

# Étude d'un dipôle tourbillonnaire avant et après une collision



Arnaud Guardia

*Master 1 OAM, Université Côte d'Azur,  
Nice*

Internship Supervisor

*Christophe Brouzet,  
Simon Thalabard*

(Dated: 12 juillet 2024)

Nous présentons des résultats numériques sur le profil de dipôles tourbillonaires évoluant librement dans un fluide visqueux bidimensionnel et discutons de leur pertinence pour un cadre expérimental quasi-2D.

## TABLE DES MATIÈRES

I. Introduction	2
II. Objectifs, état de l'art, étude bibliographique	2
A. Équations de Navier-Stokes	3
B. Simulation numérique : méthode de la pénalisation de volume	3
C. Énergie et enstrophie	4
D. Dispositif expérimental	5
III. Methodologie	5
A. Présentation des simulations	5
B. Conditions initiales	6
C. Discussion sur la résolution par couple $(\eta, \nu)$	6
D. Comparaison convergence résolution avec les graphes d'énergie	7
IV. Résultats	7
A. Caractérisation de la simulation dans une phase pré-collisionnelle	8
1. Évolution de l'énergie et de la vorticité	8
2. Auto-similarité des profils de vorticité	8
3. Auto-similarité de la relation $(\psi, \omega)$	10
B. Effet de $R$ et du type de dipôle initial sur $(\psi, \omega)$	11
C. Enstrophie selon le paramètre de paroi	11
V. Conclusion et perspectives	11
Remerciements	12
Références	12

## I. INTRODUCTION

En dynamique des fluides, les interactions entre fluides et parois sont des problèmes riches pour la physique, l'ingénierie mais aussi pour les mathématiques des équations de Navier-Stokes.(W. E, 2000; J. M. Wallace, 2013). Ils sont en lien avec des phénomènes de décollement de la couche limite et de turbulence. Mon stage s'inscrit dans le cadre de travaux s'intéressant à ces interactions. On parle de tourbillon lorsque l'écoulement d'un fluide est rotationnel, c'est-à-dire lorsque la vorticité est non nulle, une propriété mesurée globalement, par exemple par l'enstrophie. Un simple dipôle tourbillonnaire rencontrant une paroi lisse peut générer de nombreuses structures multi-échelles (fig. 1) par une production de vorticité. Ce stage propose d'étudier ce type de structure. Afin de mieux comprendre les phénomènes fondamentaux à l'œuvre, nous nous restreignons à une étude des fluides incompressibles en deux dimensions. Or, en deux dimensions, lorsqu'un fluide libre incompressible non visqueux ne rencontre pas d'obstacle, l'enstrophie ne peut pas augmenter. La paroi est alors indispensable pour générer de la vorticité. L'avantage de se restreindre à l'étude en deux dimensions se situe également au niveau numérique, où moins de calculs sont alors nécessaire pour les simulations, permettant d'atteindre des régimes de petites viscosités avec des ressources moindre que dans le cas 3D.

Le stage s'inscrit dans une perspective à la fois numérique et expérimentale. Numériquement, nous simulons une paire de vortex collisionnant sur une paroi tandis qu'expérimentalement, nous formons une paire de vortex dans une cuve contenant de l'eau stratifiée en densité avec du sel. Un autre stagiaire s'occupe, avec l'équipe, de la partie expérimentale. Les résultats obtenus par ces deux approches sont ensuite mis en parallèle. On discutera donc de la façon la plus adéquate pour caractériser le dipôle tourbillonnaire. Par des mesures quantitatives et qualitatives, nous souhaitons comparer de manière convaincante les simulations et les expériences afin de déterminer si nous pouvons raisonnablement caractériser des structures en trois dimensions par des simulations en deux dimensions.

Un autre point important que nous souhaitons déterminer est la sensibilité aux conditions initiales. Nous simulons différents types de dipôles afin de voir si, après les avoir laissé évoluer un certain temps (sans paroi), ils convergent vers un profil de vorticité universel. Dans le cas contraire, il serait intéressant, en les comparant avec les profils de vorticité obtenus expérimentalement, de déterminer lequel correspond le mieux. Également, nous faisons varier la taille de ces dipôles, la viscosité du fluide ainsi que le paramètre utilisé pour modéliser la paroi. Différentes métriques seront utilisées pour caractériser les vortex : distance entre minimum et maximum de vorticité, profils de vorticité, vorticité moyenne et relation entre la fonction de courant  $\psi$  et la vorticité  $\omega$ .

Nous simulons d'abord les dipôles tourbillonnaires à leur stade pré-collisionnel, en ne simulant aucune paroi, puis nous l'ajouterons à l'aide de la méthode de la pénalisation de volume.

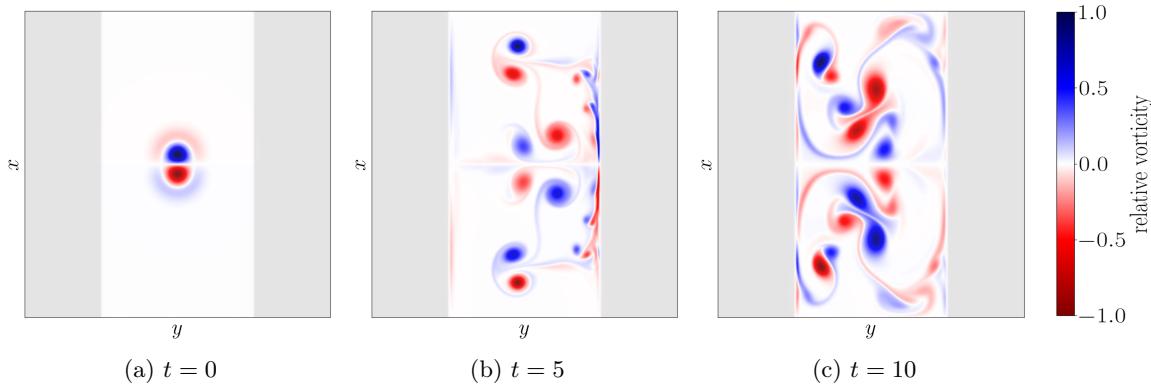


FIGURE 1 – Illustration de l'évolution de la vorticité avec un vortex sombrero (défini plus loin) au temps initial lors d'une collision d'un tourbillon dipolaire sur une paroi. Les parois sont représentées en gris. ( $R = \pi/16$ ,  $\nu = 10^{-3}$ ,  $\eta = 10^3$ ,  $N = 1024$ )

## II. OBJECTIFS, ÉTAT DE L'ART, ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

La création et l'évolution de dipôles tourbillonnaires ont une longue histoire en mécanique des fluides. Dans cette partie, nous nous proposons, à la lumière des travaux antérieurs, de présenter les notions clés sur lesquelles s'appuie la suite du rapport.

