Parcial optimización.

1. $\min f(x) = x_1^3 + x_1^2 - x_2^2 - x_1 + 2x_2 + 1$.

a) $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_1 - 1 \\ -2x_2 + 2 \end{bmatrix}$ $\quad H(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$6x_1 + 2 \geq 0$
$6x_1 \geq -2$
$x_1 \geq \frac{-2}{6}$
$x_1 \geq -\frac{1}{3}$

$-2(6x_1+2) \geq 0$
$-12x_1 - 4 \geq 0$
$-12x_1 \geq 4$
$x_1 \geq -\frac{4}{12}$
$x \geq -1/3$

luego teniendo esto en cuenta los puntos en $\mathbb{R}^2$ para los cuales $f(x)$ es convexa son $x_1 \geq -1/3$ dado cualquier valor α en x_2, dado que este no influye

b) Condición necesaria de 1er orden $\nabla f(\bar{x}) = 0$

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_1 - 1 \\ -2x_2 + 2 \end{bmatrix} = 0$

$3x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0 \Rightarrow 3x_1^2 + 2x_1 = 1 \quad x_1(3x_1+2) = 1$
$x_1 = 1/3$ ó $x_1 = -1$.

$-2x_2 + 2 = 0 \Rightarrow 2 = 2x_2$
$\frac{2}{2} = x_2 \quad 1 = x_2$

Entonces si $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 1$ ó si $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ se cumple la condición necesaria de 1er orden

c) Condición necesaria de 2do orden: $\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $H(x)$ es semidefinida positiva

Tomando los puntos en hallados en b) tenemos que

→ Si $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 1$.

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_1 - 1 \\ -2x_2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad H(x) = \begin{bmatrix} 6x_1+2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Estos puntos no satisfacen la condición necesaria del segundo orden.

→ Si $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_1 - 1 \\ -2x_2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Estos puntos si satisfacen la condición necesaria de segundo orden

2. min $2x^3 - 6x$.

Metodo Newton $x_1 = 2$ P.I. 3 iteraciones.

k	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	x_{k+1}
0	2	18	24	1.25
1	1.25	3.375	15	
2	1.025	0.30375	12.3	1.00030

$f(x) = 2x^3 - 6x$

$f'(x) = 6x^2 - 6$

$f''(x) = 12x$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

3. Min. $2x_1 + x_2 + x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 1$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2 + x_2 + 4x_1 \\ 1 + x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Direcciones conjugadas

$$H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\min \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1 + x_2 + x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 1.$$

teniendo en cuenta $H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ tenemos que

1^{er} menor : $4 > 0$

2^{do} menor : $\det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0$ $\quad H \succ 0$

continuación 3....

Tomemos como pto inicial $x_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Luego 2 direcciones $d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $d_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$d_1' H d_2 = 0$

$[1\ 0] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$

$[1\ 0] \begin{bmatrix} 4a+b \\ a+4b \end{bmatrix} = 0$

$4a+b = 0$ $b = -4a$ $d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ d_1 y d_2 son
si $a = 1$ $b = -4$ conjugadas

$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = -\dfrac{C' d_1 + d_1' H x_A}{d_1' H d_1}$ $C' = [2\ 1]$

$$\lambda_1 = -\frac{[2\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [1\ 0]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{[1\ 0]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_1 = -\dfrac{2+0}{4} = -\dfrac{2}{4}$ $x_B = x_1 + \lambda_1 d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$0 - \begin{bmatrix} 2/4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_B = \begin{bmatrix} -2/4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = -\dfrac{C' d_2 + d_2' H x_B}{d_2' H d_2}$

$$\lambda_2 = -\frac{[2\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + [1\ -4]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2/4 \\ 0 \end{bmatrix}}{[1\ -4]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{2-4+0}{60} = -\frac{-2}{60} = \frac{1}{30}.$$

$x_C = x_B + \lambda_2 d_2$

$$\begin{bmatrix} -2/4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/30 \\ -2/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/15 \\ -2/15 \end{bmatrix} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. min. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

s.a. $x^2+y^2=16$

$x^2+y^2-16=0$

$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$ $\quad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1/2\, x \\ 2/9\, y \end{bmatrix}$

a) para que sea regular $x \neq 0$ ó $y \neq 0$, dado que si esto no se cumple existe el punto irregular en las restricciones del problema.

b) Condición de 1er orden: $\nabla f(x) + \lambda_1 h_1(x) = 0$
$h(x) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1/2\, x \\ 2/9\, y \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 0$$

① $\frac{1}{2}x + 2\lambda x = 0$ $\quad 2x\left(\frac{1}{4}+\lambda\right) = 0 \Rightarrow 2x\left(\frac{1}{4}+\frac{13}{72}\right) = 2x\left(\frac{31}{72}\right) = 0$

$x = 0$

② $\frac{2}{9}y + 2\lambda y = 0$ $\quad 2y\left(\frac{1}{9}+\lambda\right) = 0 \Rightarrow y = 0$

③ $x^2+y^2-16=0 \Rightarrow$ si $x=0$ $\quad y^2=16 \quad y=\pm 4$

① y + ② x

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}xy + 2\lambda xy = 0 \\ + \quad \frac{2}{9}xy + 2\lambda xy = 0 \\ \hline \frac{13}{18}xy + 4\lambda xy = 0 \end{array}$$

si $y=0$ entonces $x^2=16$

$x = \pm 4$

$xy\left(\frac{13}{18}+4\lambda\right) = 0$ $\quad \frac{13}{18}+4\lambda = 0$

$4\lambda = \frac{13}{18}$ $\quad \lambda = \frac{13}{72}$

para $\lambda = \frac{13}{72}$ tenemos que

si $x=0$ entonces $y=4$ ó $y=-4$
si $y=0$ entonces $x=4$ ó $y=-4$.

c). $(X,Y) = (0,4)$ $\lambda = -\frac{1}{9}$, segundo orden

$H_1(X) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $H(X) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2/9 \end{bmatrix}$

$T(X) = \{ y : Dh(X)y = 0 \}$

$= \{ y : [2X \quad 2Y] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \}$

$= \{ y : 2Xy_1 + 2Yy_2 = 0 \}$

$X_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\lambda_B = \frac{-1}{9}$

$T(X_B) = \{ y : 2(0)(y_1) + 2(4)y_2 = 0 \}$

$= \{ y : 8y_2 = 0 \} = \{ y = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \}$

$L(X_B, \lambda_B) = H(X_B) + \lambda_B H_1(X_B)$

$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2/9 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$