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k(k+1)}{k^2} = 1$.

Ma $b_k = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ è la serie di Mengoli che abbiamo visto convergere a $1 < +\infty$. Dunque posso concludere dal teorema che anche $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$ e dunque converge.

Vediamo il caso $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 2$.

Osservo che $k^\alpha \geq k^2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$. Abbiamo appena visto che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$ e dunque dal Criterio del Confronto $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ per ogni $\alpha \geq 2$

Vediamo il caso $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq 1$. In questo caso $k^\alpha \leq k$ e dunque $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ Sappiamo che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ e dunque dal criterio del Confronto anche $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ per ogni $\alpha \leq 1$

Il caso $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in (1,2)$ si risolve con gli integrali e la vedremo più avanti.
Ma il risultato finale è:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Esercizio 9.2

Studiare $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{k})$.

Osservo che $\lim_{k\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{k}) = 0$ e quindi non posso concludere nulla sulla serie.

Osservo che

1. $\lim_{k\to+\infty} \sin(\frac{1}{k}) = 0$ e quindi non posso concludere nulla sulla serie perchè la condizione necessaria è verificata.

2. per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\sin(\frac{1}{k}) \geq 0$ e dunque la serie e a termini positivi

3. Mi ricordo del seguente seguente limite notevole sulle successioni:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

   Dunque, siccome $\frac{1}{k} \to 0$ per $k \to +\infty$, allora $\sin(\frac{1}{k}) \sim \frac{1}{k}$.

Ma $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ è la serie armonica che sappiamo divergere. Concludo che posso applicare il criterio del Confronto Asintotico per serie a termini positivi e concludo che anche $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{k})$

9.7.3 Criterio del rapporto e della radice

Teorema 9.5 (Criterio del rapporto)

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ a termini positivi, dunque $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esiste il limite

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora se

1. $\ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$
2. $\ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$
3. $\ell = 1$ non si può concludere nulla[a]

[a] vanno studiati con altri metodi

Teorema 9.6 (Criterio della radice)

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ a termini positivi, dunque $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esiste il limite

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Allora se

1. $\ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$
2. $\ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$
3. $\ell = 1$ non si può concludere nulla[a]

[a] vanno studiati con altri metodi

Osservazione 9.3

Dal criterio di Cesaro se esiste il $\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora esiste $\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell$, dunque noon possiamo sperare di applicare il criterio del rapporto se non funziona il criterio della radice

Esercizio 9.3 (con Criterio del rapporto)

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ con $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Sia $a_k = \frac{x^k}{k!}$

1. a_k è a termini positivi
2. $\lim_{k\to+\infty} \frac{x^k}{k!} = 0$ (gerarchia degli infiniti), allora non posso dire nulla perché la condizione necessaria è verificata.

Proviamo a studiare $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Questo limite è $\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{k+1}k!}{x^k(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{x}{k+1} = 0$. Dunque dal Criterio del Rapporto posso concludere che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge quando $x \in \mathbb{R}, a > 0$

Esercizio 9.4

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^k}$, con $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Sia $a_k = \frac{x^k}{k^k}$

1. a_k è a termini positivi
2. $\lim_{k\to+\infty} \frac{x^k}{k^k} = 0$ (gerarchia degli infiniti), allora non posso dire nulla

in questo caso è particolarmente facile applicare il criterio della Radice perceh sono cinvolte le radice k-esime. Infatti $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{x^k}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{x}{k} = 0$. Dunque la serie converge

Osservazione 9.4

Nel caso $\ell = 1$ non si può conludere nulla. Consdieriamo due serie armoniche $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Possiamo osservare che se applichiamo il criterio del rapporto entrambi i limiti sono $= 1$. Ma la prima diverge e la secondo converge e dunque per $\ell = 1$ non posso dire nulla

9.8 Serie a segni alterni

Definizione 9.6

Una serie del tpo $\sum_{k}^{\infty}(-1)^k a_k$ dove $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ si dice a SEGNO ALTERNO.

Osservazione 9.5I

termini di $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ sono $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$

Vediamo perché il fatto dei segni alterni può essere utile per studiare la convergenza

Esempio 9.7

Consideriamo la serie armonica $\sum_{k}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ e la serie $\sum_{k}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

Teorema 9.7 (criterio di Leibniz)

Data una serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Se

1. $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$, e
2. a_k decrescente defiintivamente per $k \to +\infty$, e quindi $a_{k+1} < a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Allora la serie converge.

***Dimostrazione* Solo idea**

L'ampiezza dei balzi è sempre più piccola.

Esempio 9.8 (Serie armonca a segni alterni

Consideriamo $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo che $\lim_{k\to+\infty}(-1)^k\frac{1}{k^\alpha} = 0$ solo se $\alpha > 0$. Quindi questo caso la serie converge. Inoltre se $\alpha > 0$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} < \frac{1}{k^\alpha}$. Dunque le due proprietà del criterio di Leibniz sono verificate se $\alpha > 0$. e quindi concludo che $\lim_{k\to+\infty}(-1)^k\frac{1}{k^\alpha}$ converge per $\alpha > 0$.

9.9 Serie generiche: convergenza assoluta

Definizione 9.7

Diremo che una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE se converge $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$.

Teorema 9.8

Se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge

Dimostrazione

Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}(|a_k| - a_k)$, che è una serie a termini positivi. Questa serie converge per il teorema del confronto e l'ipotesi di convergenza assoluta: infatti $0 \leq |a_k| - a_k \leq 2|a_k|$

È importante osservare che la convergenza assoluta è una condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza della serie. Infatti esistono delle serie che convergono, ma non coovergono assolutamente

Proposizione 9.5

Convergenza $\not\Rightarrow$ convergenza assoluta.

Dimostrazione

Prendo $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ dal criterio di leibniz converge. D'altra parte $\sum_{k=0}^{+\infty} |\frac{(-1)^k}{k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k}$ e questa serie diverge.

9.9.1 Importanza della convergenza assoluta

Osserviamo per che la serie dei moduli $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ è una serie a termini positivi e dunque valgono i criteri per le serie a termini positivi. Ad esempio

Esempio 9.9

1. se $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell < 1$, allora (dal criterio della radice) $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$ converge e dunque $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$

2. se $\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell < 1$, allora (dal criterio della radice) $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$ converge e dunque $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$.

9.10 Tavole per le serie

Serie Geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq 1 \end{cases}$$

Serie Armonica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Condizione necessaria

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ non converge}$$

o equivalentemente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Quindi se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non posso affermare nulla sul carattere della serie.

$a_k > 0$, Criterio del Confronto

Se $a_k < b_k$ definitivamente per $k \to +\infty$. Allora

1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$

$a_k > 0$, Criterio del Confronto Asintotico

$\ell = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k}$. Allora

1. Se $0 < \ell < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso carattere.
2. Se $\ell = 0$, allora
   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$
   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$
3. Se $\ell = +\infty$, allora $\lim_{k\to+\infty} \frac{b_k}{a_k} = 0$ e quindi vale la (2) con i ruoli di a_k e b_k scambiati

$a_k > 0$, Criterio del Rapporto

$\ell = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Allora

1. Se $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge
2. Se $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

$a_k > 0$, Criterio del Radice

$\ell = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$. Allora

1. Se $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge
2. Se $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Serie a segni alterni

Se

1. $\ell = \lim_{k\to+\infty} a_k = 0$
2. $0 \geq a_{k+1} < a_k$ definitivamente per $k \to +\infty$.

Allora $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge

Serie Armonica a segni alterni

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge per } \alpha > 0.$$

Convergenza assoluta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge}$$

Serie Telescopiche

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge}$$

10 Parte 10 - Derivate

Sommario

I: Motivazioni della introduzione del concetto di derivata. Significato geometrico. Esempi. $f(x) = c$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^n$, $f(x) = e^x$, $f(x) = x^{1/3}$. Relazione tra derivabilità e continuità. Derivata destra e sinistra, Punto angoloso. Cuspide. Operazioni algebriche e derivata.

II:Derivate delle funzioni elementari. Derivate di funzioni trigonometriche. Derivata e composizioni di funzioni. Regola della catena. Esempi. Derivate di funzioni iperboliche. Derivata delle funzioni esponenziali. Derivata della funzione inversa: Teorema. Esempi ed esercizi.

Biblio

I: Cap. 7 [BDG11] II: Cap 7.3 [BDG11], III: Cap 7 e Cap 7.5 [BDG11], Cap. 4 [BPS14]

10.1 Definizioni Preliminari

Il concetto di derivata fu elaborata da Fermat, Newton e Leibniz, come strumento per risolvere problemi del moto e problemi geometrici legati alla ricerca di massimi e minini nelle funzioni. Inoltre le derivate sono anche molto importanti nei problemi di *approsimazione lineare* in cui una $f(x)$ si approssima con una funzione lineare $ax + b$ per stimare l'errore che si commette.

Consideriamo una funzione $f(x)$ è un punto sulla funzione di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Si vuole stabilire la retta tangente a $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ (ovvero la retta che nel punto ha un unico punto di intersezione con f). Fissati un punto x distinti da x_0, consideriamo la retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

La quantità $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0}$ è il *rapporto incrementale* che misura come varia la funzione f rispetto all'incremento della variabile indipendente ed è il coefficiente angolare della retta precedente. Se tenendo fisso x_0 facciamo avvicinare x_1 a x_0 l'equazione diventa una nuova equazione di retta che si avvicina sempre di più alla tangente e al limite concide cn la tangente a f nel punto x_0. Per fare tendere x_1 a x_0 utilizziamo il concetto di limite che applicato

$$y = f(x_0) + \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{109}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{110}$$

è il coefficiente angolare della retta precedente e tale quantità è la derivata di $f(x)$ nel punto x_0.

Notiamo che in modo del tutto analogo se consideriamo la quantità $h = x_1 - x_0$, la retta in 111 diventa l'equazione della retta tangente a f nel punto x_0

$$y = f(x_0) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) \tag{111}$$

Definizione 10.1

Sia $f : X \longrightarrow \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Allora f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste ed è finito

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 10.2

Sia $f : X \longrightarrow \in \mathbb{R}$. Allora f si dice DERIVABILE in X se è derivabile in ogni punto di X.

Osservazione 10.1

1. Si noti che $x_0 \in X$, deve essere un punto di accumulazione per X e deve essere anche un PUNTO INTERNO, ovvero $\exists \delta > 0\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq X$
2. $\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, ma se poniamo $x = x_0 + h$ lo stesso limite si puo scrivere $\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
3. $\frac{df}{dx}$ si denota anche come $\frac{d}{dx}f$, oppure Df oppure f' oppure $\dot{f}$.

Osservazione 10.2 (Rapporto incrementale)

Sia $f : X \longrightarrow \in \mathbb{R}$ e sia $P_f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ for all $x \neq y \in X$. Si ha che

1. f crescente in $X \quad \Leftrightarrow \quad P_f(x, y) \geq 0\ \ \forall x \neq y \in X.$
2. f decrescente in $X \quad \Leftrightarrow \quad P_f(x, y) \leq 0\ \ \forall x \neq y \in X.$

Dunque la derivata fornirà informazioni importantissime sulla monotonia della funzione.

Teorema 10.1 (Derivata e retta tangente)

Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0 sse esiste una retta tangente (non verticale) ad f nel punto $(x_0, f(x_0))$. In tal caso $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare di tale retta tangente e la sua equazione è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e dunque la retta è unica

Dimostrazione

La dimostrazione è immediata. il fascio di rette passanti $(x_0, f(x_0))$ ha equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$. il valore di m per esprimere la tangenza ad f lo possiamo vedere come il valore del processo di portare al limite per $x_1 \to x_0$ la retta secante al grafico di f che passa per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Ovvero

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Ma f è derivabile e dunque il $\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ esiste ed è (per definizione) proprio $f'(x_0)$, da cui il risultato sulla equazione della retta. L'unicità di tale retta segue dall'unicita del limite che implica l'unicità del coefficiente angolare.

10.2 Derivate di funzioni elementari

Funzione costante

$f(x) = c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Preso un qualunque x_0 in $\mathbb{R}$, studio $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{0} = 0$. Il limite esiste e dunque $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Funzione $f(x) = ax + b$

Preso un qualunque x in $\mathbb{R}$, studio $\lim_{h \to 0} \frac{a(x + h) + b - (ax + b)}{h} = a \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dunque $D(ax + b) = a$.

Funzione $f(x) = x^2$

Preso un qualunque x in $\mathbb{R}$, studio $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx}{h} = 2x$. Quindi $Dx^2 = 2x$.

Funzione $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

Preso un qualunque x in $\mathbb{R}$, studio $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$. Osserviamo che usando la formula del binomio di Newton ottengo

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}x^k h^{n-k}\right] - x^n}{h} \tag{112}$$

$$= \frac{\binom{n}{0}h^n + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}h + \binom{n}{n}x^n - x^n}{h} \tag{113}$$

$$= \binom{n}{0}h^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-2}x^{n-2}h + \binom{n}{n-1}x^{n-1} \tag{114}$$

$$\tag{115}$$

Osserviamo che $\binom{n}{n-1} = n$ e che per $h \to 0$ tutti i termini eccetto l'ultimo tendono a 0 e l'ultimo tende a nx^{n-1}. Dunque $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. E quindi la funzione $f(x) = x^n$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la sua derivata è $Dx^n = nx^{n-1}$.

Per esempio la derivata di $f(x) = x^5$ é al funzione $f'(x) = 5x^4$.

Funzione $f(x) = e^x$

Preso un qualunque x in $\mathbb{R}$, studio $\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)} - e^x}{h}$. Questo è $\lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$. Quindi $f(x) = e^x$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ è $De^x = e^x$.

10.3 Derivabilità e continuità

Teorema 10.2

Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

Dimostrazione

Per dimostrare che la funzione è continua in x_0 dobbiamo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. Ma $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$. Siccome la f è derivabile in x_0, allora $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$ e invece per $x \to x_0$ si ha che $(x - x_0) \to 0$, e dunque $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = 0$. □

Ovviamente l'implicazione inversa non è vera. Infatti esistono funzioni continue (per esempio $f(x) = |x|$) che sono continue ma non derivabili.

10.4 Derivabilità e simmetrie

Proposizione 10.1

Se f è derivabile a pari (risp. dispari) allora f' è dispari (risp. pari).

Dimostrazione

Supponiamo che f sia pari e derivabile. Siccome è derivabile allora esiste f' e dobbiamo dimostrare che f' è dispari

$$
\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} && (116)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} \qquad f \text{ pari} && (117)\\
&= -\lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(x)}{k} \qquad \text{sost. } k=-h && (118)\\
&= -f'(x) && (119)
\end{aligned}
$$

10.5 Derivabilità destra e sinistra

Definizione 10.3

Sia $f : X \longrightarrow \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, interno. Allora f

1. DERIVABILE DA DESTRA se esiste ed è finito il $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ che si chiama *derivata destra*.
2. DERIVABILE DA SINISTRA se esiste ed è finito il $f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ che si chiama *derivata sinistra*.

Proposizione 10.2

Sia $f : X \longrightarrow \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, interno. Allora

f è derivabile in x_0 sse f continua[a] e derivabile da destra e sinistra.

[a] La continuità è necessaria perché voglio evitare la situazione di una funzione definita da due rette con al stessa inclinazione ma con un salto in x_0.

Definizione 10.4

Se $f : X \longrightarrow \in \mathbb{R}$ è derivabile in X e la derivata f' è continua in X, allora f si dice DI CLASSE C^1 IN X e si scrive $f \in C^1(X)$.

10.6 Funzioni non derivabili

Definizione 10.5

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in X$. La retta $y = x_0$ si dice RETTA TANGENTE VERTICALE al grafico di f se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x0} = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x0} = -\infty.$$

In questo caso il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice PUNTO A TANGENTE VERTICALE del grafico di f.

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e in un punto $x_0 \in X$ le derivate destra e sinistra non sono uguali allora la funzione non è continua in quel punto

Definizione 10.6

Sia$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e f continua in un punto $x_0 \in X$ ed esistono $f'_+(x_0), f_-(x_0)$

1. se $f'_+(x_0) \neq f_-(x_0)$ ed almeno uno tra loro è finito, allora il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice PUNTO ANGOLOSO del grafico di f.
2. se $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f_-(x_0) = -\infty$ (o viceversa) allora il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice CUSPIDE del grafico di f.

Esempio 10.1

1. La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x = 0$ e $(0,0)$ è un *punto angoloso*.

   Dimostrazione

   Basta osservare che $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$.
   Infatti il primo limite è $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \mathsf{sgn}(x) = 1$.
   Il secondo limite è $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \mathsf{sgn}(x) = -1$.

2. la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in 0 e il punto $(0,0)$ è una *punto a tangente verticale*. Infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$. Dunque il limite esiste ma non è finito e dunque la funzione in 0 non è derivabile (vedi Grafico)

3. Valutiamo la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$. Tale funzione ha una *cuspide* in $(0,0)$ infatti

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|x| - 0}}{x} \tag{120}$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|x|}}{\pm|x|} \tag{121}$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{\pm\sqrt{|x|}} \tag{122}$$

$$= \pm\infty \tag{123}$$

10.7 Derivate ed operazioni algebriche

Teorema 10.3

Sia $f, g : X \longrightarrow \in \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in X$, interno. Allora

1. $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 e $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$[a].
2. $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0)$ (regola di Leibniz),
3. Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0, e $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g(x_0)^2}$
4. Se $f(x_0) \neq 0$, $(\frac{1}{f})$ è derivabile e $(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Dimostrazione

Dimostraimo la (2). Devo dimostrare che la funzione prodotto è derivabile in x_0 e che vale la regola enunciata. Prendiamo la definizione

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} \tag{124}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \tag{125}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} \tag{126}$$
$$= \lim_{h \to 0} g(x_0) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0 + h) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \tag{127}$$
$$= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \tag{128}$$

Dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che f e g sono derivabili in x_0 e che siccome f è continua in x_0 (lo è perché derivabile), allora $f(x_0 + h) \to f(x_0)$ per $h \to 0$.

Si osservi che la (4) discende immediatamente dalla (2)

[a] Questo anche prova che l'insieme delle funzioni derivabili forma uno spazio vettoriale sui $\mathbb{R}$

Vediamo alcune applicazioni di queste regole e generalizziamo la regola per la derivata x^n al caso di n numero intero

Osservazione 10.3 (Derivata di $f(x) = x_n, n \in \mathbb{Z}$)

Se $n > 0$ abbiamo visto come è definita questa derivata. Se $n < 0$, allora $n = -k$ con $k \in \mathbb{N}$. $x^n = \frac{1}{x^k}$ la cui derivata è in base al toerem precedente $-\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = nx^{n-1}$ Quindi in conclusione possiamo dire che se $n \in \mathbb{Z}$, allora $(x^n)' = nx^{n-1}\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Esempio 10.2

10.8 Derivate di ulteriori funzioni elementari

Teorema 10.4 (Derivata di funzioni trigonometriche)

1. $\sin x$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e $D \sin x = \cos x$.
2. $\cos x$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ $D \cos x = -\sin x$.
3. $\tan x$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ e $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Dimostrazione

Nel caso di $\sin x$, sia $x_0 \in \operatorname{dom} \sin x = \mathbb{R}$. Devo valutare $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$. Uso la regola $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$. Per cui il limite cercato diventa

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h} \tag{129}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} \tag{130}$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h^2} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} \tag{131}$$

$$= \cos x_0 \tag{132}$$

L'ultimo passaggio segue perche per $h \to 0$, $\frac{\cos h - 1}{h^2} \to -\frac{1}{2}$ e dunque $h \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h^2} \to 0$. Inoltre $\frac{\sin h}{h} \to 1$.

Per $\cos x$s i può vedere che passaggi molto simili conducono a trvoare che la derivata di $\cos x$ è $\sin x$.