### A. Équations de Navier-Stokes

Des études numériques et théoriques (P. Orlandi, 1990; G. F. Carnevale et al., 1997) s'appuient sur la résolutions des équations de Navier-Stokes. Dans le cas d'une paroi horizontale, disons en  $y = 0$ , les équations de Navier-Stokes, reliant la vitesse  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ , la viscosité cinématique  $\nu$ , la pression  $p$  et la masse volumique du fluide  $\rho_0$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{(condition d'incompressibilité),} \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}|_{y=0} = \mathbf{0} & \text{(condition de non-glissement).} \end{cases} \quad (1)$$

Par la suite, nous considérerons  $\rho_0$  comme une constante, que nous absorberons dans le terme de pression. Le cas bidimensionnel consiste à considérer des champs  $\mathbf{u} = u_x(x, y, t)\mathbf{e}_x + u_y(x, y, t)\mathbf{e}_y$ . La vitesse s'exprime en termes d'une fonction de courant  $\psi : \mathbf{u} = \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z)$  et la vorticité est un scalaire  $\omega = (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z$ . On peut écrire :

$$u_x = \partial_y \psi, \quad u_y = -\partial_x \psi. \quad (2)$$

Ainsi,  $\omega = -\nabla^2 \psi$ .

Les équations d'Euler considèrent un fluide parfait, c'est-à-dire  $\nu = 0$  et la condition de non-glissement est remplacée par la seule condition d'imperméabilité :  $u_y|_{y=0} = 0$ .

Les études suggèrent que, dans des conditions de non glissement d'un fluide incompressible sur une paroi, le dipôle rebondit sur la paroi. Cela est dû à la création de vorticité au niveau du mur. Dans la section II.C, que les interactions peuvent conduire à des mécanismes de production de vorticité.

### B. Simulation numérique : méthode de la pénalisation de volume

Numériquement, il existe un certain nombre de méthodes, ici on se concentre sur la méthode de la pénalisation de volume (R. Nguyen van yen et al., 2011; N.Nguyen van yen et al., 2018). La paroi avec une condition de non-glissement est simulée par cette méthode (3).

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \eta \chi \mathbf{u}. \quad (3)$$

$$\partial_t \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega - \eta \nabla \wedge \chi \mathbf{u} \quad (4)$$

Le terme de masque  $\chi$  représentant l'obstacle vaut 1 sur la paroi et 0 au niveau du fluide.  $\eta$  est le paramètre de pénalisation. Il doit être suffisamment élevé pour que le fluide ne pénètre pas la paroi, on peut l'assimiler à un paramètre d'étanchéité de la paroi. Pour comprendre  $\eta$  de manière heuristique, prenons le cas (fig. 2) d'un écoulement 2D parallèle selon  $\mathbf{e}_x$ , sans gradient de pression ( $\nabla p = 0$ ), dont la vitesse dépend uniquement de la coordonnée  $y$  :  $\mathbf{u} = u(y) \mathbf{e}_x$  avec un obstacle en  $y = 0$  :  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$  et une vitesse imposée en  $y = H$  :  $\mathbf{u}(H) = \mathbf{u}_0$ .

Ce problème modélise la couche limite d'un obstacle. C'est le cadre de la théorie des couches limites de Prandtl. Sans viscosité, le profil des vitesses peut être quelconque. En résolvant les équations de Navier-Stokes (1) avec les conditions du problème, les solutions correspondent à des écoulements de Couette :  $u(y) = \frac{u_0}{H} y$ . Pour une paroi parfaite, la vitesse est nulle en  $y = 0$ , mais, numériquement, il est plus commode de remplacer la condition donnée par l'obstacle par un terme de forçage (3). La condition aux limites pour la vitesse devient une condition en l'infini :  $u(y) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} 0$ . En imposant la continuité de la solution et de sa dérivée en  $y = 0$  : respectivement  $(u(0^+)) = u(0^-)$  et  $u'(0^+) = u'(0^-)$ , on trouve le profil de vitesse suivant :

$$\begin{cases} u(y) = \frac{u_0}{H} \left( \frac{y}{\Delta} + 1 \right) & \text{pour } 0 < y < H, \\ u(y) = \frac{u_0}{H} \exp \left( \frac{y}{\Delta} \right) & \text{pour } y < 0. \end{cases} \quad (5)$$

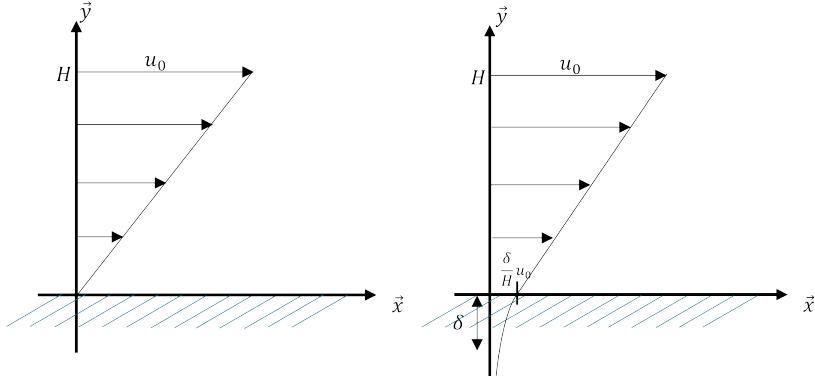


FIGURE 2 – Illustration du profil des vitesses au niveau d'une paroi. A gauche, le profil des vitesses est solution des équations de Navier-Stokes alors qu'à droite, il est solution des équations de Navier-Stokes avec un terme de pénalisation

De telle sorte qu'à la paroi, la vitesse de glissement est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) \approx \frac{\Delta}{H} u_0 \quad \text{pour } \Delta \ll H, \end{array} \right. \quad (6)$$

avec  $\Delta = \sqrt{\frac{\nu}{\eta}}$  la longueur de pénétration caractéristique. La vitesse du fluide est non nulle, mais petite au niveau de la paroi, et décroît exponentiellement vite, modélisant ainsi une paroi poreuse. Le modèle recouvre formellement la paroi rigide lorsque  $\Delta \rightarrow 0$  et donc, à  $\nu$  fixe, cela correspond au cas  $\eta \rightarrow \infty$ . Ainsi, la fonction masque se révèle pertinente pour approcher l'effet d'un obstacle lorsque le paramètre  $\eta$  prend des valeurs suffisamment élevées.

