Appunti di Geometria e algebra lineare

Sofia Riva

April 12, 2025

1 Matrici

Prima di definire una matrice è necessario conoscere la definizione di prodotto cartesiano:

Definizione 1.1. Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Vogliamo ora descrivere una funzione che abbia come dominio un prodotto cartesiano di insiemi finiti, e come codominio un insieme numerico o campo $\mathbb{K}$

Definizione 1.2. Una matrice A è una funzione $A : [m] \times [n] \to \mathbb{K}$, dove $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\mathbb{K}$ è un campo. Ovvero A è una tabella con m righe e n colonne, contenenti valori in $\mathbb{K}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Scriviamo $M_{\mathbb{K}}(m, n)$ per indicare l'insieme di tutte le matrici con m righe e n colonne, e contenti valori in $\mathbb{K}$. Osserviamo ora alcuni casi particolari

- Se $m = n = 1$, allora $M_{\mathbb{K}}(1, 1) = \mathbb{K}$.
- Se $m = 1$ e $n > 1$, allora
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$$
prende il nome di *vettore riga* di lunghezza n.
- Se $m > 1$ e $n = 1$, allora
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$
prende il nome di *vettore colonna* di altezza m.
- Se $m = n$, otteniamo una matrice $\mathbf{A}$ del tipo $M_{\mathbb{K}}(n, n)$. Le matrici di questo tipo si dicono *matrici quadrate* di ordine n

Definiamo ora l'uguaglianza tra due matrici:

$$\mathbf{A} \in M_{\mathbb{K}}(m, n) \qquad \mathbf{B} \in M_{\mathbb{K}}(p, q)$$

- se $m \neq p$ oppure $n \neq q$, allora $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$
- se $m = p$ e $n = q$, allora $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se e solo se $A(i, j) = B(i, j) \qquad \forall (i, j) \in [m] \times [n]$ ovvero $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad , \forall j = 1, \ldots, n$

Possiamo adesso definire la somma tra matrici:

Definizione 1.3. Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{\mathbb{K}}(m, n)$, la sommma $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ restituisce una nuova matrice, che si ottiene sommando gli elementi delle due matrici che occupano le stesse posizioni

La somma si fa "posizione per posizione"

Proprietà della somma tra matrici:

- *associativa* $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_{\mathbb{K}}(m,n) \qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
- *commutativa* $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_{\mathbb{K}}(m,n) \qquad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
- *esistenza dell'elemento neutro* $\exists \underline{O} \in M_{\mathbb{K}}(m,n)$ *t.c* $\boldsymbol{A}+\underline{\boldsymbol{O}} = \underline{\boldsymbol{O}}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

$$\underline{O} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- *esistenza dell'elemento opposto* $\forall \boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n) \quad \exists \boldsymbol{A'} \in M_{\mathbb{K}}(m,n)$ *t.c* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A'} = \underline{\boldsymbol{0}}$

$$l'elemento\ opposto\ di\ \boldsymbol{A} = [a_{ij}]\ \acute{e}\ \boldsymbol{A'} = [-a_{ij}]$$

Definiamo ora il prodotto di una matrice per uno scalare (ovvero un elemento del campo $\mathbb{K}$)

Definizione 1.4. Sia $\mathbf{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n)$, e sia $\lambda \in \mathbb{K}$ il prodotto $\lambda\mathbf{A}$ restituisce una nuova matrice, che si ottiene moltiplicando ogni elemento di $\mathbb{A}$ per λ.

Esempio: $\lambda = 2, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ Proprietà del prodotto per scalari:

- *distributiva a destra* $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_{\mathbb{K}}(m,n), \qquad \lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$
- *distributiva a sinistra* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall \boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n), \qquad (\lambda+\mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$
- *associativa* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad (\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A}) = \mu(\lambda\boldsymbol{A})$
- *esistenza dell'elemento neutro* $\forall \boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n) \quad 1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

Queste proprietà possono essere molto significative in ambito informatico, basti notare che per un computer il prodotto è molto più complesso rispetto alla somma ESEMPIO GOOGLE PAGE RANK??