Per la $\tan x$, se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ applicando al definizione del rapporto otteniamo: $D \tan x = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

10.9 Derivata della Composizione

Ricordiamo al definizione di funzione composta

Definizione 10.7

Siano $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, la funzione composta di f e G e la funzione $h = (g \circ f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che $h(x) = g(f(x))$

Teorema 10.5 (Regola delle Catena)

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale la seguente regola

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Dimostrazione

Supponiamo che $f(x) \neq f(x_0)$ per $x \neq x_0$. Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \tag{133}$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \tag{134}$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{135}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \tag{136}$$

Nel caso in cui $f(x) = f(x_0) \dots$

Osservazione 10.4

Si chiama regola dell catena perché nel caso si abbia la composizione di più funzioni, per esempio $h((g(f(x)))$ allora il teorema afferma che $Dh(g(f(x))) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Esempio 10.3 (Applicazioni della regola delle Catena)

1. Consideriamo la funzione $e^{\sin x}$. Tale funzione è la composizione di $f(x) = \sin x$ e alla funzione $g(y) = e^y$ per cui $e^{\sin x} = g(f(x)) = h(x)$. Ricordiamo che $De^x = e^x$ che $D\sin x = \cos x$. Dunque

$$D(e^{\sin x}) = h(x)' = g'(y)\restriction_{y=\sin x} \cdot D\sin x \quad (137)$$
$$= e^y\restriction_{y=\sin x} \cdot \cos x \quad (138)$$
$$= e^{\sin x} \cdot \cos x \quad (139)$$

2. Supponiamo che $h(x) = (\sin x \cos x)^2$ che si ottiene componendo la funzione $f(x) = \sin x \cos x$ e la funzione $g(y) = y^2$. Osserviamo che $D(\sin x \cos x) = D(\sin x)\cos x + \sin x D(\cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ e che $D(y^2) = 2y$. Dunque

$$D((\sin x \cos x)^2) = g'(y)\restriction_{y=\sin x \cos x} \cdot D(\sin x \cos x) \quad (140)$$
$$= 2\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (141)$$

3. Consideriamo la funzione $k(x) = \sin(e^{x^2+2})$. Questa è composizione di tre funzioni $f(x) = x^2 + 2$, $g(y) = e^y$ e $h(z) = \sin z$. Le derivate di quest tre funzioni sono: $f'(x) = 2x$, $g'(y) = e^y$ e $h'(z) = \cos z$. Dunque dalla regola della catena abbiamo che

$$Dk(x) = D\sin(e^{x^2+2}) \quad (142)$$
$$= h'(e^{x^2+2}) \cdot g'(x^2+2) \cdot f'(x) \quad (143)$$
$$= \cos(e^{x^2+2}) \cdot e^{x^2+2} \cdot 2x \quad (144)$$

4. Derivata della potenza reale x^r con $x \in (0, +\infty), r \in \mathbb{R}$. Se scrivo x^r come $e^{r\ln x}$ si ha che

$$Dx^r = e^{r\ln x}\frac{r}{x} \quad (145)$$
$$= x^r\frac{r}{x} \quad (146)$$
$$= rx^{r-1} \quad (147)$$

Quindi ad esempio $Dx^\pi = \pi x^{\pi-1}$

Alcune funzioni abbiamo visto non essere derivabili in alcuni punti. Come ci si comporta quando studiamo la derivata della composizione di questa funzione con altre funzioni ? Nel punto in questione dobbiamo applicare la definizione. Vediamo con un esempio

Esempio 10.4 (composizioni di funzioni non derivabili)

Consideriamo la funzione $h(x) = |x|^3$. Il dominio di f e $\mathsf{dom}\, h = \mathbb{R}$. h è composizione di due funzioni $f(x) = |x|$ e $g(y) = y^3$. Dunque $f'(x) = \mathsf{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ e $g'(y) = 3y^2$. Abbiamo visto che la funzione $|x|$ non è derivabile in 0 e dunque la regola della catena la posso applicare solo se mi muovo nel dominio $\mathbb{R} - \{0\}$. Il caso $x = 0$ lo devo trattare con la definizione. Vediamo come:
Caso $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$h'(x) = g'(y)\restriction_{y=|x|} \cdot f'(x) \tag{148}$$
$$= 3|x|^2 \cdot \frac{x}{|x|} \tag{149}$$
$$= 3|x|x \tag{150}$$

Caso $x = 0$. Vado a calcolare

$$\lim_{k\to 0} \frac{h(0+k) - h(0)}{k} \tag{151}$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{|k|^3}{k} \tag{152}$$
$$=0 \tag{153}$$

10.10 Ulteriori derivate di funzioni elementari

Vediamo ancora una serie di derivate di funzioni elementari che si possono ricavare dalla regole della catena

Proposizione 10.3

1. $f(x) = a^x$, con $a \neq 1$, è derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua derivata è $Da^x = a^x \ln a$.
2. $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua derivata vale $D \sinh x = \cosh x$.
3. $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua derivata vale $D \cosh x = \sinh x$.
4. $f(x) = \tanh x$ è derivabile su $\mathbb{R}$ è la sua derivata vale $D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{1}{\tanh^2 x}$.

Dimostrazione

(1) Se scriviamo a^x come $e^{x \ln a}$ allora dalla regola della catena otteniamo che è composizione della funzione $g(y) = e^y$ e di $h(x) = x \ln a$. $g'(y) = e^y$ e $h(x) = \ln a$. Dunque $Da^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.
(2) Avendo che $De^x = e^x$ e che $De^{-x} = -e^{-x}$ otteniamo che $D \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$
(3) In modo simile alla 2 si prova che $D \cosh x = \sinh x$
(4) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ applicando le derivate precedente si ottiene la tesi

10.11 Derivate e funzione inversa

Teorema 10.6

$f : I \longrightarrow J$ sia derivabile e biiettiva (dunque invertibile)[a] e sia $x_0 \in I$ tale che $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione $f^{-1} : J \longrightarrow I$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale la regola che

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{dove } x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Dimostrazione

Poniamo $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$. Per la continuità di f e f^{-1} si ha che

$$y \to y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \to x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Dunque:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \tag{154}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \qquad x = f^{-1}(y) \tag{155}$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \tag{156}$$

□

[a] Si noti che si potrebbe anche solo richiedere che f sia *strettamente monotona* e *continua* in I. Infatti, come abbiamo visto nello studio della continuità, la stretta monotonia implica la iniettività di f e la continuità implica la la suriettivita di f, e dunque insieme implicano la biettività di f e dunque la sua invertibilità.

Esempio 10.5

10.12 Derivate logaritmo e inverse trigonometriche

Proposizione 10.4 (Derivata Funzione Logaritmo e Arcoseno)

1. Consideriamo e^x e la sua inversa $\ln y$ con $y \in (0, +\infty)$. Sappiamo che $f'(x) = e^x \neq 0$. Quindi $\ln y = f^{-1}(y)$ è derivabile in $(0, +\infty)$ E quindi dal teorema

$$(\ln y)' = \frac{1}{(De^x)\restriction_{x=\ln y}} \tag{157}$$
$$= \frac{1}{e^x\restriction_{x=\ln y}} \tag{158}$$
$$= \frac{1}{e^{\ln y}} \tag{159}$$
$$= \frac{1}{y} \tag{160}$$

Quindi $D \ln x = \frac{1}{x}$.

2. Consideriamo la funzione $\sin x$ ristretta al dominio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e la sua inversa $\arcsin y : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sappiamo che $\sin x$ è derivabile e $D \sin x = \cos x$. Ma $\cos x$ nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si annulla nei punti $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ La $f' = \cos x$ non si annulla in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dunque siccome $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$ e $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Allora $f^{-1}(y) = \arcsin y$ è derivabile in $(-1, 1)$ e la sua derivata può essere calcolata come

$$D \arcsin = \frac{1}{(D \sin x)\restriction_{x=\arcsin y}} \tag{161}$$
$$= \frac{1}{\cos x\restriction_{x=\arcsin y}} \tag{162}$$
$$\tag{163}$$

Osserviamo che $\sin(\arcsin y) = y$ mentre $\cos(\arcsin y)$ non è semplificabile. usiamo le leggi della trigonometria. Sappiamo che $\sin^2 x + \cos^2 x$ e dunque $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ e siccome siamo in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dove il cos è solo positivo, alllora $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Concludiamo che

$$D \arcsin = \frac{1}{\cos x\restriction_{x=\arcsin y}} \tag{164}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{1 - \sin^2 x})\restriction_{x=\arcsin y}} \tag{165}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} \tag{166}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \tag{167}$$

Quindi $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Con un ragionamento analogo si trova che la funzione inversa del $\cos x$, $\arccos y$ è derivabile in $(-1, 1)$ e la sua deriviata vale $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. La funzione inversa della $\tan x$ ristretta all 'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, al funzione $\arctan x : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la derivata vale $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

11 Parte 11 - Applicazioni della Derivata

Sommario

Calcolo della derivate. Problema dell'ottimizzazione. Estremi locali: max a min relativo. estremi assoluti (richiamo teorema Weierstrass). Teorema di Fermat. Punti stazionari. Esempi/Esercizi. Teorema di Lagrange, Teorema di Rolle.

IV: Esercizi. Richiamo sulle derivate elementari. Problemi del tipo: verificare se $f(x) = \cdots$ è derivabile in qualche intervallo, per esempio $\mathbb{R}$.

Biblio

I: Cap. 7 [BDG11] II: Cap 7.3 [BDG11], III: Cap 7 e Cap 7.5 [BDG11], Cap. 4 [BPS14]

11.1 Problema dell'ottimizzazione: punti estremi

Il problema dell'ottimizzazione consiste nello studiare i massimi e minimi di una funzione data. Per prima cosa ricordiamo il teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza di massimo e minimi

Teorema 11.1 (Weierestrass)

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, allora esistono $c_1, c_2 \in [a, b]$ tali che $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \quad \forall x \in [a, b]$.

il Teorema di Weierstrass non garantisce però di sapere quali sono c_1 e c_2 ma solo la loro esistenza né tantomeno ci dice quanti massimi e minimi ci sono nell'intervallo $[a, b]$. Andiamo ad aggiungere ipotesi su f per cercare di essere in grado di calcolare tali punti estremi.

Definizione 11.1 (Estremi locali)

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Un punto $x_0 \in X$ si dice PUNTO DI MINIMO LOCALE (O RELATIVO) se **esiste** un intorno I di x_0 in X tale che $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I \cap X$[a]
2. Un punto $x_0 \in X$ si dice PUNTO DI MASSIMO LOCALE (O RELATIVO) se **esiste** un intorno I di x_0 in X tale che $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I \cap X$

x_0 si dirà PUNTO ESTREMO LOCALE se è un punto di massimo o minimo locale.
Infine il valore $f(x_0)$ di dice MASSIMO (risp. MINIMO) LOCALE PER f.

[a] Si ricordi che questo è equivalente a dire che $\exists \delta > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Definizione 11.2 (Estremo assoluto)

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x_1, x_2 \in X$

1. x_1 si dice PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO per f se $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$.
2. x_2 si dice PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO per f se $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$.

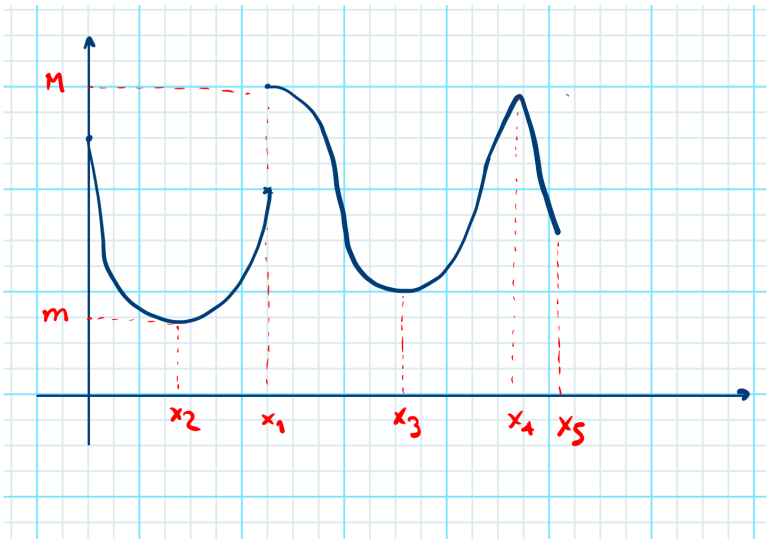


Figura 33: Punti di Massimo e minimo locali e assoluti

11.2 Teorema di Fermat

Teorema 11.2 (di Fermat)

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b). Sia $x_0 \in (a, b)$. Se f ha un estremo locale in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione

Supponiamo x_0 si un punto di minimo locale. Poiché f è derivabile in (a, b) allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Osserviamo che

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{168}$$

Ma siccome il limite è da destra di 0 allora sia $h \geq 0$. Inoltre siccome sto assumendo che x_0 si un punto di minimo, allora $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$. quindi il rapporto incrementale è maggiore o uguale di 0 e dunque per la permanenza del segno anche $f'_+(x_0) \geq 0$.
Con un ragionamento del tutto analogo posso concludere che

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{169}$$

è minore o uguale di 0 e dunque l'unica possibilità è che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.
Ragionamento identico si può applicare al caso di un massimo relativo. $\square$

Questo teorema consente di individuare i massimi e minimi locali interni. Controliamo l'importanza delle due ipotesi

Osservazione 11.1

1. $x_0 \in (a, b)$. Infatti se x_0 fosse un punto di bordo $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ non avremo garanzie che la derivata è orizzontale. Per esempio prendiamo $x^2 \restriction_{[0,1]}$. In 0 e 1 non posso dire nulla (anche se in 0 è un minimo locale). Quindi Fermat vale solo per punti estremi locali *interni* e non sul bordo. (esempio della funzione x^2 ristretta).

2. La derivabilità è necessaria. potrei avere dei punti di massimo o minimo locale in punti in cui la funzione non è derivabile. In conclusione posso dire che il Teorema di Fermat permette di individuare punti interni e in cui al funzione è derivabile.

3. Il Teorema di Fermat è una condizione necessaria ma non sufficiente. Si consideri la prossima definizione

   Definizione 11.3

   $x_0 \in (a, b)$ si dice PUNTO CRITICO O STAZIONARIO se $f'(x_0) = 0$.

   Quindi il Teorema di Fermat possiamo scrviverlo come

   $$x_0 \text{ punto di estremo locale} \Rightarrow x_0 \text{ punto critico}$$

   Il viceversa **non è vero**. Infatti si consideri la funzione $f(x) = x^3$ la cui derivata è $f'(x) = 3x^2$. Si vede subito che $f'(0) = 0$ e quindi $x_0 = 0$ è un punto critico. Ma considerando il grafico di x^3 si vede subito che $x_0 =$ non è un punto estremo locale.

Osservazione 11.2 (Candidati punti di massimo o minimo locali)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua. Possiamo concludere che i punti di Massimo o minimo assoluti, giustificati dal Teorema di Weierstrass sono:

1. punti critici interni, oppure
2. punti dove f non è derivabile, oppure
3. punti negli estremi dell'intervallo.

Esercizio 11.1

Sia $f(x) = xe^{-x^2}$. Vogliamo trovare punti di massimo e minimo assoluto in $[0, 2]$ (se esistono) per f.

Garantiamo che le ipotesi del Teorema di Weierstrass vengono verificate
Prima di tutto osserviamo che $f(x)$ è continua perché composizione e prodotto di funzioni continue. Quindi è continua in $[0, 2]$ e quindi dal Teorema di Weiertsrass ammette minimo e massimo in $[0, 2]$.

Garantiamo che le ipotesi di Fermat sono verificate
Siccome f è composizione e prodotto di funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$, allora f è derivabile su $\mathbb{R}$ e in particolare su $[a, b]$. Calcoliamo gli zeri della derivata (ovvero i punti critici). La derivata di $f(x)$ è

$$Dxe^{-x^2} = xD(e^{-x^2}) + D(x)e^{-x^2} \tag{170}$$
$$= xe^{-x^2}(-2x) + e^{-x^2} \tag{171}$$
$$= e^{-x^2}(1 - 2x^2) \tag{172}$$

Punti critici
Per calcolare i punti critici dobbiamo porre a zero al derivata e dunque risolvere

$$e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$$

Siccome $e^{-x^2} > 0$ questo si ha solo per $(1 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e siccome siamo in $[0, 2]$ il solo punto critico è $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Punti di non derivablità
Non ci sono tali punti nell'intervallo $[0, 2]$

Punti di Bordo Questi sono solo $x = 0$ oppure $x = 2$

Conclusione
Quindi se confronto i valori di f nei tre punti posso trovare i punti di massimo e minimo assoluti di f in $[0, 2]$. osservo che $f(0) = 0$, $f(2) = 2e^{-4}$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. Il punto di minimo assoluto è $x_0 = 0$, il punto di massimo assoluto è $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Il passo successivo è trovare delle condizioni che consentono di stabilire se x_0 è un punto di estremo locale in modo che nella ricerca dei punti critici posso scartare i punti che sono estremi locali e non assoluti. Tali condizioni sufficienti si danno come conseguenza di un teorema, queelo di Lagrange

11.3 Teoremi di Rolle e Lagrange

Teorema 11.3 (di Rolle)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste (**almeno**) un punto critico per f in (a, b), ovvero un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$. (Vedi Disegno)

Dimostrazione

Dal Teorema di Weierstrass concludo che esistono due punti$x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$. Ci sono solo due possibilita:

1. o entrambi i punti sono sugli estremi di $[a, b]$, ovvero $x_1 = a$ e $x_2 = b$,e quindi $f(x_1) = f(x_2)$, ma allora la funzione è costante. Ma siccome la derivata di una funzione costante è sempre 0, in ogni punto $x \in (a, b)$ la derivata è nulla e dunque sono tutti punti critici.

2. almeno uno dei due punti è interno ad $[a, b]$. Supponiamo che sia $x_1 \in (a, b)$. Dunque essendo minimo assoluto è anche un minimo locale e dunque dal Teorema di Fermat la derivata si deve annullare e quindi x_1 è un punto critico.

Teorema 11.4 (di Lagrange)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste un punto $c \in (a, b)$, tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione

Sia $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Affermo che tale funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[a, b]$. f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) per lo stesso motivo. Deve essere $g(a) = g(b)$. Si vede facilmente che $g(a) = g(b) = f(a)$. Quindi esiste $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$. Ovvero $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Osservazione 11.3 (Intepretazione grafica)

La retta secante il grafico di f che passa per $(a, f(a))$ $(b, f(b))$ è : $y = f(a) + \frac{f(a)-f(b)}{b-a}(x - a)$ Siccome $f'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente a f nel punto c, allora il teorema afferma che il punto c sarà quel punto dove la retta tangente al punto c e la retta per gli estremi hanno lo stesso coefficiente angolare e dunque sono parallele

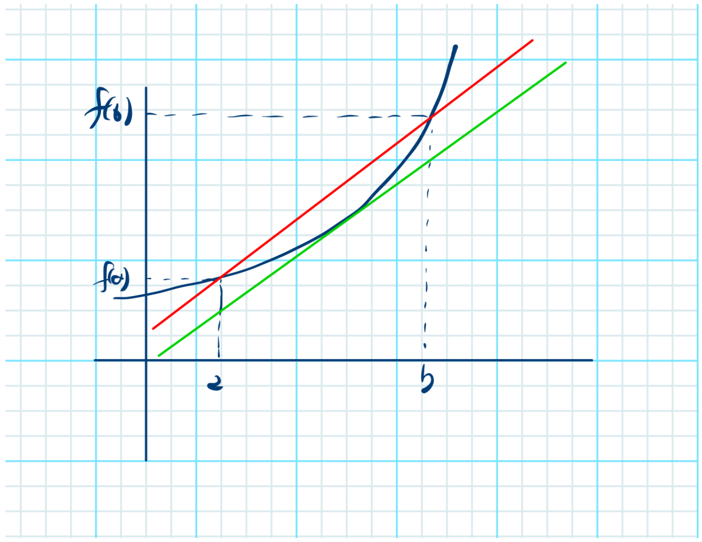


Figura 34: Interpretazione grafica del teorema di Lagrange

11.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

11.4.1 Derivate e monotonia

Teorema 11.5 (Test di Monotonia)

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile. Allora

1. f è crescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (a, b)$,
2. f è decrescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \; \forall x \in (a, b)$

Dimostrazione

Dimostriamo la (1). La (2) segue nello stesso modo.
Dimostriamo prima l'implicazione ($\Rightarrow$). *Ipotesi*: f è crescente in (a, b). *tesi*: $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (a, b)$.