### C. Énergie et enstrophie

L'énergie cinétique  $E$  et l'enstrophie  $Z$  d'un système en deux dimensions sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \mathbf{u}^2(x, y) \, dx \, dy, \\ Z &= \frac{1}{2} \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \omega^2(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (7)$$

L'énergie du système se dissipe en présence d'un fluide avec une viscosité non nulle. Plaçons nous dans le cas d'une paroi impénétrable mais poreuse en  $y = 0$ . La fonction masque  $\chi$  dépend donc de  $y$  et vaut  $\mathbb{1}_{y \leq 0}$ . Nous définissons :

$$\begin{cases} \eta(y) = \eta \mathbb{1}_{y \leq 0} \\ \eta'(y) = -\eta \delta(y) \end{cases} \quad (8)$$

Les tourbillons sont des solutions des équations de Navier-Stokes avec vorticité, caractérisés en partie par une enstrophie non nulle. Ce comportement se comprend en réécrivant l'équation de Navier-Stokes (3) en terme d'énergie (9a) et d'enstrophie (9b).

$$\frac{d}{dt} E = - \int_{\mathbb{R}^2} \eta(y) \|\mathbf{u}\|^2 - \nu \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \quad (9a)$$

$$\frac{d}{dt} Z = - \int_{\mathbb{R}^2} \nu \|\nabla \omega\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \eta(y) \frac{\omega^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} \eta'(y) u_x(y) \omega \quad (9b)$$

Les deux termes de droite de l'équation (9a) sont négatifs. L'énergie du système se dissipe donc bien au cours du temps. Quant à l'enstrophie, le premier terme de droite de l'équation (9b) correspondant à la dissipation est négatif, le deuxième terme de droite est aussi négatif tandis que le signe du troisième terme dépend du produit entre la pente de  $\eta(y)$  et la vitesse parallèlement à l'obstacle. Lorsque les vortex atteignent la paroi, on peut donc assister à de la création d'enstrophie, qui dépend du paramètre  $\eta$ .

#### D. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental que nous mettons en place s'appuie sur une méthode permettant de générer des tourbillons dipolaires en deux dimensions (J. Flor and J. van Heijst, 1994; S. I. Voropayev and Ya. D. Afanasyev, 1992). Expérimentalement, nous utilisons une cuve remplie d'eau stratifiée linéairement en densité avec du sel. Afin que les tourbillons restent dans un plan, nous injectons grâce à un pousse-seringue un petit volume de fluide, par une aiguille horizontale. Le fluide injecté a la densité correspondante à la profondeur où il est injectée dans la stratification. D'abord en trois dimensions, le jet s'aplatit ensuite sous l'effet de la stratification en densité pour donner un tourbillon dipolaire quasi-bidimensionnel. Par ce dispositif, l'équipe a reproduit les expériences (fig 3).



FIGURE 3 – Formation du vortex dipolaire grâce au dispositif expérimental.

### III. METHODOLOGIE

#### A. Présentation des simulations

Pour réaliser les simulations, nous utilisons Dedalus (Burns et al., 2020). Il s'agit d'une bibliothèque Python permettant de résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles en utilisant une méthode pseudo-spectrale avec un pas de temps adaptatif et exploitant des méthodes de parallélisation (MPI : Message Passing Interface) permettant d'optimiser les temps de calcul. La méthode consiste à discréteriser l'espace en utilisant une grille. Cette dernière a le même nombre de points  $N$  selon chacune des deux dimensions. Puis une transformée de Fourier est appliquée pour passer du domaine spatial au domaine spectral où les opérateurs différentiels sont plus facilement résolus. À l'aide d'une intégration temporelle et d'une transformée de Fourier inverse pour revenir dans l'espace physique, Dedalus nous fournit ainsi les solutions de l'équation aux dérivées partielles.

Le programme résout donc numériquement les équations (3) auxquelles on précise une condition initiale sur le champ de vitesse. Cette dernière permet de générer, au temps initial de la simulation, le dipôle dont on souhaite suivre l'évolution 1a. Pour obtenir ces conditions initiales, nous partons de la vorticité  $\omega^{(0)}$  des dipôles que nous connaissons :

$$\omega(\mathbf{x}, t = 0) = \omega^{(0)} \quad (10)$$

Nous le décomposons ensuite dans l'espace de Fourier par des FFT (transformations de Fourier rapides).

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{\omega}(\mathbf{k}) \mathbf{1}_{\|\mathbf{k}\| \leq \frac{N}{2}} \quad (11)$$

Pour chaque mode  $i$ , nous calculons l'énergie :

$$E(i) = \sum_{i \leq \|\mathbf{k}\| < i+1} \frac{\hat{\omega}^2(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|^2}, \quad (12)$$

que nous appellerons  $E(k)$  par la suite.

Pour éviter les instabilités, nous souhaitons que notre spectre d'énergie décroisse exponentiellement avec une décroissance résolue par le nombre de modes considérés, typiquement  $E(k) \propto e^{-2k\alpha}$  (Miguel D. Bustamante and Marc Brachet, 2022). Pour ce faire nous appliquons la transformation suivante :  $E(k) \leftarrow E(k)e^{-2k\alpha}$  en trouvant alpha en résolvant  $E\left(\frac{N}{2}\right) e^{-N\alpha} = \varepsilon$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ , nous prenons  $\varepsilon \approx 10^{-12}$ .

Ainsi, nous régularisons la vorticité :

$$\hat{\omega}(\mathbf{k}) \leftarrow e^{-k\alpha} \hat{\omega}(\mathbf{k}) \quad (13)$$

Le spectre d'énergie est également normalisé.

