Teorema 1.1 (Principio di Induzione)

Sia $n_0 \in \mathbb{Z}$ e sia $P(n)$ un predicato che dipende da un indice $n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq n_0$. Se

1. $P(n_0)$ è vera, e
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è vera per ogni $n > n_0$,

allora è vera

$$\forall n \geq n_0 : P(n).$$

Teorema 2.1 (Teoremi di Densità in $\mathbb{R}$)

1. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ovvero $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esistono infiniti numeri $z \in \mathbb{Q}$ (*razionali*) tai che $x < z < y$
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ovvero $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esistono infiniti numeri $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (*irrazionali*), tali che $x < z < y$.

Teorema 2.2 (proprietà Archimedea per $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^+$ ammette la proprietà archimedea. In particolare

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > x.$$

Proposizione 2.4

unicità massimo e minimo di un insieme

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ ammette massimo (rispettivamente minimo), questo è unico.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che ci sono due massimi m_1 e m_2 di A con $m_1 \neq m_2$. Siccome m_1 è un maggiorante di A e $m_2 \in A$ quindi $m_2 \leq m_1$. Simmetricamente ottengo $m_1 \leq m_2$. Dunque $m_1 = m_2$.

Proposizione 2.5

proprietà maggioranti e minoranti, sup e inf

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

1. Se a è un maggiorante per A e $a \in A$, allora $a = \sup A = \max A$;
2. Se a è un un minorante per A e $a \in A$, allora $a = \inf A = \min A$;

Dimostrazione

Dimostriamo la (1). La (2) è analoga. Dobbiamo solo far vedere che $a = \sup A$, ovveor che a verifica i due casi della definizione di sup. Per ipotesi a è un maggiorante e la prima è verificata. Supponiamo per assurdo che la seconda non valga, ovveor che $\exists \epsilon > 0 \forall x \in A x \leq a - \epsilon$. Ma $a \in A$ e dunque esiste un $\epsilon > 0$ tal eche $a \leq a - \epsilon$ che è un evidente contraddizione. Dunque $a = \sup A$ e poiché $a \in A$ allora $a = \max A$. $\square$

Proposizione 2.6

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e limitati superiormente. Allora $A \cup B$ è limitato superiormente e

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad (1)$$
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} \quad (2)$$

Proposizione 2.7

Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ e sia $B \subseteq A$ e sia B non limitato superiormente. Allora A non è limitato superiormente.

Dimostrazione **(Cenni)**

Se per assurdo A fosse limitato superiormente, allora anche B dovrebbe esserlo. Ma per ipotesi non lo è. $\square$

Proposizione 2.8

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se $A \subseteq B$ e B limitato allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Soluzione

Osserviamo che dalla definizione di inf e sup si ha che $\inf A \leq \sup A$ per ogni insieme A limitato. Quindi siccome B è limitato $\inf B \leq \sup B$ e siccome $A \subseteq B$ anche A è limitato, dunque $\inf A \leq \sup A$. Osserviamo ancora che siccome $A \subseteq B$, allora $m(B) \subseteq m(A)$ dove $m(X)$ è l'insieme di minoranti di X (farsi un semplice esempio per capire questo passaggio). Dunque $\inf B = \max m(B) \leq \max m(A) = \inf A$. In modo del tutto simmetrico (ma eseguire i passaggi per completezza) vale che $\sup A = \min M(A) \leq \min M(B) = \sup B$, dove $M(X)$ è l'insieme de maggioranti di X e dunque $M(B) \subseteq M(A)$. Dunque ricapitolando abbiamo

$$(1) \quad \inf B \leq \inf A$$
$$(2) \quad \inf A \leq \sup A$$
$$(3) \quad \sup A \leq \sup B$$

Teorema 2.3 (Caratterizzazione Completezza)

Un insieme numerico X è COMPLETO $\Leftrightarrow$.

1. *per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ e $A \neq \emptyset$ risulta che se A è limitato superiormente $\Rightarrow$ A ammette estremo superiore* $\sup A$, e
2. *per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ e $A \neq \emptyset$ risulta che se A è limitato inferiormente $\Rightarrow$ A ammette estremo inferiore* $\inf A$.

Teorema 2.4 ($\mathbb{Q}$ non è completo)

Esiste un intervallo $A \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoto e limitato superiormente (rispettivamente inferiormente) che **non** ammette $\sup A$ (rispettivamente $\inf A$).

Dimostrazione

Prendiamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Quindi $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. $1 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e quindi A è non vuoto. Inoltre, $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Dunque $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è limitato inferiormente e superiormente. Facciamo vedere che A non ammette né inf né sup in $\mathbb{Q}$. Procediamo con il caso del sup, perché per l'inf è una dimostrazione analoga. Supponiamo per assurdo che esiste $\exists S \in \mathbb{Q}$ tale che $S = \sup A$. Siccome $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ allora $S \neq \sqrt{2}$ e quindi deve essere: (1) $S > \sqrt{2}$ oppure (2) $S < \sqrt{2}$. Nel primo caso per il Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. (Teorema 2.1 pagina 25) esiste un $q \in \mathbb{Q}$ tale che $\sqrt{2} < q < S$, ma allora S non è il sup di A. Contraddizione. Nel secondo caso sempre per il Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ esiste un razionale q' tale $S < q' < \sqrt{2}$, e dunque $q' \in A$, ma allora S non è un maggiorante di A. Contraddizione. $\square$

Definizione 2.17 (Assioma di Completezza)

Un insieme numerico X è COMPLETO se per ogni due insiemi non vuoti $A, B \subseteq X$ tali che $A \leq B$ risulta che

$$\exists \lambda \in X \ : \ a \leq \lambda \leq b \ \ \forall a \in A \forall b \in B.$$

La dimostrazione che $\mathbb{R}$ è completo discende dal fatto che la Definizione 2.17 viene assunta come assioma per $\mathbb{R}$ detto appunto ASSIOMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$.

Teorema 2.5

$\mathbb{R}$ è completo.

R è completo

Teorema 2.6 (Caratterizzazione della continuità di $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ è completo $\Leftrightarrow$ ogni coppia (A, B) di separatori di $\mathbb{R}$ ammette elemento separatore.

Teorema 2.7

Z Q N^2 sono numerabili

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}^2$ sono insiemi numerabili.

Dimostrazione

Iniziamo col provare la numerabilità di $\mathbb{Z}$. Dobbiamo costruire un mappa biunivoca tra $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ e $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\}$.

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...

Questa mappa è catturata dalla funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$f(i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \frac{i-1}{2} & i \in \mathbb{N}^+, i \text{ dispari} \\ -\frac{i}{2} & i \in \mathbb{N}^+, i \text{ pari} \end{cases}$$

Proviamo ora che $\mathbb{N}^2$ è numerabile dando una mappa biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$. Immaginiamo $\mathbb{N}^2$ organizzato in una tabella del tipo:

$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	...
$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	...
$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	...
$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

La mappa $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ può essere definita ordinando gli elementi della tabella attraversandola per diagonali di lunghezza crescente a partire da $(0, 0)$. Quindi nell'ordine

$$\overbrace{(0,0)}, \overbrace{(1,0),(0,1)}, \overbrace{(0,2),(1,1)(2,0)}, \overbrace{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)}, \ldots.$$

Ora l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è *numerabile* perché ogni razionale positivo è identificato da una coppia di numeri naturali (m, n) primi fra loro e si può far vedere (Esercizio 2.1) che se $A \subseteq B$ e B numerabile allora A è numerabile. Infine tutto $\mathbb{Q}$ è numerabile perché si può far vedere che l'unione di due insiemi numerabili è ancora numerabile (Esercizio 2.1).

Teorema 3.1 (Disuguaglianza di Bernoulli)

$(1 + x)^n \geq 1 + xn, \forall x \geq -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione

La proprietà che devo dimostrare è. $P(n) = (1+x)^n \geq 1+xn$. Proviamo a dimostrarla per induzione su n.
Caso Base. $P(0)$, ovvero $(1 + x)^0 = 1$ e $1 + x \cdot 0 = 1$ e $1 \geq 1$.