Introduciamo ora il prodotto matriciale. Tale prodotto si svolge "righe per colonne", ed è codificato come segue.

Definizione 1.5. Siano $\boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n)$, $\boldsymbol{B} \in M_{\mathbb{K}}(n,p)$, il prodotto matriciale restituisce una matrice $\boldsymbol{C} \in M_{\mathbb{K}}(m,p)$ tale che $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Esempio

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

- $c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$
- $c_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 - 2 = -1$
- $c_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 + 4 = 3$
- $c_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$
- $c_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 - 4 = -1$
- $c_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 + 8 = 5$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ANCORA ESEMPIO GOOGLE PAGE RANK

Proprietà del prodotto matriciale:

- *distributiva a destra* $\forall \boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n), \quad \forall \boldsymbol{B} \in M_{\mathbb{K}}(n,p)$

$$\boldsymbol{A(B+C) = AB + AC}$$

- *distributiva a sinistra* $\forall \boldsymbol{A, B} \in M_{\mathbb{K}}(m,n), \quad \forall \boldsymbol{C} \in M_{\mathbb{K}}(n,p)$

$$\boldsymbol{(A+B)C = AC + BC}$$

- *associativa* $\forall \boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n), \quad \forall \boldsymbol{B} \in M_{\mathbb{K}}(n,p), \quad \forall \boldsymbol{C} \in M_{\mathbb{K}}(p,q)$

$$\boldsymbol{(AB)C = A(BC)}$$

- *omogeneità* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n) \quad \forall \boldsymbol{B} \in M_{\mathbb{K}}(n,p)$

$$\boldsymbol{\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)}$$

- *esistenza dell'elemento neutro* $\forall \boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n, \quad \forall \boldsymbol{B} \in M_{\mathbb{K}}(n,p))$

$$\boldsymbol{AId_n = A} \qquad \boldsymbol{Id_nB = B}$$

é necessario allora definire la matrice elemento neutro rispetto al prodotto (Id_n)

Definizione 1.6. La matrice identità di tipo (n,n) è la matrice:

$$\boldsymbol{(Id_n)_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definizione 1.7. gli elementi di una matrice quadrata (n,n) che occupano le posizioni (i,i) formano la diagonale principale della matrice

Definizione 1.8. le matrici con entrate tutte 0 al di fuori della diagonale principale si dicono matrici diagonali

Osserviamo alcuni fenomeni nuovi:

- Per le matrici non vale il teorema fondamentale dell'algebra

$$\boldsymbol{X^2 = X}, \quad \boldsymbol{X} \in M_{\mathbb{K}}(n,n)$$

  tra le soluzioni ci sono sicuramente $\underline{O}$ e $\mathbb{I}$, ma non sono le uniche soluzioni

- Il prodotto in generale non è commutativo

  (i) spesso abbiamo problemi di compatibilità tra le matrici: per poter calcolare sia $\boldsymbol{AB}$ sia $\boldsymbol{BA}$ servono $\boldsymbol{A} \in M_{\mathbb{K}}(m,n)$ e $\boldsymbol{B} \in M_{\mathbb{K}}(n,m)$

  (ii) anche restringendoci al caso $m = n$ in generale il prodotto non è commutativo

Definizione 1.9. (Sviluppo di Laplace del determinante)
Il determinante è una funzione

$$det : M_{\mathbb{K}}(n, n) \to \mathbb{K}$$

definita (ricorsivamente) come:

(n = 1) $det([a_{11}]) = a_{ij}$

(n > 1) $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(\hat{A}_{ij})$

in cui i è un indice di riga fissato, a_{ij} è l'elemento di $\boldsymbol{A}$ sulla i-esima riga e j-esima colonna, e $\hat{A}_{ij}$ è la matrice in $M_{\mathbb{K}}(n-1, n-1)$ ottenuta da $\boldsymbol{A}$ cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Equivalentemente posso calcolare il determinante scambiando il ruolo di righe e colonne, cioè:

(n = 1) $det([a_{11}]) = a_{ij}$

(n > 1) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(\hat{A}_{ij})$

in cui j è un indice di colonna fissato, a_{ij} è l'elemento di $\boldsymbol{A}$ sulla i-esima riga e j-esima colonna, e $\hat{A}_{ij}$ è la matrice in $M_{\mathbb{K}}(n-1, n-1)$ ottenuta da $\boldsymbol{A}$ cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna

Si noti che in questa definizione stiamo assumendo che il risultato non dipenda dalle scelte di righe e colonne Osserviamo che se n = 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Fissata i = 1

$$det(A) \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} det(\hat{A}) = (-1)^{1+1} a_{11} det(\hat{A_{11}}) + (-1)^{1+2} a_{12} det(\hat{A_{12}}) =$$

$$= a_{11} det([a_{22}]) - a_{12} det[a_{21}] =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Se invece n = 3 utilizziamo quella che prende il nome di Regola di Sarrus: La regola di Sarrus permette di calcolare il determinante di una matrice 3×3. Per una matrice

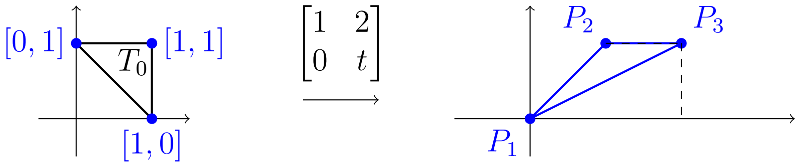
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

il determinante è dato da

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

tale risultato si ottiene scrivendo la matrice A e accostando la stessa matrice sulla destra, sommando i prodotti degli elementi sulle prime tre diagonali che si incontrano procedento da sinistra a destra, e sottraendo i prodotti degli elementi sulle antidiagonali incontrate procedendo invece da destra verso sinistra

Cosa rappresenta il determinante di una matrice?



$$A(P_1\hat{P_2}P_3) = \frac{|t|}{2}, \quad A(T_0) = \frac{1}{2}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) = t - 0 = t$$

IDEA: il determinante di una matrice ci indica come cambiano le aree dopo una trasformazione effettuata tramite un prodotto matriciale

N.B. Prima di iniziare con il calcolo del determinante è bene osservare la matrice e, se possibile, individuare la scelta di riga/colonna favorevole, cioè quella che minimizza i calcoli da svolgere.

Esempio:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sebbene il risultato non dipenda dalla scelta della riga o colonna da fissare, si nota che la scelta di i = 1 ci porta a svolgere più calcoli:

$$det(B) = b_{11}det(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}) - b_{12}det(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}) + b_{13}det(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}) = 20$$

Se scegliamo invece i = 2:

$$det(B) = -b_{21}det(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}) + b_{22}det(\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}) + b_{23}det(\hat{B_{23}}) = 20$$

$b_{23} = 0$, dunque non è necessario calcolare $det(\hat{B_{23}})$

Matrici con determinante facile da calcolare

(i) se $A \in M_{\mathbb{K}}(n, n)$ ha una riga o colonna composta da soli elementi uguali a 0, allora $det(A) = 0$.

Infatti, fissando la riga/colonna di soli 0 si ha:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(\hat{A}_{ij}) = 0$$

(ii) se $A \in \mathbb{M}_K(n, n)$ ha due righe o due colonne uguali, $det(A) = 0$

(iii)

Definizione 1.10. Una matrice $T \in M_K(n, n)$ si dice

- *triangolare superiore* se $t_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
- *triangolare inferiore* se $t_{ij} = 0 \quad \forall i > j$