Estudio del comportamiento de representaciones de tiempo frecuencia en presencia de ruido heterocedástico dependiente

Sofía Nieva

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Buenos Aires

Tesis de Licenciatura
17 de Diciembre de 2021

Tabla de Contenidos

Tabla de Contenidos

Descomposición de señales

Serie de tiempo o *señal*: conjunto de observaciones x_t, cada una registradas en un momento t específico

Modelo aditivo: $X_t = T_t + S_t + Y_t$

- T_t: Tendencia
- S_t: Estacionalidad
- Y_t: Residuo o ruido

Características:

- Heterocedástico
- Dependiente

Ejemplos:

- ARMA
- GARCH

Métodos

Tres dominios:

- Tiempo
- Frecuencia
- Tiempo-Frecuencia $\rightarrow$ Representaciones de tiempo-frecuencia

Modelos:

- Paramétricos
  - TBATS
- No paramétricos
  - EMD
  - SST

Preguntas

1. Si hay varios componentes oscilatorios dentro de la señal, ¿cómo detectarlos y estimarlos?
2. Si existe una tendencia además de los componentes oscilatorios, ¿cómo extraerla?
3. Si el patrón de los componentes oscilatorios varía en el tiempo, ¿cómo cuantificarlo/identificarlo?
4. Dado que la longitud de los datos observados se alarga con el tiempo, ¿qué tan sensible es el estimador a la longitud de la serie de tiempo observada?
5. Si los errores son dependientes, o si la varianza del error cambia según el tiempo, ¿Es el estimador robusto ante tales errores heterocedásticos dependientes?

Identificabilidad

En estadística, un modelo se dice *identificable* si diferentes valores de los parámetros generar diferentes distribuciones de probabilidad de las variables observables. Con lo cual, es *no identificable* si dos o más parametrizaciones son observacionalmente equivalentes.

En otras áreas, el término *identificabilidad* puede tener otros significados. En descomposición de señales vamos a ver condiciones analíticas que permitan dar confianza de que los componentes encontrados son los correctos (estaban en el proceso y no los generó el método).

Tabla de Contenidos

Formulación BATS

Box-Cox (B), errores ARMA (A), tendencia (T) y componentes estacionales (S)

$$y_t^{(\omega)} = \begin{cases} \frac{y_t^{\omega}-1}{\omega} & \omega \neq 0 \\ \log y_t & \omega = 0 \end{cases}$$

$$y_t^{(\omega)} = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^{K} s_{t-m_i}^{(i)} + d_t$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha d_t$$

$$b_t = (1-\phi)b + \phi b_{t-1} + \beta d_t$$

$$s_t^{(i)} = s_{t-m_i}^{(i)} + \gamma_i d_t$$

$$d_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i d_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

Formulación BATS

- y_t es la observación a tiempo t
- $y_t^{(\omega)}$ es la observación transformada con Box-Cox con parámetro ω
- $m_1, \ldots, m_K$ períodos constantes de las componentes estacionales
- ℓ_t es el nivel local
- b es la tendencia a largo plazo
- b_t es la tendencia a corto plazo
- $s_t^{(i)}$ es el i-ésimo componente estacional
- d_t es un proceso $\mathrm{ARMA}(p, q)$
- ε_t es un proceso de ruido blanco Gaussiano (media 0, varianza σ^2)
- Parámetros de suavizado: ϕ, α, β y γ_i para $i = 1, \ldots, K$.
- Argumentos: BATS$(\omega, \phi, p, q, m_1, m_2, \ldots, m_K)$

BATS

Ventajas y Desventajas

- Funciona para múltiples componentes estacionales
- Identifica la tendencia

- No funciona con períodos no enteros o anidados
- No funciona para estacionalidad dinámica
- Requiere estimar muchos parámetros
- Produce componentes estacionales ruidosas

Formulación TBATS

Representación trigonométrica (T) + BATS

- Mas flexible que BATS
- Descomposición de la señal más suave
- Representación trigonométrica de los componentes estacionales, basada en series de Fourier:

$$s_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{k_i} s_{j,t}^{(i)}$$

$$s_{j,t}^{(i)} = s_{j,t-1}^{(i)} \cos \lambda_j^{(i)} + s_{j,t-1}^{*(i)} \sin \lambda_j^{(i)} + \gamma_1^{(i)} d_t$$

$$s_{j,t}^{*(i)} = -s_{j,t-1} \sin \lambda_j^{(i)} + s_{j,t-1}^{*(i)} \cos \lambda_j^{(i)} + \gamma_2^{(i)} d_t$$

Formulación TBATS

- $\gamma_1^{(i)}$ y $\gamma_2^{(i)}$ son parámetros de suavizado
- $\lambda_j^{(i)} = 2\pi j/m_i$ (notar que $\lambda_j^{(i)}$ está fijo)
- $s_{j,t}^{(i)}$ es el nivel estocástico del i-ésimo componente estacional
- $s_{j,t}^{*(i)}$ es el crecimiento estocástico del nivel
- k_i es el número de armónicos requeridos
- Argumentos: TBATS$(\omega, \phi, p, q, \{m_1, k_1\}, \{m_2, k_2\}, \ldots, \{m_K, k_K\})$

El método TBATS se obtiene reemplazando el componente estacional $s_t^{(i)}$ en las ecuaciones de BATS por la formulación estacional trigonométrica

TBATS

Ventajas y Desventajas

- Requiere menos estimaciones iniciales que BATS
- Funciona para múltiples componentes estacionales con períodos no enteros o anidados
- Se puede controlar la suavidad con el número de armónicos
- Tiene en cuenta autocorrelación de los residuos

- La estimación de los parámetros depende de toda la serie
- No hay garantías para errores heterocedásticos
- Si bien tiene componentes estacionales estocásticos, los períodos son fijos

Descomposición Empírica en Modos (EMD)

Funciones de moda intrínseca (IMF)

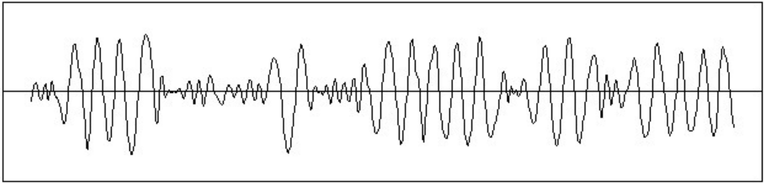
Dada una señal $f(t)$, el método la descompone en varias funciones de moda intrínseca (IMF):

$$f(t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t)$$

$$f_k(t) = A_k(t) \cos\left(\phi_k(t)\right), \text{ con } A_k(t), \phi_k'(t) > 0 \ \forall t$$

Cada IMF f_k es básicamente una función que oscila alrededor de 0, no necesariamente con frecuencia o amplitud constante, pero que en general varían lentamente

Ejemplo IMF



Condiciones IMF

1. En todo el conjunto de datos, el número de extremos locales y el número de ceros de $f_k(t)$ deben ser iguales o diferir máximo en uno
2. En cualquier momento t, el valor de la envolvente definida por los mínimos locales de $f_k(t)$ es el negativo de la envolvente correspondiente definida por los máximos locales.