Caso Induttivo. Devo far vedere che $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Ovvero assumendo che sia vero $P(n)$, devo dimostrare $P(n + 1)$. $P(n + 1)$ è $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x(n + 1)$.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) && (4)\\
&\geq (1+xn)(1+x) && \textit{per i.i. e } (1+x) \geq 0 \textit{ per i.} \quad (5)\\
&= 1 + xn + x + x^2 n && (6)\\
&= 1 + (n+1)x + x^2 n && (7)\\
&\geq 1 + (n+1)x && \textit{perché } x^2 n \geq 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

Teorema 4.1 (Teorema di esistenza di radici complesse)

Sia $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in C$ un numero complesso e sia $n \in \mathbb{N}^+$. Allora esistono esattamente n radici complesse distinte z_k, $k \in [n]$ di w.
In particolare $z_k = r(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ dove

$$\begin{cases} r = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots n-1\} \end{cases}$$

Dimostrazione

Dato $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e sia $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ una generica radice di w . Dalla formula di De Moivre dsi ha che $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. Dalla definizione di radice dobbiamo imporre che $z^n = w$, ovvero che

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Perché tale uguaglianza valga deve essere che il modulo e l'argomento di w e z^n siano uguali. Quindi deve essere che (1) $\rho = r^n$ e (2) $n\varphi = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. La (2) è vera sse $\varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Manca osservare che è sufficiente prendere $k \in [n]$. Vediamo un esempio per capire che questo è possibile. Nel caso $k = 1$ abbiamo che $\varphi = \frac{\theta+2\pi}{n}$. Facciamo vedere che per $k = n + 1$ definiscono la stessa soluzione. Per $k = n + 1$ si ha che $\varphi = \frac{\theta+2(k+1)\pi}{n} = \ldots = \frac{\theta+2k\pi}{n} + 2\pi$. E dunque sin e cos non cambiano valore. Lo stesso ragionamento si estende al generico caso $i > n$.

Teorema 4.2 (Teorema fondamentale dell'algebra - Gauss)

L'equazione algebrica $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 z^0$ dove $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ammette n soluzioni nel campo complesso, contate con la propria molteplicità.

Teorema 4.3 (cenni)

→ CENNI

c non è campo ordinato

$\mathbb{C}$ non può essere totalmente ordinato.

Dimostrazione

Se per assurdo $\mathbb{C}$ fosse ordinabile dovrebbero valere le due proprietà

- $z \in \mathbb{C}$ allora $z^2 \geq 0$
- $z \in \mathbb{C}$ allora $z \geq 0 \Rightarrow -z \leq 0$.

Ma $i^2 = -1$ e se $1 \geq 0$, allora dovrebbe essere $-1 \leq 0$. contraddizione.

Proposizione 5.2 (Esistenza ed unicità di funzione inversa)

Data una funzione biiettiva $f : X \longrightarrow Y$ esiste ed unica la funzione inversa di f che si indica con[a] f^{-1}.

Dimostrazione

Sia $f : X \longrightarrow Y$ biiettiva. La funzione $g : Y \longrightarrow X$ definita in modo tale che

$$\forall y \in Y, g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

per la biettività di f definisce una funzione. Osserviamo che $f(g(y)) = f(x) = y$ e che $g(f(x)) = g(y) = x$. Per dimostrare che è unica, supponiamo per contraddizione che esiste un altra funzione $h : Y \longrightarrow X$, $f \neq g$ che è anche inversa di f. Ma essendo h e g le inverse di f hanno lo stesso valore su $h(y)$ e $g(y)$ $\forall y \in Y$. Invece siccome $h \neq g$ dovrebbe esistere un valore $y \in Y$ su cui differiscono. Contraddizione. □

Teorema 5.1

monotonia stretta implica invertibilità

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ una funzione (suriettiva su B) e strettamente monotona in A, allora f è invertibile.

Dimostrazione

Per dimostrare che f è invertibile su A è sufficiente provare che $f : A \longrightarrow B$ è biiettiva e siccome f è suriettiva, allora basta prova la iniettività di f. Dobbiamo provare quindi che presi $x_1, x_2 \in A$, allora $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Infatti se $x_1 \neq x_2$, allora o $x_1 < x_2$, oppure $x_2 < x_1$. supponiamo il primo caso (il secondo è identico), dunque a causa della stretta monotonia di f o accade che $f(x_1) < f(x_2)$ oppure che $f(x_2) < f(x_1)$. In entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Teorema 5.2 (Monotonia sotto operazioni)

→ CENNI

operazioni su funzioni monotone

1. Se f e g sono funzioni crescenti allora $f + g$ è crescente.
2. Se f e g sono funzioni decrescenti allora $f + g$ è decrescente.
3. Se f e g sono funzioni non negative e crescenti allora $f \cdot g$ è crescente.
4. Se f e g sono funzioni non negative e decrescenti allora $f \cdot g$ è decrescente

Teorema 5.3 (Monotonia e Composizione)

Siano f e g funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e sia $A \subseteq \mathrm{dom}(f \circ g)$. Allora

1. g **crescente** in A e e f **crescente** in $g(A)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ **crescente** in A.
2. g **crescente** in A e e f **decrescente** in $g(A)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ **decrescente** A.
3. g **decrescente** in A e e f **crescente** in $g(A)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ **decrescente** A.
4. g **decrescente** in A e e f **decrescente** in $g(A)$ $\Rightarrow$ $f \circ g$ **crescente** A.

Proposizione 5.3

proprietà algebriche valore assoluto

1. $|x| \geq 0$ (*positività*);
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $|x| < l \Leftrightarrow -l < x < l \Leftrightarrow x \in (-l, l)$;
4. $|x| \leq l \Leftrightarrow -l \leq x \leq l \Leftrightarrow x \in [-l, l]$;
5. $|x| \geq l \Leftrightarrow x \leq -l \vee x \geq l \Leftrightarrow x \in (-\infty, -l] \cup [l, +\infty)$;
6. $|x| = |-x|$ e $||x|| = x$;
7. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ e $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$;
8. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*disuguaglianza triangolare*);
9. $||x| - |y|| \leq |x - y|$;

Dimostrazione

Punto (8). Per definizione di valore, è chiaro che se

$$x \leq k \wedge -x \leq k \Rightarrow |x| \leq k \tag{37}$$

Dimostriamo: (a) che $(x + y) \leq |x| + |y|$, e (b) che $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Da (a),(b) e (1) otteniamo la tesi che $|x + y| \leq |x| + |y|$. Per dimostrare (a), osserviamo

$$x \leq |x| \quad \textit{def. di } |\cdot| \tag{38}$$
$$y \leq |y| \quad \textit{def. di } |\cdot| \tag{39}$$
$$x + y \leq |x| + |y| \tag{40}$$

Per (b), osserviamo (dimostrare con cura (5)) che

$$-x \leq |x| \quad \textit{def. di } |\cdot| \tag{41}$$
$$-y \leq |y| \quad \textit{def. di } |\cdot| \tag{42}$$
$$-x - y \leq |x| + |y| \tag{43}$$
$$-(x + y) \leq |x| + |y| \tag{44}$$

Teorema 5.4 (Proprietà della funzione modulo)

La funzione $f(x) = |x| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha le seguenti proprietà:

1. dom $f = \mathbb{R}$;
2. im $f = [0, +\infty)$. Quindi f è positiva.
3. f è simmetrica rispetto all' asse y e quindi è una funzione pari.
4. f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.

Teorema 5.5

proprietà funzione logaritmo 1

Sia $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$. x è detta **la radice** n**-esima di** y e si scrive $x = \sqrt[n]{y}$ oppure come $x = y^{\frac{1}{n}}$.

Teorema 5.6

proprietà funzione logaritmo 2

Siano $a, y \in \mathbb{R}^+$ con $a \neq 1$. Allora esiste uno ed uno solo $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. La soluzione x di tale equazione si chiama **logaritmo in base** a **di** y e si indica con $x = \log_a y$, ovvero $y = a^{\log_a y}$.

Teorema 6.1 (Unicità del Limite di successioni)

Se il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ esiste allora è unico.

Dimostrazione

Assumiamo per assurdo che esiste $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed esistono $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $\ell_1 \neq \ell_2$ tali che valgono entrambi:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell_1$ e
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell_2$.