Prendo una $x \in (a, b)$ e considero $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Consideriamo i due casi $h \geq 0$ e $h \leq 0$.
Nel primo caso, $h \geq 0$, allora poiché f è crescente si ha che $f(x + h) \geq f(x)$ e dunque $f(x + h) - f(x) \geq 0$, inoltre siccome $h \geq 0$, allora $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. E dunque per la permanenza del segno deve essere anche che $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$.
Nel secondo caso,in cui $h \leq 0$ si che $f(x + h) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x + h) - f(x) \leq 0$ e siccome $h \leq 0$, allora $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ e di nuovo per la permanenza del segno $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$.
Dimostriamo ora l'altra implicazione ($\Leftarrow$)
Dobbiamo dimostrare che f è crescente in (a, b). Ovvero $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 \leq x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$. Notiamo che $(x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ e osservo che in (x_1, x_2) sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange, ovvero che f è continua e derivabile in (a, b).
Quindi per il Teorema di Lagrange esiste un $c \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}$. Questo possiam riscriverlo come $f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)$. Osserviamo che $f'(c) \geq 0$ e $(x_2 - x_1) > 0$ e dunque $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ e quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$

Nel caso di derivate strettamente > 0 perdiamo l'equivalenza ma conserviamo una implicazione. Con la stressa dimostrazione di prima si può dimostrare che:

Corollario 11.1

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile. Allora

1. $f'(x) > 0 \; \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente in (a, b).
2. $f'(x) < 0 \; \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ è strettamente decrescente in (a, b).

Le implicazioni inverse del seguente corollario non son però vere. Infatti

Osservazione 11.4

f strettemente crescente $\not\Rightarrow f'(x) > 0$.

Prendiamo $f(x) = x^3$. x^3 è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$. Ma per la sua derivata $f'(x) = 2x^2$ posso solo dire che $f'(x) \geq 0$, infatti si annulla in 0.

11.4.2 Condizioni sufficienti per estremi locali

Proposizione 11.1 (Condizione sufficienti per estremi locali)

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile e sia x_0 un punto critico per f ovvero tale che $f'(x_0) = 0$.

1. $\exists \delta > 0$ tale che $f'(x) \leq 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ e $f'(x) \geq 0$ in $x_0, x_0 + \delta$, allora $x - 0$ è un punto di MINIMO LOCALE.
2. $\exists \delta > 0$ tale che $f'(x) \geq 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ e $f'(x) \leq 0$ in $x_0, x_0 + \delta$, allora $x - 0$ è un punto di MASSIMO LOCALE.
3. $\exists \delta > 0$ tale che $f'(x) \geq 0$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ oppure $f'(x) \leq 0$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, allora f non è punto di estremo locale

Dimostrazione **Idea**

Segue dal Test di monotonia. Si veda la figura.

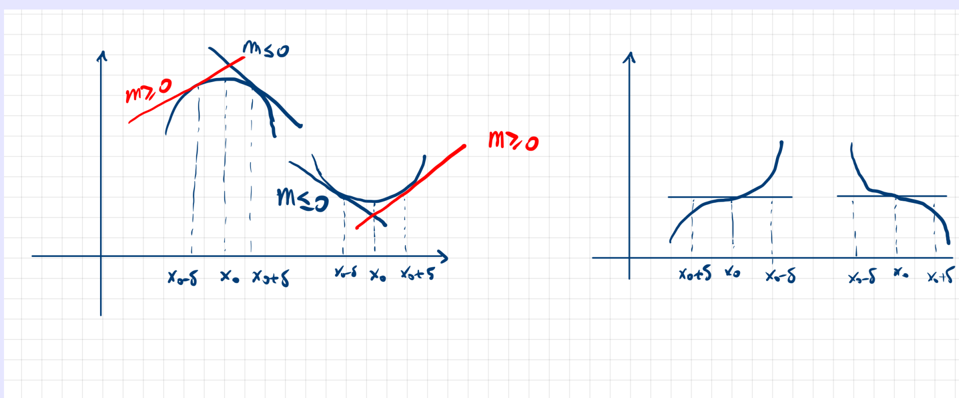


Figura 35: Interpretazione grafica delle condizioni sufficienti per gli estremi locali

Teorema 11.6 (del Confronto)

Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili e tali che

1. $g(a) \leq f(a)$
2. $g'(x) \leq f'(x)$

Allora $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione

Basta porre $h(x) = f(x) - g(x)$. Osservo che $h(a) \geq 0$ e che $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ quindi h è crescente. E siccome $h(a) = 0$, per il test di monotonia abbiamo che $h(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e dunque $f(x) \geq g(x)$.

Si noti che tale strumento è molto utile per studiare disequazioni.

Esempio 11.1

Si consideri $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.Trovare i punti di estremo locale.

dom $f = (0, +\infty)$. . Quindi in tale intervallo è derivabile. la derivata è $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
Cerco i punti critici, devo quindi imporre $f'(x) = 0$ ovvero $\frac{1-\ln x}{x^2} \Longleftrightarrow \ln x = \Leftrightarrow x = e$.
Vediamo dove $f'(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$.

1. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e \Leftrightarrow x \in (0, e)$
2. $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e \Leftrightarrow x \in (e, +\infty)$

Nel punto $x_0 = e$, l $f(x) = 1/e$ e dunque posso concludere il punto e è un massimo locale. Ma siccome la crescenza e decrescenza di f sono relative a tutto il resto del dominio e è anche un massimo assoluto.

Proposizione 11.2

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b). Allora $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad f$ è costante in (a, b)

Dimostrazione

La implicazione $\Leftarrow$ discende immediatamente dalla definizione di derivata per le funzioni costanti che abbiamo visto. Per l'altra implicazione $(\Rightarrow)$ se $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$, allora $f'(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$. E dunqe in (a, b) f è sia decrescente che crescente. Quindi è necessariamente costante

Facciamo vedere che l'ipotesi di avere un'intervallo è necessaria.

Esempio 11.2

$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. La funzione arctan è definita su tuti i reali e quindi il dominio è $\mathbb{R} - \{0\}$.
La $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{x^2}}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = 0$. Dunque la derivata è costante.
Vado a calcolare $f(1) = \pi/2$ e $f(-1) = -\pi/2$. Perché la funzione non è sempre lo stesso valore per il teorema precedente. ? Il dominio non è un intervallo e non posso applicarlo

11.4.3 Lipsichtzianità e derivabilità

ricordiamo la definizione

Definizione 11.4

$f : (a, b) \longrightarrow \in \mathbb{R}$ si dice di *Lipsichtz-continua* in (a, b) se per ogni $x_1 \neq x_2$

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leq \boxed{L^a}$$

[a] Ovvero il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, rimane limitato da L indipendentemente da x_1 e x_2.

Esempio 11.3

1. $f(x) = |x|$ è lipsicthziana con $L = 1$. Infatti

$$\left|\frac{|x_2| - |x_1|}{x_2 - x_1}\right| \tag{173}$$
$$= \frac{||x_2| - |x_1||}{|x_2 - x_1|} \tag{174}$$
$$\leq \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1|} \tag{175}$$
$$= 1 \tag{176}$$

2. $f(x) = \sqrt{|x|}$ non è lipsichtziana (vedi Grafico). Ma infatti se prendo x_2 arbitrario e $x_1 = 0$ ottengo che $\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| = \frac{\sqrt{|x_2|}}{|x_2|} \xrightarrow{x_2 \to 0} +\infty$

Proposizione 11.3

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, f derivabile in (a, b) e $f'(x) \leq L$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è lipsichitiziana con L

Dimostrazione

Immediata dal Teorema di Lagrange.

Si faccia attenzione che il viceversa non è vero

Osservazione 11.5

Infatti $f(x) = |x|$ è lipsichtiziana ma non derivabile.

11.4.4 Teorema di De L'Hopital

Ultima conseguenza del teorema di Lagrange

Teorema 11.7 (di De L'Hopital)

Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che

1. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ oppure $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$
2. $g'(x) \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,

allora $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$ e [a] il

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

[a] si noti che ll teorema vale anche per b^- e per ogni $x_0 \in (a, b)$

L'applicazione del Teorema va usata con molta cura. Si considerino i seguenti esempi.

Esempio 11.4

1. $\lim_{x\to 0} \frac{2+x}{3+x}$ questa **non è** una forma indeterminata ma se applichiamo il teorema potrei ottenere risultati sbagliati.

2. Supponiamo di avere $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x}$. è una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Se applico L'hopital ottengo $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\cos x}{1}$ e questo **limite non esiste**. Allora devo tornare nel limite originale e ragionare in altro modo. in questo caso quel limite è 1 perché lo posso scrivere come $1 + \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

3. Il teorema del De Hopital può essere applicato anche più volte: $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$ se applico hopital ottengo $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$ ancora applico Hopital e ottengo $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$.

11.5 Concavità e Convessità

11.5.1 Derivate di ordine superiore

Partendo da una funzione $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ se f è derivabile, possiamo definire una nuova funzione che è la sua derivata $f'(x)$. Ovviamente possiamo pensare di derivare questa funzione ulteriormente.

Definizione 11.5 (Derivata seconda)

Sia f derivabile in un insieme non vuoto $x \subseteq \mathbb{R}$. Se f' risulta derivabile in $x_0 \in X$, ossia esiste ed è finto il limite

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

Allora f si dice DERIVABILE DUE VOLTE nel punto x e f'' si chiama derivata seconda di f.

In generale se f è derivabile n volte in X posso definire la derivata n-esima $f^{(n)}$.

Inoltre se $f^{(n)}$ è continua X si dice che $f \in C^{(n)}(X)$ dove $C^{(n)}$ è lo spazio delle funzioni tali che $f^{(n)}$ sono continue in X. Si noti che $C^{(n)}(I) \subseteq C^{(n-1)}(I) \subseteq \ldots \subseteq C^0(I)$. in particolare si può definire $C^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^{(n)}(I)$. In particolare $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esempio 11.5

1. Se $f(x) = e^x$, allora $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni n.

2. Se $f(x) = x^2 + 3x + 1$, allora $f'(x) = 2x + 3$ e $f''(x) = 2$ e $f'''(x) = 0$

11.5.2 Convessità

Definizione 11.6 (Convessità - formulazione geometrica)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice CONVESSA (risp. *concava*) se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \neq x_2$, si ha che il segmento che unisce i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti **sotto** (risp. **sopra**) il grafico della funzione f. Se inoltre il segmento non ha altri punti in comune col grafico di f se non gli estremi, allora f si dice STRETTAMENTE CONVESSA (risp STRETTAMENTE CONCAVA).

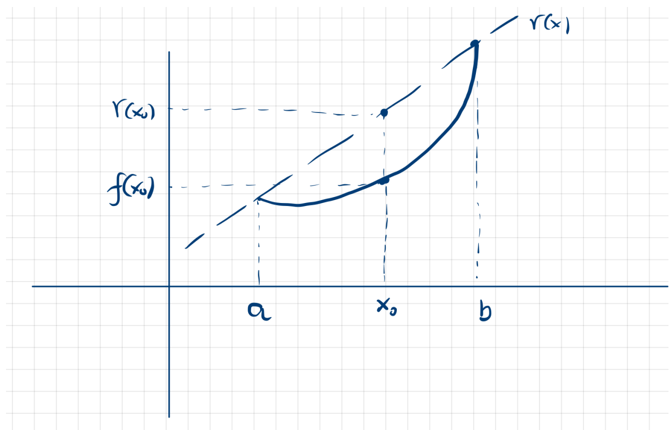


Figura 36:

Per dare una definizione analitica della convessità di una funzione andiamo a considerare un punto generico $x \in (a, b)$ e osserviamo che:

Definizione 11.7

$x \in [a, b]$ se e solo se $\exists \lambda \in [0, 1]$ tale che $x = \lambda b + (1 - \lambda)a$.

Esempio 11.6

Nella precedente definizione si ha infatti che se $\lambda = a \Leftrightarrow x = a$ e $\lambda = 1 \Leftrightarrow x = b$.

Definizione 11.8 (Convessità - formulazione analitica)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice CONVESSA se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, si ha che per ogni $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1)) \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1)$$

Sotto le stesse ipotesi f si dice CONCAVA se

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1)) \geq \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1)$$

Inoltre la convessità/concavità è stretta se la disuguaglianza è stretta.

La seguente proposizione offre un metodo per studiare la convessità di una funzione che fa uso della derivata prima.

Proposizione 11.4

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(a, b)$. Allora

1. f convessa se e solo se la retta tangente al grafico di f in ogni punto $x_0 \in (a, b)$ si trova **sotto** la funzione, ossia $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
2. f concava se e solo se la **retta tangente** al grafico di f in ogni punto $x_0 \in (a, b)$ si trova **sopra** la funzione, ossia $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Dimostrazione **(Idea della proprietà)**

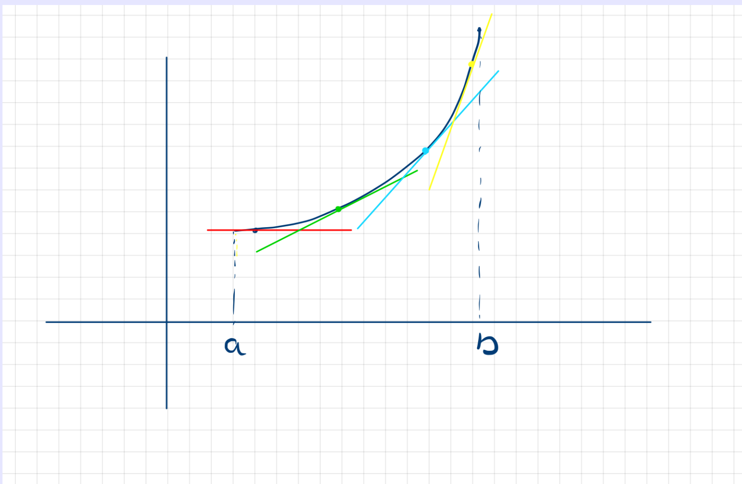


Figura 37: i punti delle rette tangenti a una funzione f convessa sono sempre al di sotto dei punti del grafico della funzione.

La convessità di una funzione può essere studiata in differenti modi. Abbiamo visto che tramite la definizione analitica possiamo caratterizzare la convessità di una funzione senza fare riferimento direttamente alle derivate. Andiamo ora vedere come studiare la convessità di una fuzione andando a studiare sia la derivata prima che la derivata seconda.

Consideriamo il seguente teorema che illustriamo con un grafico

Teorema 11.8

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b). Allora

1. f (strettamente) convessa se e solo se f' è (strettamente) crescente in (a, b),
2. f (strettamente) concava se e solo se f' è (strettamente) decrescente in (a, b),

Dimostrazione

Dimostriamo la (1), in quanto la (2) è analoga e usiamo la definizione di convessità data nella Proposizione 11.4. Iniziamo dalla implicazione nel verso $\Rightarrow$.

Se f è due volte derivabile in (a, b), applicando il Test di monotonia a f' e usando il precedente teorema, abbiamo la seguente caratterizzazione della convessità di f in un intervallo (a, b) in termini della derivata seconda di f.

Proposizione 11.5

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(a, b)$. Allora

1. f convessa (strettamente) se e solo se $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) > 0)$ $\forall x \in (a, b)$,
2. f concava (strettamente) se e solo se $f''(x) \leq 0$ $(f''(x) < 0)$ $\forall x \in (a, b)$,

In conclusione quando si deve studiare la convessità di una funzione f in un dato intervallo, sotto le ipotesi che la f sia due volte dericabile in tale intervallo possiamo studiare il segno delle derivata seconda f'' di f.

Esempio 11.7

1. $f(x) = e^x$. $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f''(x) = e^x > 0$. Quindi e^x è strattamente convessa.
2. x^2 è convessa
3. $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$ $f''(x) = 6x$. $6x \geq 0$ per $x \geq 0$ e $6x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Quindi x^3 è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$

I punti in cui la derivata si annulla e la concavità cambia sono i cosidetti PUNTI DI FLESSO e sono punti importanti nello studio del grafico di una funzione. Andiamo ad isolare una definizione per tali punti e vediamo come identificarli.

11.5.3 Punti di Flesso

Consideriamo $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \overline{\mathbb{R}},$$

allora si dice che f AMMETTE RETTA TANGENTE IN x_0. Per esempio $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x = 0$ il $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$. in questo caso la retta tangente e parallela al”assy y

Definizione 11.9

Data $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che f ammette retta tangente in x_0, allora x_0 è UN PUNTO DI FLESSO per f se f è concava a destra di x_0 e convessa a sinistra di x_0 oppure viceversa, ossia in x_0 c’é un cambio di convessità della funzione.

Esempio 11.8

Se $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ e $f''(x) = \frac{2}{6}x^{-\frac{5}{3}}$. Quindi $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$. Quindi è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$. e quindi $x = 0$ è un punto di flesso.

La condizione sulla retta tangente serve per eliminare dei casi dove c’è un cambio di concavita ma senza l’esistena della retta tangente. Ad esempio $f(x) = |x| + x^3$. Si vede che la derivata nell”origine non esiste infatti $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} + h^2$, oscilla tra 1 e -1 e quindi non esiste. Ma se studio la derivata seconda (esercizio) viene che $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, e dunque è convessa in $(0, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 0)$. Ma in 0 non c’è un retta tangente perché è un punto angoloso.

11.6 Studio di funzioni

Data una funzione $f(x)$ si tratta di studiare un grafico approssimativo di graf f. È un compito che si divide nei seguenti punti

1. Studiare il dominio della funzione
2. studiare la continunià delle funzione
3. studiare i limiti nei punti di accumulazione, tipicamente $\pm\infty$. Se tali limiti sono finiti allora evidenziano degli *asintoti orizzontali*
4. Studiare i limiti nei punti di frontier del dominio di f.
   (a) evidenziano eventuali *asintoti verticali*
   (b) eventuali *discontinuitàa eliminabili*
5. Discutere le proprietà di f
   (a) segno di f

(b) zeri di f

(c) simmetrie

(d) periodicità

6. Studio degli *asintoti obliqui*

   (a) Studiare $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e vedere se $= m \in \mathbb{R} - \{0\}$. Solo in questo caso studiare

   (b) Studiare $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$ e verificare che sia $q \in \mathbb{R}$

7. Studio della derivata prima

   (a) insiemi di monotonia delle funzioni

   (b) punti critici

   (c) estremi locali e assoluti

   (d) punti di non derivablità

8. Studio della derivata seconda

   (a) Concavità negli intervalli di definizione del dominio di f

   (b) punti di flesso

   (c) punti di cambio di concavità senza rette tangente

12 Parte 12 - Approsimazione lineare, Sviluppi di Taylor e Mac Laurin

Sommario

Approssimazione lineare ed errore commesso. Esempi. Simboli di Landau, notazione o. Relazione tra derivabilità e approssimazione lineare. Funzioni di contatto di ordine n. Polinomio di Taylor. Univocità di un polinomio di grado n. Resto. Resto di Peano e resto di Lagrange. Esempi di polinomio di Taylor: (1) e^x; (2) $\sin(x)$, (3) $\cos(x)$; (4) funzioni pari e dispari; (5) $\sinh(x)$; (6) $\cosh(x)$; (7) $\ln(1+x)$.

Applicazioni del Polinomio di Taylor: Condizioni sufficienti per punti estremali e estremi locali. Calcolo dei limiti. Principio di sostituzione sui limiti. Asintoticità e notazione o-piccolo. Usare del polinomio di Taylor con l'asintoticità nel calcolo dei limiti ($f(x) \sim f^{(n)}(x)(x-x_0)$ con $f^{(n)}$ prima derivata non nulla).