Nous pouvons maintenant facilement remonter au champ des vitesses dans l'espace spectral grâce au lien avec la fonction courant.

$$\begin{cases} \hat{\omega}(\mathbf{k}) = \|k\|^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}) \\ \hat{u}_x(\mathbf{k}) = ik_y \hat{\psi}(\mathbf{k}) \\ \hat{u}_y(\mathbf{k}) = -ik_x \hat{\psi}(\mathbf{k}) \end{cases} \quad (14)$$

Enfin, par une transformée de Fourier inverse, nous obtenons le champ des vitesses dans l'espace réel.

## B. Conditions initiales

Pendant mon stage nous avons principalement simulé des dipôles de Lamb-Chaplygin et des dipôles composés de deux vortex « sombreros » de vorticités opposées. On les nommera ainsi en raison de leur profil de vorticité. Le profil de vorticité correspond à la valeur de la vorticité sur la droite passant par le maximum et le minimum de vorticité (fig. 4). Les dipôles de Lamb-Chaplygin sont des solutions des équations d'Euler en 2D.

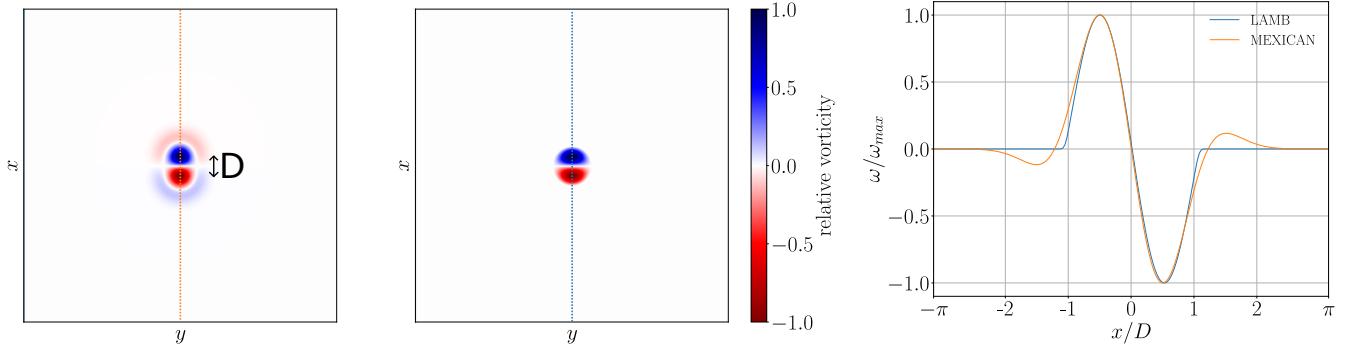


FIGURE 4 – A gauche, un dipôle sombrero ; au centre, un dipôle de Lamb-Chaplygin et à droite les profils de vorticité, celui du dipôle sombrero est représenté en orange et celui du dipôle de Lamb-Chaplygin est représenté en bleu. La droite passant par le maximum et le minimum de vorticité est représenté par les traits en pointillé.  $D$  est la distance entre le maximum et le minimum de vorticité.

## C. Discussion sur la résolution par couple $(\eta, \nu)$

Dans la suite du rapport, tous les paramètres seront données sans dimensions. Lors de mon stage, j'ai, en particulier, travaillé avec des simulations de vortex sombreros avec un rayon  $R = \pi/16$ . Si le type de vortex ou son rayon ne sont pas précisés, il s'agit de ceux-là. C'est le cas dans cette partie où nous souhaitons déterminer les résolutions à partir desquelles il est possible d'effectuer correctement les simulations. Pour chaque couple de paramètre  $(\eta, \nu)$ , nous faisons différentes simulations en variant la résolution  $N$ . Les résultats sont regroupés dans le tableau I.

On observe que, quelque soit la résolution choisie,  $\eta = 10$  est insuffisant pour simuler une paroi. La longueur caractéristique de pénétration est trop élevée (fig. 5a). On note aussi que  $\nu = 10^{-4}$  entraîne tout le temps des pixellisations. Cela signifie que des structures de taille inférieure à la résolution se créent, elles ne peuvent pas être résolues et des pixels sont alors apparents (figs. 5b, 5c). Il est aussi notable que les modes les plus élevés du spectre d'énergie sont relativement élevés (fig. 5d).

Ainsi, nous connaissons les valeurs de  $N$ ,  $\eta$  et  $\nu$  qui nous permettent de faire des simulations correctes, ce sont celles que nous utiliserons pour le traitement des données.

$\eta \backslash \nu$	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$
0	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
10	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
100	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
1000	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024
	128 256 512 1024	128 256 512 1024	128 256 512 1024

TABLE I – Pour un couple  $(\eta, \nu)$ , les simulations sont faites pour  $N = 128, 256, 512$  et  $1024$ . Le code couleur indique une simulation qui fonctionne correctement (vert), un paroi trop poreuse (jaune) et une simulation pixellisée (orange).

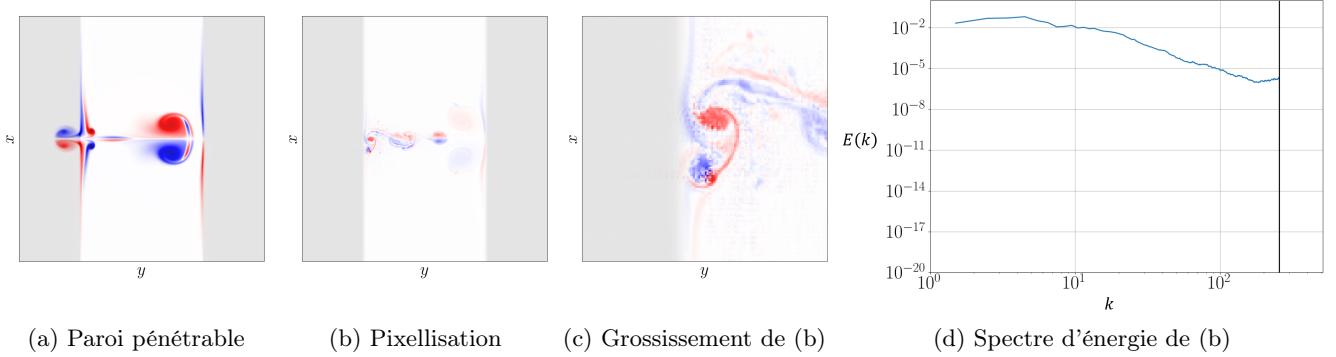


FIGURE 5 – Illustration des différentes limites rencontrées lors des simulations. Les paramètres des simulations sont les suivants : (a) :  $\nu = 10^{-3}$ ,  $\eta = 10$ ,  $N = 1024$ ; (b) :  $\nu = 10^{-4}$ ,  $\eta = 100$ ,  $N = 512$ .