Siccome $\ell_1 \neq \ell_2$ allora $|\ell_1 - \ell_2| \neq 0$. Sia dunque $\delta = |\ell_1 - \ell_2| > 0$. Fisso $\bar{\epsilon} = \delta/2$. Dunque per definizione dei limiti (1) e (2) (che valgono per ogni $\epsilon > 0$ (quindi in particolare per $\bar{\epsilon}$) avremo che

1. $\exists n_1$ tale che $\forall n > n_1 \ : \ |a_n - \ell_1| < \bar{\epsilon}$,
2. $\exists n_2$ tale che $\forall n > n_2 \ : \ |a_n - \ell_2| < \bar{\epsilon}$

Prendiamo $\bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$ dunque deve essere che per ogni $n > \bar{n}$ valgono entrambi

1. $|a_n - \ell_1| < \bar{\epsilon}$,
2. $|a_n - \ell_2| < \bar{\epsilon}$.

Mettendo tutto insieme abbiamo che $\forall n > \bar{n}$

$$\begin{aligned}
2\bar{\epsilon} &= \delta && (53)\\
&= |\ell_1 - \ell_2| && (54)\\
&= |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| && (55)\\
&\leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| \quad \text{(dis. triang.)} && (56)\\
&= |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| && (57)\\
&< \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} && (58)\\
& && (59)
\end{aligned}$$

In conclusione abbiamo che $2\bar{\epsilon} < 2\bar{\epsilon}$ che è una evidente contraddizione.

Teorema 6.2

ogni successione convergente è limitata

Ogni successione convergente è limitata

Dimostrazione

Sia a_n una successione convergente a un valore ℓ. Prendiamo la definizione di limite e scegliamo $\epsilon = 1$. Dunque esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ $|a_n - \ell| < 1$. Si ha dunque che per ogni $n > \bar{n}$

$$\begin{aligned}
|a_n| &= |a_n - \ell + \ell| && (60)\\
&\leq |a_n - \ell| + |\ell| \qquad \text{(dis. triang.)} && (61)\\
&< 1 + |\ell| \qquad \text{(convergenza } a_n) && (62)
\end{aligned}$$

In conclusione ho che $\forall n > \bar{n} |a_n| < 1 + |\ell|$ che, ponendo $M = 1 + |\ell|$ differisce dalla def di a_n limitata solo perché non vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ ma solo per per ogni $n > \bar{n}$. Ma $\bar{n}$ è un numero finito, dunque considero l'insieme di valori di $a_n \in \mathbb{R}$ per $n = 1, \ldots, \bar{n}$, ovvero $\{a_1, \ldots a_{\bar{n}}\}$ e prendo $M = \max\{1 + |\ell|, |a_1|, \ldots |a_{\bar{n}}|\}$. Chiaramente adesso $|a_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 6.4 (Successione Geometrica)

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 0 & q \in (-1, 1) \\ 1 & q = 1 \\ \nexists & q \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

Dimostrazione

1. Il caso per $q = 1$ si osserva che $1^n = 1$ per ogni $n \in N$ e dunque $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

2. vediamo il caso $q \in (-1, 1)$. Se $q = 0$ allora $q^n = 0$ e dunque il limite è 0. Se $q \in (-1, 1)$ con $q \neq 0$ allora $|q| < 1$. Dunque $q_n = |q|^n$ e questa $\to 0$ per il caso della potenza.

3. Vediamo il caso $q > 1$. $q = 1 + d$ con $d > 0$. Quindi $q^n = (1 + d)^n$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli sappiamo che $(1+d)^n \geq 1+nd$. Possiamo dimostrare (vedi Esercizio) che $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+nd = +\infty$. Dunque per $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} (1+nd) = +\infty$ e dunque vale $+\infty$.

4. Nel caso $q = -1$ $q^n = (-1)^n$ che già abbiamo visto non esistere.

5. Nel caso $q < -1$ allora q^n lo posso scrivere come $(-1 \cdot (-q))^n = (-1)^n \cdot (-q)^n$. Naturalmente $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. Dunque la successione $(-1)^n \cdot (-q)^n$ sui numeri pari tende a $+\infty$, mentre sui numeri dispari tende a $-\infty$ e dunque non può esistere (vedi Esempio **??**)

Teorema 6.5

succession armonica

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione

Il caso banale se $\alpha = 0$, $n^\alpha = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 6.6 (Teorema del confronto)

Siano $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, e se $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a \geq b$.

Dimostrazione

Consideriamo la successione $a_n - b_n$. Si osservi che $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = a - b$. Inoltre Siccome $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a_n - b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che $a - b \geq 0$ per assurdo. Supponiamo quindi che $a - b < 0$. Se $a - b < 0$ allora $b - a > 0$. Consideriamo la successione $b_n - a_n$. Abbiamo dalle ipotesi che $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = b - a > 0$. Dalla permanenza del segno deve esistere un n_0 tal eche per ogni $n > n_0$ $b_n - a_n > 0$. Ma questo contraddice con l'ipotesi che $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Contraddizione $\square$.

Teorema 6.7 (Carabinieri)

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n \leq c_n \leq b_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n_n = \ell$, allora $\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$.

Dimostrazione

Per esercizio. Applicare il teorema del confronto prima alla coppia (a_n, c_n) e poi alla coppia (c_n, b_n)

Teorema 6.8 (Permanenza del Segno

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

1. Se $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ allora $a \geq 0$
2. se $a_n \in [\alpha, \beta], \forall n \in \mathbb{N}$, allora $a \in [\alpha, \beta]$

Teorema 6.9 (regolarità successione monotone)

Una successione monotona è regolare (ovvero ammette limite). In particolare

1. se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.
2. se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Dimostrazione

Dimostriamo la (1). La dimostriamo solo nel caso sup è un numero finito, ovvero $\ell = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Nel caso $\ell = +\infty$ si procede in maniera analoga. Voglio dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$. Ma questo è equivalente a dimostrare che $\forall \epsilon > 0 \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0 \ \ |a_n - \ell| < \epsilon$ (che equivale a dire che $-\epsilon < a_n - \ell < \epsilon$). Ma dalla definizione di sup ℓ è un maggiorante di $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Quindi $a_n \leq \ell, \forall n \in \mathbb{N}$, ovvero $a_n - \ell \leq 0 < \epsilon$ e dunque la prima disuguaglianza è mostrata.
Dimostriamo la seconda disuguaglianza ovvero che $-\epsilon < a_n - \ell$. Preso un generico $\epsilon > 0$ considero il numero $\ell - \epsilon$. Siccome ℓ è il sup di $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è il minimo dei maggioranti e dunque $\ell - \epsilon < \ell$ non è può essere un maggiorante di $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Questo vuol dire che esiste un n_0 tale che $\ell - \epsilon < a_{n_0}$. Poiché a_n è crescente $a_n \geq a_{n_0}$ per ogni $n > n_0$ e dunque ottengo che $\ell - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n$ per ogni $n > n_0$. Quindi preso un generico $\epsilon > 0$ abbiamo trovato n_0 (che dipende da ϵ) tale che per ogni $n > n_0$ si ha che $-\epsilon < a_n - \ell < \epsilon$. $\square$

Teorema 6.11 (Definizione el numero di Nepero)

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Dimostrazione

Chiamiamo $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Per induzione si può far vedere che

1. a_n è crescente, ovvero $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.
2. $2 \le a_n \le 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Proprietà (1): a_n **crescente**
Il binomio di Newton afferma che $(a+b)^n$ si può sviluppare come $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Applico lo sviluppo al $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ con $b=1$ e $a=\frac{1}{n}$. Dunque abbiamo che

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, per tanto la somma precedente la possiamo scrivere come

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\cdot \overbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}^{k}$$

Con identico ragionamento applicato a $a_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$, otteniamo che

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\cdot \overbrace{\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n+1-1}{n+1}\cdots\frac{n+1-k+1}{n}}^{k}$$

Il termine della somma per $k=n+1$ è certamente positivo e dunque

$$a_{n+1} > b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot \overbrace{\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n+1-1}{n+1}\cdots\frac{n+1-k+1}{n}}^{k}.$$

Adesso mostriamo che per ogni $k=1,\dots n$, l'elemento k-esimo nella somma di a_n è minore del corrispondente elemento k-esimo nella somma b_n. Basta osservare che per ogni

$$j=1,\dots,n \quad \frac{n-j}{n} = (1-\frac{j}{n}) < (1-\frac{j}{n+1}) = (\frac{n+1-j}{n+1}).$$

Dunque $a_n < b_{n+1} < a_{n+1}$. □

6.1 (Continuazione Teorema 6.11)

Dimostrazione

Proprietà (2): $a_n \in [2,3]\ \forall n \in \mathbb{N}^+$
Dimostrare che $a_n \ge 2$ è facile. Infatti $a_1 = 2$ e siccome a_n è crescente $a_n > a_1 = 2, \forall n \ge 1$.