Calcoli di limiti e funzioni con il polinomio di Taylor Proprietà di o, Resto di Lagrange e calcolo dei valori di funzione (regolari) nel punto x: (1) trovare x_0 vicino a x in cui conosco il polinomio di Taylor (2) Calcolare $f^{(k)}(x_0)$; (3) calcolare l'errore usando una stima M del resto fi Lagrange $f^{(n+1)}(c)$ t.c. $f^{(n+1)}(c) \leq M$.

Biblio

Cap. 7.11, 7.12 [BDG11], Cap. 4.7.1-4.7.2 [BPS14] Cap. 4.7.2– 4.73 [BPS14], Cap. 7-11-7.13 [BDG11]

12.1 Notazione o-piccolo, simbolo di Landau

Definizione 12.1

Sia $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora scriviamo

$$f = o(g)\ x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{177}$$

Esempio 12.1

1. $x_3 = o(x^4)$ per $x \to +\infty$ e in generale $x^m = o(x_n)$ per $x \to +\infty$, lì dove $n > m, n, m \in \mathbb{N}$.
2. $x^2 = o(2^x)$ per $x \to +\infty$
3. $x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$
4. $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Proposizione 12.1

1. $e^x = 1 + x + o(x)$, per $x \to 0$,
2. $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$, per $x \to 0$
3. $\ln(1 + x) = x + o(x)$, per $x \to 0$
4. $\sin x = x + o(x)$, per $x \to 0$
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, per $x \to 0$.
6. $\tan x = x + o(x)$, per $x \to 0$

Il simbolo di Landau è particolarmente utile quando si fanno i confronti fra infiniti e infinitesimi.

Definizione 12.2

Siano $f, g, X \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Se f e g sono infinite per $x \to x_0$, allora f si dice *un infinito di ordine inferiore* rispetto a g per $x \to x_0$ (o che g è *un infinito di ordine superiore rispetto a f per $x \to x_0$*.
2. se f, g sono infinitesime per $x \to x_0$, allora f si dice un *un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g, per $x \to x_0$* (o che g è *un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a f, per $x \to x_0$*
3. se invece $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\}$, cioè $f(x) \sim \ell g(x)$, allora nei precedenti due casi f e g si dicono *infiniti dello stesso ordine, per $x \to x_0$* e *infinitesimi dello stesso ordine, per $x \to x_0$*

12.1.1 Notazione O-grande

Definizione 12.3

Sia $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$. Allora si scrive

$$f(x) = O(g(x) \text{ per } x \to x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ definitivamente limitata per } x \to x_0 \tag{178}$$

Si noti che la definizione può essere scritto in questo modo estendo il "definitivamente".

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \exists \bar{k} \in \mathbb{R}\ \forall x \geq k \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq c \Leftrightarrow f(x) \leq c g(x) \tag{179}$$

Esempio 12.2 (Notazione $O()$ in Informatica)

In Informatica nello studio della complessità degli algoritmi si userà molto spesso il simbolo $O()$ per descrivere che il tempo di esecuzione di un algoritmo è limitato da una certa funzione della lunghezza dell'input. Tipicamente in informatica per descrivere che la funzione $K(n)$ che descrive complessità di un algoritmo in base alla lunghezza n dell'input che è un intero $n \in \mathbb{N}$, ha una certa complessità, per esempio *complessità quadratica*, si scriverà come

$$K(n) = O(n^2) \text{ per } n \to +\infty \tag{180}$$

intendendo, dalla definizione di $O()$, che

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \bar{n} \quad K(n) \leq cn^2 \tag{181}$$

12.1.2 Proprietà della notazione o

Una osservazione importante è che la notazione $o(f)$ non indica una sola funzione ma una classe di funzioni. Quando scriviamo $o(g)$ per $x \to x_0$ intendiamo tutte le funzioni f tali che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Quindi sarebbe più opportuno scrivere $f \in o(g)$ per $x \to x_0$ invece che $f = o(g)$. Tuttavia quando scriviamo $f = o(g)$ per $x \to x_0$ di fatto intendiamo che $f = h$ per qualche $h \in o(g)$ per $x \to x_0$ e dunque il simbolo $=$ è almeno in parte giustificato. Un'altra giustificazione sono le seguenti proprietà che consentono di abbreviare di molto i calcolo usando la notazione $o()$

Proposizione 12.2

Siano f, g, h tre funzioni e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora valgono le seguenti relazioni (tutte per $x \to x_0$)

1. $-o(f) = o(f)$,
2. $o(f) \pm o(f) = o(f)$,
3. $c \cdot o(f) = o(f) \quad \forall c \in \mathbb{R} - \{0\}$,
4. $f \cdot o(g) = o(f.g)$
5. $o(f)^n = o(f^n)$
6. $o(f + o(f)) = o(f)$
7. $o(o(f)) = o(f)$
8. $f = o(g)$ e $g = o(h)$, allora $f = o(h)$

Una proprietà molto importante e che useremo spesso è la seguente

Proposizione 12.3

Siano f, g due funzioni e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$f \sim g \text{ per } x \to x_0 \Leftrightarrow f = g + o(g) \text{ per } x \to x_0$$

Dimostrazione

Ricordiamo che $f \sim g$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Per dimostrare quanto richiesto consideriamo la seguente catena di equivalenze che prova il risultato:

$$f \overset{x \to x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{182}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \tag{183}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \tag{184}$$

$$\Leftrightarrow f - g \overset{x \to x_0}{=} o(g) \quad \text{dalla def di } o \tag{185}$$

$$\Leftrightarrow f \overset{x \to x_0}{=} g + o(g) \tag{186}$$

Esempio 12.3

Per $x \to 0$ si hanno le seguenti asinotiicità

1. $\sin x \sim x$ ovvero $\sin x = x + o(x)$
2. $\arcsin \sim x$ ovvero $\arcsin x = x + o(x)$
3. $\tan x \sim x$ ovvero $\tan x = x + o(x)$
4. $\arctan x \sim x$ ovvero $\arctan x = x + o(x)$
5. $(1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2}$ ovvero $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
6. $(\sqrt{1+x} - 1) \sim \frac{x}{2}$ ovvero $(\sqrt{1+x} - 1) = \frac{x}{2} + o(x)$
7. $\log(1 + x) \sim x$ ovvero $\log(1 + x) = x + o(x)$
8. $e^x - 1 \sim x$ ovvero $e^x - 1 = x + o(x)$
9. $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ovvero $(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

12.2 Polinomio di Taylor

Il problema che affrontiamo in questa sezione è quello di trovare una funzione $T(x)$ cha approssima una funzione data $f(x)$ negli intorni di un dato punto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ e stimare l'errore che commettiamo.

Iniziamo dal considerare come prima approssimazione il caso di una funzione $T(x)$ lineare. $T(x)$ è dunque della forma $T(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La cosa che maggiormente interessa è stimare l'errore commesso da $T(x)$ nell'approssimare $f(x)$.

Definizione 12.4 (Errore)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $T(x)$ una funzione che approssima f. L'*errore commesso* da $T(x)$ nell'approssimare f è la funzione

$$R(x) = f(x) - T(x) \tag{187}$$

12.2.1 Approssimazione lineare

Per approssimare la funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$, il primo esempio che viene in mente è quello di usare la funzione costante $T_0(x) = f(x_0)$. Invece una funzione lineare che approssima f in x_0 è la retta tangente a f nel punto $(x_0, f(x_0))$, ovvero

$$y = T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x - x_0) \tag{188}$$

Osserviamo che $T_1(x)$ approssima perfettamente f in x_0. Infatti $T_1(x_0) = f(x_0) + 0 = f(x_0)$. Invece andiamo as stimare l'errore commesso negli intorni di x_0 da T_1, ovvero definito $R_1(x) = f(x) - T_1(x)$ andiamo a studiare come cresce l'errore al variare della variabile indipendente negli intorni di x_0. Ovvero, definito il rapporto incrementale $\frac{R_1(x)-R_1(x_0)}{x-x_0} = \frac{R_1(x)}{x-x_0}$, visto che $R_1(x_0) = 0$. Dunque studiamo $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_1(x)}{x - x_0}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} && (189)\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} && (190)\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) && (191)\\
&= 0 && (192)
\end{aligned}$$

Le precedenti uguaglianze dimostrano il seguente risultato

Proposizione 12.4

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Sia $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $R_1(x) = f(x) - T_1(x)$. Allora

$$R_1(x) = o(x - x_0)$$

Il risultato precedente può generalizzarsi a un teorema che caratterizza la derivabilità di f in x_0, nel seguente modo

Teorema 12.1

Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. sOno equivalenti:

1. f è derivabile in x_0
2. Esiste una costante A tale che $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$

Dimostrazione

Dimostriamo le due implicazioni: ($\Rightarrow$). Siccome per ipotesi f è derivabile in x_0 allora, esiste ed è finito $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Dunque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \tag{193}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{194}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \tag{195}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{196}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } A = f'(x_0) \tag{197}$$

Vediamo l'altra implicazione ($\Leftarrow$). Dobbiamo dimostrare che esiste ed è finito il $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Ma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{f(x_0)} + A(x - x_0) + o(x - x_0) - \cancel{f(x_0)}}{x - x_0} \tag{198}$$

$$= A + \lim_{x\to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \tag{199}$$

$$= A \tag{200}$$

Dove l'ultimo passaggio segue perché $\lim_{x\to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0$. Infatti questo equivale a dire $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{x - x_0}$ con $h = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.

Esempio 12.4 (Esempi di approssimazione lineare)

1. Consideriamo $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$. Dunque $De^x = e^x$ e quindi

$$\begin{cases} T_1(x) = e^0 + e^0(x-0) = x \\ R_1(x) = o(x-0) = o(x) \\ e^x = x + o(x) \end{cases}$$

2. Consideriamo $f(x) = \sin x$ e $x_0 = 0$. Dunque $D\sin x = \cos x$ e quindi

$$\begin{cases} T_1(x) = \sin(0) + \cos(0)(x-0) = x \\ R_1(x) = o(x-0) = o(x) \\ \sin x = x + o(x) \end{cases}$$

12.2.2 Polinomio di Taylor di ordine $n > 1$

Abbiamo visto che $T_0(x) = f(x_0)$ e che $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Osserviamo che se considero le derivate di tali funzioni ottengo

$$\begin{cases} T_0'(x) = 0 = f^{(0)}(x_0) \\ T_1'(x) = f'(x_0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che nel caso di $T_1(x)$ l'errore (commesso da $T_1(x)$ nell'approssimare $f(x)$ negli intorni di x_0) tende a 0 quanto una funzione lineare in x. Quindi viene naturale pensare al seguente approccio per definire ulteriori approssimazioni di $f(x)$ nella speranza che l'errore tenda a zero più velocemente di una funzione lineare. Ci chiedeiamo allora se l'osservazione precedente può generalizzarsi alla seguente:

È possibile trovare un polinomio $T_n(x)$ con $n \in \mathbb{N}, n > 1$ tale che per ogni k la derivata k-esima di tale polinomio è proprio la derivata k-esima di f calcolata nel punto x_0 ? Ovvero in simboli:

$$T_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

Osserviamo che un polinomio $p(x)$ di grado n è definito come $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Dunque nel definire un polinomio abbiamo $n+1$ gradi di libertà dati dagli $n+1$ coefficienti a_i e dunque, informalmente possiamo definire tali $n+1$ coefficienti e identificare univocamente $T_n(x)$ imponendo le $n+1$ condizioni che $T_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0)$ per ogni k tale che $0 \leq k \leq n$. Questo darebbe dunque un sistema in $n+1$ variabili con $n+1$ equazioni e dunque è risolvibile univocamente (eliminazione Gaussiana). Vediamo più nel dettaglio tale approccio.

Definizione 12.5

Siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f, g \in C^n(I)$. Diremo che f E g HANNO UN CONTATTO DI ORDINE n IN x_0 se $\forall k = 0, \ldots, n$ si ha che $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$.

La seguente proosizione si può dimostrare seguendoo una idea simile a quella accennata in precedenza.

Proposizione 12.5

Siano $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^n(I), n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in (a, b)$. Allora esiste un unico polinomio $T_n(x)$ dio grado n tale che $T_n(x)$ e $f(x)$ hanno un contatto di ordine n in x_0. Tale polinomio viene detto POLINOMIO DI TAYLOR PER f IN x_0 ed è:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}.$$

Se $x_0 = 0$ $T_n(x)$ viene detto polinomio di Mac Laurin ed è:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}.$$

Dimostrazione

Andiamo solo a vedere che $T_3(x)$ e $f(x)$ hanno un contatto di ordine 3 per intuire la dimostrazione.

È facile vedere che $T_3(x_0) = f(x_0)$. Infatti tutti i termini $\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$ per $k \geq 1$ in $T_3(x)$ vengono annullati quando valutiamo $T_3(x)$ per $x = x_0$.

Osserviamo che $T_3'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{3}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^2$. Di nuovo, quando valutiamo $T_3'(x)$ per $x = x_0$ tutti i termini nella sommatoria con fattore il polinomio $(x - x_0)$ vengono annullati e rimane solo $T_3'(x) = f'(x_0)$.

$T_3''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0)$ e dunque $T_3''(x_0) = f''(x_0)$. Infine $T_3'''(x) = f'''(x_0)$ e quindi in particolare $T_3'''(x_0) = f'''(x_0)$.

Il teorema di Taylor ci spiega l'errore $R_n(x)$ che commettiamo approssimando f con T_n

Teorema 12.2 (Teorema di Taylor)

Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^n(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in (a,b)$. Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor per f in x_0. allora

1. $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ (Resto di Peano)
2. se $f \in C^{(n+1)}(a,b)$, allora $\exists c \in (a,b)$ con $|c - x_0| < |x - x_0|$ tale che $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ (Resto di Lagrange)

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione solo nei casi particolari $n = 1$ (Peano) e $n = 0$ (Lagrange). Gli altri casi seguono da un ragionamento simile.

Dimostriamo che il resto di Peano è $R_1(x) = o(x - x_0)$. Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} \tag{201}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \tag{202}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \tag{203}$$

$$= 0 \tag{204}$$

Per il Resto di Lagrange, nel caso $n = 0$ dobbiamo fare vedere che $\exists c$ con $|c - x_0| < |x - x_0|$ tale che $R_0(x) = f'(c)(x - x_0)$. Ragioniamo come segue: $R_0(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0)$. Dunque dal Teorema di Lagrange (si noti che le ipotesi sono sufficienti per applicarlo) abbiamo che

$$\exists c \text{ tale che } |c - x_0| < |x - x_0|^{a} f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dunque $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ e pertanto $R_0(x) = f'(c)(x - x_0)$. □

[a] Questo significa che c è compreso tra x e x_0 sia che $x > x_0$ sia che $x < x_0$.

12.3 Sviluppi di Taylor delle principali funzioni

Esempio 12.5 ($f(x) = e^x$)

Consideriamo $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$, $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

Esempio 12.6 ($f(x) = \sin x$)

$f(x) = \sin x$ e $x_0 = 0$, $\sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$. Osserviamo che $D \sin x = \cos x$, $D \cos x = -\sin x$, $D(-\sin x) = -\cos x$ e $D(-\cos x) = \sin x$. Quindi le derivate si ripetono ciclicamente ogni 4 derivate. Per cui possiamo scrivere

$$f^{(k)}(\sin x) = \begin{cases} (-1)^n \sin x & k = 2n, \quad n \in N \\ (-1)^n \cos x & k = 2n+1, \quad n \in N \end{cases}$$

In particolare per $x_0 = 0$ la $f^{(k)}(0)$ si comporta come

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 2n, \quad n \in N \\ (-1)^n & k = 2n+1, \quad n \in N \end{cases}$$

13 Parte 13 - Calcolo Integrale di funzioni reali: Integrale di Riemann

Sommario

Integrazione: motivazioni e idea. Interpretazione geometrica e interpretazione cinematica. Partizione o suddivisione di un intervallo. Somme inferiori e somme superiori. Defiinizione di integral di Riemann (funzioni limitate). Esempi. Osservazioni: la classe delle funzioni integrabili è non banale (è non vuoto ed esistono funziono non integrabili). Prime proprietà: linearità, Additività, Positività e monotonia, modulo e disuguaglianza triangolare. Teorema della media integrale.

Teorema (criterio di integrabilità di una funzione limitata). Esempi. Alcuni esempi di errori tipici. Teorema fondamentale del calcolo integrabile (con dimostrazione, funzioni **continue**). Funzione primitiva e integrale. Esempi funzioni (Cap. 8.4[BDG11]. Integrale indefinito: definizione e differenze con integral definito e funzione integrale. Proprietà su relazione tra primitive. Corollario del Teorema fondamentale dell'integrazione: come calcolare un integrale.

Integrazione per sostituzione (cambiamento di variabili): caso indefinito e caso definito.

Integrazione di funzioni razionali caso quadratico: Introduzione e casi particolari: secondo grado e casi sul Δ. Esempi.

Biblio

Cap 6.1 [**?**] Cap 8.1 e Cap. 8.3 [BDG11]
Cap. 6.2 [**?**], Cap 8.4 [BDG11]

13.1 Integrale: Definizioni e prime proprietà

Il problema che motiva l'introduzione degli integrali è il calcolo dell'area $\mathsf{Area}(A)$ della regione A sottesa dal grafico di una funzione rispetto all'asse delle x in un dato intervallo.

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata (potrebbe avere dei punti di discontinuità)

Definizione 13.1 (Partizione)

Si dice PARTIZIONE dell'intervallo $[a, b]$, l'insieme $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$.

Fissata una partizione P di $[a, b]$ definiamo

$$m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ i = 1, \ldots, n \tag{205}$$
$$M_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ i = 1, \ldots, n \tag{206}$$
$$\Delta_i = x_i - x_{i-1} i = 1 \ i =, \ldots, n \tag{207}$$

Si noti che poiché f è limitata, allora m_i e M_i sono ben definiti come inf e sup. Gli m_i e gli M_i ci consentiranno di approssimare l'area cercata con la somma di aree di rettangoli di base Δ_i e altezze rispettivametne m_i e M_i.

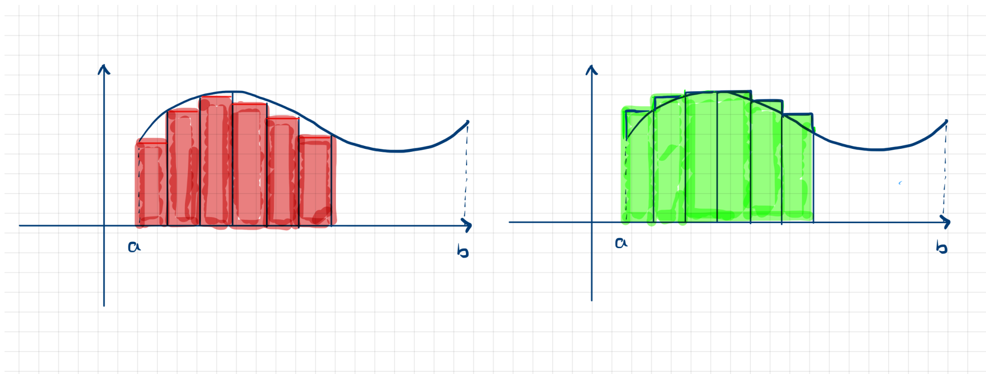


Figura 38: Somme inferiori e somme superiori

Consiceriamo dunque le seguenti due quantità che catturano rispettivamente l'area per difetto e l'area per eccesso:

Definizione 13.2 (Somme inferiori e somme superiori)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sia P una partizione di $[a, b]$. Definiamo come

1. $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$ (somma inferiore)

2. $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$ (somma superiore)

Siccome $m_i \leq M_i$, allora

Osservazione 13.1

1. $s(f, P) \leq \mathsf{Area}(A) \leq S(f, P)$

2. Inoltre se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata in $[a, b]$, intervallo chiuso e limitato, allora $\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ e $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$ sono valori finiti in $\mathbb{R}$ ed inoltre, **per ogni** partizione P vale

$$(b - a) \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)(b - a) \tag{208}$$

La prossima definizione cattura il concetto di integrale definito di Riemann. L'idea informale è quella di definirlo, se esiste, quando la più piccola delle somme superiori calcolate su tutte le possibili partizioni di $[a, b]$ è uguale alla più grande delle somme inferiori calcolate su tutte le possibili partizioni di $[a, b]$.

