Clase 7. Func de v.a's y valor esperado

Friday, August 28, 2020 3:50 PM

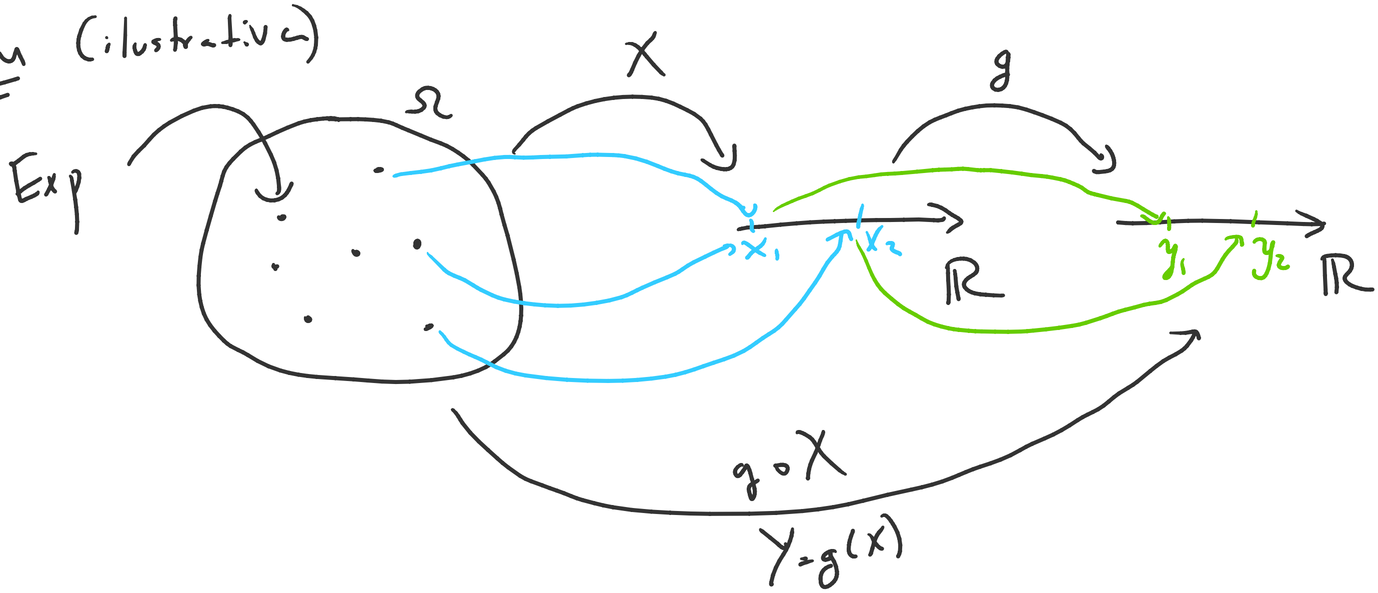
Cap 2.3, 2.4

Funciones de v.a's.

Podemos construir, dada X v.a, otras v.a's definiendo funciones de X.

Teo (coloquial)
Sea X una v.a. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $Y = g(X)$ es una v.a.

Dem (ilustrativa)



Ej i) Exp. Saber la temp. mañana.

X: Temp en grados centígrados

Y: Temp en grados Farenheit.

$$Y = g(X) = \frac{9}{5}X + 32$$

Y también es una v.a (por el teorema)