Per dimostrare che $a_n \le 3$ procediamo come segue. Per prima cosa osserviamo che

$$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k > 1\cdot \overbrace{2\cdot 2\cdots 2}^{(k-1)\ volte} = 2^{k-1} \tag{63}$$

Ricordiamo inoltre che la somma geometrica $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ e che dunque per $q=1/2$ la somma$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 2(1-\frac{1}{2^n})$

Dal punto (1) abbiamo che

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} && (64)\\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot \overbrace{(1-\frac{1}{n})}^{<1}\cdots\overbrace{(1-\frac{k-1}{n})}^{<1} && (65)\\
&< \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} && (66)\\
&= 1+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} && (67)\\
&< 1+\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \text{oss. 63} && (68)\\
&= 1+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k}} \qquad \text{cambio indice} && (69)\\
&= 1+2\overbrace{(1-\frac{1}{2^n})}^{<1} \qquad \text{somma geom.} && (70)\\
&\le 3 && (71)
\end{aligned}$$

Conclusione
Da (1) e (2) dunque segue che la successione $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona e limitata. Quindi dal teorema precedente e dal teorema dei carabinieri posso immediatamente concludere che $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente a un un numero in $[2,3]$, ovvero che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n \in [2,3]$ che chiamo proprio e.

Corollario 6.1

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione che diverge a $+\infty$ per $n\to\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e.$$

Dimostrazione

Siccome $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, dalla definizione di limite si ha che

$$\forall\epsilon>0\ \exists n_\epsilon\ \forall n>n_\epsilon |(1+\frac{1}{n})^n| < \epsilon \tag{72}$$

Sia $\lfloor x\rfloor = \max\{n\in\mathbb{N}\ :\ n\le x\}$. Facciamo vedere che, dal fatto che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$ e usando la definizione di limite di una successione, possiamo ottenere

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor})^{\lfloor a_n\rfloor} = e \qquad \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1})^{\lfloor a_n\rfloor+1} = e \tag{73}$$

Ottenuti questi due risultati il teorema segue dal teorema dei carabinieri perché è facile vedere che $\lfloor a_n\rfloor \le a_n \le \lfloor a_n\rfloor+1$.
Dimostriamo la prima delle due perché sono molto simili. $a_n\to+\infty$, e siccome $\lfloor a_n\rfloor > a_n - 1$, allora, per il teorema del confronto, anche $\lfloor a_n\rfloor \to +\infty$. Siccome $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$, dalla definizione di limite sappiamo che

$$\forall\epsilon>0\ \exists n_\epsilon\ :\ \forall n>n_\epsilon\ |(1-\frac{1}{n})^n - e| < \epsilon \tag{74}$$

Siccome $\lfloor a_n\rfloor \to +\infty$ deve esistere un $\bar n$ tale che $\lfloor a_n\rfloor \to +\infty > n_\epsilon, \forall n>\bar n$. Dunque per questi valori di $\lfloor a_n\rfloor \to +\infty$ posso usare la definizione in e dire

$$\forall\epsilon>0\ \exists\bar n\ :\ \forall n>\bar n\ |(1-\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor})^{\lfloor a_n\rfloor} - e| < \epsilon \tag{75}$$

che equivale a dire che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor})^{\lfloor a_n\rfloor} = e.$ □

Corollario 6.2

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione che diverge a ∞ per $n\to\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e.$$

Dimostrazione

Sia $b_n = -a_n - 1$ siccome $a_n \to -\infty$, allora $b_n\to+\infty$. Con semplici passaggi algebrici si può far vedere che

$$(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = (1+\frac{1}{b_n})^{b_n}\cdot(1+\frac{1}{b_n})$$

e quindi il risultato segue.

Corollario 6.3

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. In particolare $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$.

Dimostrazione

Se $x\ne 0$, osserviamo che

$$\begin{aligned}
(1+\frac{x}{n})^n &= (1+\frac{1}{\frac{n}{x}})^n && (76)\\
&= \left[(1+\frac{1}{\frac{n}{x}})^{\frac{n}{x}}\right]^x && (77)
\end{aligned}$$

Sia b_n la successione $\{n/x\}_{n\in\mathbb{N}}$. Siccome $n\to+\infty$, allora $b_n\to+\infty$. Dal Corollario precedente ottengo dunque che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \left[\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{b_n})^{b_n}\right]^x = e^x$.
Se $x=0$, allor $e^x = 1$ e $(1+\frac{x}{n})^n = 1^n$ che tende a 1 (successione geometrica di ragione 1). E dunque il risultato segue. □

Teorema 6.13 (Limiti Notevoli e asintoticità)

Se a_n è infinitesima ovvero $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$;
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$;
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$;
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$.

Teorema 6.14

criterio di cesàro e del rapporto

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

1. a_n è positiva, ovvero $a_n \geq 0 \quad \forall \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

Teorema 7.1

CENNI

Non esistenza del limite di funzione

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cap \overline{X}$.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Dimostrazione (Cenni)

Supponiamo per assurdo che $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Trattiamo il caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$. Dunque $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ f(x) \in (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$. ℓ deve essere diverso da almeno uno tra i limiti desto e sinistro che sono diversi tra loro. Diciamo dal destro. E supponiamo che $\ell_1 > \ell$ (il caso simmetrico è analogo). Dunque dalla definizone di limite destro deve valere $\forall\epsilon_1 > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)\ f(x) \in (\ell_1 - \epsilon_1, \ell_1 + \epsilon)$. Questa definizione deve valere per ogni ϵ_1. Ma se fisso ϵ_1 in mod che $\ell < \ell_1 - \epsilon_1 < \ell - \epsilon$, si vede subito che ci sono dei valori di $f(x)$ che non sono nell'intorno $(\ell_1 - \epsilon_1, \ell_1 + \epsilon)$, in particolare sono $< f(x) - \ell_1)$, contraddicendo dunque la definizione di limite destro. Quindi la ipotesi per assurdo non può darsi.

Teorema 7.2

Equivalenza delle definizioni di punto di accumulazione

Def. 7.1 $\Leftrightarrow$ Def. 7.14.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare le due implicazioni. Iniziamo da $\Leftarrow$ che è più semplice. In base a Def. 7.1 dobbiamo dimostrare che $\forall I \in \mathcal{I}(x_0) I \cap X \neq 0$. Siccome per Def. 7.14 $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, allora (usanso la definizione compatta di limite di una successione) sappiamo che

$$\forall I \in \mathcal{I}(x_0) x_n \in I \text{definitivamente}$$

ovvero esiste un $\bar{n}$ tale che $\forall n > \bar{n}\ x_n \in I$. Siccome in base a Def. 7.1 sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in X$ questo vuol dire che $\forall n > \bar{n}\ x_n \in I \cap X$, ovvero che $I \cap X$ contiene almeno un elemento.

Per la implicazione inversa $\Rightarrow$ invece procediamo come segue: In base a Def. 7.1 sappiamo che $\forall I \in \mathcal{I}(x_0) I \cap X \neq 0$. In altri termini questo vuol dire

$$\forall\epsilon > 0\ (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap X \setminus \{x_0\} \neq 0$$

In particolare siccome $\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora

$$(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap X \setminus \{x_0\} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{78}$$

Quindi l'intorno $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ di x_0 contiene un numero infinto di punti in $X \setminus \{x_0\}$. Per soddisfare la Def. 7.14 devo costruire una successione con le proprietà specificate. Dalla proprietà 78 osservo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ che esiste un elemento a_n in $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap X \setminus \{x_0\}$ Prendo dunque la successione $x_n \overset{\text{def}}{=} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. È facile osservare che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ visto che $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e dunque basta scegliere $\bar{n} > 1/\epsilon$ nella definizione di limite. Le altre due proprietà della Def. 7.14 sono immediate. In particolare la prima è vera per la proprietà in 78.

Teorema 7.3 (Teorema Ponte)

Def. 7.3 $\Leftrightarrow$ Def. 7.15.