Definizione 13.3 (Integrale di Riemann)

Una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata* si dice INTEGRABILE SECONDO RIEMANN se e solo se

$$\inf\{S(f, P) \;:\; P \text{ partizione di } [a, b]\} = \sup\{s(f, P) \;:\; P \text{ partizione di } [a, b]\} = I \in \mathbb{R} \tag{209}$$

In questo caso denotiamo

$$\mathsf{Area}(A) = \int_a^b f(x)dx \overset{\texttt{def}}{=} I$$

In questo corso noi tratteremo solo dell'integrale di Riemann e quindi quando parliamo di integrabilità di funzioni ci riferiremo *solo alla integrabilità secondo Riemann*.

(Notazioni)

1. f si dice FUNZIONE INTEGRANDA,
2. $[a, b]$ è l'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE,
3. la variabile x di integrazione è un variabile vincolata e non gioca alcun ruolo (come l'indice in una sommatoria). Per tanto le scritture $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(s)ds$ ... denotano tutte la stessa quantità.

Osservazione 13.2

1. Dalla definizione di $\inf$ e $\sup$ si può verificare facilmente che

$$f \text{ integrabile in } [a,b] \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists P_\epsilon \text{ partizione } [a,b] \ : \ S(f,P_\epsilon) - s(f,P_\epsilon) < \epsilon \qquad (210)$$

2. Dalla definizione di $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, la quantità $\mathsf{Area}(A)$ è una area CON SEGNO. Ovvero se la funzione f è una funzione negativa, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0$ è un valore negativo.

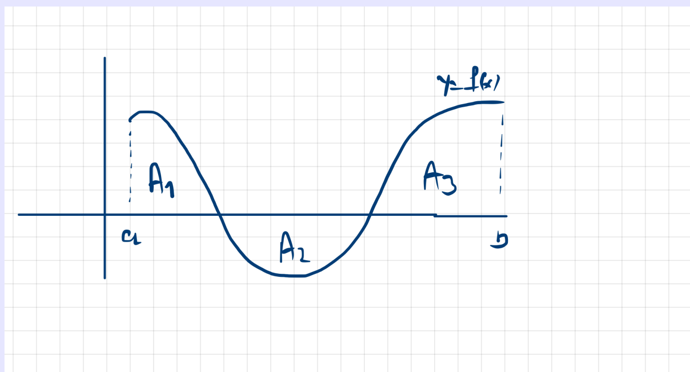


Figura 39: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \mathsf{Area}(A_1) - \mathsf{Area}(A_2) + \mathsf{Area}(A_3)$

Proposizione 13.1 (Studio dell'Integrale della funzione costante)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b]$. Sappiamo (si veda la figura) che l'area della regione A sottesa dalla funzione $f(x) = c$ sull'asse delle x è l'area del rettangolo di base $b - a$ e altezza c e dunque $\mathsf{Area}(A) = (b-a)c$.

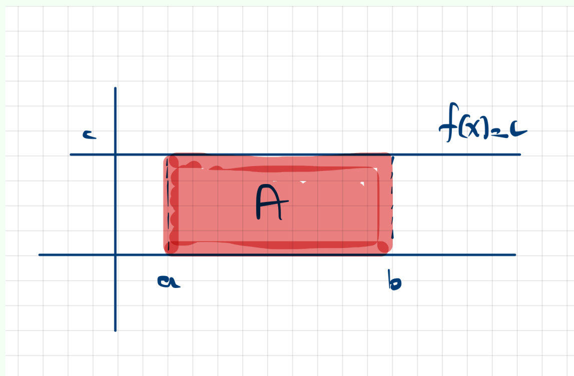


Figura 40: Area della funzione costante

Dimostriamo che la definizione di integrale $\int_a^b f(x)dx$ porta esattamente alla stessa quantità. Sia $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una generica partizione di $[a,b]$. Poiché $f(x) = c \; \forall x \in [a,b]$, si ha che

$$m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\} = c \tag{211}$$
$$M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\} = c \tag{212}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = (b-a) \tag{213}$$

e dunque

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = (b-a) = c(b-a) \tag{214}$$
$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = (b-a) = c(b-a) \tag{215}$$

Poiché P è una generica partizione, si ha che

$$\inf\{\ S(f,P) \ : \ P \text{ partizione di } [a,b]\} = c(b-a) \tag{216}$$
$$\sup\{\ s(f,P) \ : \ P \text{ partizione di } [a,b]\} = c(b-a) \tag{217}$$

e dunque dalla definizione di integrale di Riemann $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. $\square$

La Proposizione precedente dunque prova che la definizione di integrale non è inconsistente adattandosi almeno ad un caso di una funzione. Proviamo adesso che la definizione non copre qualuenque fuzione andando a far vedere ch ci sono delle funzioni limitate che non sono intrgrabili secondo Riemann.

Proposizione 13.2 (Esempio di funzione limitata non integrabile)

La funzione di Dirichelet non è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[0, 1]$.

Dimostrazione

Ricordiamo che la funzione di Dirichlet è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Per dimostrare che f non è integrabile in $[0, 1]$ faremo vedere che per qualunque partizione $P = \{x_0, \dots, x_n = 1\}$ di $[0, 1]$ $s(f, P) = 0$ e $S(f, P) = 1$ da cui ricaviamo che

$$\sup\{s(f, P) : P \text{ partizione di } [0, 1]\} = 0 \neq 1 = \inf\{S(f, P) : P \text{ partizione di } [0, 1]\}$$

per cui $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ non esiste.
Affermiamo che $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$. Per provare tale affermazione osserviamo che poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (ovvero che $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$, si veda Teorema 2.1 a pagina 25), allora per ogni $i = 1, \dots, n$, nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ esiste un razionale q_i e dunque $f(q_i) = 0$ per cui $\inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$.

Per vedere che $M_i = 1$ uso l'assioma di continuità di $\mathbb{R}$ (si veda Teorema 2.1 a pagina 25) per cui per ogni per ogni $i = 1, \dots, n$, nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ esiste un reale $r \in [x_{i-1}, x_i]$. Dunque $\sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1$.
In conclusione abbiamo che $s(f, P) = 0(1 - 0) = 0$ e $S(f, P) = 1(1 - 0) = 1$ e l'affermazione è provata. $\square$

La prossima proposizione enumera una serie di proprietà fondnamentali dell'integrale.

Teorema 13.1 (Proprietà dell'integrale)

Valgono le seguenti proprietà dell'integrale di Riemann

1. LINEARITÀ. Se f, g sono integrabili in $[a, b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora la fuzione $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è integrabile in $[a, b]$. Inoltre

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

(Tale proprietà implica che lo spazio delle funzioni intergrabili secondo Riemann forma uno *spazio vettoriale*)

2. MONOTONIA. Se f, g sono integrabili in $[a, b]$ e $\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x)$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. ADDITIVITÀ. Se f è integrabile in $[a, b]$ e $c \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE. Se f è integrabile in $[a, b]$. Allora

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

5. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

13.2 Classi di funzioni integrabili secondo Riemann

Abbiamo visto che la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann è non vuota e d'altra parte abbiamo visto che non tutte le funzioni sono integrabili secondo Riemann. andiamo a vedere quali classi di funzioni sono integrabili

Teorema 13.2

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate. Se f soddisfa almeno una delle seguente proprietà allora f è integrabile.

1. f è una funzione CONTINUA A TRATTI (ovvero ha un numero finito, anche 0, di punti di discontinuità).
2. f MONOTONA in $[a, b]$ (anche se con un numero infinito di punti di discontinuità)

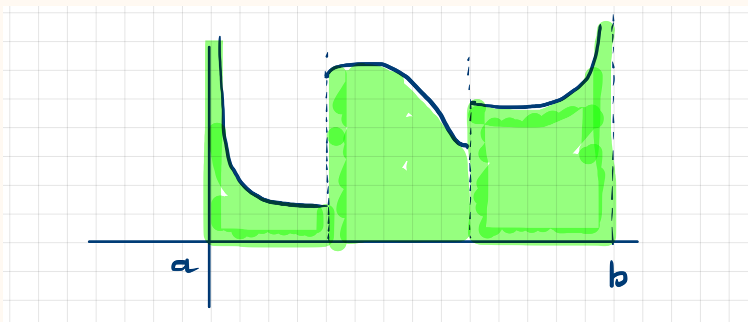
Corollario 13.1

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata in $[a, b]$ e $f \in C([a, b])$. Allora f è integrabile in $[a, b]$.

Discutiamo il teorema presentando due esempi

Esempio 13.1

La seguente funzione è una funzione con un numero finito di punti di discontinuità.

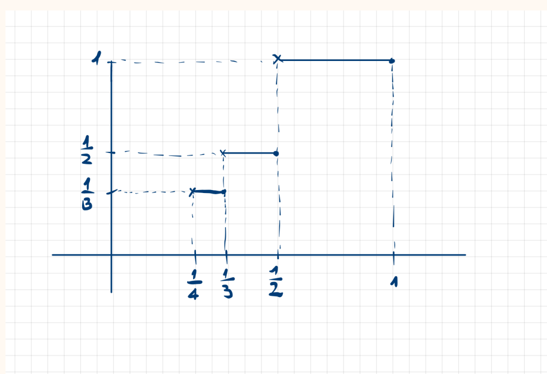


Esempio 13.2

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Come si vede dal grafico, è una funzione con infiniti punti di discontinuità ma monotona in $[0, 1]$ (dimostrarlo !)



13.3 Teorema delle Media Integrale e Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Veniamo ora la secondo problema visto in precedenza. Come calcolare in maniere semplice l'integrale di una funzione ?

Definizione 13.4

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$. La quantità $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ è detta MEDIA INTEGRALE DI f IN $[a, b]$

Teorema 13.3 (Teorema della Media Integrale)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$. Allora $\exists c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazione

Per prima cosa siccome $f \in C([a, b])$ e dunque f è continua in $[a, b]$, allora per il Teorema 13.2 f è integrabile in $[a, b]$ e dunque la quantità $\int_a^b f(x)dx$ è ben definita ed è in $\mathbb{R}$. Inoltre siccome $f \in C([a, b])$ allora per il teorema di Weierestrass $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tali che

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Per la monotonia dell'integrale (Teorema 13.2) si ha dunque che

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

e dunque

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow \tag{218}$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M \tag{219}$$

e dunque per il Teorema del valori intermedi (Teorema 8.5 a pagina 144) si ha che

$$\exists c \in [a, b] \ : \ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{220}$$

□

Definizione 13.5

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Una funzione $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice PRIMITIVA DI f IN I se F è derivabile in I e

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Definizione 13.6 (Intergrale indefinito)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia data una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. SI dice INTEGRALE INDEFINITO DI f e si indica con il simbolo $\int f(x)dx$ l'insieme di tutte le primitive di f in I, se esistono. In simboli

$$\int f(x)dx = \{F : I \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ F \text{ primitiva id } f\} \tag{221}$$

Definizione 13.7 (Funzione Integrale)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. e sia $c \in [a, b]$. La funzione $F_c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definita come:

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

si dice FUNZIONE INTEGRALE DI f RELATIVA AL PUNTO c.

Osservazione 13.3 (Riflessione sui simboli)

SI osservi che

1. L'*intergale definito* $\int_a^b f(x)dx$ è un *numero reale*.
2. La *funzione integrale* $\int_a^x f(t)dt$ è *una funzione*.
3. L'*integrale indefinito* $\int f(x)dx$ è un'insieme di funzioni

Teorema 13.4 (Teorema di unicità della primitiva)

Siano F e G due primitive di $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c.$$

Dimostrazione

Basta porre $H(x) = F(x) - G(x)$. Poiché F e G, in quanto primitive di f, sono derivabili in $[a, b]$, allora H è derivabile in $[a, b]$ e poiché $F'(x) = G'(x) = f(x)$, allora $H'(x) = 0$. Dunque $H(x) = c$ per qualche costante c. Quindi $F(x) = G(x) + c$. $\square$.

Teorema 13.5 (Teorema fondamentale del Calcolo Integrale)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$. Definita la funzione $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$F(z) \int_a^x f(t)dt$$

allora F è una *primitiva* di f in $[a,b]$. Ovvero, F è derivabile in $[a,b]$ e vale :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Dimostrazione

Preso un generico punto $x \in [a,b]$ dobbiamo dimostrare che $f(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ è derivabile è dimostrare che $F'(x) = f(x)$. Consideriamo un punto generico x interno ad $[a,b]$, ovvero in (a,b). Se x è un estremo la dimostrazione è simile e la lasciamo per esercizio.
Facciamo vedere che esiste ed è finito il $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \tag{222}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \tag{223}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\displaystyle\int_a^x f(t)dt} + \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt - \cancel{\displaystyle\int_a^x f(t)dt}}{h} \tag{224}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \tag{225}$$

Per il teorema della media integrale con $a = x$ e $b = x+h$ esitsterà un $c \in [x, x+h]$ tale che $f(c) = \frac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt$ e quindi $\Rightarrow hf(c) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt$

Dunque dalla equazione 225 si ottiene che $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$. Osserviamo che siccome $c \in [x, x+h]$, allora per $h \to 0$ $c \to x$. Quindi siccome f è continua in $[a,b]$ otteniamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x) \tag{226}$$

□

Corollario 13.2

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C([a, b])$. Se G è una primitiva di f in $[a, b]$, allora

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b.$$

Dimostrazione

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale applicato ad f, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una primitiva di f tale che $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$. Poiché $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, si ha che $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Se $G(x)$ è una generica primitiva di f, per il teorema sull'unicità della primitiva si ha che $F(x) = G(x) + c\ \forall x \in [a, b]$. Dunque

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = G(b) + c - G(a) - c = G(b) - G(a).$$

□

Esempio 13.3

Calcolare $\int_0^1 x^2 dx$.

È sufficiente trovare una primitiva di x^2, cioè una funzione $G(x)$ tale che $G'(x) = x^2$. È facile osservare che tale fuzione è, $\frac{x^3}{3}$. Dunque

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^0 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Esempio 13.4

Calcolare $\int_a^b x^r dx \quad r \neq -1$.

È sufficiente trovare una primitiva di x^r, cioè una funzione $G(x)$ tale che $G'(x) = x^r$. È facile osservare che tale fuzione è, $\frac{x^{r+1}}{r}$. Dunque

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r}\right]_b^a.$$

Esempio 13.5

Calcolare $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$.

Consideriamo la funzione

$$G(x) = \ln(|x|) = \begin{cases} \ln x & x \geq 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Quindi

$$G'(x) = \frac{1}{x}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + C$$

Esempio 13.6

1. Poiché $D(\sin x) = \cos x$, allora $\int \cos x dx = \sin x + C$.
2. Poiché $D(\cos x) = -\sin x$, allora $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
3. Poiché $D(e^x) = e^x$, allora $\int e^x dx = e^x + C$.
4. Poiché $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$, allora $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.

13.4 Integrazione per parti

Abbiamo visto che integrazione e derivazione sono operazioni inverse a meno di una costante. Ovvero che

$$\int h'(x)dx = h(x) + c$$

Sfruttiamo quindi le regole di derivazione per ottenere delle regole di integrazione. Per esempio dall regola di derivazione del prodotto di due funzione:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Osserviamo che se integriamo in dx ambo i lati della precedente uguaglianza otteniamo

$$\int (fg)'(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \tag{227}$$

e poiché $\int (fg)'(x)dx = f(x)g(x) + c$ si ha che

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{228}$$

Da questi passaggi otteniamo dunque la dimostrazione del seguente risultato

Proposizione 13.3 (Integrazione per Parti)

Siano f, g due funzioni derivabili. Allora

1. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
2. $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Esempio 13.7

Calcolare $\int \ln x dx$.

Consideriamo $\int \ln x dx = \int x^0 \ln x dx$. Dunque posso applicare la regola dell'integrazione per parti con $f'(x) = x^0$ (e dunque $f(x) = x$) e con $g(x) = \ln x$ (e dunque $g'(x) = \frac{1}{x}$). Quindi dalla regola si ottiene che

$$\int \ln x dx = \int x^0 \ln x dx \tag{229}$$

$$= x \ln x - \int \frac{x}{x} dx \tag{230}$$

$$= x \ln x - \int dx \tag{231}$$

$$= x \ln x - x + C \tag{232}$$

L'esempio precedente si può facilmente generalizzare

Esempio 13.8

Calcolare $\int x^r \ln x dx$, $r \neq -1$.

Applichiamo il metodo di sostituzione in modo tale che $f'(x) = x^r$ (dunque $f(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$) e $g(x) = \ln x$ (dunque $g'(x) = \frac{1}{x}$).
Quindi

$$\int x^r \ln x dx = \frac{x^{r+1} \ln x}{r+1} - \int \frac{x^{r+1}}{r+1} \frac{1}{x} dx \tag{233}$$

$$= \frac{x^{r+1} \ln x}{r+1} - \frac{1}{r+1} \int x^r dx \tag{234}$$

$$= \frac{x^{r+1} \ln x}{r+1} - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C \tag{235}$$

Esempio 13.9

Calcolare $\int e^x \sin x dx$

Applichiamo il metodo di integrazione per parti scegliendo $f'(x) = e^x$(Dunque $f(x) = e^x$) e $g(x) = \sin x$ (dunque $g'(x) = \cos x$). Per tanto

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{I} \tag{236}$$

Per calcolare l'integrale I riapplichiamo il metodo di integrazione per parti scegliendo $f'(x) = e^x$ (quindi $f(x) = e^x$) e $g(x) = \cos x$ (dunque $g'(x) = -\sin x$). Per cui abbiamo

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \tag{237}$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \tag{238}$$

$$\Downarrow \tag{239}$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \tag{240}$$

$$\Downarrow \tag{241}$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C \tag{242}$$

Esempio 13.10

Calcolare $\int \cos^2 x dx$

Integrando per parti con $f'(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ si ottiene

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x - \int \sin^2 x x dx \tag{243}$$

Osservando che $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ otteniamo

$$2 \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x - \int dx \tag{244}$$

$$\Downarrow \tag{245}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x - x}{2} + C \tag{246}$$

13.5 Integrazione per sostituzione

Il metodo di integrazione per sostituzione è legato alla regola di derivazione delle funzione composta.

Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ una funzione derivabile e tale che $\varphi'(x) \neq 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$. Prendiamo una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f (per cui $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a, b]$). Definiamo

$$h(t)F(\varphi(t)).$$

La funzione $h : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ ha le seguenti proprietà:

1. h è derivabile, poiché è composizione di funzioni derivabili (F è derivabile per il teorema fondamentale del Calcolo Integrale)

2. Se calcoliamo $h'(t)$ otteniamo :

$$h'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{247}$$

$$= f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{248}$$

e dunque se passiamo agli integrali otteniamo

$$F(\varphi(t)) + C = h(t) + C \tag{249}$$

$$= \int h'(t) dt \tag{250}$$

$$= \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \tag{251}$$

Applicando il ragionamento precedente abbiamo dimostrato la seguente proprietà

Proposizione 13.4 (Integrazione per sostituzione - caso indefinito)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))dt + C.$$

Proposizione 13.5 (Integrazione per sostituzione - caso definito)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= [F(\varphi(t))]_{\alpha}^{\beta} && (252)\\
&= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) && (253)\\
&= [F(x)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} && (254)\\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx && (255)
\end{aligned}$$

□

Esempio 13.11 (Come applicare il metodo per sostituzione)

Se partiamo da un integrale nella forma $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

1. Introduciamo la sostituzione $x = \varphi(t)$
2. Osserviamo che

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t) \tag{256}$$
$$= \frac{dx}{dt} \tag{257}$$
$$\Downarrow \tag{258}$$
$$\varphi'(t)dt = dx \tag{259}$$

Per cui con il cambio di variabile $x = \varphi(t)$ il calcolo dell'integrale $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ si riduce come segue (F è una primitiva di f)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \tag{260}$$
$$= F(x) + C \tag{261}$$
$$= F(\varphi(t)) + C \tag{262}$$

Esempio 13.12

Calcolare $\int \sin t \cos t dt$.