Sifting

Construcción de la descomposición

1. Empezar con la señal original
2. Construir las envolventes inferior y superior interpolando con splines cúbicos
3. Calcular la curva media (promedio de las envolventes)
4. Restar la media a la señal y repetir hasta obtener un IMF
5. Restar este IMF a la señal original y repetir los pasos anteriores para encontrar el siguiente hasta satisfacer criterio de parada

Descomposición con EMD

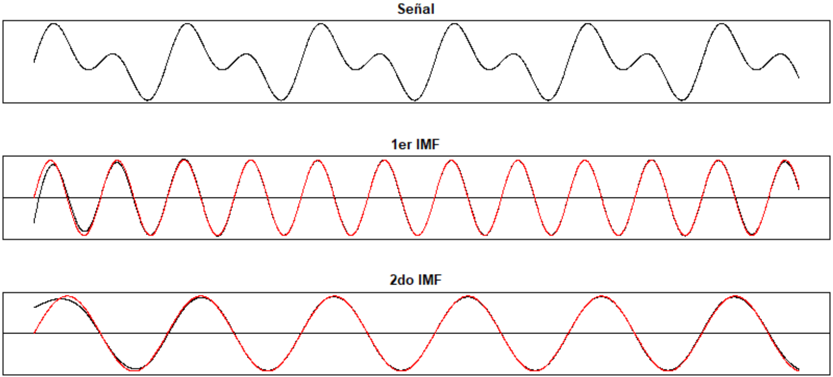


Figura: Descomposición de señal sin ruido suma de dos sinusoides. En rojo el verdadero valor de los componentes y en negro la estimación obtenida con EMD.

Inestabilidad y mezcla de modos

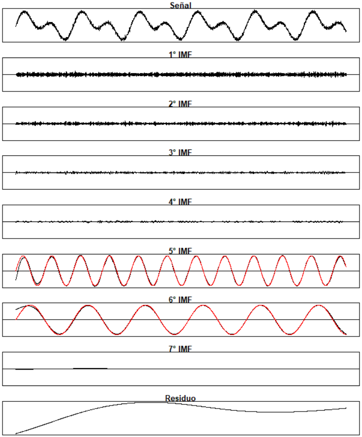


Figura: Descomposición de la misma señal con ruido blanco.

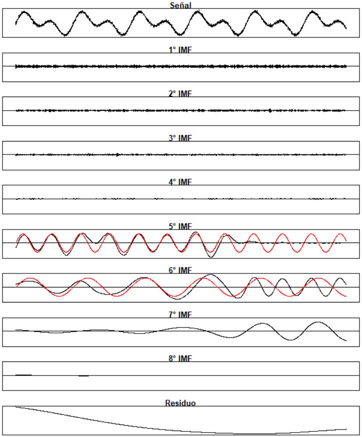


Figura: Descomposición de la misma señal con otra realización del ruido.

EMD

Ventajas y Desventajas

- Funciona para series con múltiples componentes estacionales que varían en el tiempo.
- Funciona para series no estacionarias
- Es local y adaptativo
- Uso eficaz de los datos
- Identifica la tendencia

- Inestable frente a ruido
- Difícil obtener garantías teóricas

Tabla de Contenidos

Wavelets

Pequeñas funciones con forma de onda localizada. Se utilizan para transformar una señal del dominio del tiempo a una representación de tiempo-frecuencia que presente la información de forma más útil.

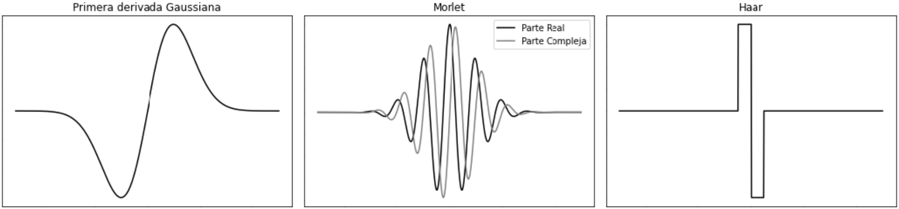


Figura: Ejemplos de wavelets

Requisitos

- Debe tener energía finita:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

- $\hat{\psi}(f)$, la transformada de Fourier debe cumplir:

$$C_g = \int_{0}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < \infty$$

- Para wavelets complejas, la transformada de Fourier debe ser real y decaer para las frecuencias negativas.

Ubicación y Escala

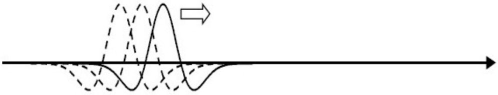


Figura: Distintas ubicaciones de una wavelet

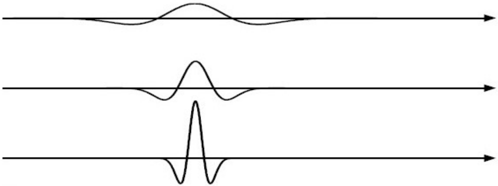


Figura: Distintas escalas de una wavelet

Wavelet madre

Es la forma básica de la wavelet de la que luego se derivan las versiones dilatadas y trasladadas que se utilizan en la transformación

Ejemplo (Sombrero Mejicano)

Wavelet madre:

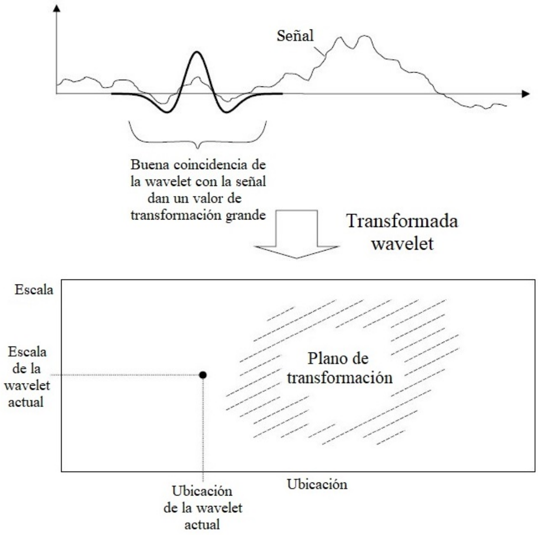
$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$$

Versión dilatada y trasladada:

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \left(1 - \left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[(t-b)/a\right]^2}$$

a parámetro de escala, b parámetro de ubicación

Esquema CWT


Señal
Buena coincidencia de
la wavelet con la señal
dan un valor de
transformación grande
Transformada
wavelet
Escala
Escala
de la
wavelet
actual
Plano de
transformación
Ubicación
de la wavelet
actual
Ubicación

Formulación

Transformada respecto a una wavelet ψ

$$T(a,b) = w(a)\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

donde $x(t)$ es la señal, $w(a)$ es una función de peso y * indica el conjugado

Notación

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_{a,b}^*(t)dt$$

Interrogación de una señal

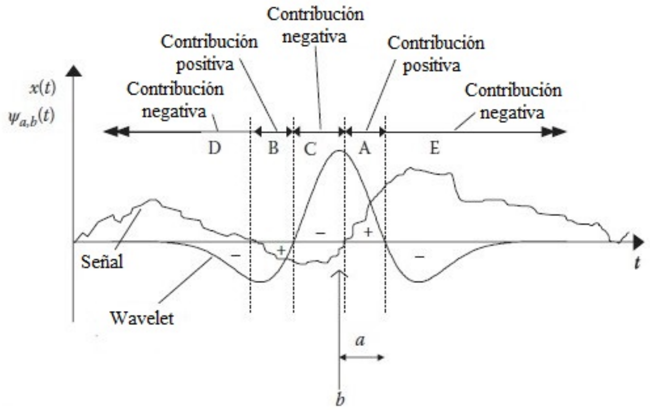


Figura: Wavelet con una escala y ubicación específica sobre una señal.