Definizione 7.3 (Limite - prima versione)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X. ℓ si dice LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE A x_0 e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall I \in \mathcal{I}(\ell),\ f(x) \in I \text{ definitivamente per } x \to x_0.$$

O in altre parole, per ogni intorno I di ℓ, $f(x) \in I$ definitivamente per $x \to x_0$

Definizione 7.15 (Limite di funzione)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{per ogni} \text{ successione } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ che } \textit{tende a } x_0 \textit{ compatibilmente con } X, \\ \text{si ha che } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell. \end{cases}$$

Teorema 7.4 (Limite della funzione composta)

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ e $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $c \in \overline{X}$. Se

1. $\lim_{x\to c} f(x) = y_0$
2. $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$
3. $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \neq y_0$ $\forall x \in X$ tali che $0 < |x - c| < \delta$,

allora

$$\lim_{x\to c} g \circ f = \lim_{x\to c} g(fx) = \ell.$$

Teorema 7.5 (Teorema del confronto)

Date $f, g :\longrightarrow \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X. Se

1. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$,

allora $\ell \leq m$.

Una prima conseguenza del confronto è il

Teorema 7.6 (Teorema dei carabinieri)

Date $f, g, h :\longrightarrow \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X. Se

1. $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x\to x_0} g(x)$,

allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Una seconda conseguenza è il

Teorema 7.7 (Teorema permanenza del segno)

Date $f :\longrightarrow \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X. Se

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$,

allora $\ell \geq 0$.
In particolare se $f(x) \in [a, b] \quad \forall x \in \mathbb{R}$, allora $\ell \in [a, b]$.

Teorema 7.8 Teorema sui limiti di funzioni é monotonia

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

1. Se f è crescente, allora
   (a) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) \ : \ x \in X, x \leq x_0\}$.
   (b) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) \ : \ x \in X, x \geq x_0\}$.
2. Se f è decrescente, allora
   (a) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \inf\{f(x) \ : \ x \in X, x \leq x_0\}$.
   (b) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \sup\{f(x) \ : \ x \in X, x \geq x_0\}$.

Teorema 8.1 (Algebra delle funzioni e continuità)

Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in X$, allora

1. $f \pm g$ è continua in x_0;
2. $f \cdot g$ è continua in x_0;
3. $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 se $g(x_0) \neq x_0$ (in $X \setminus \{x \ : \ g(x) \neq 0\}$)
4. f^g è continua in x_0 se $f(x_0) > 0$ (in $X \setminus \{x \ : \ f(x) > 0\}$)

Dimostrazione

Le dimostrazioni sono immediate dal teorema sull'algebra dei limiti (Proposizione **??** pagina 20). Infatti se f, g sono continue in x_0, dunque $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Ma $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$.

Teorema 8.2l continuità funzione composta

abel=teo:contfuzncomp (Continuità della funzione composta) Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : y \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni rispettivamente continue in X e Y. Allora la funzione $h = g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in X.

Teorema 8.3 (Permanenza del segno di funzione continua)

Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in X$ e $f(x_0) > 0$ (risp. $f(x) < 0$), allora esite un intorno I di x_0 tale che $f(x) > 0$(risp. $f(x) < 0$), $\forall x \in X \cap I$.

Teorema 8.4 (Teorema degli Zeri)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora f ammette uno 0 in $[a, b]$

Dimostrazione

Supponiamo di aver definito una sequenza $[a_n, b_n]$ *intervalli incapsulati* che verificano le seguenti tre proprietà $\forall n \in \mathbb{N}$

1. $\begin{cases} [a_0, b_0] = [a, b] \\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \end{cases}$
2. $f(a_n) - f(b_n) < 0$
3. $|b_n - a_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$

Dalla prima proprietà segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_0 \leq a_1 \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \ldots \leq b_0$. Dunque le due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono rispettivamente crescente e decrescente. Inoltre siccome $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e $a, b \in \mathbb{R}$, le successioni sono entrambi limitate. Dunque siccome monotone e limitate, entrambi ammettono limite finito. Siano essi $\lim_{n\to+\infty} a_n = c_1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = c_2$. Dalla terza proprietà:

$$\begin{aligned} & c_2 - c_1 && (89)\\ &= \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n && (90)\\ &= \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n && (91)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} && (92)\\ &= 0. && (93)\end{aligned}$$

Dunque $c_1 = c_2 = c$
D'altra parte

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \qquad (94)$$

$$\Rightarrow f(c)^2 = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \qquad (95)$$

Siccome dalla seconda proprietà degli intervalli incapsulati $f(a_n)f(b_n) < 0$, allora per il teorema di perrmaneza del segno (che vale solo per il $\leq$) deve essere $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$.
E siccome $f(c)^2 \geq 0$ (trattandosi di un quadrato), può solo essere che $f(c) = 0$, che era la tesi. rimane da costruire gli intervalli incapsulati con le loro proprietà.

8.1 (Continua dimostrazione del Teorema 8.4

Dimostrazione

Costruzione degli $[a_n, b_n]$
Consideriamo $c_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_n+b_n}{2}$. Siccome $f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno segno opposto, allora $f(c)$ avrà segno opposto ad almeno uno tra $f(a_n)$ e $f(b_n)$.
Se $f(c_n)$ ha segno oppoosto a $f(a_n)$ definiamo

$$a_{n+1} = a_n \qquad b_{n+1} = c_n.$$

Se $f(c_n)$ ha segno oposto a $f(b_n)$ definiamo

$$a_{n+1} = c \qquad b_{n+1} = b_n.$$

Siccome c_n è il punto a metà tra a_n e b_n si vede subito che $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. L'intervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ è definito in modo tale che la f negli estremi abbia segno opposto, e dunque vale la seconda proprietà. Dimostriamo terza per induzione.
Caso base: Siccome $[a_0, b_0] = [a, b]$ dunque $|a_0 - b_0| = |a - b| = \frac{|a-b|}{2^0}$.
Caso induttivo: Supponiamo che sia vero $|b_n - a_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$. Dimostriamo che $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{|b-a|}{2^{n+1}}$. Siccome $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ allora

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - a_{n+1}| &\leq \frac{|b_n - a_n|}{2} && \text{def di } c && (96)\\ &\leq \frac{|b-a|}{2 \cdot 2^n} && \text{ipot. induz.} && (97)\\ &= \frac{|b-a|}{2^{n+1}} && && (98)\end{aligned}$$

Teorema 8.5 (Teorema dei valori intermedi)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo e f è continua in I. Posto $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$ e $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$, allora

$$\forall y \in (m, M) \quad \exists y \in I \; f(x) = y$$

(DIsegno)

Dimostrazione

Sia $y \in (m, M)$. Applico il teorema degli zeri alla funzione $F(x) = y - f(x)$. nell' intervallo ...

Teorema 8.6 (Continuità della funzione inversa)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo f è continua in I

1. f è iniettiva in I sse f è strettamente monotona
2. se f è biiettiva da I in J allora $f^{-1} : J \longrightarrow I$ e continua in J (ovvero l'inversa di una funzione continua è continua)

Teorema 8.7 (Teorema di Weierstrass) → CENNI

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e f continua in $[a, b]$. Allora f ammette Massimo e minimo in in $[a, b]$. Ovvero esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in [a, b]$

Dimostrazione **(Del Teorema di Weierestrass)**

Sia $S = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Verifichiamo che esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = S. \qquad (107)$$

$S = +\infty$.
allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > n$. Devo provare che $\forall M > 0 \; \exists \bar{n} \; : f(x_n) > M \quad \forall n \geq \bar{n}$. Preso un generico $M > 0$, per la proprietà archimedea, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq M$, e dunque per la proprietà precedente $f(x_n)$ $n \geq M$ e quindi $f(x_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