ii) X: Temp grados Kelvin

$$X > 0$$

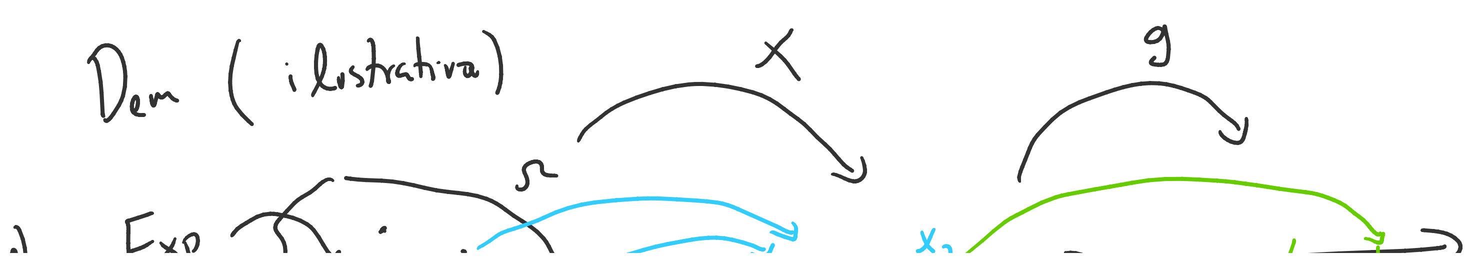
$$Y = g(X) = \log(X)$$

Y es también una v.a

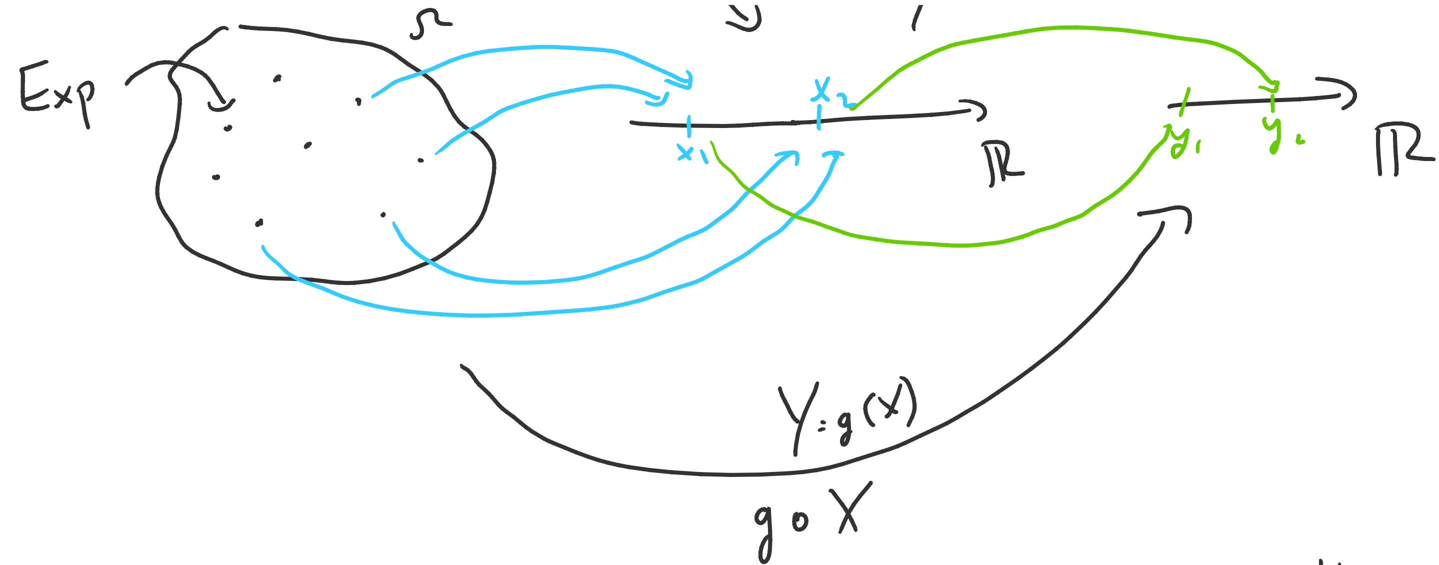
<u>Obs</u> Si $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ entonces Y se dice func. lineal de X.

<u>Teo</u> Sea X v.a discreta con PMF p_X. Entonces $Y = g(X)$ es también una v.a discreta con PMF p_Y que se puede deducir de p_X.

Dem (ilustrativa)



1)



Si X es discreta, $R(X)$ es finito o enumerable.