Gráfico de la Transformada

Contorno

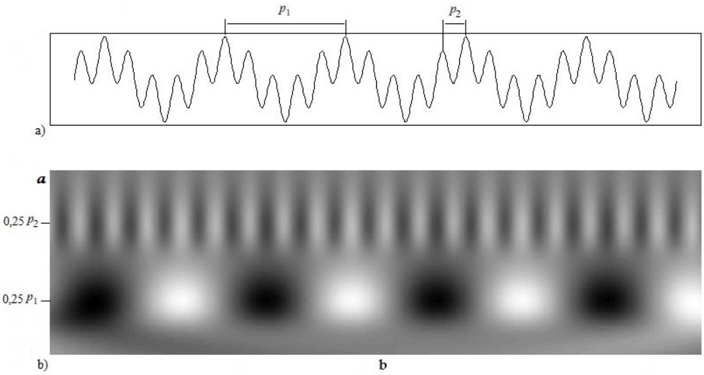


Figura: **a)** Señal compuesta por dos sinusoides **b)** Gráfico de contorno de $T(a, b)$. (wavelet madre: Sombrero Mejicano)

Gráfico de la Transformada

Fase y módulo

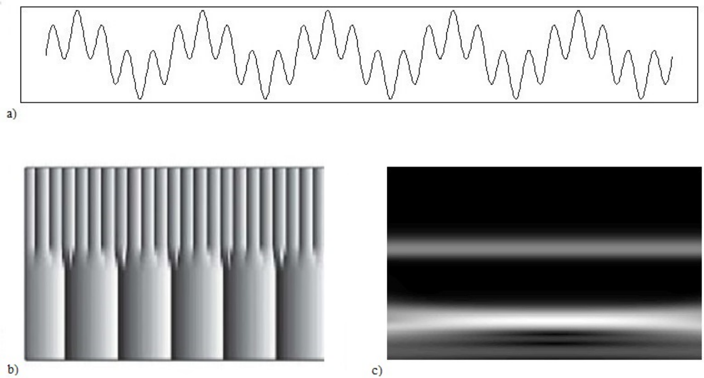


Figura: **a)** Señal compuesta por dos sinusoides. **b)** Gráfico de la fase $\phi(a, b)$ de $T(a, b)$. **c)** Gráfico del módulo de $T(a, b)$. (wavelet madre: Morlet)

Transformada inversa

Transformada wavelet inversa

Permite recuperar la señal original a partir de su transformada wavelet al integrar en todas las escalas y ubicaciones, a y b:

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} T(a,b)\psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

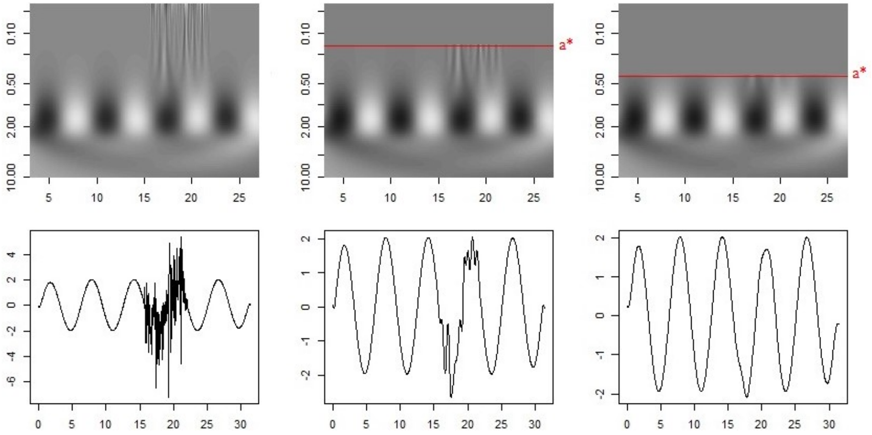
Filtrado básico

Fijamos una escala a^* como umbral y asignamos $T(a,b) = 0, \ \forall \ a < a^*$

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a^*}^{\infty} T(a,b)\psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

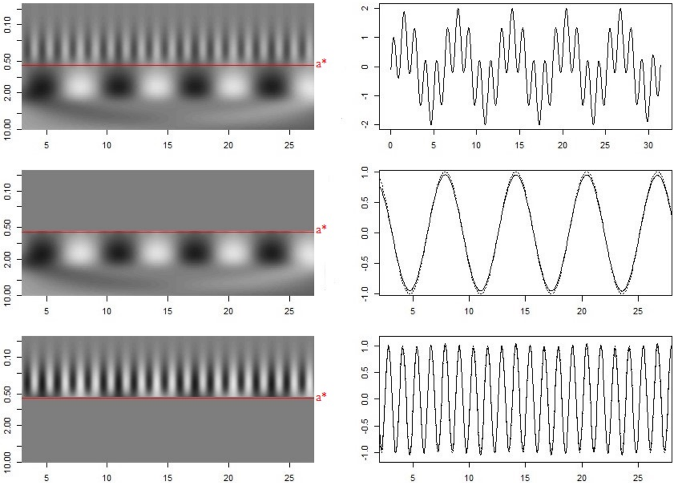
Aplicaciones

Filtrado de ruido



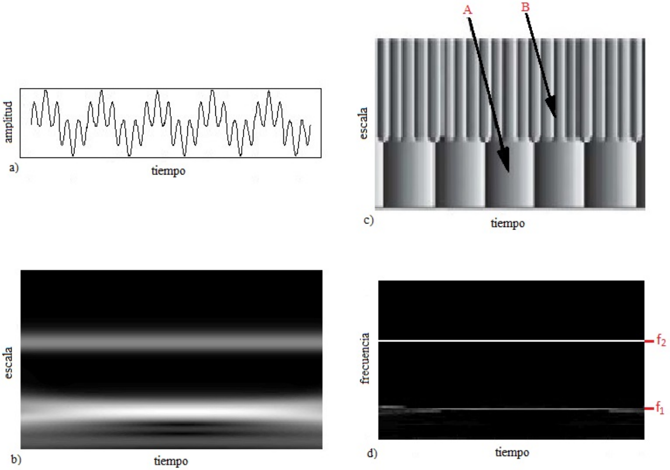
Aplicaciones

Reconstrucción de componentes



Métodos de reasignación

Synchrosqueezing



Clase $\mathcal{A}_\epsilon$

Definición

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se dice que es de tipo moda intrínseca con precisión $\epsilon > 0$ si f y $A := |f|$ tienen las siguientes propiedades:

$$f(t) = A(t)e^{2\pi i \phi(t)}, \text{ donde}$$

$$A \in C^1(\mathbb{R}),\ \phi \in C^2(\mathbb{R}),\ \inf_{t\in\mathbb{R}} \phi'(t) > 0$$

$$\left|A'(t)\right|,\ \left|\phi''(t)\right| \leq \epsilon \left|\phi'(t)\right|,\ \forall t \in \mathbb{R}, \text{ y } M'' := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\phi''(t)\right| < \infty$$

Llamamos función de amplitud a $A(t)$, función de fase a $\phi(t)$ y frecuencia instantánea a $\phi'(t)$

Clase $\mathcal{A}_{\epsilon,d}$

Definición

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se dice que es una superposición de componentes de moda intrínseca bien separados con precisión $\epsilon > 0$ y separación $d > 0$ si puede escribirse como:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t)$$

donde las f_k son funciones de tipo moda intrínseca y sus respectivas funciones de fase ϕ_k satisfacen:

$$\phi_k'(t) > \phi_{k-1}'(t) \ \text{ y } \ |\phi_k'(t) - \phi_{k-1}'(t)| \geq d \left[\phi_k'(t) + \phi_{k-1}'(t)\right], \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Algoritmo SST

1. Elegir wavelet madre $\psi \in \mathcal{S}$ tal que *sop*$(\widehat{\psi}) \subset [1-\Delta, 1+\Delta]$, $\Delta \ll 1$ y calcular $T_f(a,b)$
2. Calcular la regla de reasignación:

$$\omega_f(a,b) := \begin{cases} \frac{-i\partial_b T_f(a,b)}{2\pi T_f(a,b)} & \text{si} \quad |T_f(a,b)| \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad |T_f(a,b)| = 0 \end{cases}$$

3. La SST de $f(t)$ con umbral ϵ se define como:

$$S_{f,\epsilon}(b,\xi) := \lim_{\alpha \to 0} \int_{\{(a,b): |T_f(a,b)| \geq \epsilon\}} h_\alpha \left(|\omega_f(a,b) - \xi| \right) T_f(a,b) a^{-3/2} da$$

donde $(b,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $\alpha, \epsilon > 0$, $h_\alpha(b) := \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{b}{\alpha}\right)$, $h \in L^1(\mathbb{R})$, y $h_\alpha \to \delta$ débilmente cuando $\alpha \to 0$ con δ la función delta de Dirac.