$S = \ell \in \mathbb{R}$.
allora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che

$$|f(x_n) - S| < \frac{1}{n}.$$

Infatti poiché $S = \sup_{[a,b]} f$, allora $f(x_n) \leq S < S + \frac{1}{n}$. Ma il sup è anche il minimo dei maggioranti e dunque $\forall n \in \mathbb{N}$, $S - \frac{1}{n}$ non è più un maggiorante di $f(x)$ per $x \in [a, b]$ e dunque $f(x_n) > S - \frac{1}{n}$.
Dunque preso $\epsilon > 0$ esiste un $\bar{n}$ (basta prendere $\bar{n} > \frac{1}{\epsilon}$) tale che $\frac{1}{\bar{n}} < \epsilon$. Dalla proprietà precedente deduciamo che $\forall n \geq \bar{n}$, $|f(x_n) - S| < \frac{1}{n} < \epsilon$. E dunque $f(x_n) \to S$ per $n \to +\infty$
Dal Teorema di Bolzano-Weirestrass (che non abbiamo dimostrato) esiste una successione estratta x_{k_n} da x_n in $[a, b]$ e un punto $x_0 \in [a, b]$. Tale che $x_{k_n} \to x_0$ per $k_n \to +\infty$. Siccome f è continua, allora $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e dunque dalla relazione (107) si ha che

$$S = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \qquad (108)$$

Quindi $f(x_0) = S = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ed inoltre $S \in \mathbb{R}$ proprio perché in x_0 la funzione f essendo continua deve avere un valore finito e dunque $S = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Per il minimo si ragiona nel medesimo modo. □

Teorema 8.9 (Continuità per le funzioni monotone)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona nell'intervallo chiuso $[a, b]$. Allora f è continua in $[a, b]$ se e solo se l'immagine di $f(x)$ è tutto l'intervallo $[f(a), f(b)]$.

Teorema 8.10 (Continuità delle funzioni inverse)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona nell'intervallo chiuso $[a, b]$. Se f è continua in $[a, b]$ allora anche la funzione inversa f^{-1} è continua in $[f(a), f(b)]$.

Teorema 8.11 (Continuità delle funzioni Lipschitziane)

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e lipschitziana in X , allora f è continua in X

Dimostrazione

Se $L = 0$, allora f è necessariamente la funzione costante di valore 0 che è continua in X. se $L \neq 0$ si deve far vedere che $\forall x_0 \in X$, il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Usiamo la definizione di limite con intorni. Preso un $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ per ogni $x \in X$ tale che $|x - x_0| < \delta$. Fisso $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Infatti preso $x \in X$ tale che $|x - x_0| < \delta$, dalla Lipschitzianità di f si ha che $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < \epsilon$.

Teorema 9.1 (Serie geometrica)

Si parla di SERIE GEOMETRICA quando la succesione che la definsce è proprio la successione geometrica. Quindi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k$.

In questo caso per $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ consociamo una forma chiusa. Ricordiamo infatti che

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1. \end{cases}$$

Avendo una forma chiusa per S_n, possiamo studiare facilmente il $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

Caso $q \neq 1$.

Dobbiamo studiare il $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Per farlo dobbiamo ricordare come lavora la succesione geometrica $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq 1 \end{cases}$$

A questo punto è facile vedere che

1. per $q > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = +\infty$
2. $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = \dfrac{1}{1 - q}$
3. $q \leq 1$, non esiste il $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

Caso $q = 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$.

In conclusion il comportamento dell serie geometrica al limite in funzione di q si può riassumere come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 9.2

serie armonica generalizzata

Scriviamo la SERIE ARMONICA GENERALIZZATA in questo modo $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vediamo il caso $\alpha = 1$ in cui la serie è detta SERIE ARMONICA

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Non c'è nessun modo in cui si possa trovare una forma chiusa (o esplicita) per S_n in questo caso e quindi non sappiamo come studiare il limite facilmente.

Sappiamo che $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k} = +\infty$ e ci sono vari modi per dimostrarlo. Vediamo uno dei metodi principali

Scrivo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \overbrace{\frac{1}{2}}^{2^0 \ termini} + \overbrace{(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}^{2^1 \ termini} + \overbrace{(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})}^{2^2 \ termini} + \overbrace{(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16})}^{2^3 \ termini} + \cdots$$

con $T_1 = 1/2, T_2 = (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}), T_3 = (\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}) \cdots$. Si può dimostrare facilmente per induzione che $T_i \geq 1/2$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. E siccome per n della forma 2^l, ovvero $l = \log_2 n$, $S_n = 1 + T_0 + T_1 + \ldots T_l$ si ricava che $S_n \geq 1 + \frac{\log_2 n}{2}$.

Infine si ha che : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n \geq \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{\log_2 n}{2} = +\infty$. Dunque $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k} = +\infty$.

Proposizione 9.3

condizione necessaria per convergenza

Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ due serie a termini positivi tali che $a_k < b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (o anche solo $a_k < b_k$ definitivamente per $k \to +\infty$). Allora valgono le seguenti:

1. se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = +\infty$
2. se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$

Dimostrazione **(Cenni)**

Siccome $a_k \le b_k$, allora $\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{n} b_k$. Quindi se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = +\infty$ e dunque anche $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = +\infty$. Ma $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Proposizione 9.4

Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$, tali che $a_k, b_k > 0$ definitivamente per $k \to +\infty$. Allora valgono le seguenti:

1. se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$ con $0 < \ell < +\infty \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty$$
ovvero le due serie hanno lo stesso carattere.
2. se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$$
o equivalentemente
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = +\infty$$
3. se $\ell = +\infty$, allora vale la (2) con i ruoli di a_k e b_k scambiati.

Dimostrazione

(1) Se $0 < \ell < +\infty$, allora per la permanenza del segno $\ell/2 \le \frac{a_k}{b_k} \le 2\ell$[a] Il che equivale a dire che $\frac{\ell}{2} b_k \le a_k \le 2\ell b_k$. Quindi per il metodo del confronto le due serie devono avere lo stesso carattere.
(2) se $\ell = 0$ si ha che $\frac{a_k}{b_k} \to 0$ e dunque $a_k < b_k$ definitivamente per $k \to +\infty$. Quindi il risultato segue dal Metodo del confronto.

Teorema 9.5 (Criterio del rapporto)

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ a termini positivi, dunque $a_k \ge 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esiste il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora se

1. $\ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$
2. $\ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$
3. $\ell = 1$ non si può concludere nulla[a]

[a] vanno studiati con altri metodi

Teorema 9.6 (Criterio della radice)

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ a termini positivi, dunque $a_k \ge 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esiste il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Allora se

1. $\ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$
2. $\ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$
3. $\ell = 1$ non si può concludere nulla.[a]

[a] vanno studiati con altri metodi

Teorema 9.7 (criterio di Leibniz)

Data una serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Se

1. $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$, e
2. a_k decrescente defiintivamente per $k \to +\infty$, e quindi $a_{k+1} < a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Allora la serie converge.

Teorema 9.8 convergenza assoluta implica convergenza

Se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge

Dimostrazione

Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}(|a_k| - a_k)$, che è una serie a termini positivi. Questa serie converge per il teorema del confronto e l'ipotesi di convergenza assoluta: infatti $0 \leq |a_k| - a_k \leq 2|a_k|$

Teorema 10.1 (Derivata e retta tangente)

Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0 sse esiste una retta tangente (non verticale) ad f nel punto $(x_0, f(x_0))$. In tal caso $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare di tale retta tangente e la sua equazione è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e dunque la retta è unica

Dimostrazione

La dimostrazione è immediata. il fascio di rette passanti $(x_0, f(x_0))$ ha equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$. il valore di m per esprimere la tangenza ad f lo possiamo vedere come il valore del processo di portare al limite per $x_1 \to x_0$ la retta secante al grafico di f che passa per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Ovvero

$$m = \lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Ma f è derivabile e dunque il $\lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ esiste ed è (per definizione) proprio $f'(x_0)$, da cui il risultato sulla equazione della retta. L'unicità di tale retta segue dall'unicita del limite che implica l'unicità del coefficiente angolare.

Teorema 10.2 Derivabilitá implica continuità

Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

Dimostrazione

Per dimostrare che la funzione è continua in x_0 dobbiamo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. Ma $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$. Siccome la f è derivabile in x_0, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$ e invece per $x \to x_0$ si ha che $(x - x_0) \to 0$, e dunque $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = 0$. □

Proposizione 10.1 Derivabilitá e simmetrie

Se f è derivabile a pari (risp. dispari) allora f' è dispari (risp. pari).