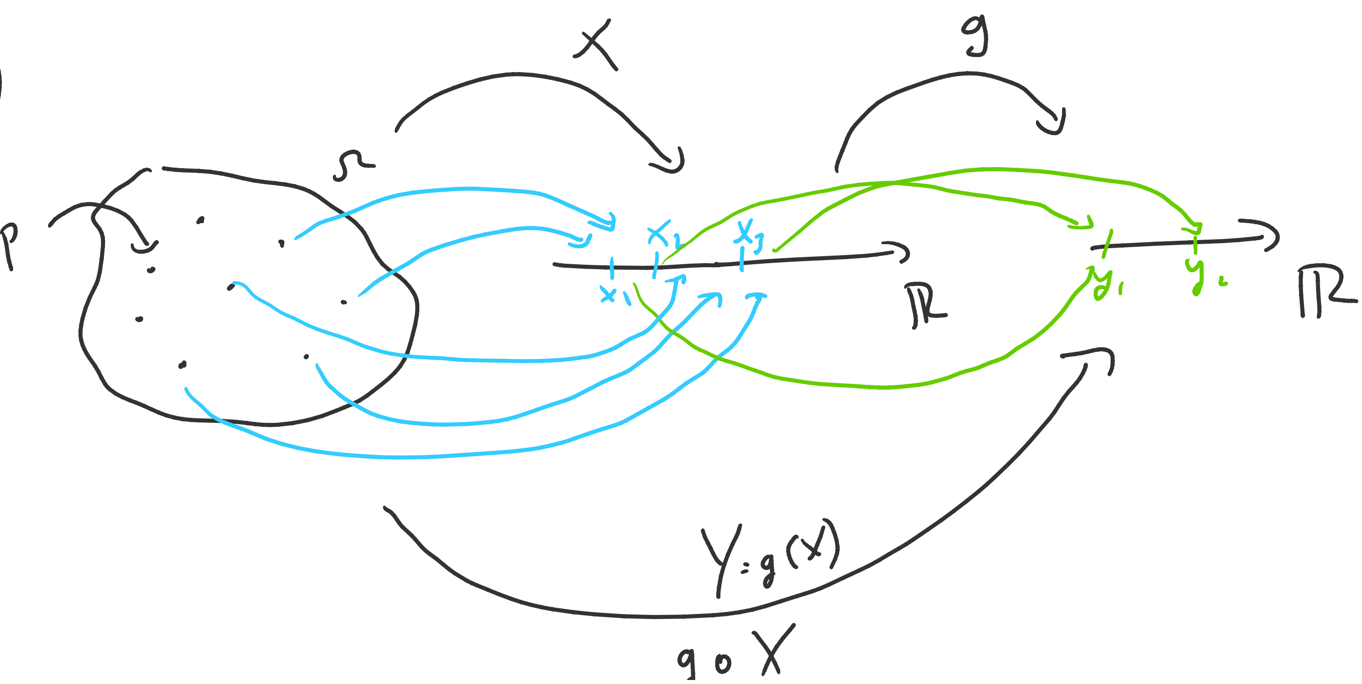
$R(X)$ es el dominio de g.

Luego como $|D(g)| \geq |R(g)|$

Entonces $|R(X)| \geq |R(g)|$

luego $R(g)$ es finito o enumerable.

2)

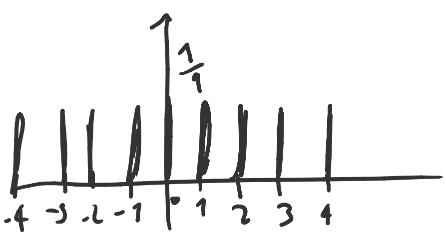


$g \circ X$

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P(X \in g^{-1}(\{y\}))$$

$$= \sum_{\{x \mid g(x) = y\}} p_X(x)$$

Ej Sea X una v.a que toma valores $-4, -3, \ldots, 4$ todos con prob. $\frac{1}{9}$.



$$X = \begin{cases} -4 \\ -3 \\ \vdots \\ 4 \end{cases} \qquad p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{si } k = -4, -3, \ldots, 4 \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

Sea $Y = |X|$, $\quad Y = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$

$$p_Y(0) = P(Y = 0) = p_X(0) = \frac{1}{9}.$$

$$p_Y(1) = P(Y = 1) = p_X(-1) + p_X(1) = \frac{2}{9}.$$

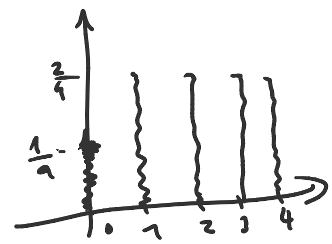
$$p_Y(2) = P(Y = 2) = p_X(-2) + p_X(2) = \frac{2}{9}.$$

$$p_Y(3) = \frac{2}{9}$$

$$p_Y(4) = \frac{2}{9}$$

1 si $y = 0$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{si } y = 0 \\ \frac{2}{9} & \text{si } y = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{d.e.c.} \end{cases}$$



Ej (tarea)

Hallar $p_Y(y)$, $Y = X^2$.