Resultados teóricos

En ausencia de ruido

Teorema

Sean $f \in \mathcal{A}_{\epsilon,d}$, $\widetilde{\epsilon} := \epsilon^{1/3}$, ψ tal que $sop(\widehat{\psi}) \subset [1-\Delta, 1+\Delta]$, con $\Delta < d/(1+d)$, y sea $\mathcal{R}_\psi = \int \widehat{\psi}(\zeta)\zeta^{-1}d\zeta$. Consideramos la CWT $T_f(a,b)$ de f respecto a la wavelet ψ, y la SST $S_{f,\tilde{\epsilon}}(b,\omega)$, obtenida de T_f, con umbral $\widetilde{\epsilon}$. Entonces, dado ϵ suficientemente chico, vale lo siguiente:

(I) $|T_f(a,b)| > \widetilde{\epsilon}$ si para algún k, $(a,b) \in Z_k = \{(a,b); |a\phi_k'(b) - 1| < \Delta\}$

(II) Para cada $k \in \{1,\dots,K\}$, y para cada par $(a,b) \in Z_k$ para el cual $|T_f(a,b)| > \widetilde{\epsilon}$, se tiene que $|\omega_f(a,b) - \phi_k'(b)| \leq \widetilde{\epsilon}$

(III) Además, para cada $k \in \{1,\dots,K\}$, existe una constante C_1 tal que, para cualquier $b \in \mathbb{R}$,

$$\left| \left(\mathcal{R}_\psi^{-1} \int_{|\omega - \phi_k'(b)| < \tilde{\epsilon}} S_{f,\tilde{\epsilon}}(b,\omega) d\omega \right) - A_k(b) e^{2\pi i \phi_k(b)} \right| \leq C_1 \widetilde{\epsilon}$$

Resultados teóricos

En presencia de ruido blanco Gaussiano

Teorema

Sea $f \in \mathcal{A}_{\epsilon,d}$, ϵ, ψ, Δ y Z_k como en el teorema anterior, con $\psi \in \mathcal{S}$ y $|\langle \psi, \psi' \rangle| < \|\psi\|_{L^2} \|\psi'\|_{L^2}$. Sea $g = f + N$, donde N es ruido blanco Gaussiano con densidad espectral ϵ^{2+p} para algún $p > 0$. Para cada k, sea $M_k \geq 1$ dado por $M_k = \max\left(\frac{1}{1-\Delta}\|\phi_k'\|_{L^\infty}, (1+\Delta)\left\|\frac{1}{\phi_k'}\right\|_{L^\infty}\right)$, entonces:

(I) Si $a \in \left[M_k^{-1}, M_k\right]$, para cada punto $(a,b) \in Z_k$ con $|T_f(a,b)| > \widetilde{\epsilon}$, $\exists$ E_1 y C_2' ctes tales que con probabilidad $1 - e^{-E_1\epsilon^{-p}}$, $|\omega_g(a,b) - \phi_k'(b)| \leq C_2'\tilde{\epsilon}$. Si $(a,b) \notin Z_k$ para ningún k, entonces $\exists$ E_2 cte, tal que con probabilidad $1 - e^{-E_2\epsilon^{-p}}$, $|T_g(a,b)| \leq \tilde{\epsilon} + \frac{1}{2}\epsilon$.

(II) $\exists$ C_3' cte tal que con probabilidad $1 - e^{-E_1\epsilon^{-p}}$, $\forall$ $b \in \mathbb{R}$ se tiene:
$$\left|\left(\mathcal{R}_\psi^{-1}\int_{|\omega-\phi_k'(b)|\leq C_2'\tilde{\epsilon}} S_{f,M_k^{1/2}\epsilon+\tilde{\epsilon}}(b,\omega)d\omega\right) - A_k(b)e^{2\pi i\phi_k(b)}\right| \leq C_3'\tilde{\epsilon}$$

Resultados teóricos

Ideas

- El método de synchrosqueezing tiene éxito en descomponer funciones arbitrarias en la clase $\mathcal{A}_{\epsilon,d}$
- Identifica la frecuencia instantánea y la amplitud de cada componente
- La SST está completamente concentrada, en el plano (b,ω), en bandas estrechas alrededor de las curvas de frecuencia instantánea $\omega = \phi'_k(b)$
- Para reconstruir el k-ésimo componente $A_k(b)e^{2\pi i\phi_k(b)}$, invertimos $S_{f,\tilde{\epsilon}}$ restringiendo el dominio a la k-ésima banda concentrada
- Obtenemos una descomposición adaptativa con garantías teóricas sobre la precisión de la estimación de los componentes

Tabla de Contenidos

Problema

Con SST podemos aproximar bien los componentes estacionales de $f \in \mathcal{A}_{\epsilon,d}$. Pero, ¿es esa la única representación de f dentro de la clase?

Ejemplo

$$\frac{1}{4}\cos([\Omega-\gamma]t)+\frac{5}{2}\cos(\Omega t)+\frac{1}{4}\cos([\Omega+\gamma]t)=\left(2+\cos^2\left[\frac{\gamma}{2}t\right]\right)\cos(\Omega t)$$

En general, la expresión $f(t)=\sum_{k=1}^{K} A_k(t)\cos(2\pi\phi_k(t))$ no es única y por lo tanto existe el problema de la identificabilidad de f. Soluciones:

- Modelar $A(t)$ y $\phi(t)$ de forma paramétrica $\rightarrow$ Restrictivo
- Considerar nuevas clases de funciones ($\mathcal{A}_{\epsilon}^{c_1,c_2}$ y $\mathcal{A}_{\epsilon,d}^{c_1,c_2}$) que imponen supuestos no paramétricos sobre $A(t)$ y $\phi(t)$

Clase $\mathcal{A}_\epsilon^{c_1,c_2}$

Definición

Dados $0 < \epsilon \ll 1$ y $\epsilon \ll c_1 < c_2 < \infty$, el espacio $\mathcal{A}_\epsilon^{c_1,c_2}$ de funciones de moda intrínseca consiste de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ de la forma

$$f(t) = A(t)\cos(2\pi\phi(t))$$

donde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfacen las siguientes condiciones para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$A \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \inf_{t\in\mathbb{R}} A(t) > c_1, \sup_{t\in\mathbb{R}} A(t) < c_2$$

$$\phi \in C^2(\mathbb{R}), \inf_{t\in\mathbb{R}} \phi'(t) > c_1, \sup_{t\in\mathbb{R}} \phi'(t) < c_2$$

$$\left|A'(t)\right| \leq \epsilon\phi'(t), \quad \left|\phi''(t)\right| \leq \epsilon\phi'(t)$$

Clase $\mathcal{A}_{\epsilon,d}^{c_1,c_2}$

Definición

Fijado $0 < d < 1$, el espacio $\mathcal{A}_{\epsilon,d}^{c_1,c_2}$ de superposiciones de funciones de moda intrínseca consiste en funciones f de la forma

$$f(t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t)$$

para algún $K > 0$ finito y para cada $k = 1, \ldots, K,\ f_k(t) \in \mathcal{A}_{\epsilon}^{c_1,c_2}$ tal que ϕ_k satisface

$$\phi_k'(t) > \phi_{k-1}'(t) \quad \text{y} \quad \phi_k'(t) - \phi_{k-1}'(t) \geq d\left[\phi_k'(t) + \phi_{k-1}'(t)\right]$$