Dimostrazione

Supponiamo che f sia pari e derivabile. Siccome è derivabile allora esiste f' e dobbiamo dimostrare che f' è dispari

$$\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} && (116)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} && f \text{ pari} \quad (117)\\
&= -\lim_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} && \text{sost. } k = -h \quad (118)\\
&= -f'(x) && (119)
\end{aligned}$$

Teorema 10.3

Derivabilitá sotto operazioni algebriche

Sia $f, g : X \longrightarrow \in \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in X$, interno. Allora

1. $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 e $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$[a],
2. $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0)$ (regola di Leibniz),
3. Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0, e $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g(x_0)^2}$
4. Se $f(x_0) \neq 0$, $(\frac{1}{f})$ è derivabile e $(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Dimostrazione

Dimostraimo la (2). Devo dimostrare che la funzione prodotto è derivabile in x_0 e che vale la regola enunciata. Prendiamo la definizione

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} && (124) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} && (125) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} && (126) \\ &= \lim_{h \to 0} g(x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0 + h)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} && (127) \\ &= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) && (128) \end{aligned}$$

Dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che f e g sono derivabili in x_0 e che siccome f è continua in x_0 (lo è perché derivabile), allora $f(x_0 + h) \to f(x_0)$ per $h \to 0$.

Si osservi che la (4) discende immediatamente dalla (2)

Teorema 10.5 (Regola delle Catena)

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale la seguente regola

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Dimostrazione

Supponiamo che $f(x) \neq f(x_0)$ per $x \neq x_0$. Consideriamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} &\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} && (133) \\ =&\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} && (134) \\ =&\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} && (135) \\ =&g'(f(x_0)) \cdot f'(x) && (136) \end{aligned}$$

Nel caso in cui $f(x) = f(x_0) \ldots$

Teorema 10.6

Derivata funzione inversa

$f : I \longrightarrow J$ sia derivabile e biiettiva (dunque invertibile)[a] e sia $x_0 \in I$ tale che $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione $f^{-1} : J \longrightarrow I$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale la regola che

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{dove } x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Dimostrazione

Poniamo $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$. Per la continuità di f e f^{-1} si ha che

$$y \to y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \to x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} && (154) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \qquad x = f^{-1}(y) && (155) \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} && (156) \end{aligned}$$

Teorema 11.2 (di Fermat)

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b). Sia $x_0 \in (a, b)$. Se f ha un estremo locale in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione

Supponiamo x_0 si un punto di minimo locale. Poiché f è derivabile in (a, b) allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Osserviamo che

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (168)$$

Ma siccome il limite è da destra di 0 allora sia $h \geq 0$. Inoltre siccome sto assumendo che x_0 si un punto di minimo, allora $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$. quindi il rapporto incrementale è maggiore o uguale di 0 e dunque per la permanenza del segno anche $f'_+(x_0) \geq 0$.
Con un ragionamento del tutto analogo posso concludere che

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (169)$$

è minore o uguale di 0 e dunque l'unica possibilità è che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.
Ragionamento identico si può applicare al caso di un massimo relativo. □

Teorema 11.3 (di Rolle)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste (**almeno**) un punto critico per f in (a, b), ovvero un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$. (Vedi Disegno)

Dimostrazione

Dal Teorema di Weierstrass concludo che esistono due punti$x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$. Ci sono solo due possibilita:

1. o entrambi i punti sono sugli estremi di $[a, b]$, ovvero $x_1 = a$ e $x_2 = b$,e quindi $f(x_1) = f(x_2)$, ma allora la funzione è costante. Ma siccome la derivata di una funzione costante è sempre 0, in ogni punto $x \in (a, b)$ la derivata è nulla e dunque sono tutti punti critici.
2. almeno uno dei due punti è interno ad $[a, b]$. Supponiamo che sia $x_1 \in (a, b)$. Dunque essendo minimo assoluto è anche un minimo locale e dunque dal Teorema di Fermat la derivata si deve annullare e quindi x_1 è un punto critico.

Teorema 11.4 (di Lagrange)

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste un punto $c \in (a, b)$, tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione

Sia $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Affermo che tale funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[a, b]$. f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) per lo stesso motivo. Deve essere $g(a) = g(b)$. Si vede facilmente che $g(a) = g(b) = f(a)$. Quindi esiste $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$. Ovvero $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema 11.5 (Test di Monotonia)

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile. Allora

1. f è crescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (a, b)$,
2. f è decrescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \; \forall x \in (a, b)$

Dimostrazione

Dimostriamo la (1). La (2) segue nello stesso modo.
Dimostriamo prima l'implicazione ($\Rightarrow$). *Ipotesi*: f è crescente in (a, b). *tesi*: $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (a, b)$.

Prendo una $x \in (a, b)$ e considero $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$. Consideriamo i due casi $h \geq 0$ e $h \leq 0$.
Nel primo caso, $h \geq 0$, allora poiché f è crescente si ha che $f(x + h) \geq f(x)$ e dunque $f(x + h) - f(x) \geq 0$, inoltre siccome $h \geq 0$, allora $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. E dunque per la permanenza del segno deve essere anche che $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$.
Nel secondo caso,in cui $h \leq 0$ si che $f(x + h) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x + h) - f(x) \leq 0$ e siccome $h \leq 0$, allora $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ e di nuovo per la permanenza del segno $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$.
Dimostriamo ora l'altra implicazione ($\Leftarrow$)
Dobbiamo dimostrare che f è crescente in (a, b). Ovvero $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 \leq x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$. Notiamo che $(x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ e osservo che in (x_1, x_2) sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange, ovvero che f è continua e derivabile in (a, b).
Quindi per il Teorema di Lagrange esiste un $c \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}$. Questo possiam riscriverlo come $f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)$. Osserviamo che $f'(c) \geq 0$ e $(x_2 - x_1) > 0$ e dunque $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ e quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$

Corollario 11.1

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile. Allora

1. $f'(x) > 0 \; \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente in (a, b).
2. $f'(x) < 0 \; \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ è strettamente decrescente in (a, b).

Teorema 11.6 (del Confronto)

Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili e tali che

1. $g(a) \leq f(a)$
2. $g'(x) \leq f'(x)$

Allora $g(x) \leq f(x) \; \forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione

Basta porre $h(x) = f(x) - g(x)$. Osservo che $h(a) \geq 0$ e che $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ quindi h è crescente. E siccome $h(a) = 0$, per il test di monotonia abbiamo che $h(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e dunque $f(x) \geq g(x)$.

Teorema 11.7 (di De L'Hopital)

Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che

1. $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oppure $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

2. $g'(x) \neq 0$ e $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,

allora $g(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$ e [a] il

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Teorema 11.8

convessità e monotonia

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b). Allora

1. f (strettamente) convessa se e solo se f' è (strettamente) crescente in (a, b),

2. f (strettamente) concava se e solo se f' è (strettamente) decrescente in (a, b),

Dimostrazione

Dimostriamo la (1), in quanto la (2) è analoga e usiamo la definizione di convessità data nella Proposizione 11.4. Iniziamo dalla implicazione nel verso $\Rightarrow$.

Proposizione 12.3

Asintoticitá e notazione o

Siano f, g due funzioni e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$f \sim g \text{ per } x \to x_0 \Leftrightarrow f = g + o(g) \text{ per } x \to x_0$$

Dimostrazione

Ricordiamo che $f{\sim}g$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Per dimostrare quanto richiesto consideriamo la seguente catena di equivalenze che prova il risultato:

$$f \overset{x\to x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{182}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \tag{183}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \tag{184}$$
$$\Leftrightarrow f - g \overset{x\to x_0}{=} o(g) \quad \text{dalla def di } o \tag{185}$$
$$\Leftrightarrow f \overset{x\to x_0}{=} g + o(g) \tag{186}$$

Teorema 12.1

Approssimazione lineare

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. sOno equivalenti:

1. f è derivabile in x_0

2. Esiste una costante A tale che $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$

Dimostrazione

Dimostriamo le due implicazioni: ($\Rightarrow$). Siccome per ipotesi f è derivabile in x_0 allora, esiste ed è finito $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Dunque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \tag{193}$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{194}$$
$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \tag{195}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{196}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } A = f'(x_0) \tag{197}$$

Vediamo l'altra implicazione ($\Leftarrow$). Dobbiamo dimostrare che esiste ed è finito il $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Ma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{f(x_0)} + A(x - x_0) + o(x - x_0) - \cancel{f(x_0)}}{x - x_0} \tag{198}$$
$$= A + \lim_{x\to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \tag{199}$$
$$= A \tag{200}$$

Dove l'ultimo passaggio segue perché $\lim_{x\to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0$. Infatti questo equivale a dire $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{x - x_0}$ con $h = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.

