# Optimización.

Sofia Robayo Bonilla.

## Tarea #3.

Taller 4. Ejercicios 6, 11 y 14.

6. Determine cuáles de las siguientes funciones son convexas, cóncavas o ninguna.

a). $f(X_1, X_2) = 2X_1^2 - 4X_1X_2 - 8X_1 + 3X_2$.

$$H(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial f(X)}{\partial X_2^2} \end{bmatrix}$$

Primer orden...

$$f_{x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(2X_1^2 - 4X_1X_2 - 8X_1 + 3X_2) = 4X_1 - 4X_2 - 8$$

$$f_{x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_2}(2X_1^2 - 4X_1X_2 - 8X_1 + 3X_2) = -4X_1 + 3$$

Segundo orden

$$f_{x_1x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(4X_1 - 4X_2 - 8) = 4.$$

$$f_{x_1x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_2}(4X_1 - 4X_2 - 8) = -4$$

$$f_{x_2x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(-4X_1 + 3) = -4$$

$$f_{x_2x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_2}(-4X_1 + 3) = 0$$

$$H(X) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 16 = -16. < 0$$

Luego véase que por los menores de la matriz $H(X)$ la función no es cóncava ni convexa.

**b).** $f(X_1, X_2) = X_1 e^{-(X_1+3X_2)}$

Primer orden:

$f_{x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(X_1 e^{-(X_1+3X_2)}) = e^{-(X_1+3X_2)} - e^{-(X_1+3X_2)}$

$f_{x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_2}(X_1 e^{-(X_1+3X_2)}) = -3X_1 e^{-(X_1+3X_2)}$

Segundo orden:

$f_{x_1x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(e^{-(X_1+3X_2)} - e^{-(X_1+3X_2)}) = -e^{-(X_1+3X_2)} + e^{-(X_1+3X_2)} = 0$

$f_{x_1x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_2}(e^{-(X_1+3X_2)} - e^{-(X_1+3X_2)}) = -3e^{-(X_1+3X_2)} + 3e^{-(X_1+3X_2)} = 0$

$f_{x_2x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(-3X_1 e^{-(X_1+3X_2)}) = -3e^{-(X_1+3X_2)} + 3X_1 e^{-(X_1+3X_2)}$

$f_{x_2x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_2}(-3X_1 e^{-(X_1+3X_2)}) = 9X_1 e^{-(X_1+3X_2)}$

$$H(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3e^{-(X_1+3X_2)} + 3X_1 e^{-(X_1+3X_2)} & 9X_1 e^{-(X_1+3X_2)} \end{bmatrix}$$

$= 0$. La función no es cóncava ni convexa.

**c).** $f(X_1, X_2) = -X_1^2 - 3X_2^2 + 4X_1X_2 + 10X_1 - 10X_2$

Primer orden:

$f_{x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(-X_1^2 - 3X_2^2 + 4X_1X_2 + 10X_1 - 10X_2) = -2X_1 + 4X_2 + 10$

$f_{x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_2}(-X_1^2 - 3X_2^2 + 4X_1X_2 + 10X_1 - 10X_2) = -6X_2 + 4X_1 - 10$

Segundo orden:

$f_{x_1x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(-2X_1 + 4X_2 + 10) = -2$

$f_{x_1x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_2}(-2X_1 + 4X_2 + 10) = 4$

$f_{x_2x_1}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial X_1}(-6X_2 + 4X_1 - 10) = 4$

$$f_{x_2x_2}(X_1, X_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(-6x_2 + 4x_1 - 10) = -6.$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$= (-2)(-6) - 4 \cdot 4$
$= -4$ vease que por los menores la matriz es semidefinida negativa, por tanto es CÓNCAVA.

**11.** Suponga que tiene $n$ números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Encuentre el número $\bar{x} \in \mathbb{R}$ que minimiza la suma de diferencias al cuadrado entre los números dados y $\bar{x}$. Es decir, determine una expresión para $\bar{x}$ en términos de los números dados.

$$\min \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Primer orden

$$f_{x_i}(x_i, \bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}[(x_i - \bar{x})^2] = 2(x_i - \bar{x})$$

$$f_{\bar{x}}(x_1, \bar{x}) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}[(x_i - \bar{x})^2] = -2(x_1 - \bar{x})$$

vease que en este caso para que sea un mínimo se tienen que igualar a 0, entonces

$$2(x_1 - \bar{x}) = 0$$
$$-2(x_1 - \bar{x}) = 0$$
$$x_i - \bar{x} = 0 \quad \text{luego} \quad x_i = \bar{x}$$

Segundo orden

$$f_{x_ix_i}(x_i, \bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}[2(x_1 - \bar{x})] = 2$$

$$f_{x_i\bar{x}}(x_1, \bar{x}) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}[2(x_1 - \bar{x})] = -2$$

$$f_{\bar{x}x_i}(x_i, \bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}[-2(x_i - \bar{x})] = -2$$

$$f_{\bar{x}\bar{x}}(x_i, \bar{x}) \; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}[-2(x_i - \bar{x})] = 2$$

14. Se quiere minimizar la función $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el intervalo $[1,2]$, donde $f(x) = 8e^{1-x} + 7(\ln(x))$. Se quiere localizar el mínimo de esta función en un intervalo de incertidumbre de longitud 0.1. ¿Cuántas iteraciones requiere el método de sección áurea para lograr esta precisión?

$$\min\ 8e^{1-x} + 7(\ln(x)) \qquad 1 \leq x \leq 2$$

| Iteración | $a_k$ | $b_k$ | $\lambda_k$ | $\mu_k$ | $f(\lambda_k)$ | $f(\mu_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1.3820 | 1.6180 | 7.72468 | 7.68050 |
| 1 | 1.3820 | 2 | 1.6180 | 1.7639 | 7.68050 | 7.69945 |
| 2 | 1.3820 | 1.7639 | 1.5279 | 1.6180 | 7.68599 | 7.68050 |
| 3 | 1.5279 | 1.7639 | 1.6180 | 1.6737 | 7.68050 | 7.68380 |
| 4 | 1.5279 | 1.6737 | 1.5836 | 1.6180 | 7.68099 | 7.68050 |