Clase $\mathcal{A}_{\epsilon}^{c_1,c_2}$

Teorema

Supongamos que $a(t)\cos\phi(t) \in \mathcal{A}_{\epsilon}^{c_1,c_2}$ puede representarse de una forma diferente que también pertenece a $\mathcal{A}_{\epsilon}^{c_1,c_2}$, es decir,

$$a(t)\cos\phi(t) = A(t)\cos\varphi(t) \in \mathcal{A}_{\epsilon}^{c_1,c_2}$$

Definimos $t_m \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(t_m) = (m + 1/2)\pi$, $s_m \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(s_m) = m\pi$, $\alpha(t) = A(t) - a(t)$ y $\beta(t) = \varphi(t) - \phi(t)$. Entonces $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$, $\beta \in C^1(\mathbb{R})$, $\alpha(t_m) = 0\ \forall m$, $\beta(s_m) \geq 0\ \forall m$ y $\beta(s_m) = 0$ si y solo si $\alpha(s_m) = 0$. Además, tenemos que $|\alpha'(t)| \leq 3\pi\epsilon$, $|\alpha(t)| \leq \frac{4\pi^2\epsilon}{c_1}$ y $|\beta(t)| < 3\pi\epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Clase $\mathcal{A}_{\epsilon,d}^{c_1,c_2}$

Teorema

Supongamos que $f(t) = \sum_{l=1}^{N} a_l(t)\cos\phi_l(t) \in \mathcal{A}_{\epsilon,d}^{c_1,c_2}$ puede representarse de una forma diferente que también pertenece a $\mathcal{A}_{\epsilon,d}^{c_1,c_2}$, es decir,

$$f(t) = \sum_{l=1}^{N} a_l(t)\cos\phi_l(t) = \sum_{l=1}^{M} A_l(t)\cos\varphi_l(t) \in \mathcal{A}_{\epsilon,d}^{c_1,c_2}$$

entonces $M = N$, $|\phi_l(t) - \varphi_l(t)| \leq E_l\epsilon$, $|\phi_l'(b) - \varphi_l'(b)| \leq E_l\epsilon$ y $|a_l(t) - A_l(t)| \leq E_l\epsilon$ para todo $l = 1, \ldots, N$, donde $E_l > 0$ es una constante universal finita que depende de c_1, c_2 y d.

Caso Continuo

Se modela a un proceso aleatorio $Y(t)$ con múltiples componentes estacionales y tendencia contaminadas por errores heterocedásticos dependientes de la siguiente manera:

$$Y(t) = f(t) + T(t) + \sigma(t)\Phi(t)$$

- La estacionalidad $f(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) \cos(2\pi\phi_k(t))$ está en $\mathcal{A}_{\epsilon}^{c_1,c_2}$ o en $\mathcal{A}_{\epsilon,d}^{c_1,c_2}$ cuando $K > 1$
- La tendencia $T(t)$ es una función real C^1
- $\Phi(t)$ es algún proceso aleatorio estacionario
- $\sigma \in C^\infty \cap L^\infty$ es una función suave que se utiliza para modelar la heterocedasticidad del término de error, con $\sigma(t) > 0$

Caso Discreto

En la práctica, solo podemos acceder al proceso de tiempo continuo $Y(t)$ en puntos de muestreo discretos $n\tau$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $\tau > 0$ es el intervalo de muestreo. Entonces, consideramos el siguiente modelo de tiempo discreto:

$$Y_n = f(n\tau) + T(n\tau) + \sigma(n\tau)\Phi_n, n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

- f, T y σ son como en el caso continuo
- $\Phi_n, n \in \mathbb{Z}$ es una serie estacionaria con media cero, por ejemplo, un proceso ARMA

Teoremas de Chen

Caso continuo y discreto

Muestran la robustez de SST para señales suma de estacionalidad más tendencia contaminada además por un proceso aleatorio heterocedástico y dependiente

Ventajas:

- Modelo no paramétrico junto con la técnica adaptativa de análisis de tiempo-frecuencia SST conforman un método capaz de responder satisfactoriamente las 5 preguntas
- Además tenemos los resultados de identificabilidad que nos dan confianza en las estimaciones encontradas

Tabla de Contenidos

Funciones

$$s_{1,1}(t) := 2{,}5\cos(2\pi t),\ \ s_{1,2} := 3\cos\left(2\pi^2 t\right)$$

$$A_1(t) := (1 + 0{,}1\cos(t))\arctan\left(\frac{1132 - 200t}{87}\right)/2 + 2$$

$$A_2(t) := 3{,}5\chi_{[0,\ 7{,}5]}(t) + 2\chi_{(7{,}5,\ 10]}(t)$$

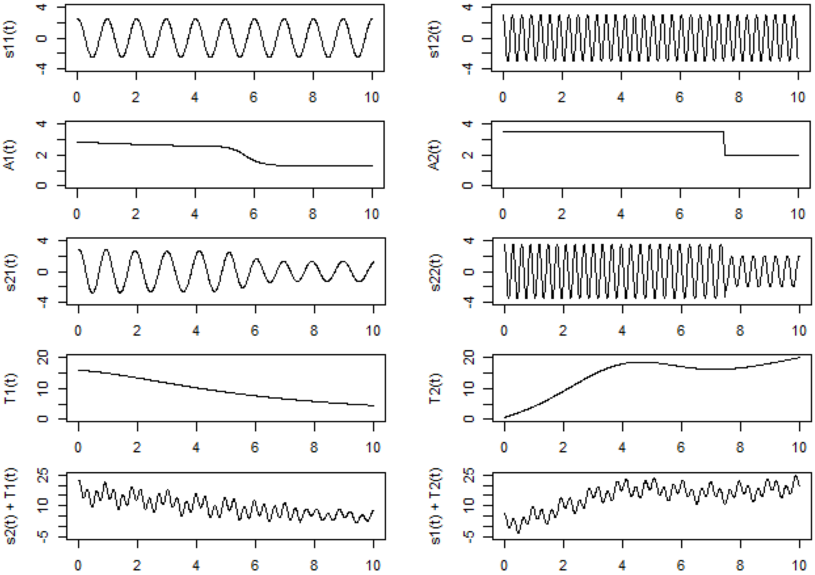
$$\phi_1(t) := t + 0{,}1\sin(t),\ \ \phi_2(t) := 3{,}4t - 0{,}02|t|^{2{,}3}$$

$$s_{2,1}(t) := A_1(t)\cos\left(2\pi\phi_1(t)\right),\ \ s_{2,2} := A_2(t)\cos\left(2\pi\phi_2(t)\right)$$

Estacionalidad y Tendencia

$$s_1(t) := s_{1,1}(t) + s_{1,2}(t),\ \ s_2(t) := s_{2,1}(t) + s_{2,2}(t)$$

$$T_1(t) := 8\left(\frac{1}{1 + (\frac{t}{5})^2} + e^{-\frac{t}{10}}\right),\ \ T_2(t) := 2t + 10e^{-\frac{(t-4)^2}{6}}$$


s11(t)
s12(t)
A1(t)
A2(t)
s21(t)
s22(t)
T1(t)
T2(t)
s2(t) + T1(t)
s1(t) + T2(t)

Ruido

- $X_1(n) := 2\sigma(n\tau)X_{\mathrm{ARMA1}}(n)$
- $X_2(n) := \sigma(n\tau)\left(4X_{\mathrm{ARMA1}}(n)\chi_{[1,\frac{N}{2}]}(n) + X_{\mathrm{ARMA2}}(n)\chi_{[\frac{N}{2}+1,N]}(n)\right)$
- $X_3(n) := 2X_{\mathrm{GARCH}}(n)$

Métrica

Raíz del error cuadrático medio

$$\mathrm{RMSE}(y,\hat{y}) = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{y}_t - y_t\right)^2}{T}}$$

Muestreo

- Período de tiempo [0, 10]
- Intervalo de muestreo de longitud $\tau = 1/100$
- Resultan $N = 1001$ puntos de muestreo