Usiamo il metodo per sostituzione tramite la sostituzione $x = \varphi(t)$ dove $\varphi(t) = \sin t$ e $f(x) = x$. Per cui si ha che $dx = \varphi'(t)dt = \cos t dt$ e quindi $\int \sin t \cos t dt = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)t dt$. $F(x)$ una primitiva di f è dunque $F(x) = \frac{x^2}{2}$. per cui

$$\int \sin t \cos t dt = \int x dx \tag{263}$$
$$= \frac{x^2}{2} \tag{264}$$
$$= \frac{\sin^2 t}{2} + C \tag{265}$$

Esempio 13.13

13.6 Integrazione di funzioni razionali - Caso quadratico

Ci occupiamo in questo capitolo di studiare l'integrazione di funzioni razionali della forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Per primo cosa supporremo sempre che il grado di $p(x)$ sia *minore stretto* del grado di $q(x)$. Se cosi non fosse possiamo usare la divisione di polinomi per dividere $p(x)$ per $q(x)$ ed ottenere dunque che $p(x) = a(x)q(x) + r(x)$ con $\deg(r(x)) < \deg q(x)$. Per cui

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int a(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

e dunque la funzione integranda razionale fratta è nella forma richiesta.

Inoltre assumiamo un'altra semplificazione. Ovvero che $\deg(p(x) \leq 1$ e che $\deg(q(x)) \leq 2$. Per calcolare $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ distinguiamo tre casi sulla base del $\Delta = b^2 - 4ac$ della equazione di 2° grado $q(x) = 0$.

1. $\Delta > 0$ e siano x_1, x_2 le radici reali di $q(x) = 0$. operiamo nel seguente modo. Troviamo A e B tali che
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$
Osserviamo che essendo $p(x)$ della forma $ax + b$ possiamo sempre trovare A e B.

   una volta trovati A e B possiamao risolvere

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{A}{x - x_1}dx + \int \frac{B}{x - x_2}dx \tag{266}$$
$$= A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| \tag{267}$$

2. $\Delta = 0$ In questo caso l'equzaione $q(x) =$ ha una sola soluzione x_0 con molteplicità due. Troviamo A e B tali che
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2}$$
. Quindi in questo caso
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{A}{x - x_0}dx + \int \frac{B}{(x - x_0)^2}dx \tag{268}$$
$$= A \ln|x - x_0| - \frac{B}{(x - x_0)} \tag{269}$$

3. $\Delta < 0$ In questo caso l'equazione $q(x) = 0$ ha due radici complesse coniugate ma poiché stiamo integrando funzioni reali non possiamo usare tali radici. In questo caso cerchiamo A e B tali che
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Aq'(x)}{q(x)} + \frac{B}{q(x)}$$
e dunque
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{Aq'(x)}{q(x)}dx + \int \frac{B}{q(x)}dx \tag{270}$$
$$\tag{271}$$

In questo caso il primo integrale si può risolvere con la sostituzione $t = q(t)$, per cui $dt = q'(x)dx$ e dunque $\int \frac{Aq'(x)}{q(x)} = \int \frac{dt}{t} = A \ln |q(x)$. Il secondo richiede sempre lavoro ulteriore.

13.7 Calcolo di aree

13.8 Integrale improprio

Ricordiamo che nella definizione dell' integrale di Riemann abbiamo assunto che $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata in I e (2) che I sia un intervallo chiuso e limitato.

Rimangono dunque esclusi integrali din cui $f(x)$ non è limitata in I oppure per cui uno tra a e b non in $\mathbb{R}$ ma in $\overline{\mathbb{R}}$. Ad esempio

Esempio 13.14

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

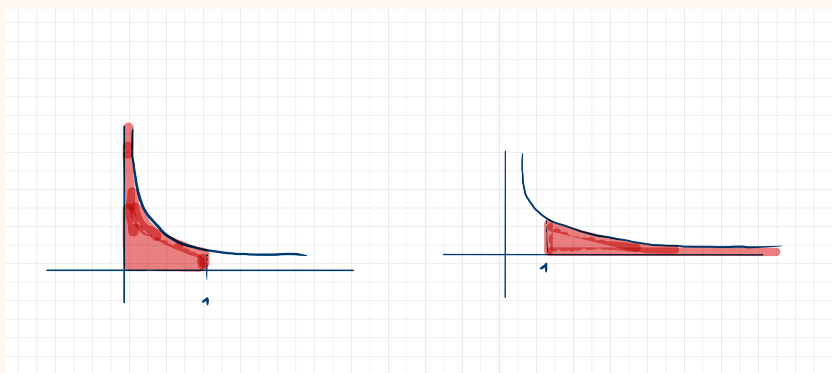


Figura 41: Esempi dei due casi di integrale non coperti dalla definizione di integrale di Riemann.

Vediamo come estendere il concetto di integrale di Riemann per coprire quest i due casi.

Definizione 13.8 (Integrale improprio)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sia inoltre f integrabile (secondo Riemann) in $[a,c]$ $\forall c \in [a,b]$. Se esiste ed è finito il $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$, allora f si dice INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $[a,b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

Analogamente se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup -\infty$ e $b \in \mathbb{R}$, e f integrabili in $[c,b]$ $\forall c \in [a,b]$, allora f si dice INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $[a,b]$ se esiste ed è finito $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$ e si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

Esempio 13.15

Dimostriamo che

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Per prima cosa osserviamo che se $\alpha \leq 0$, allora $f(x)$ è continua quindi integrabile e la sua primitiva abbiamo già visto come calcolarla. Se $\alpha > 0$ allora $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^\alpha} = +\infty$ e dunque siamo nel primo caso della definizione di integrale improprio. Andiamo quindi a calcolare $\lim_{c \to 0^+} \displaystyle\int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Distinguiamo due casi.

1. $\alpha \neq 1$.

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_c^1 \tag{272}$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \tag{273}$$

   Se $1 - \alpha > 0$ allora $c^{1-\alpha} \to 0$ per $c \to 0^+$ e dunque $\lim_{c \to 0^+} \displaystyle\int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$. Se $1 - \alpha < 0$ allora $c^{1-\alpha} \to +\infty$ per $c \to 0^+$ e dunque $\lim_{c \to 0^+} \displaystyle\int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ non esiste.

2. $\alpha = 1$. In questo caso

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c \to 0^+} [\ln |x|]_c^1 \tag{274}$$

$$= \ln |c| \tag{275}$$

$$= \ln c = +\infty \tag{276}$$

Esempio 13.16

Dimostriamo che
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$
Come nel caso precedente distinguiamo i due casi

1. $\alpha \neq 1$
$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^c \quad (277)$$
$$= \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{1-\alpha} + \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \quad (278)$$
Se $1-\alpha < 0$ allora $c^{1-\alpha} \to 0$ per $c \to +\infty$ e dunque $\lim_{c\to+\infty} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{\alpha-1}$. Se $1-\alpha > 0$ allora $c^{1-\alpha} \to +\infty$ per $c \to +\infty$ e dunque $\lim_{c\to+\infty} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ non esiste.

2. $\alpha = 1$ come prima $\lim_{c\to+\infty} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

13.8.1 Criterio del Confronto

Come abbiamo fatto per le serie numeriche a volte non siamo in grado di calcolare un integrale improprio ma possiamo stabilire se converge o non esiste. Andiamo dunque a dare dei criteri per stabilire tali risultati.

Teorema 13.6 (Criterio dei Confronto per intergali

Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e tali che f, g sono integrabili in $[a, c]$ $\forall c \in [a, b]$. Se

1. $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, e
2. g integrabile in senso improprio in $[a, b]$,

allora f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$

Esempio 13.17

Dimostriamo la convergenza di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

Per prima cosa osserviamo che e^{-x^2} è una funzione pari e dunque $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$
Quindi è sufficiente studiare la convergenza di $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$ la nostra f. Dobbaimo trovare una funzione che maggiora e^{-x^2}. Nell'intervallo $[0,1]$ non sappiamo farlo dunque per additvitàa possiamo scrivere

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{I_2}$$

Osserviamo che I_1 è un integrale definito e quindi sicuramente converge. Dunque è sufficiente studiare la convergenza di I_2. Cosa che facciamo usanod il criterio del confronto perché ora osserviamo che in $[1, +\infty)$, e^{-x^2} è maggiorata da e^{-x} (ovvero $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ $\forall x \in [1, +\infty)$) e dunque $|e^{-x^2}| \leq e^{-x}$ visto che e^{-x^2} è un funzione positiva. Dunque sarà sufficiente far vedere che $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge. Infatti

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{c \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^c \tag{279}$$
$$= \lim_{c \to +\infty} (-e^{-c} - e^{-1} = \tag{280}$$
$$= e^{-1} \tag{281}$$

Dunque dal Teorema del confronto anche $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge e dunque anche $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

13.8.2 Criterio del Confronto asintotico

Spesso trovare una funzione che maggiora un altra non è facile e dunque come nel caso delle serie anche per gli integrali impropri abbiamo un criterio del confronto asintotico in cui per decidere la convergenza di un integrale sarà sufficiente studiare l'asintoticità rispetto ad un'altra funzione.

Teorema 13.7

Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Se f, g sono

1. non negative in $[a, b]$,
2. integrabili in $[a, c]$ $\forall c \in [a, b]$,
3. $\lim_{x \to b^+} \frac{f(x)}{g(x)}) = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

allora

$$f \text{ integrabile in senso improprio in } [a, b] \Leftrightarrow g \text{ integrabile in senso improprio in } [a, b]$$

Esempio 13.18

Dimostrare che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x}) dx$ converge.

Osserviamo che per $x \to +\infty$ $\sin(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$. Dunque $\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x^2}$. Poichè $\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$ e $\frac{1}{x^2}$ sono entrambi non negative in $[1, +\infty]$, allora dal teorema del confronto asintotico e dalla convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ per $\alpha = 2$, otteniamo l'asserto.

14 Problemi settimanali

14.1 Esercizi Settimana 9-16 Ottobre

Esercizio 14.1

Sia $A = (0, 1]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa dimostrando la risposta

1. $\inf B = 0, \forall B \subseteq A$.
2. $\forall B \subseteq A$, B ammette minimo.
3. $\forall B \subseteq A$, A è costituito da un numero finito di elementi.
4. $\forall B \subseteq A$, B ammette maggioranti.

Esercizio 14.2

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente e/o inferiormente e determinare se esistono i loro $\max$, $\min$, $\sup$ e $\inf$.

1. $A = \{\frac{(-1)^n(2n+1)}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $A = \{\sqrt{n^2 + 3} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 14.3

Dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

1. $10^n > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $(1 - a)^n < \frac{1}{1+na}, \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \ \forall a \in (0, 1)$.

Esercizio 14.4

Dire a quali intervalli di $\mathbb{R}$ corrispondono i seguenti insiemi (la notazione di $\complement_B(A)$ sta per il complemento di A rispetto a B).

1. $(0, 1) \cap (1, 2)$,
2. $(0, 1) \cup (1, 2)$,
3. $(0, 1] \cap [1, 2)$,
4. $(0, 1] \cup [1, 2)$,
5. $\complement_{\mathbb{R}}([0, 1])$,
6. $\complement_{\mathbb{R}}((0, 1))$,
7. $\complement_{\mathbb{R}}((-\infty, 0) \cup (1, +\infty))$
8. $\complement_{\mathbb{R}}((-\infty, 1) \cap (1, +\infty))$

Esercizio 14.5

Siano A, B due insiemi finiti non vuoti. Si dica se sono vere o false, dimostrando la risposta, le seguente affermazioni:

1. $|A| < |B| \Rightarrow$ esiste una funzione suriettiva $f : A \longrightarrow B$
2. $|A| > |B| \Rightarrow$ esiste una funzione iniettiva $f : A \longrightarrow B$

14.2 Esercizi Settimana 30 Ottobre- 4 Nov

Esercizio 14.6

Trovare il dominio delle seguenti funzioni

1. $f(x) = \log_{10}(x\sqrt{\frac{x-2}{x+1}})$
2. $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + \log_2(x^2-1))$
3. $f(x) = \sqrt{|x^2-2| - |3-x|}$

Esercizio 14.7

1. Determinare dominio e immagine delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ dove
   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
   (b) $f(x) = \sqrt[2]{x} \quad \forall x \geq 0, x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Usando le relazioni tra monotonia e composizione di funzioni, studiare la monotonia (dire se sono crescenti/decrescenti e/o strettamente) le seguenti funzioni nell'intervallo X
   (a) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^4$, $X = \mathrm{dom}\, f$
   (b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^3$, $X = \mathrm{dom}\, f$

Esercizio 14.8

1. Calcolare le radici cubiche di $z = i - 1$
2. Risolvere l'equazione complessa (non algebrica) $\overline{z}^4 = |z|$ (ricordare che due numeri complessi in forma trigonometrica sono uguali sse modulo e argomento coincidono)

Esercizio 14.9

Calcolare i seguenti limiti di successioni.

1. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$
2. $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n-4}$
3. $\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{\log_5 n}}{n}$
4. $\lim_{n \to +\infty} \frac{5^{\log_2 n}}{n}$
5. $\lim_{n \to +\infty} (1+n^2)^{\frac{1}{\ln n}}$

Esercizio 14.10

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che la successione $\{|a_n|\}$ è decrescente. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera (solo una) e per le altre false mostrare un contro-esempio

1. $\{a_n\}$ è monotona
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ è regolare
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ è irregolare
4. $\{a_n\}$ è limitata

14.3 Esercizi Settimana 7 Nov - 12 Nov

Esercizio 14.11

Risolvere i seguenti limiti

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$
3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \cot x}{\sin x - \cos x}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Esercizio 14.12

Determinare i numeri reali a e b in modo tale che risulti

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-x+1} - ax - b = 0$$

Esercizio 14.13

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha un ORDINE DI INFINITESIMO PARI A n se

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 1.$$

Calcolare gli ordini di infinitesimo delle seguente funzioni:

1. $f(x) = x + \sin 2x$
2. $f(x) = \tan x$
3. $f(x) = \sinh x$ (si ricordi che $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$)
4. $f(x) = x^2 \sin x$
5. $f(x) = \frac{x \log(1+x)}{\sqrt{\tan x}}$

Esercizio 14.14

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ammette un ORDINE DI INFINITO PARI A n se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 1.$$

Determinare gli ordini di infinito delle seguente funzioni:

1. $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1 + \cdots + a_{n-1}x + a_n} \quad n \in \mathbb{N}, a_0 \neq 0.$
2. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x}$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + \log x}{x+1}}$
4. $f(x) = x^4 + x \sin x$

Esercizio 14.15

Sia $f : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Sapendo che una sola delle seguenti è falsa, spiegare se le seguenti proprietà sono vere o false sapendo che una sola è falsa.

1. $\forall x \in [0,1)\ f(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad \ell < 1$
2. f è decrescente $\quad \Rightarrow \quad \ell = \inf\{f(x) \ : \ x \in [0,1)\}$.
3. Se $\ell = 2$, allora $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) < 3\ \forall x \in (1 - \delta, 1)$

Esercizio 14.16 (**)

Dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$. Dedurre che la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge a e. (Aiuto. Rivedere la dimostrazione che $\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$).

14.4 Esercizi Settimana 12 Novembre- 18 Novembre

Esercizio 14.17

Si studi il carattere della serie $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$. La serie è uniformemente convergente?

Soluzione

Sia $a_k = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} > 0$ e dunque $a_k > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Osserviamo inoltre che $a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ che è chiaramente decrescente e dunque $a_{k+1} < a_k$.

Quindi dal criterio di Leibniz la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ converge.

La serie $\sum_{k=0}^{+\infty}|(-1)^k a_k| = \sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|$. $a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} > 0$ e dunque $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k| = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Ma $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$, ed inoltre la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ è una serie armonica con $\alpha < 1$ che diverge e per tanto, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ diverge e per tanto anche $\sum_{k=0}^{+\infty}|(-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})|$ diverge.

Esercizio 14.18

Sia a_k tale che $\lim_{k\to+\infty} a_k = \frac{1}{2}$. Posto $b_k = (a_k)^k$ si dica se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, diverge o è irregolare.

Soluzione

Si osservi che se $\lim_{k\to+\infty} a_k = \frac{1}{2}$, allora per la permanenza del segno $0 \leq a_k \leq \frac{2}{3}$ definitivamente per $k \to +\infty$. E dunque $0 \leq (a_k)^k \leq (\frac{2}{3})^k$ definitivamente per $k \to +\infty$ Siccome $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^k < +\infty$ perché è una serie geometrica di ragione $2/3$. Dunque per il metodo del confronto anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge.

Esercizio 14.19

Studiare la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+1}$.

Soluzione

Sia $a_k = \frac{k}{k^2+1}$. $a_k > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Inoltre siccome $\frac{k}{k^2+1} \to 0$ per $k \to +\infty$ (infatti a_k è asintotica a $\frac{1}{k}$)) e dunque a_k è definitivamente decrescente per $k \to +\infty$ (ovvero a partire da un certo $\bar{k} \in \mathbb{N}$)) e per tanto $a_{k+1} < a_k$ definitivamente per $k \to +\infty$. Possiamo applicare il criterio di Leibniz che dunque garantisce che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+1}$ è convergente.

Esercizio 14.20(*)

Si studi il carattere della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\alpha} + k^{8-\alpha}}{3k^6 - 2\sin k}$$

14.1 Soluzione

Chiamiamo $a_k = \frac{k^{\alpha}+k^{8-\alpha}}{3k^6-2\sin k}$. Studiamo la serie con il confronto asintotico andando a studiare numeratore e denominatore separatamente al variare di α. il denominatore è semplice in quanto $\sin k$ è una funzione limitata, mentre k^6 è crescente e dunque si intuisce che

$$3k^6 - 2\sin k \sim 3k^6 \tag{282}$$

Andiamo comunque a provare questa ultima affermazione: dobbiamo far vedere che $\lim_{k\to+\infty} \frac{3k^6 - 2\sin k}{3k^6} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \frac{3k^6 - 2\sin k}{3k^6} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{3k^6}{3k^6} - \frac{2\sin k}{3k^6} && (283)\\
&= 1 - \frac{2}{3}\lim_{k\to+\infty} \frac{\sin k}{k}\frac{1}{k^5} && (284)\\
&= 1 \neq 0 && (285)
\end{aligned}$$

(Infatti $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^5} = 0$ e $\lim_{k\to+\infty} \frac{\sin k}{k} = 1$ e quindi $\frac{2}{3} \lim_{k\to+\infty} \frac{\sin k}{k}\frac{1}{k^5} = 0$.)

Andiamo ora a studiare l'asintotica di $k^{\alpha} + k^{8-\alpha}$. Vediamo al variare di α chi tra k^{α} e $k^{8-\alpha}$ è dominante. Ovvero vediamo quando $8 - \alpha \geq \alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 4$. Dunque possiamo concludere che:

$$k^{\alpha} + k^{8-\alpha} \sim \begin{cases} k^{\alpha} & \alpha > 4 \\ 2k^4 & \alpha = 4 \\ k^{8-\alpha} & \alpha < 4 \end{cases}$$

In conclusione possiamo infine dire che

$$a_k \sim \begin{cases} \frac{1}{3k^{6-\alpha}} & \alpha > 4 \\ \frac{2}{3k^2} & \alpha = 4 \\ \frac{1}{3k^{\alpha-2}} & \alpha < 4 \end{cases}$$

Per $\alpha = 4$ si ha che $a_k \sim \frac{2}{3k^2}$. E $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{3k^2} = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Quest'ultima è una serie armonica con parametro 2 e converge e dunque per $\alpha = 4$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

Caso $\alpha > 4$. Siccome la serie armonica generalizzata diverge con parametro ≤ 1 e converge con parametro > 1, andiamo a vedere, nel caso $\alpha > 4$, per quali valori di α si verificano questi due casi per $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{6-\alpha}}$. Questo per il confronto asintotico immediatamente da il risultato per $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Si ha he $6 - \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq 5$. Dunque a_k diverge per $\alpha \geq 5$ e converge per $4 < \alpha < 5$.