#### D. Comparaison convergence résolution avec les graphes d'énergie

Nous appelons  $D$  la distance entre le minimum et le maximum de vorticité. Nous traçons  $D$  en fonction du temps pour un couple de valeur  $(\eta, \nu)$  et pour différentes résolutions  $N$  afin de vérifier si les résultats convergent (fig. 6).

Les oscillations observables sont dues à une particularité du dipôle sombrero. Il génère un dipôle principal et un dipôle secondaire se dirigeant dans un sens opposé. Par la périodicité, ces deux dipôles se rencontrent et interagissent : le dipôle principal s'écarte et  $D$  augmente.

Lorsque la résolution augmente, les résultats semblent bien converger.

## IV. RÉSULTATS

Dans cette partie, nous présentons nos premiers résultats, principalement obtenus dans la phase pré-collisionnelle.

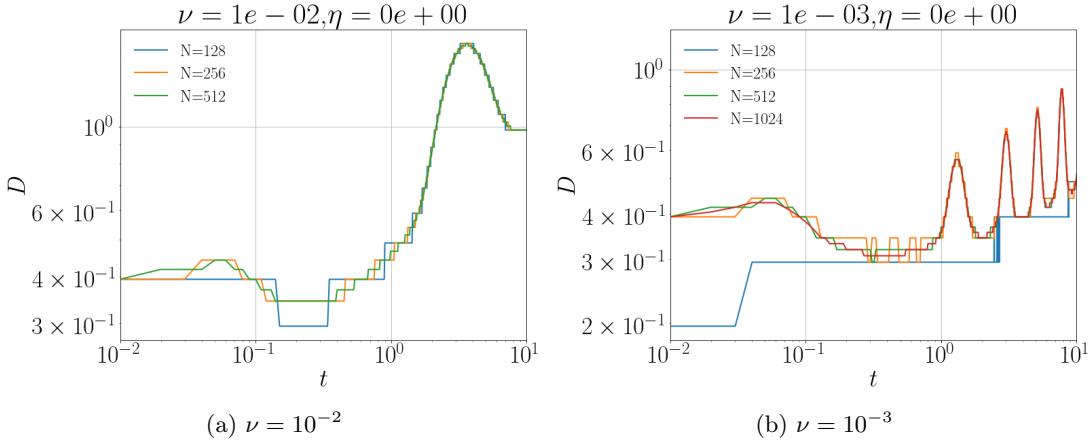


FIGURE 6 – Distance entre le maximum et le minimum de la vorticité au cours du temps pour différentes résolutions. Les plateaux et les sauts correspondent aux distances minimales possibles, c'est pourquoi ils sont surtout présents pour les faibles résolutions.

#### A. Caractérisation de la simulation dans une phase pré-collisionnelle

##### 1. Évolution de l'énergie et de la vorticité

Nous calculons à chaque pas de temps l'énergie moyenne du système au cours du temps. (fig. 7a) et la vorticité moyenne (fig. 7b).

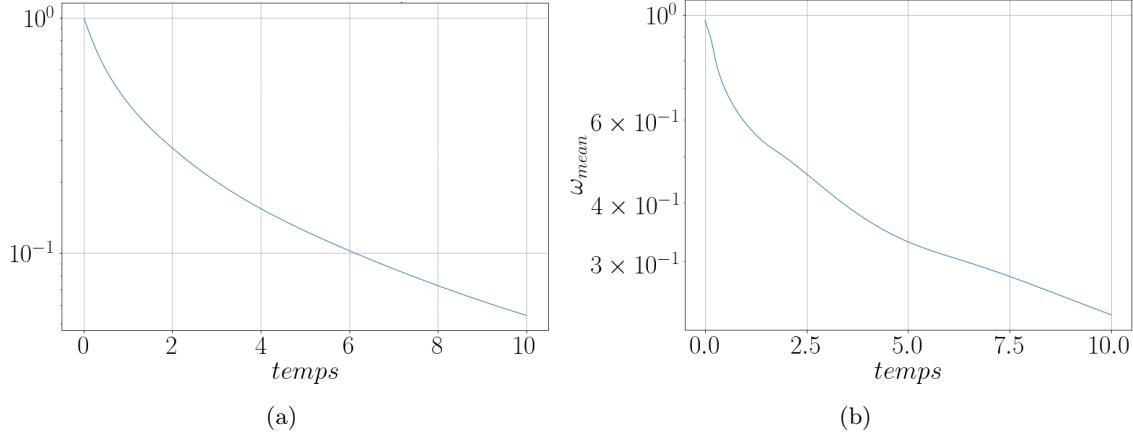


FIGURE 7 – Énergie et vorticité au cours du temps pour initialement un dipôle sombrero,  $\nu = 10^{-2}$  et  $N = 512$ . (a) présente l'énergie au cours du temps et (b) la vorticité moyenne au cours du temps.

L'énergie se dissipe au cours du temps. En l'absence de paroi, l'enstrophie diminue également.

##### 2. Auto-similarité des profils de vorticité

Ici, nous nous concentrons sur l'évolution des dipôles durant le stade pré-collisionnel. Pour ce faire, nous effectuons des simulations sans paroi ( $\eta = 0$ ) avec deux conditions initiales différentes : un dipôle de Lamb-Chaplygin et un dipôle sombrero. L'objectif est de faire évoluer les conditions initiales afin de voir si elles convergent vers le même type de dipôle.