Experimentos

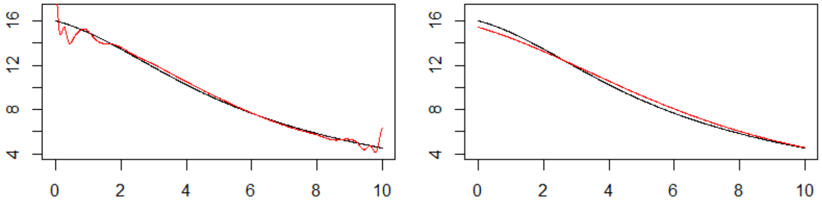
Vamos a probar los algoritmos en series de tiempo de la forma:

$$\boldsymbol{Y_{i,j,k,\sigma_0}} := \boldsymbol{s_i} + \boldsymbol{T_j} + \sigma_0 \boldsymbol{X_k}$$

donde $i = 1, 2,\ j = 1, 2,\ k = 1, 2, 3$ y $\sigma_0 \geq 0$

Elección de parámetros

- Wavelet madre: "hhhat" (función analítica de Hilbert del sombrero hermitiano)
- Cantidad de componentes estacionales $K = 2$
- Umbral Γ, valor por defecto
- Número de voces $n_v = 32$
- Lidiamos con los efectos de frontera



Experimento 1

Señal sin ruido $s_2 + T_1$

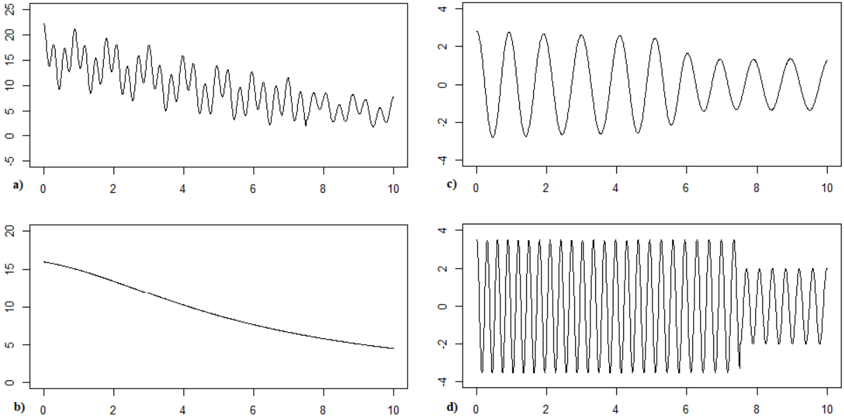
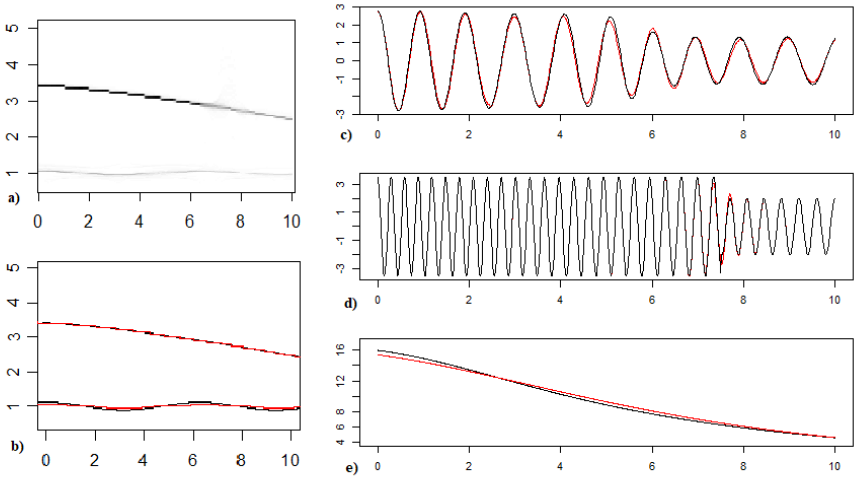


Figura: **a)** $s_2 + T_1$ **b)** T_1 **c)** $s_{2,1}$ **d)** $s_{2,2}$

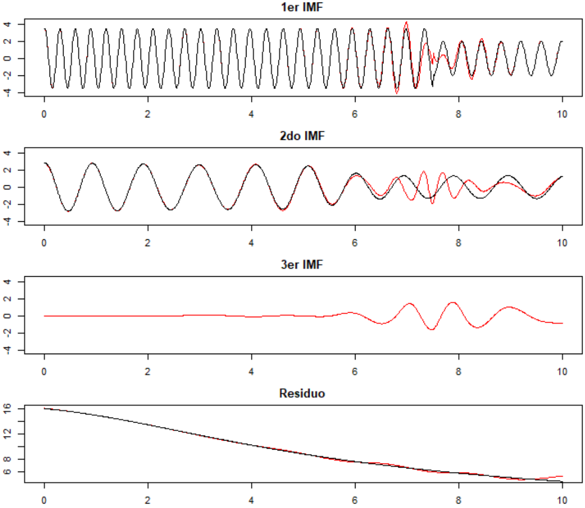
Experimento 1

Resultado SST



Experimento 1

Resultado EMD



Experimento 1

Resultados

Método	$\widetilde{s_{2,1}}$	$\widetilde{s_{2,2}}$	$\widetilde{T_1}$
SST	0,170	0,084	0,325
EMD	0,662	0,418	0,155

Tabla: Resultados de SST y EMD para la señal $s_2 + T_1$

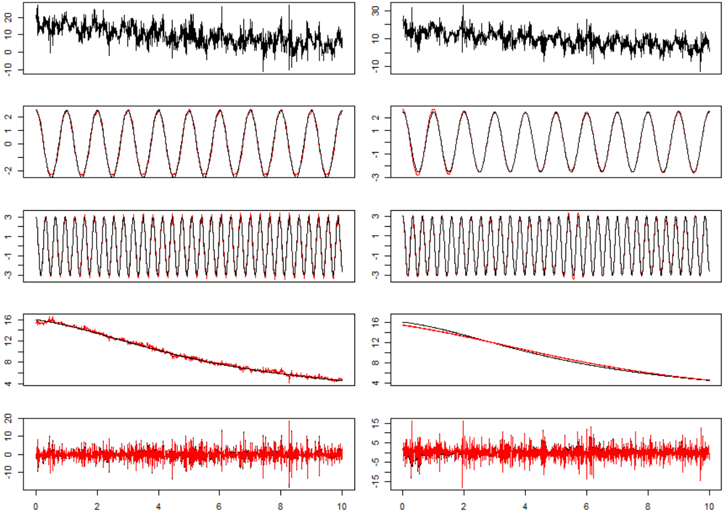
Experimento 2

Señal con estacionalidad no dinámica $\boldsymbol{Y}_{1,1,1,1} := \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{X}_1$

- 101 realizaciones
- Analizamos con SST y TBATS
- TBATS necesita como parámetro los períodos de los componentes estacionales, 100 y $100/\pi$
- Graficamos la descomposición hecha por cada método para la realización que tuvo como RMSE la mediana entre todas las realizaciones.

Experimento 2

Resultados TBATS/SST



Experimento 2

Resultados

Método	$\widetilde{s_{1,1}}$	$\widetilde{s_{1,2}}$	$\widetilde{T_1}$	$\widetilde{r}$	Tiempo
SST	$0{,}103 \pm 0{,}023$	$0{,}181 \pm 0{,}024$	$0{,}327 \pm 0{,}020$	$0{,}391 \pm 0{,}024$	$2{,}761 \pm 0{,}223$
TBATS	$0{,}140 \pm 0{,}036$	$0{,}204 \pm 0{,}068$	$0{,}431 \pm 0{,}655$	$0{,}518 \pm 0{,}649$	$7{,}714 \pm 1{,}819$

Tabla: Resultados de SST y TBATS para la señal $\boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{T_1} + \boldsymbol{X_1}$.