Caso $\alpha < 4$. Come prima andiamo a vedere per quali valori di α si verificano i due casi della serie armonica generalizzata $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-2}}$. Si ha che $\alpha - 2 \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 3$ e dunque per $\alpha \leq 3$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge e per $3 < \alpha < 4$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.
In conclusione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \begin{cases} \text{converge} & \alpha \in (3,5) \\ \text{diverge} & \alpha \leq 3 \vee \alpha \geq 5 \end{cases}$$

Esercizio 14.21

Determinare l'asintoto obliquo di $f(x) = \ln(e^{2x+3} - 1)$.

14.2 Soluzione

Studiamo il coefficiente angolare m

Dobbiamo studiare il $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x+3}-1)}{x}$. Osserviamo che quando studiamo al limite $\ln(e^{2x+3} - 1)$ abbiamo che

$$\ln(e^{2x+3} - 1) = \ln(e^{2x+3}(1 - \frac{1}{e^{2x+3}})) \tag{286}$$

$$= \ln e^{2x+3} + \ln(1 - \frac{1}{e^{2x+3}}) \tag{287}$$

$$= 2x + 3 + \ln(1 - \frac{1}{e^{2x+3}}) \tag{288}$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x+3}-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{e^{2x+3}})}{x}$$

Il primo limite tende a 2 e il secondo a 0. Dunque $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. Quindi potenzialmente $m = 2$

Studiamo il parametro q

Dobbiamo studiare $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^{2x+3} - 1) - 2x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(e^{2x+3} - 1) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^{2x+3} - 1) - \ln e^{2x} \tag{289}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{2x+3}-1}{e^{2x}}\right) \tag{290}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^3 - \frac{1}{e^{2x+3}}\right) \tag{291}$$

$$= \ln(e^3) = 3 \tag{292}$$

Quindi abbiamo trovato che $q = 3$ e per tanto la retta $y = 2x + 3$ è un asintoto obliquo

Esercizio 14.22

Studiare l'**insieme di continuità**[a] di $f(x) = xe^{-\frac{1}{|x|}}$.

14.3 Soluzione

Per prima cosa osserviamo che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dunque i punti di frontiera sono $0, \pm\infty$
Continuità nel dominio
Le funzioni x, e^x e $|x|$ sono funzioni continue nei loro domini e dunque per la **continuità della composizione di funzioni** la funzione $f(x)$ è continua nel suo dominio.

Punto di frontiera $x = 0$.
0 non è nel dominio di $f(x)$ e dunque studiamo la continuità in $x = 0$. Dobbiamo studiare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

Osserviamo che per $x \to 0^+$ o per $x \to 0^-$, $\frac{1}{|x|} \to +\infty$ e quindi $-\frac{1}{|x|} \to -\infty$ e quindi $e^{-\frac{1}{|x|}} \to 0$ (infatti $e^x \to 0$ per $x \to -\infty$).
Dunque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Siccome $0 \notin \operatorname{dom} f$ questa è una *discontinuità eliminabile*. Visto che possiamo definire la funzione $g(x)$ con $\operatorname{dom} g = \mathbb{R}$ definita come

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La quale è continua su tutto il suo domino per il risultato di sopra.

Punti di frontiera $\pm\infty$.
Dobbiamo studiare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Si vede che per $x \to +\infty$, $-\frac{1}{|x|} \to 0$ e dunque $e^{-\frac{1}{|x|}} \to e^0 = 1$.
Siccome $x \to +\infty$, allora $xe^{-\frac{1}{|x|}} \to +\infty$. Dunque $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Un ragionametno identico prova che per $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

Simmetrie.
$f(-x) = -xe^{-\frac{1}{|-x|}} = -xe^{-\frac{1}{|x|}} = -f(x)$. Dunque abbiamo provato che $f(-x) = -f(x)$ e quindi la funzione è **dispari**.

[a] Si tratta di: (1) studiare la continuità della funzione nel suo dominio, (2) verificare eventuale simmetrie e (3) studiare i limiti nei punti di frontiera

14.5 Esercizi Settimana 20 Novembre- 26 Novembre

Esercizio 14.23

Calcolare la derivata delle seguente funzioni:

1. $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$
2. $f(x) = 3^x \log_5 x \ln x$
3. $f(x) = \tan^{\frac{3}{2}}(x^2+1)$
4. $f(x) = \arcsin e^x$

14.4 Soluzione

1. $$f'(x) = \begin{cases} \cos x - \sin x & 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos x + \sin x & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \\ -\cos x + \sin x & \pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ -\cos x - \sin x & \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$
2. $f'(x) = 3^x \log_5 e \ln x(\ln 3 \ln x + \frac{2}{x})$
3. $f'(x) = \frac{3x\sqrt{\tan(x^2+1)}}{\cos^2(x^2+1)}$
4. $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

Esercizio 14.24

Si studi la continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

14.5 Soluzione

La funzione è continua per ogni x. Per $x \neq 0$ la derivata è

$$f'(x) = \frac{x + e^{1/x}(x+1)}{x(1+e^{1/x})^2}$$

Nel punto $x = 0$ esistono le derivate destra e sinistra ma sono tra loro diverse e dunque a funzione non è derivabile. Infatti

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h}\left[h(1+e^{1/h})^{-1} - 0\right] = \frac{1}{1+e^{1/h}}$$

Infatti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/h}} = 0$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/h}} = 1$$

Esercizio 14.25

Studiare la derivablità delle seguenti funzioni e determinare i valori di x per i quali le seguenti funzioni risultano crescenti o decrescenti

1. $f(x) = 3x^2 - 5x - 7, \qquad x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sin 2x - 10 \sin x + 6x - 1, \qquad x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-4x^2}), \qquad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

14.6 Soluzione

1. La f è derivabile nel proprio dominio e si ha che $f'(x) = 6x - 5$. Quindi $f'(x) > 0$ per $x > \frac{5}{6}$ e $f'(x) < 0$ per $x < \frac{5}{6}$. Da cui f è crescente per $x > \frac{5}{6}$ e decrescente per per $x < \frac{5}{6}$. In $x = \frac{5}{6}$, $f'(x) = 0$ e dunque $x = \frac{5}{6}$ è punto di minimo locale su $\mathbb{R}$ (e dunque minimo assoluto) per f. $f(\frac{5}{6}) = -\frac{109}{12}$ e dunque il minimo della funzione vale $-\frac{109}{12}$.
2. La funzione è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la sua derivata è :
$$f'(x) = 4\cos^2 x - 10\cos x + 4 = 4(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x - 2).$$
Siccome $(\cos x - 2) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta che $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2}) < 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2}$, ossia $\Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$. Mentre $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$. Schematizzando abbiamo
$$f'(x) \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi), & k \in \mathbb{Z} \\ < 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi), & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
E quindi
$$f(x) \begin{cases} \text{crescente} & \text{per } x \in (\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{decrescente} & \text{per } x \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
I punti $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo relativo, mentre i punti $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sono di massimo relativo.
3. Si ha che
$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-4x^2}}$$
Tale funzione non esiste nei punti $0, \pm\frac{1}{2}$ (il denominatore si annulla). Per $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$, la $f'(x)$ si può scrivere come
$$f'(x) = \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-4x^2}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} & x \in (-\frac{1}{2}, 0) \\ \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} & x \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$
Dunque $f'(x) > 0$ per $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{1}{2})$. Dunque f è crescente in $(-\frac{1}{2}, 0)$ e decrescente in $(0, \frac{1}{2})$.
In 0 $f'(x)$ non è derivabile, infatti studiando il limite del rapporto incrementale si può facilmente vedere che $f'_+(0) = -2 \neq 2 = f'_-(0)$. Nei due estremi anche la funzione non è derivabile, infatti $f'_+(-\frac{1}{2}) = +\infty$ e $f'_-(\frac{1}{2}) = -\infty$.
Quindi in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 0 è un punto di massimo assoluto, la funzione in $x = 0$ è $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Invece i punti $x_0 = -\frac{1}{2}$ e $x_1 = \frac{1}{2}$ dove la funzione vale 0 sono punti di minimo assoluto in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Esercizio 14.26

Data la funzione $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ con $m \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$, dimostrare che $f'(x)$ si annulla in almeno un punto interno a $[0, 1]$.

14.7 Soluzione

Basta osservare che $f(0) = f(1) = 1$. Dal teorema di Rolle segue direttamente la tesi.

Esercizio 14.27

Avvalendosi deil test di monotonia, dimostrare le disuglianze

1. $e^x > 1 + x, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$
2. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x), \quad x \in (0, +\infty).$

14.8 Soluzione

Dimostriamo la (1), la (2) è analoga.

1. Dimostriamo la affermazione equivalente che che la funzione $f(x) = e^x - 1 - x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$. $f(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e nulla per $x = 0$. Osservato che

$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} > 0 & x \in (0, +\infty) \\ < 0 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Si conclude (1) che f e decrescente in $(-\infty, 0)$ e dunque se $x \in (-\infty, 0)$, allora $e^x - 1 - x > 0 \Leftrightarrow e^x > x + 1$. e (2) che f e crescente in $(0, +\infty)$ e dunque se $x \in (0, +\infty)$, allora $e^x - 1 - x > 0 \Leftrightarrow e^x > x + 1$. La disuguaglianza è dunque provata su tutto $\mathbb{R} - \{0\}$.

Esercizio 14.28

Verificare che la successione $a_n = \{\dfrac{n+3}{n^2 - 2n + 4}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è definitivamente monotona, ovvero $\exists \bar{n}$ tale che a_n è monotona $\forall n \geq \bar{n}$.

14.9 Soluzione

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x+3}{x^2-2x+4}$. Osserviamo che $a_n = f(x)\restriction_{\mathbb{N}}$. Quindi se dimostriamo che f è monotona, allora anche $a_n = f(x)\restriction_{\mathbb{N}}$ deve esserlo. Per studiare la monotonia di f studiamo il segno di $f'(x)$.
Il dom $f = \mathbb{R}$. Infatti $x^2 - 2x + 4 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ dunque $f(x)$ è derivabile nel suo dominio. $f'(x) = -\frac{x^2+6x-10}{(x^2-2x+4)^2}$. I punti critici si hanno per $x^2 + 6x - 10 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{19}$. Siccome mi interessa $f(x)\restriction_{\mathbb{N}}$ posso muovermi solo nell'intervallo $[0, +\infty]$. L'unico punto critico in questo intervallo è $x = 3 + \sqrt{19}$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3 + \sqrt{19}$ e dunque in $x = 3 + \sqrt{19}$ $f(x)$ è crescente per $x < 3 + \sqrt{19}$ e decrescente per $x > 3 + \sqrt{19}$. Ne concludo che il punto $x = 3 + \sqrt{19}$ è un massimo locale in $[0, +\infty]$. Dunque se prendo $\bar{n} = \lceil 3 + \sqrt{19} \rceil$ deduciamo che $\forall n \geq \bar{n}$, $f(x)$ (e quindi anche $a_n = f(x)\restriction_{\mathbb{N}}$) è decrescente e dunque monotona definitivamente.

14.6 Esercizi Settimana 28 Novembre- 3 Dicembre

Esercizio 14.29

Siano $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e $x_0 \in I$. Si ricordi che f è asintotica a g per $x \to x_0$ (che scriviamo in forma abbreviata $f \overset{x\to x_0}{\sim} g$) se vale:

$$f \overset{x\to x_0}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si dia la definizione di $f = o(g)$ per $x \to x_0$ (che scriviamo in forma abbreviata $f \overset{x\to x_0}{=} o(g)$) e si dimostri che

$$f \overset{x\to x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f \overset{x\to x_0}{=} g + o(g)$$

Soluzione

La definizione di $f \overset{x\to x_0}{=} o(g)$ è la seguente:

$$f \overset{x\to x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

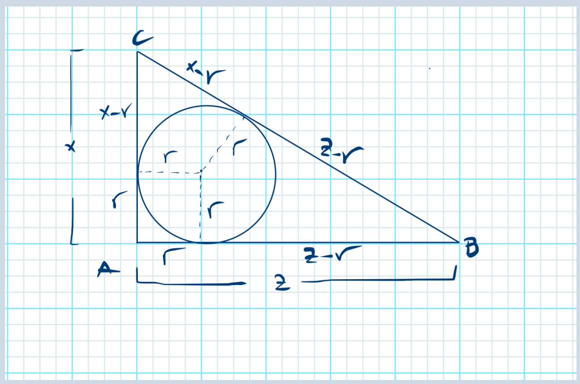
Per dimostrare quanto richiesto consideriamo la seguente catena di equivalenze che prova il risultato:

$$\begin{aligned}
f \overset{x\to x_0}{\sim} g &\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 && (293)\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 && (294)\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 && (295)\\
&\Leftrightarrow f - g \overset{x\to x_0}{=} o(g) \quad \text{dalla def di } o && (296)\\
&\Leftrightarrow f \overset{x\to x_0}{=} g + o(g) && (297)
\end{aligned}$$

Esercizio 14.30 (*)

Di tutti i triangoli rettangoli circoscritti ad una circonferenza di raggio r, determinare quello di perimetro minimo. (Si ricordi che se P ed S sono rispettivamente il perimetro e l'area triangolo ed r il raggio del cerchio inscritto nel triangolo allora sussiste la relazione $r = \frac{2S}{P}$). Si osservi che r è una costante fissata e non una variabile (dunque va trattata come un numero reale).

Soluzione



Esprimiamo come funzione della lunghezza di un cateto x il perimetro $P(x)$ del triangolo e poi calcoliamo il minimo.
Siano x e z le lunghezze dei cateti del rettangolo. L'ipotenusa è lunga $x - r + z - r = x + z - 2r$ e il perimetro $P = 2(x + z - r)$. Siccome l'area del triangolo è $S = \frac{xz}{2}$ si ricava (dalla relazione $r = \frac{2S}{P}$) che $r = \frac{xz}{2(x+z-r)}$, da cui

$$z = \frac{2rx - 2r^2}{x - 2r}. \tag{298}$$

E dunque sostituendo per z in P, otteniamo

$$P(x) = 2\frac{x^2 - xr}{x - 2r} \quad x > 2r \Leftrightarrow x \in (2r, +\infty)$$

Deve essere $x > 2r$ in modo tale che il perimetro risulti positivo e il denominatore di $P(x)$ non sia 0.
Studio $P'(x)$, la derivata prima di $P(x)$

$$P'(x) = 2\frac{x^2 - 4rx + 2r^2}{(x - 2r)^2}$$

I punti critici di $P(x)$ sono tali che $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4rx + 2r^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm r(2 + \sqrt{2})$. Osserviamo che $x = r(2 - \sqrt{2}) < 2r$ e dunque l'unico punto critico di interesse in $(2r, +\infty)$ è $x = r(2 + \sqrt{2})$.
Non possiamo applicare Weierstrass ma siccome cerchiamo un minimo ci chiediamo se per caso nei due estremi di $(2r, +\infty)$ la $P(x)$ tende a $+\infty$. In questo modo allora $x = r(2 + \sqrt{2})$ sarebbe certamente un punto di minimo assoluto in $x = r(2 + \sqrt{2})$.

1. $\lim_{x \to 2r^+} P(x) = \frac{4r^2}{0^+} = +\infty$ e
2. $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$

Dunque P raggiunge il minimo assoluto nel punto: $P(r(2 + \sqrt{2})) = 2r(3 + 2\sqrt{2})$. Se sostituiamo ad x il valore $r(2 + \sqrt{2})$ nella Equazione 298 per trovare la z, otteniamo $z = r(2 + \sqrt{2})$ e dunque il triangolo è isoscele

Esercizio 14.31

Argomentare con precisione se il teorema di Weierestrass è applicabile alle seguenti funzioni nell'intervallo specificato I e calcolare massimi e minimi assoluti di f in I.

1. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$ e $I = [0, 3]$
2. $f(x) = \sin x + \cos x$ e $I = [0, \pi]$
3. $f(x) = \sqrt{x} \log^2 x$ e $I = (0, +\infty)$

Soluzione

Le funzioni in (1) e (2) sono continue su $\mathbb{R}$ e quindi in particolare in $I \subseteq \mathbb{R}$. Dunque per il teorema di Weierstrass ammettono massimo e minimo assoluto in tale intervallo.

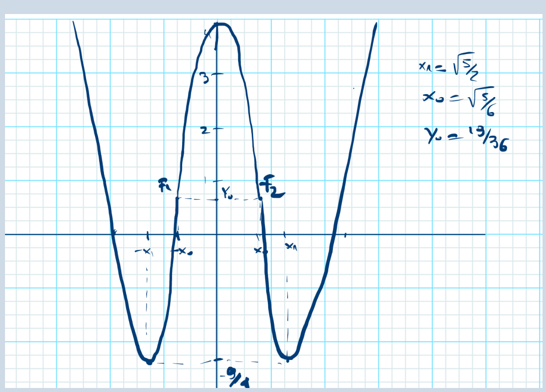
1. $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$. Troviamo i punti critici di f in I, ovvero e le radici di $f'(x)$, cioè le x tale che $f'(x) = 0$. Esse sono $-1, 1, 2$ di queste solo 1 e 2 sono in I e dunque non va tenuto conto di -1. Quindi i massimi e minimi assoluti in I di f vanno cercati tra i punti critici e gli estremi dell'intervallo. Tali punti sono $0, 1, 2, 3$ e i valori di f sono $f(0) = 0$, $f(1) = 13$, $f(2) = 8$, $f(3) = 45$. E dunque i punti di estremo minimo e in $x = 0$ e il minimo di f vale 0 e il punto di estremo massimo è in $x = 3$ e il massimo di f vale 45.
2. Nell'intervallo $[0, \pi]$ $f'(x) = \cos x - \sin x$ si annulla in $x = \frac{\pi}{4}$. Dunque come prima i punti estremi vanno cercati tra i punti critici e gli estremi dell'intervallo $I = [0, \pi/4]$. Osserviamo che $f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ e $f(\pi) = -1$. Dunque il massimo e minimo di f sono rispettivamente 1 e -1.
3. Il teorema di Weierestrass non è applicabile perchè $(0, +\infty)$ non è un intervallo chiuso. Osserviamo
   (a) $f(x) \geq 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$ (infatti per $x \in (0, +\infty)$, $\sqrt{x} \geq 0$ e $\log^2(x) \geq 0$ essendo un quadrato).
   (b) Inoltre che per $x = 1$, $f(x) = 0$

   Dunque 0 è il minimo assoluto di f in $(0, +\infty)$. Osserviamo infine che siccome $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ allora la funzione non ammette massimo assoluto.

Esercizio 14.32

Si studi il grafico della funzione $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Soluzione



Esercizio 14.33

Dimostrare che la funzione $f(x) = x^3 + 2x - 4$ ha uno zero positivo e calcolarlo con un errore $< 10^{-1} = 1/10$

Soluzione

Dobbiamo dimostrare che f ha una radice in $(0, +\infty)$. Osserviamo che $f(0) = -4$ e siccome $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ dunque $\exists R > 0$ tale che $f(x) > 0\ \forall x \geq R$. f è continua in in $\mathbb{R}$ quindi dal teorema degli zeri in $[0, R]$ esiste uno zero di f. Troviamo un intervallo piccolo dove f cambia segno. in $x = 1$ f è ancora negativa ma se prendo $x = 2$ $f(x)$ diventa positiva e dunque esiste $z \in (1, 2)$ tale che $f(z) = 0$.
Utilizzo il metodo di bisezione e calcoliamo gli intervalli incapsulati $[a_i, b_i]$ con $i = 0, \ldots, n$ fino al valore i per il quale l'errore commesso (che è alla iterazione i-esima è $r_i = \frac{|b-a|}{2^i}$) sia $< 1/10$. Dunque per ottenere la precisione cercata dobbiamo arrivare fino alla iterazione $n = 4$ per cui l'errore è $< 1/16 < 1/10$. Per abbreviare, invece di calcolare a_4 e b_4, possiamo arrivare a calcolare fino all'intervallo $[a_3, b_3]$ dove commettiamo un errore $< 1/2^3 = 1/8$ e poi approssimare z con il punto medio c_3 tra a_3 e b_3, per il quale si otterrà una errore $< 1/8 \cdot 1/2 = 1/16$. Senza dover calcolare a_4 e b_4. osserviamo che nel nostro caso $|b_0 - a_0| = 1$.