Valor esperado (media)

Objetivo. Reducir toda la info de la dist. de X (ley de prob. de X): lo valores de X y sus probs, a algunas cantidades descriptivas.

1 forma de describir la dist de X es la PMF de X.

Se busca resumir esta info en pocas cantidades

val. esp. (media) ... de la dist.

varianza

info: dispersión ... la dist.

(media)

info: posición de la dist.

info: dispersión de la dist.

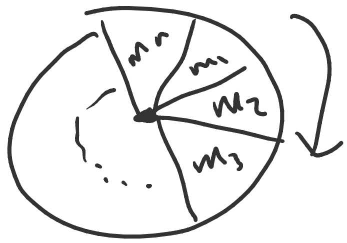
Valor esperado (media)

Obs val. esp. de una v.a discreta X es un promedio ponderado de los val. de X (peso de de cada valor es su prob).

⤷ Obtenemos el valor promedio que asume X.

Ej: (motivación)

Supongamos que se gira una ruleta



Los resultados de la ruleta son $m_1, m_2, \ldots, m_n$ c/u con prob. $p_1, \ldots, p_n$ resp.

Si cae m_i $i=1,\ldots,n$ se ganan m_i pesos.

¿Cuánto se gana en prom. por tiro?

la ruleta se gira muchas veces (k veces, Supongamos que la ruleta se gira muchas veces (k veces, $k >> 1$). Sea k_i: # veces que cae m_i, $i = 1, \dots, n$.

En total ganamos.

$$T = m_1 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + \dots + m_n k_n.$$

En promedio (por giro)

$$M = \frac{T}{k} = \frac{m_1 k_1 + \dots + m_n k_n}{k}$$

$$= m_1 \left(\frac{k_1}{k}\right) + \dots + m_n \left(\frac{k_n}{k}\right)$$

$$\cong m_1 (p_1) + \dots + m_n (p_n)$$

Lo que esperamos ganar por tiro (en promedio) es la suma de las probs de cada resultado multiplicando cada prob. por la ganancia al obtener ese resultado.

→ val esp. ganancia por tiro.

Def: Sea X una v.a discreta con PMF p_X.

Definimos el val esp de X (también llamado media de X ó esperanza de X) como:

Defini...

la media de X ó esperanza de X) como:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\, p_x(x)$$

<u>Obs</u> $\mathbb{E}(X)$ está bien def únicamente en el caso que $\sum_x x\, p_x(x)$ sea una suma convergente.

(Ej. X toma val 2^n, $n>0$ con probs. $\frac{1}{2^n}$ respectivamente.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$\mathbb{E}(X)$ no está bien def.)

<u>Ej.</u> Se tira una moneda una moneda con prob de cara $p = \frac{3}{4}$ 2 veces.

$\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$.

X: # caras.

X es una v.a binomia con parámetros $n=2$ y $p = \frac{3}{4}$.

X es

$n=2$ y $p=\frac{3}{4}$.

$$X:\begin{cases}0\\1\\2\end{cases}\qquad p_X(k)=\begin{cases}\left(\frac{1}{4}\right)^2 & \text{si } k=0\\ 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) & \text{si } k=1\\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 & \text{si } k=2.\end{cases}$$

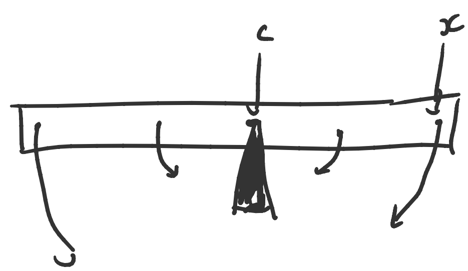
$$\mathbb{E}(X)=0\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2+1\left(2\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)\right)+2\left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

$$=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}.$$

Obs

$\mathbb{E}(X)$ se puede ver como el centro de gravedad de la PMF X.

C.G.



$T(x)=(x-c)\,W(x)$

C.G de un objeto es el punto c

$$\sum_x (x-c)\,W(x)=0$$

Si $W(x)=p_X(x)$

PMF de X

Si $W(x) = p_x(x)$

entonces el c.g de la PMF de X

es punto c tq

$$\sum_x (x-c)\, p_x(x) = 0$$

$$\sum_x x\, p_x(x) - c \underbrace{\sum_x p_x(x)}_{1} = 0$$

$$c = \sum_x x\, p_x(x) = \mathbb{E}(X).$$