Experimento 3

Señales con estacionalidad dinámica $\boldsymbol{Y}_{2,j,k,\sigma_0} := \boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{T}_j + \sigma_0 \boldsymbol{X}_k$

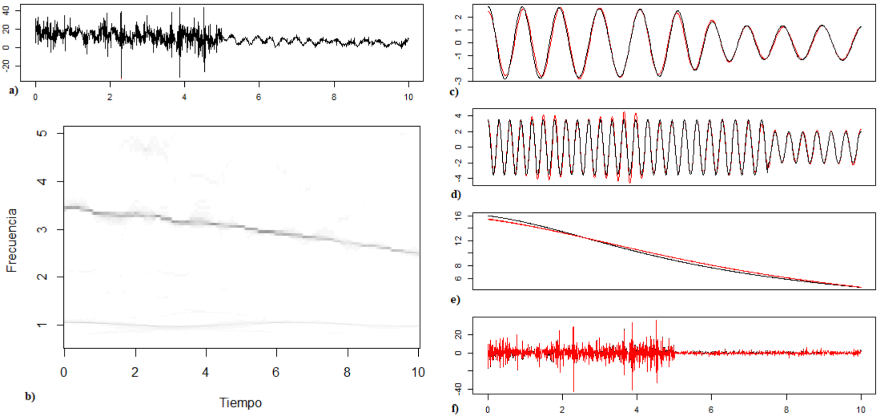


Figura: Resultado SST para la señal $\boldsymbol{Y}_{2,1,2,1} := \boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{X}_2$

Experimento 3

Resultados SST

(j, k, σ_0)	$\widetilde{s_{1,1}}$	$\widetilde{s_{1,2}}$	$\widetilde{T_1}$	$\widetilde{r}$	Tiempo
(1, 2, 0.5)	$0{,}206 \pm 0{,}018$	$0{,}164 \pm 0{,}020$	$0{,}327 \pm 0{,}015$	$2{,}960 \pm 0{,}199$	$2{,}378 \pm 0{,}270$
(2, 2, 0.5)	$0{,}205 \pm 0{,}018$	$0{,}164 \pm 0{,}020$	$2{,}124 \pm 0{,}016$	$3{,}629 \pm 0{,}166$	$2{,}945 \pm 0{,}494$
(1, 2, 1)	$0{,}241 \pm 0{,}035$	$0{,}279 \pm 0{,}043$	$0{,}333 \pm 0{,}029$	$0{,}499 \pm 0{,}037$	$2{,}765 \pm 0{,}262$
(2, 2, 1)	$0{,}241 \pm 0{,}035$	$0{,}279 \pm 0{,}043$	$2{,}124 \pm 0{,}031$	$2{,}156 \pm 0{,}030$	$2{,}661 \pm 0{,}169$
(1, 3, 0.5)	$0{,}253 \pm 0{,}042$	$0{,}279 \pm 0{,}032$	$0{,}332 \pm 0{,}029$	$1{,}967 \pm 0{,}078$	$2{,}482 \pm 0{,}085$
(2, 3, 0.5)	$0{,}253 \pm 0{,}042$	$0{,}279 \pm 0{,}032$	$2{,}125 \pm 0{,}029$	$2{,}877 \pm 0{,}083$	$2{,}758 \pm 0{,}146$
(1, 3, 1)	$0{,}368 \pm 0{,}076$	$0{,}504 \pm 0{,}064$	$0{,}348 \pm 0{,}058$	$0{,}719 \pm 0{,}069$	$2{,}824 \pm 0{,}128$
(2, 3, 1)	$0{,}368 \pm 0{,}076$	$0{,}504 \pm 0{,}064$	$2{,}128 \pm 0{,}058$	$2{,}220 \pm 0{,}059$	$2{,}411 \pm 0{,}120$

Tabla: Resultados de aplicar SST a señales $\boldsymbol{Y_{2,j,k,\sigma_0}} := \boldsymbol{s_2} + \boldsymbol{T_j} + \sigma_0 \boldsymbol{X_k}$

Experimento 3

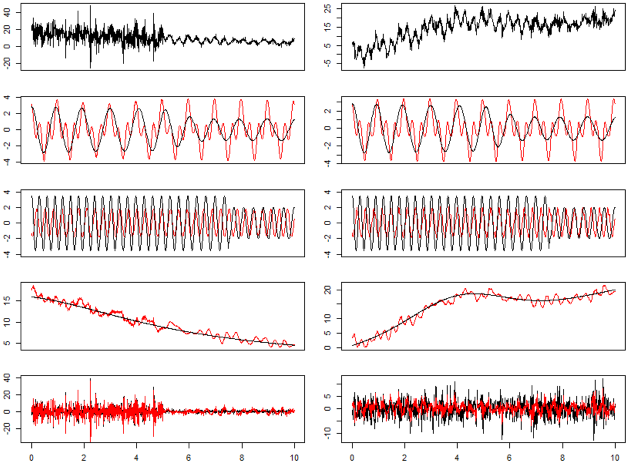


Figura: Resultado TBATS para las señales $\boldsymbol{Y}_{2,1,2,1} := \boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{X}_2$ (izquierda) y $\boldsymbol{Y}_{2,2,3,0,5} := \boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{T}_2 + 0{,}5\boldsymbol{X}_3$ (derecha)

Experimento 3

Resultados TBATS

(j, k, σ_0)	$\widetilde{s_{1,1}}$	$\widetilde{s_{1,2}}$	$\widetilde{T_1}$	$\widetilde{r}$	**Tiempo**	**Fallas**
(1, 2, 0.5)	$1{,}393 \pm 0{,}072$	$2{,}098 \pm 0{,}016$	$1{,}187 \pm 0{,}851$	$3{,}726 \pm 0{,}796$	$8{,}926 \pm 2{,}690$	1
(2, 2, 0.5)	$1{,}412 \pm 0{,}048$	$2{,}096 \pm 0{,}023$	$1{,}363 \pm 0{,}615$	$3{,}738 \pm 0{,}598$	$8{,}876 \pm 2{,}862$	1
(1, 2, 1)	$1{,}411 \pm 0{,}046$	$2{,}116 \pm 0{,}022$	$0{,}865 \pm 0{,}199$	$1{,}897 \pm 0{,}147$	$10{,}447 \pm 3{,}394$	3
(2, 2, 1)	$1{,}411 \pm 0{,}045$	$2{,}112 \pm 0{,}019$	$1{,}293 \pm 1{,}379$	$1{,}433 \pm 1{,}303$	$9{,}618 \pm 2{,}615$	3
(1, 3, 0.5)	$1{,}443 \pm 0{,}078$	$2{,}047 \pm 0{,}187$	$1{,}361 \pm 0{,}550$	$2{,}671 \pm 0{,}188$	$7{,}477 \pm 2{,}994$	4
(2, 3, 0.5)	$1{,}443 \pm 0{,}061$	$2{,}061 \pm 0{,}161$	$1{,}575 \pm 0{,}449$	$2{,}691 \pm 0{,}177$	$8{,}441 \pm 2{,}989$	2
(1, 3, 1)	$1{,}509 \pm 0{,}119$	$2{,}103 \pm 0{,}124$	$1{,}608 \pm 0{,}556$	$1{,}775 \pm 0{,}210$	$5{,}767 \pm 1{,}756$	1
(2, 3, 1)	$1{,}517 \pm 0{,}131$	$2{,}103 \pm 0{,}141$	$1{,}713 \pm 0{,}439$	$1{,}782 \pm 0{,}214$	$5{,}716 \pm 2{,}098$	0

Tabla: Resultados de aplicar TBATS a señales $\boldsymbol{Y_{2,j,k,\sigma_0}} := \boldsymbol{s_2} + \boldsymbol{T_j} + \sigma_0 \boldsymbol{X_k}$.