Teorema 12.2 (Teorema di Taylor)

CENNI

Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^n(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in (a,b)$. Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor per f in x_0. allora

1. $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ (RESTO DI PEANO)
2. se $f \in C^{(n+1)}(a,b)$, allora $\exists c \in (a,b)$ con $|c - x_0| < |x - x_0|$ tale che $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ (RESTO DI LAGRANGE)

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione solo nei casi particolari $n = 1$ (Peano) e $n = 0$ (Lagrange). Gli altri casi seguono da un ragionamento simile.

Dimostriamo che il resto di Peano è $R_1(x) = o(x - x_0)$. Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_1(x)}{x-x_0} && (201)\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} && (202)\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) && (203)\\
&= 0 && (204)
\end{aligned}$$

Per il Resto di Lagrange, nel caso $n = 0$ dobbiamo fare vedere che $\exists c$ con $|c - x_0| < |x - x_0|$ tale che $R_0(x) = f'(c)(x - x_0)$. Ragioniamo come segue: $R_0(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0)$. Dunque dal Teorema di Lagrange (si noti che le ipotesi sono sufficienti per applicarlo) abbiamo che

$$\exists c \text{ tale che } |c - x_0| < |x - x_0| \, f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Dunque $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ e pertanto $R_0(x) = f'(c)(x - x_0)$. □

Teorema 13.1 (Proprietà dell'integrale)

Valgono le seguenti proprietà dell'integrale di Riemann

1. LINEARITÀ. Se f, g sono integrabili in $[a,b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora la fuzione $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è integrabile in $[a,b]$. Inoltre
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$
(Tale proprietà implica che lo spazio delle funzioni intergrabili secondo Riemann forma uno *spazio vettoriale*)
2. MONOTONIA. Se f, g sono integrabili in $[a,b]$ e $\forall x \in [a,b] f(x) \le g(x)$, allora
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$
3. ADDITIVITÀ. Se f è integrabile in $[a,b]$ e $c \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
4. DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE. Se f è integrabile in $[a,b]$. Allora
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$
5. $\forall a \in \mathbb{R}$
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Teorema 13.2

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate. Se f soddisfa almeno una delle seguente proprietà allora f è integrabile.

1. f è una funzione CONTINUA A TRATTI (ovvero ha un numero finito, anche 0, di punti di discontinuità).
2. f MONOTONA in $[a,b]$ (anche se con un numero infinito di punti di discontinuità)

Corollario 13.1

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata in $[a,b]$ e $f \in C([a,b])$. Allora f è integrabile in $[a,b]$.

condizioni sufficienti per integrabilitá di funzioni

Teorema 13.3 (Teorema della Media Integrale)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$. Allora $\exists c \in [a,b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazione

Per prima cosa siccome $f \in C([a,b])$ e dunque f è continua in $[a,b]$, allora per il Teorema 13.2 f è integrabile in $[a,b]$ e dunque la quantità $\int_a^b f(x)dx$ è ben definita ed è in $\mathbb{R}$. Inoltre siccome $f \in C([a,b])$ allora per il teorema di Weierestrass $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tali che

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b].$$

Per la monotonia dell'integrale (Teorema 13.2) si ha dunque che

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

e dunque

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Leftrightarrow \tag{218}$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \tag{219}$$

e dunque per il Teorema del valori intermedi (Teorema 8.5 a pagina 144) si ha che

$$\exists c \in [a,b] \ : \ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{220}$$

Teorema 13.4 (Teorema di unicità della primitiva)

Siano F e G due primitive di $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c.$$

Dimostrazione

Basta porre $H(x) = F(x) - G(x)$. Poiché F e G, in quanto primitive di f, sono derivabili in $[a,b]$, allora H è derivabile in $[a,b]$ e poiché $F'(x) = G'(x) = f(x)$, allora $H'(x) = 0$. Dunque $H(x) = c$ per qualche costante c. Quindi $F(x) = G(x) + c$. $\square$.

Teorema 13.5 (Teorema fondamentale del Calcolo Integrale)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$. Definita la funzione $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$F(z) \int_a^x f(t)dt$$

allora F è una *primitiva* di f in $[a,b]$. Ovvero, F è derivabile in $[a,b]$ e vale :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Dimostrazione

Preso un generico punto $x \in [a,b]$ dobbiamo dimostrare che $f(x) = \int_a^x f(t)dt$ è derivabile è dimostrare che $F'(x) = f(x)$. Consideriamo un punto generico x interno ad $[a,b]$, ovvero in (a,b). Se x è un estremo la dimostrazione è simile e la lasciamo per esercizio.

Facciamo vedere che esiste ed è finito il $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \tag{222}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \tag{223}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\int_a^{x} f(t)dt} + \int_x^{x+h} f(t)dt - \cancel{\int_a^x f(t)dt}}{h} \tag{224}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \tag{225}$$

Per il teorema della media integrale con $a = x$ e $b = x+h$ esisterà un $c \in [x, x+h]$ tale che $f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$

e quindi $\Rightarrow hf(c) = \int_x^{x+h} f(t)dt$

Dunque dalla equazione 225 si ottiene che $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$. Osserviamo che siccome $c \in [x, x+h]$, allora per $h \to 0$ $c \to x$. Quindi siccome f è continua in $[a,b]$ otteniamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x) \tag{226}$$

$\square$

Corollario 13.2

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C([a,b])$. Se G è una primitiva di f in $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b.$$

Dimostrazione

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale applicato ad f, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una primitiva di f tale che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Poiché $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, si ha che $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Se $G(x)$ è una generica primitiva di f, per il teorema sull'unicità della primitiva si ha che $F(x) = G(x) + c$ $\forall x \in [a,b]$. Dunque

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = G(b) + c - G(a) - c = G(b) - G(a).$$

Esempio 13.15

Dimostriamo che

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Per prima cosa osserviamo che se $\alpha \leq 0$, allora $f(x)$ è continua quindi integrabile e la sua primitiva abbiamo già visto come calcolarla. Se $\alpha > 0$ allora $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$ e dunque siamo nel primo caso della definizione di integrale improprio. Andiamo quindi a calcolare $\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Distinguiamo due casi.

1. $\alpha \neq 1$.

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_c^1 \tag{272}$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \tag{273}$$

Se $1-\alpha > 0$ allora $c^{1-\alpha} \to 0$ per $c \to 0^+$ e dunque $\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$. Se $1-\alpha < 0$ allora $c^{1-\alpha} \to +\infty$ per $c \to 0^+$ e dunque $\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ non esiste.

2. $\alpha = 1$. In questo caso

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} [\ln|x|]_c^1 \tag{274}$$

$$= \ln|c| \tag{275}$$

$$= \ln c = +\infty \tag{276}$$

Esempio 13.16

Dimostriamo che

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Come nel caso precedente distinguiamo i due casi

1. $\alpha \neq 1$

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^c \tag{277}$$

$$= \lim_{c\to +\infty} \left(-\frac{1}{1-\alpha} + \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \tag{278}$$

Se $1-\alpha < 0$ allora $c^{1-\alpha} \to 0$ per $c \to +\infty$ e dunque $\lim_{c\to +\infty} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{\alpha - 1}$. Se $1-\alpha > 0$ allora $c^{1-\alpha} \to +\infty$ per $c \to +\infty$ e dunque $\lim_{c\to +\infty} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ non esiste.

2. $\alpha = 1$ come prima $\lim_{c\to +\infty} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

Teorema 13.6 (Criterio dei Confronto per intergali

criterio del confronto per gli integrali impropri

Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e tali che f, g sono integrabili in $[a, c]$ $\forall c \in [a, b]$. Se

1. $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, e
2. g integrabile in senso improprio in $[a, b]$,

allora f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$

Teorema 13.7

criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri

Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Se f, g sono

1. non negative in $[a, b]$,
2. integrabili in $[a, c]$ $\forall c \in [a, b]$,
3. $\lim_{x\to b^+} \frac{f(x)}{g(x)}) = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

allora

$$f \text{ integrabile in senso improprio in } [a, b] \Leftrightarrow g \text{ integrabile in senso improprio in } [a, b]$$