Pour un dipôle de Lamb-Chaplygin, nous relevons les profils de vorticité au cours du temps. On représente ici les profils de vorticité pour 3 temps différents (fig. 8a). Au cours du temps, le profil de vorticité s'étale et son amplitude diminue. Nous remettons à l'échelle le profil en normalisant par  $\omega_{max}$  en ordonnée et en divisant par  $D$  en abscisse.

Après cette opération, quelque soit le temps, les profils de vorticité se superposent (fig. 8b). On obtient donc un profil auto-similaire pour tous les temps.

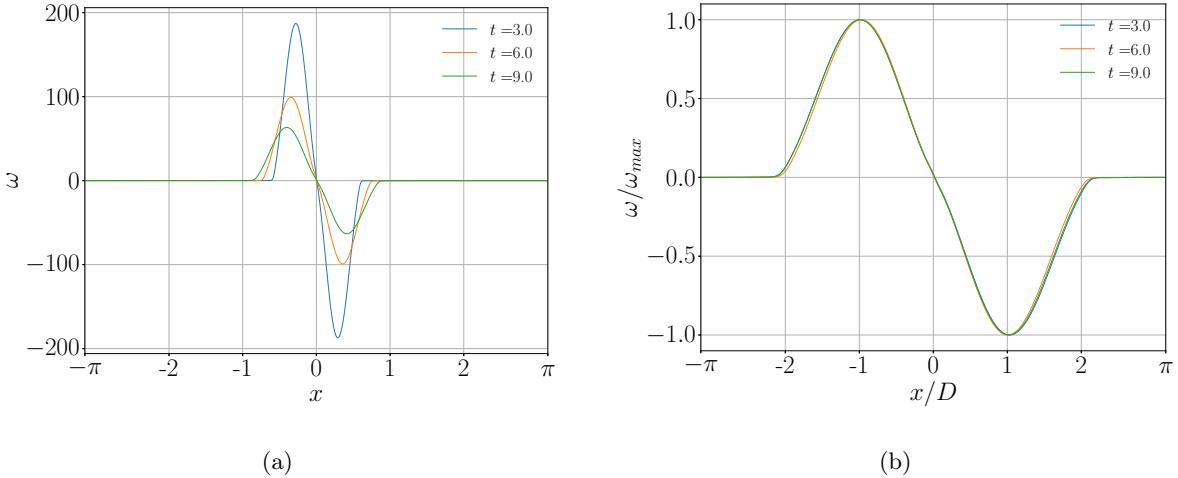


FIGURE 8 – (a) présente des profils de vorticité à trois temps  $t$  différents pour une simulation partant d'un dipôle de Lamb-Chaplygin et ces profils de vorticité sont remis à l'échelle sur (b). Il existe un profil de vorticité auto-similaire pour tout  $t$  lorsque la condition initiale est un dipôle de Lamb-Chaplygin. Ces résultats sont obtenus pour  $\nu = 10^{-3}$  et  $N = 1024$ .

Lorsque la condition initiale est un dipôle sombrero, le fait que le dipôle principal rencontre le dipôle secondaire entraîne une déformation du profil de vorticité. Or, nous ne nous intéressons qu'à l'évolution du dipôle principal. Nous souhaitons donc relever les profils de vorticité aux moments où le dipôle principal interagit le moins avec le dipôle secondaire. Comme expliquer précédemment, nous savons que les interactions entre le dipôle principale et le dipôle secondaire font varier la distance  $D$  entre le maximum et le minimum de vorticité (fig. 6b). Nous relevons donc le profil de vorticité aux minima de  $D$  (fig. 9a).

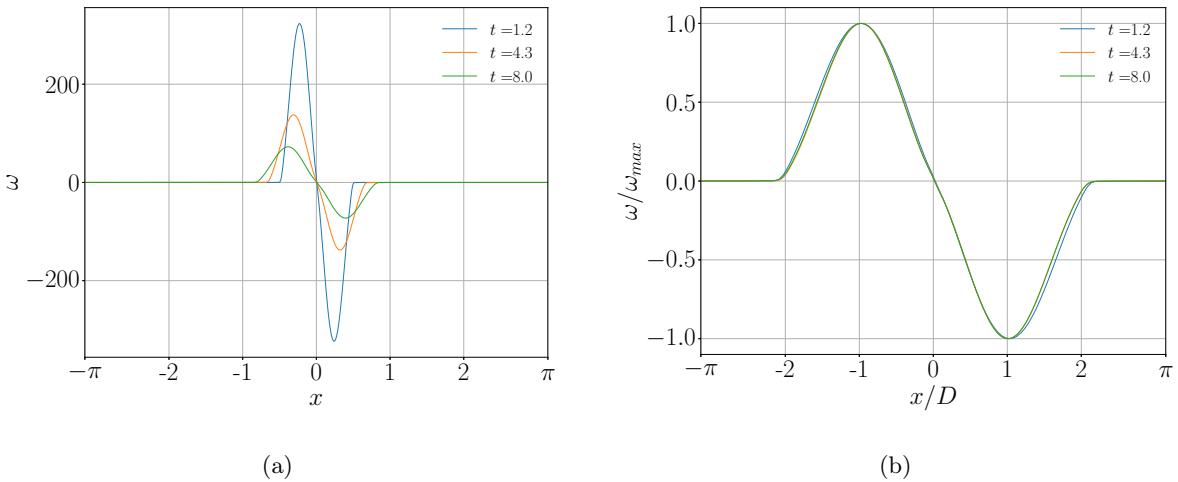


FIGURE 9 – (a) présente des profils de vorticité à trois temps  $t$  correspondant à des minima de  $D$  pour une simulation partant d'un dipôle sombrero et ces profils de vorticité sont remis à l'échelle sur (b). Pour une condition initiale de dipôle sombrero, il existe un profil de vorticité auto-similaire lorsque le dipôle principal n'interagit pas avec le dipôle secondaire. Ces résultats sont obtenus pour  $\nu = 10^{-3}$  et  $N = 1024$ .

Le profil remis à l'échelle (fig. 9b) est également auto-similaire et semble proche de celui partant d'un dipôle de Lamb-Chaplygin.

Les deux conditions initiales différentes conduisent à la formation d'un dipôle et il semblerait que ce dernier ne dépende pas, du moins qualitativement, de la condition initiale. Une façon plus rigoureuse d'étudier la dépendance aux conditions initiales est d'étudier la relation entre la vorticité et la fonction de courant.