Tabla de Contenidos

Movimiento de codornices japonesas

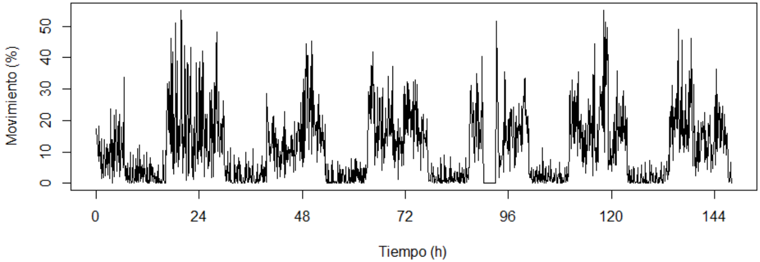
- Períodos de descanso y de movimiento
- Ritmos circadianos de 24 hs y ritmos ultradianos, por ejemplo de 12, 8 o 6 hs
- Patrones fractales
- Correlación temporal de largo alcance

Estudiaremos los ritmos, con períodos de varias horas, utilizando SST

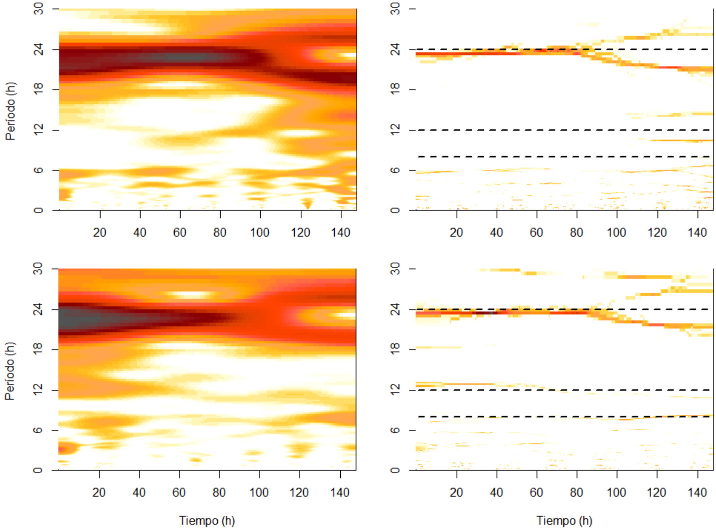
Recolección y procesamiento de los datos

- Los datos se registraron de forma continua durante 6,5 días
- Frecuencia de muestreo de 0,5 s ($> 10^6$ datos)
- Serie de estados mutuamente excluyentes: móvil (1)/ inmóvil (0)
- Cada día, durante 30 minutos, se realizaban tareas de mantenimiento

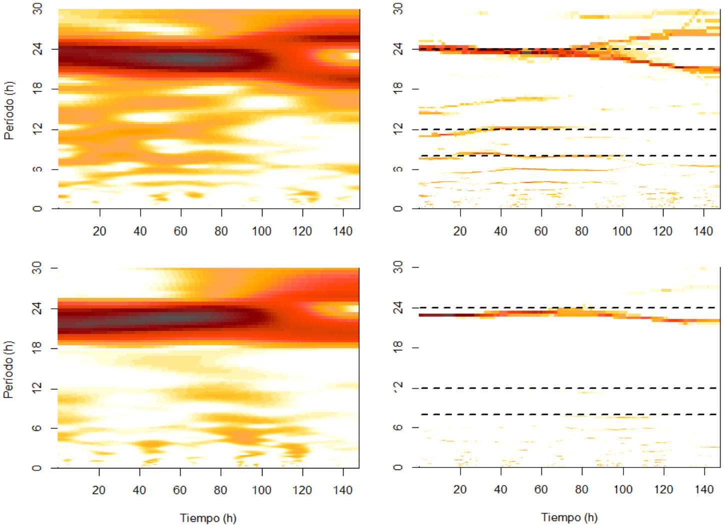
- Se agrupan y promedian los datos de a 6 minutos
- Obtenemos una serie de largo 1479 con valores entre 0 y 1



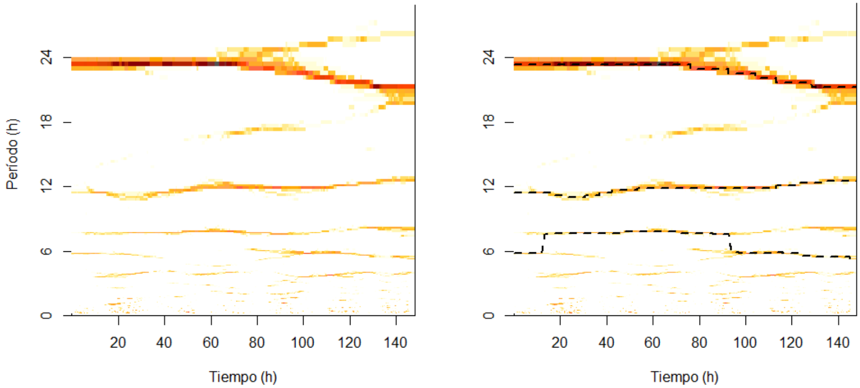
Codornices 2 y 4



Codornices 7 y 11



SST para la codorniz 5



Descomposición para la codorniz 5

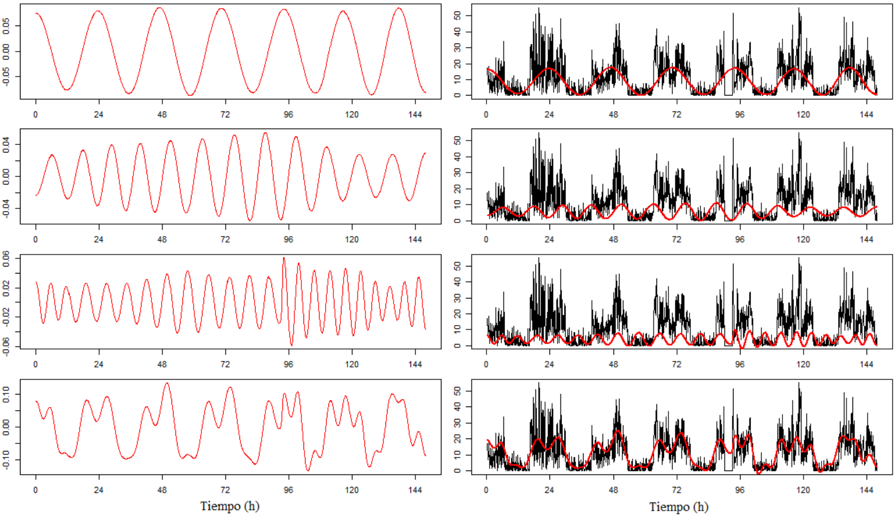


Tabla de Contenidos

Generales

Existen muchos métodos en la literatura estadística para descomponer señales que tienen en cuenta tanto la estacionalidad como la tendencia. En este trabajo estudiamos tres de ellos: SST, EMD y TBATS.

Sobre el problema de la identificabilidad vimos teoremas que nos permiten afirmar que si f está en cierta clase de funciones la diferencia entre distintas representaciones de f es despreciable, con lo que podemos decir que f es "identificable", y que al aplicar SST estamos encontrando la única función que explica nuestros datos y que no hay otra observacionalmente equivalente.

Comparación de métodos

- TBATS al ser paramétrico puede ser demasiado restrictivo
- Métodos no paramétricos como EMD o SST responden mejor a un sistema dinámico, incluso si las frecuencias y las amplitudes que varían en el tiempo son desconocidas
- SST es robusto a errores, incluso heterocedásticos y dependientes, en la práctica y la teoría, mientras que EMD puede ser muy inestable y difícil de analizar matemáticamente
- SST requiere algunos argumentos, EMD ninguno

En definitiva, no hay un método universal que funcione perfecto bajo cualquier circunstancia. Depende que tipo de serie queremos estudiar y que pretendemos obtener del análisis de esa serie. Pero es importante entender las fortalezas y debilidades de cada uno para saber porque pueden fallar y cuál conviene usar en cada caso

¡Muchas Gracias!