1. **Iterazione** 0: $a_0 = 1$, $b_0 = 2$. L'errore commesso è < 1 e quindi è ancora troppo grande. Calcoliamo c_0: $c_0 = 3/2$ e $f(3/2) > 0$. Quindi:
2. **Iterazione** 1: $a_1 = a_0 = 1$ e $b_1 = c_0 = 3/2$. $c_1 = 5/4$ e $f(5/4) > 0$. Osservo che l'errore è $< \frac{1}{2}$. Ancora non va bene.
3. **Iterazione 2:** $a_2 = a_1 = 1$ e $b_2 = c_1 = 5/4$. Errore $< \frac{1}{4}$. Dunque calcoliamo $c_2 = 9/8$ e $f(c_2) < 0$.
4. **Iterazione 3:** $a_3 = c_2 = 9/8$ e $b_3 = b_2 = 5/4$. Qui l'errore è $< 1/8$, Quindi posso concludere prendendo il punto medio tra a_3 e b_3
5. In conclusione $c_3 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{19}{16}$ e l'errore commesso è $< 1/16$

14.7 Esercizi Extra De Hopital e Polinomio di Taylor

Esercizio 14.34

Verificare ch si tratta di una forma indeterminata e calcolare usando gli sviluppi di Taylor il

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\ln x - e^{x-1}}{(x-1)^2}$$

(Aiuto: Eseguire la sostituzione $x = 1+h$)

Soluzione

Esercizio 14.35

Trovare lo sviluppo di Taylor di ordine n della funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nel punto $x_0 = 0$. Inferire la stesso polinomio in altro modo senza usare il calcolo delle derivate.

Soluzione

Esercizio 14.36

Verificare che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}+\ln(\cos x)}{x^4} = -\frac{1}{12}$

Soluzione

Esercizio 14.37

Calcolare i seguenti limiti

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x^2\cos x - e^x}{x^3}$

Soluzione

Esercizio 14.38

Dire se $x = 0$ è un punto di estremo locale per $f(x) = \frac{2}{3}x^2 \sin(4x) + 2x(1-x) - \ln(1+2x)$

Soluzione

Esercizio 14.39

Scrivere lo sviluppo di Taylor fino al primo termine non nullo di $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos(\frac{x}{\sqrt{3}})$.

Soluzione

14.8 Esercizi Settimana 12-18 Dicembre

Esercizio 14.40

Calcolare i seguenti integrali

1. $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{2x-3}$,
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$,
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$
4. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x+3)^3}$

Soluzione

1. Osserviamo che $\frac{x+2}{2x-3} = \frac{2}{2x-3} + \frac{x}{2x-3}$. Dunque $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{2x-3} = \underbrace{\int \frac{2dx}{2x-3}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{xdx}{2x-3}}_{I_2}$. L'integrale I_1 è immediatamente calcolablie (dalla sostituzione $t = 2x-3$, per cui $dt = 2xdx$) ed è dunque $I_1 = \ln|2x-3| + C$. La funzione integranda di I_2 non è nella forma in cui il grado del numeratore è minore del grado del numeratore. Dunque riduciamo dividendo x per $2x-3$ da cui troviamo che $x = (2x-3)\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$. dunque
$$I_2 = \frac{1}{2}\underbrace{\int dx}_{I_{21}} + \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{2x-3}}_{I_{22}}$$
$I_{21} = x + C$. Mentre I_{22} può essere risolto con il cambio di variabile $t = 2x-3$ e per tanto $dt = 2dx$ e dunque $I_{22} = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$. In totale dunque $I = \ln|2x-3| + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\ln|2x-3| + C = \frac{x}{2} + \frac{7}{4}\ln|2x-3| + C$.
2. Basta osservare che $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}dx}{\ln x}$, e che $\frac{1}{x} = D(\ln x)$. Dunque con il cambio di variabile $t = \ln x$ si ha che $dt = \frac{1}{x}dx$ e dunque $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$.
3. Basta porre $t = \sqrt{x}$. Per cui $x = t^2$ e $dx = 2tdt$. Dunque $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{2\cancel{t}dt}{\cancel{t}\sqrt{1-t^2}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C$.
4. Osservando che $D(e^x+3) = e^x$ basta usare il cambio di variabile $t = (e^x+3)$ per cui $dt = e^x dx$. E dunque $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x+3)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{(e^x+3)^2}{2} + C$.

Esercizio 14.41 (*)

Dopo aver ripassato i metodi per l'integrazione di funzioni razionali $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ nel caso in cui $\deg(q(x)) = 2$ e $\deg(p(x)) \leq 1$, proporre un modo per integrare la seguente funzione razionale $f(x) = \frac{x}{x^3+x^2+x+1}$ e calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{x^3+x^2+x+1}$[a].

Soluzione

Osserviamo che x^3+x^2+x+1 può essere scritto come prodotto di polinomi irriducibili come $(x^2+1)(x+1)$, quindi vogliamo trovare A, B e C tali che

$$\frac{x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} \tag{299}$$

$$= \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+(B+C)}{x^3+x^2+x+1} \tag{300}$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=1 \\ B+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases} \tag{301}$$

Dunque calcolare $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{x^3+x^2+x+1}dx$ si riduce a calcolare

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{(x+1)\ dx}{x^2+1}}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}}_{I_2}$$

L'integrale I_2 è quasi immediato (sostituzione $t = x+1$) ed è $I_2 = \ln|x+1| + C_1$.
Per calcolare I_1 procediamo come segue.

$$I_1 = \underbrace{\int \frac{dx}{1+x^2}}_{I_{11}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}}_{I_{12}}$$

I_{11} è immediato ed è $\arctan x + C_2$. I_{12} lo calcoliamo dalla sostituzione $t = 1+x^2$ per cui $dt = 2xdx$. E dunque

$$\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} \tag{302}$$

$$\stackrel{\text{sost.}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \tag{303}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C \tag{304}$$

$$\stackrel{\text{sost.}}{=} \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C \tag{305}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \tag{306}$$

In conclusione abbiamo che

$$I_1 = \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

e quindi

$$I = \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

[a]**Aiuto**: Scomporre $q(x)$ nel prodotto di polinomi irriducibili e usare 3 gradi di libertà per definire 3 costanti A, B e C e quindi considerare $p(x)$ come un polinomio di grado 2.

Esercizio 14.42 (*)

Calcolare l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

Soluzione

Presentiamo due soluzioni:

1. Integriamo per parti scegliendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Dunque si ha che $f(x) = x$ e $g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Dunque dalla integrazione per parti otteniamo: $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Osserviamo che $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ In conclusione abbiamo che

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{307}$$

Siccome $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, abbiamo che $2\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$. Ovvero

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C$$

2. La seconda soluzione si ottiene usando il cambio di variabile $x = \sin t$ (dunque $dx = \cos t dt$) cosi che $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$. Inoltre siccome deve essere $1 - x^2 \geq 0$ (per via della radice) deve essere $x \in [-1, 1]$ e dunque $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e quindi $\cos t \geq 0$ e quindi $|\cos t| = \cos t$. A questo punto l'integrale cercato diventa $\int \cos^2 t \, dt$ che abbiamo visto come risolvere a lezione.

Esercizio 14.43

Calcolare l'integrale $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}$[a]

Soluzione

Presentiamo due soluzioni con la dimostrazione che sono entrambi primitive della funzione integranda

1. La prima soluzione si ottiene osservando che $\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}$ si può scrivere come

$$\frac{1}{e^{-x}+e^{x}} = \frac{1}{e^{-x}(1+e^{2x})} \tag{308}$$
$$= \frac{e^{x}}{e^{-x}(1+(e^{x})^{2})} \tag{309}$$

Dunque $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{(1+(e^{x})^{2})}$. Con il cambio di variabile $t = e^{x}$ (per cui $dt = e^{x}dx$), si ottiene che $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \int \frac{dt}{1+t^{2}} = \arctan(t) + C = \arctan(e^{x}) + C$.

2. Osserviamo che $e^{x}+e^{-x} = 2\cosh x$. Dunque, ricordando che $\cosh^{2} x = 1+\sinh^{2} x$, abbiamo

$$\frac{1}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh x} \tag{310}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\cosh x}{\cosh^{2} x} \tag{311}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\cosh x}{1+\sinh^{2} x} \tag{312}$$

Per tanto
$\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{\cosh dx}{1+\sinh^{2} x}$. Con il cambio di variabile $t = \sinh x$, (per cui $dt = \cosh x dx$) otteniamo che $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^{2}} = \frac{1}{2}\arctan(t) + C = \frac{1}{2}\arctan(\sinh x) + C$.

Si noti che le due funzioni $F(x) = \arctan(e^{x})$ e $G(x) = \frac{1}{2}\arctan(\sinh x)$ sono entrambi primitive di $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+e^{x}}$. Per provarlo basta provare che $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Infatti, rifacendo i passi di integrazione in senso opposto troviamo

$$F'(x) = \frac{1}{1+(e^{x})^{2}}e^{x} \tag{313}$$
$$= \frac{1}{e^{-x}(1+(e^{x})^{2})} \tag{314}$$
$$= \frac{1}{e^{-x}+e^{x}} \tag{315}$$

e

$$G'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sinh^{x})^{2}}\cosh x \tag{316}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\cancel{\cosh x}}{\cosh^{\cancel{2}} x} \tag{317}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh x} \tag{318}$$
$$= \frac{1}{e^{-x}+e^{x}} \tag{319}$$

Ne ricaviamo inoltre che $F(x)$ e $G(x)$ sono uguali a meno di una costante

[a] Esercizio visto a lezione con due soluzioni.

14.9 Esercizi Settimana 20-25 Dicembre

Esercizio 14.44

Calcolare l'area della regione di piano $E = \{(x, y) \ : \ y^4 \leq x^{12}(16 - x^4)\}$ [a]

[a] Osservare preliminarmente dove la funzione $x^{12}(16 - x^4)$ è non negativa.

Esercizio 14.45

Calcolare l'area della regione di piano E contenuta nel primo quadrante e delimitata dalla retta $x = 1/2$, dal grafico di $f(x) = x \log(4 + \frac{1}{x^4})$ e dal suo asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 14.46

Studiare la convergenza degli integrali impropri $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(-\ln x)^\beta}$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 14.47

Dire per quali valori di $\beta > 0$ è convergente l' integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|^\beta}{x^2} dx$

15 Lista Dimostrazioni e materiale per l'esame

Queste note possono essere usate per prepararsi all'esame ed avere una guida di ciò che è stato fatto a lezione. Le note non sono un libro di testo e per lo studio vanno assolutamente integrate con un libro di Analisi Matematica I e le mie lezioni postate su Moodle. Infatti in alcuni punti le note non contengono tutto il materiale e tutte le dimostrazioni spiegate durante le lezioni.

Per quanto riguarda il materiale che verrà richiesto all'esame si assume quanto segue:

1. Tutte le *Definizioni*, *Proposizioni*, *Osservazioni* ed *Esempi* possono essere domanda d'esame e devono essere conosciute.

2. Tutti gli enunciati dei *Teoremi* e *Corollari* devono essere conosciuti. Lì dove c'è una dimostrazione, essa va studiata e conosciuta. Segue una lista di Teoremi, Corollari e Proposizioni notevoli nelle note con la specifica (E) per solo *Enunciato* e (D) con *Dimostrazione* e (C) per *Cenni di dimostrazione* (in questo caso i cenni vanno studiati ma la dimostrazione completa non è richiesta):

1. *Principio di Induzione* (E), Teorema 1.1, pagina 16
2. *Teoremi di Densità in* $\mathbb{R}$ (E), Teorema 2.1, pagina 25.
3. *Proprietà Archimedea* (E), Teorema 2.2, pagina 26.
4. *Unicità massimo e minimo di un insieme* (D), Proposizione 2.5, pagina 27.
5. *Proprietà maggioranti, minoranti,* $\sup$ *e* $\inf$ (D), Proposizioni 2.5, 2.6 2.7, 2.8, pagina 29.
6. *Caratterizzazione Completezza* $\mathbb{R}$ (E) Teorema 2.3, pagina 31.
7. $\mathbb{Q}$ *non è completo* (D), Teorema 2.6, pagina 32.
8. $\mathbb{R}$ *è completo* (D), Teorema 2.5, pagina 32.
9. *Caratterizzazione Completezza* $\mathbb{R}$ (E), Teorema 2.6, pagina 32.
10. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{N}^2$ *sono insiemi numerabili.*(D), Teorema 2.7, pagina 36.
11. *Disuguaglianza Bernoulli*, (D)Teorema 3.1, pagina 43.
12. *Teorema di esistenza di radici complesse* (D), Teorema 4.1, pagina 57.
13. *Teorema fondamentale dell'algebra* (E), Teorema 4.2, pagina 57.
14. $\mathbb{C}$ *non è un campo ordinato* (C), Teorema 4.3, pagina 58.
15. *Esistenza ed unicità funzione inversa* (D), Proposizione 5.2, pagina 64.
16. *Monotonia stretta implica invertibilità* (D), Teorema 5.1, pagina 68.
17. *Operazioni su funzioni monotone* (C) Teoremi 5.2 e 5.3, pagina 69.
18. *Proprietà algebriche del Valore Assoluto* (D, disuguaglianza triangolare), Proposizione 5.3, pagina 73.

19. *Proprietà funzione modulo* (E), Teorema 5.4, pagina 74.
20. *Proprietà funzione logaritmo* (E), Teorema 5.5, pagina 78 e Teorema 5.6, pagina 82.
21. *Unicità del Limite di successioni* (D), Teorema 6.1, pagina 87.
22. *Ogni successione convergente è limitata* (D), Teorema 6.2, pagina 91.
23. *Successione Geometrica* (D), Teorema 6.4, pagina 94.
24. *Successione Armonica* (D), Teorema 6.5, pagina 95.
25. *Teorema del Confronto (succ.)* (D), Teorema 11.6, pagina 194.
26. *Teorema dei Carabinieri (succ.)* (D), Teorema 6.7, pagina 97.
27. *Teorema dei Permanenza del segno (succ.)* (D) Teorema 6.8, pagina 97.
28. *Regolarità successioni monotone* (D), Teorema 6.9, pagina 99.
29. *Definizione numero di Nepero tramite limite di successione e suoi Corollari* (D), Teorema 6.11, pagina 102 e Corollari seguenti.
30. *Limiti di successioni notevoli* (D), Teorema 6.13, pagina 106.
31. *Criterio di Cesàro e del rapporto*, (E), Teorema 6.14, pagina 107.
32. *Non esistenza del limite funzione* (C), Teorema 7.1, pagina 116.
33. *Equivalenza delle definizioni di "punto di accumulazione"*, (D), Teorema 7.2, pagina 118.
34. *Teorema Ponte* (E), Teorema 7.3, pagina 119.
35. *Limite funzione composta* (E), Teorema 7.4, pagina 124.
36. *Teorema Confronto (funz.)* (E), Teorema 7.5, pagina 125.
37. *Teorema dei Carabinieri (funz.)* (E), Teorema 7.6, pagina 125.
38. *Teorema Permanenza del segno (funz.)* (E), Teorema 7.7, pagina 125.
39. *Teorema su Limiti di funzioni e monotonia* (E), Teorema 7.8, pagina 126.
40. *Algebra fumzioni continue* (D), Teorema 8.1, pagina 137.
41. *Continuità della funzione composta* (E), Teorema **??**, pagina **??**.
42. *Permanenza del segno funzione continua* (E), Teorema 8.3, pagina 137.
43. *Teorema degli Zeri* (D), Teorema 8.4, pagina 142.
44. *Teorema dei valori intermedi* (D), Teorema 8.5, pagina 144.
45. *Continuità della funzione inversa*, (E), Teorema 8.6, pagina 146.

46. *Teorema di Weierstrass* (C), Teorema 8.7, pagina 146, Dimostrazione a pagina 148.
47. *Continuità funzioni monotone* (E), Teorema 8.9, pagina 149.
48. *Continuità funzioni inverse* (E), Teorema 8.10, pagina 149.
49. *Continuità funzioni Lipschitziane* (D), Teorema 8.11, pagina 150.
50. *Serie Geometrica* (D), Teorema 9.1, pagina 154.
51. *Serie Armonica Generalizzata* (D), Teorema 9.2, pagina 155 ed Esempio 9.6, pagina 163.
52. *Condizione necessaria per convergenza* (D), Teorema 9.4, pagina 159.
53. *Criterio del Confronto per Serie numeriche* (D), Proposizione 9.3, pagina 160.
54. *Criterio del Confronto Asintotico per serie numeriche* (D), Proposizione 9.4, pagina 162.
55. *Criterio del Rapporto (serie)* (E), Teorema 9.5, pagina 165.
56. *Criterio della Radice (serie)* (E), Teorema 9.6, pagina 165.
57. *Criterio di Leibniz (serie)* (E), Teorema 9.7, pagina 167.
58. *Convergenza assoluta implica convergenza (serie)* (D), Teorema 9.8, pagina 168.
59. *Derivate e retta tangente*, (D), Teorema 10.1, pagina 174.
60. *Derivabilità implica continuità* (D), Teorema 10.2, pagina 175.
61. *Derivabilità e simmetrie* (D), Proposizione 10.1, pagina 176.
62. *Derivabilità sotto operazioni algebriche* (D), Teorema 10.3, pagina 179.
63. *Regola della Catena* (D), Teorema 10.5, pagina 181.
64. *Derivata funzione inversa* (D), Teorema 10.6, pagina 184.
65. *Teorema di Fermat* (D), Teorema 11.2, pagina 187.
66. *Teorema di Rolle* (D), Teorema 11.3, pagina 190.
67. *Teorema di Lagrange* (D), Teorema 11.4, pagina 190.
68. *Test di Monotonia e suoi corollari* (D), Teorema 11.5, pagina 192.
69. *Teorema del Confronto* (D), Teorema 11.6, pagina 194.
70. *Teorema de L'Hopital* (E), Teorema 11.7, pagina 196.
71. *Convessità e monotonia* (D), Teorema 11.8, pagina 200.
72. *Asintoticità e notazione o* (D), Proposizione 12.3, pagina 206.
73. *Approssimazione Lineare* (D), Teorema 12.1, pagina 208.

74. *Teorema di Taylor* (C), Teorema 12.2, pagina 211.

75. *Proprietà dell'Integrale di Riemann*, (E), Teorema 13.1, pagina 219.

76. *Condizioni sufficienti per integrabilità di funzioni e suoi Corollari* (E), Teorema 13.2, pagina 219.

77. *Teorema della Media Integrale* (D), Teorema 13.5, pagina 223.

78. *Teorema di unicità della primitiva* (D), Teorema 13.4, pagina 222.

79. *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e suoi corollari* (D), Teorema 13.5, pagina 223 e Corollario 13.2 pagina 224.

80. *Integrali impropri* $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ *e* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ (D), Esempi , 13.15 e 13.16 pagina 235.

81. *Criterio del Confronto per integrali impropri*, (E) Teorema 13.6, pagina 235.

82. *Criterio del Confronto asintotico per integrali impropri*, (E) Teorema 13.7, pagina 237.

Riferimenti bibliografici

[BDG11] Michiel Bertsch, Roberta DalPaso, and Lorenzo Giacomelli. *Analisi Matematica (IIa ed.)*. Mc Graw-Hill, 2011.

[BPS14] Marco Bramanti, Carlo Pagani, and Sandro Salsa. *Analisi Matematica I*. Zanichelli, 2014.

[MS13] Paolo Marcellini and Carlo Sbordone. *Esercitazioni di Matematica - Parte I*. Liguori Editore, 2013.

[Rad10] Tomasz Radozycky. *Solving Problems in Mathematical Analysis - Part I*. Springer, 2010.

Indice analitico