### 3. Auto-similarité de la relation $(\psi, \omega)$

Nous présentons la relation entre  $\psi$  et  $\omega$ . Pour ce faire, nous suivons le centre du dipôle et nous nous plaçons dans son référentiel. Un couple  $(\psi, \omega)$  est relevé pour chaque point se situant dans un petit rayon autour du centre du dipôle. Ces couples sont représentés pour un dipôle initial de Lamb-Chaplygin (fig. 10) et pour un dipôle sombrero (fig. 11). Les valeurs de  $\psi$  et  $\omega$  sont normalisées et ajustées par une fonction.

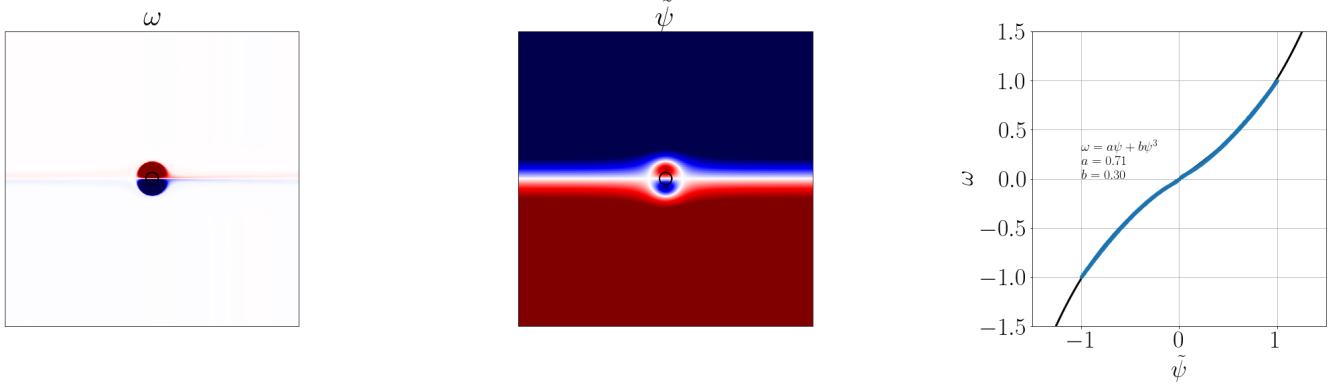


FIGURE 10 – Condition initiale : dipôle de Lamb-Chaplygin

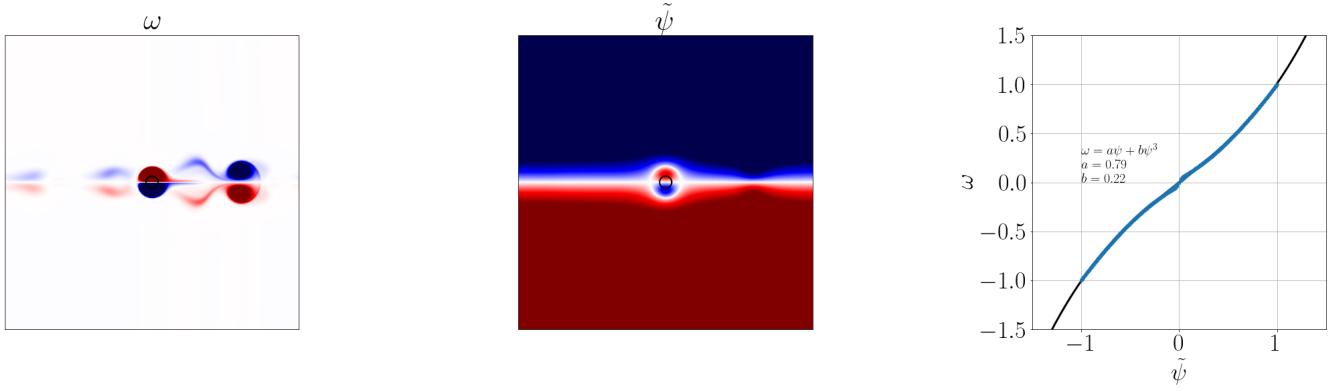


FIGURE 11 – Condition initiale : dipôle sombrero. Les dipôles visibles à gauche du dipôle principale sont des résidus des précédentes interactions entre le dipôle principal et le dipôle secondaire. Le temps est choisi pour correspondre à un moment où ni ces résidus, ni le dipôle secondaire n'interagissent avec le dipôle principal.

On note que le profil de  $(\psi, \omega)$  est une fonctionnelle, caractéristique d'une solution stationnaire des équations d'Euler. A nouveau, il existe un profil auto-similaire quelque soit le temps en partant d'un dipôle de Lamb-Chaplygin et uniquement lorsque les dipôles principal et secondaire n'interagissent plus entre eux dans les simulations partant d'un dipôle sombrero.

Une relation fonctionnelle entre  $\omega$  et  $\psi$  n'est pas triviale, elle permet d'annuler le terme non linéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  dans les équations de Navier-Stokes. Ce terme étant responsable des écoulements turbulents dans le fluide, son annulation correspond donc à une laminarisation de l'écoulement.

Nous notons aussi que les fonctionnelles pour les deux conditions initiales simulées sont qualitativement identiques. On les approche par une fonction avec un terme linéaire et un terme cubique. Néanmoins, les coefficients obtenus diffèrent. Il semblerait donc qu'il demeure des différences quantitatives.

### B. Effet de $R$ et du type de dipôle initial sur $(\psi, \omega)$

Nous cherchons maintenant à connaître les effets d'un changement de  $R$  et d'un changement du type de dipôle sur la relation entre  $\psi$  et  $\omega$ .

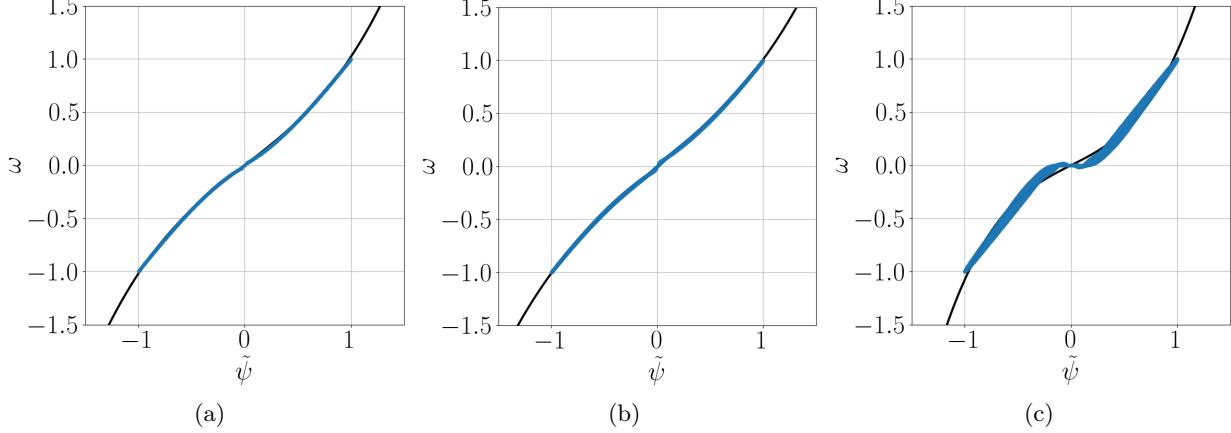


FIGURE 12 – Profil auto-similaire de  $(\psi, \omega)$  pour différents dipôles initiaux. En (a) : dipôle de Lamb-Chaplygin,  $R = \pi/32$ ; en (b) : dipôle sombrero,  $R = \pi/16$  et en (c) : dipôle sombrero,  $R = \pi/8$

Les profils semblent tous qualitativement identiques.

### C. Enstrophie selon le paramètre de paroi

Nous souhaitons visualiser l'impact de la paroi sur l'enstrophie. Nous relevons l'évolution de l'enstrophie en fonction du temps, en faisant varier le paramètre  $\eta$  (fig. 13), la viscosité étant la même pour les différentes simulations.

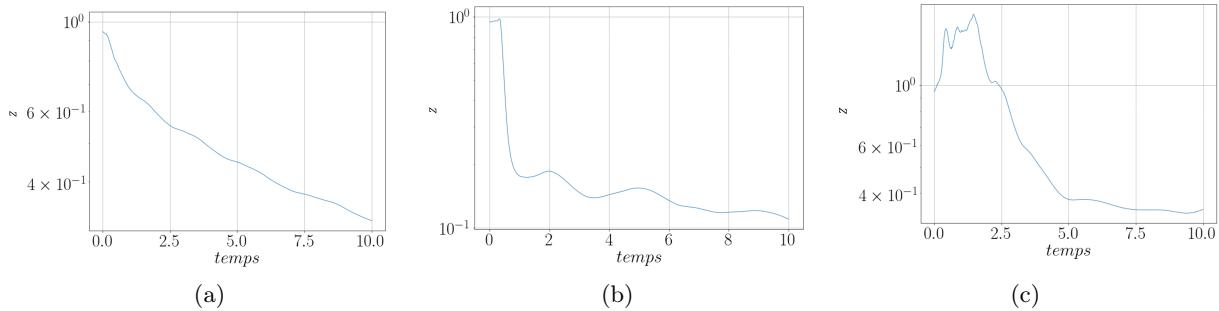


FIGURE 13 – Enstrophie au cours du temps pour différentes valeurs de  $\eta$  ( $N = 512, \nu = 10^{-3}$ ). En (a) :  $\eta = 0$ ; en (b) :  $\eta = 10$  et en (c) :  $\eta = 1000$ .

Ainsi, l'enstrophie est bien créée lorsque les vortex se dirigent vers la paroi.

## V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

En conclusion, nous avons simulé différents dipôles et les avons laissés évoluer. Les premiers résultats tendent à montrer qu'ils convergent vers des dipôles qualitativement identiques, proches des solutions stationnaires des équa-

tions d'Euler. Les résultats ont encore besoin d'être analysés et en particulier comparés avec les données relevées expérimentalement afin de déterminer convenablement si la simulation 2D est pertinente pour décrire la manipulation 3D pour un vortex évoluant librement puis pour un vortex collisionnant sur une paroi.

## REMERCIEMENTS

Je remercie Christophe Brouzet et Simon Thalabard pour m'avoir supervisé avec pédagogie, Nathan, le stagiaire qui s'est occupé de la partie expérimentale ainsi que le laboratoire InphyNi pour leur accueil toute l'année et en particulier lors de ce stage.

## RÉFÉRENCES

- W. E. Boundary layer theory and the zero-viscosity limit of the navier-stokes equation. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 16(2) :207–218, 2000.
- J. M. Wallace. Highlights of 50 years of turbulent boundary layer research. *Journal of Turbulence*, 13(53) :1–70, 2013.
- P. Orlandi. Vortex dipole rebound from a wall. *Physics of Fluids*, 2 :1429–1436, 1990.
- G. F. Carnevale, O. U Velasco Fuentes, and P. Orlandi. Inviscid dipole-vortex rebound from a wall or coast. *J. Fluid Mech*, 351 :75–103, 1997.
- R. Nguyen van yen, M. Farge, and K. Schneider. Energy dissipating structures produced by walls in two-dimensional flows at vanishing viscosity. *Phys. Rev. Lett.*, 106, 2011.
- N. Nguyen van yen, M. Waidmann, R. Klein, M. Farge, and K. Schneider. Energy dissipation caused by boundary layer instability at vanishing viscosity. *J. Fluid Mech.*, 849 :676–717, 2018.
- J. Flor and J. van Heijst. An experimental study of dipolar vortex structures in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 279(1) :101–133, 1994.
- S. I. Voropayev and Ya. D. Afanasyev. Two-dimensional vortex-dipole interactions in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 236 :665–689, 1992.
- Keaton J. Burns, Geoffrey M. Vasil, Jeffrey S. Oishi, Daniel Lecoanet, and Benjamin P. Brown. Dedalus : A flexible framework for numerical simulations with spectral methods. *Physical Review Research*, 2(2) :023068, April 2020. doi: 10.1103/PhysRevResearch.2.023068.
- Miguel D. Bustamante and Marc Brachet. Interplay between the beale-kato-majda theorem and the analyticity-strip method to investigate numerically the incompressible euler singularity problem. *physics.flu-dyn*, 2022.