# TAREA 2

Juan Camilo Rodriguez
Andrey Javier lizarazo
Gabriela Cortes Mejia

1. Moneda Sesgada, prob caer en cara $p$, se tira 10 veces determina la PMF condicional de la v.a $X = \#$ caras, cond. dl evento # caras es primo.

$X = \{\text{Numero de caras}\}$

Caer cara $p$
Caer sello $(1-p)$

$A = \{\text{Numero de caras es primo}\}$

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k} & \text{si } k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \\ 0 \text{ d/c} \end{cases}$$

$$P_{X|A}(x) = \frac{P(X = x \cap A)}{P(A)} \qquad A = 2,3,5,7$$

$$P_{X|A}(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}}{\sum\limits_{i=2,3,5,7} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i}} & \text{si } k = 2,3,5,7 \\ 0 \text{ d/c} \end{cases}$$

Scribe

2) Moneda 1. prob cara 0.4. Cuando se lanza la moneda 2 cara con prob 0.7. Una de las monedas se lanza 10 veces.

E = {Probabilidad de escoger una moneda} $= \frac{1}{2}$

M1 = {Caras moneda 1} = 0.4

M2 = {Caras moneda 2} = 0.7

A = {Sacar caras}

$$P_{M_1}(M_1) = \begin{cases} \binom{10}{7}(0.4)^7(0.6)^3 \\ 0 \text{ d/c} \end{cases}$$

a) 7 caras en los 10 lanzamientos

B = {Sacar 7 caras}

$$P_{M_2}(M_2) = \begin{cases} \binom{10}{7}(0.7)^7(0.3)^3 \\ 0 \text{ d/c} \end{cases}$$

$P(M1)\,P(B|M1) + P(M2)\,P(B|M2)$

$= \frac{1}{2}(0.0414) + \frac{1}{2}(0.2656)$

b) Dado que el primer resultado es cara determine la PMF cond. del numero de caras optenidas

X = {numero de caras obtenidas}

A = {1er resultado cara}

$$P_{X|A}(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{9}{k} p^k (1-p)^{10-k}}{\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i} p^k (1-p)^{10-k}} & \text{si } K = 1,2,3,4,5,6,7,8,9 \\ 0 \text{ d/c} \end{cases}$$

3) Hay 3 carreteras en un puebb, el # accidentes diarios que ocurren en ellas son v.a Poisson. (Indep) con respectivos Parametros 0.3, 0.5, 0.7. Encuentre $E(X)$ $Var(X)$ del numero de accidentes que ocurren en una semana en cada carretera y en todo el pueblo.

Poisson: $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k}}{k!}$ $k=1,2,3,4,5,6,7$

$\lambda=0.3,\ 0.5,\ 0.7$

$E(X)=\lambda$

$Var(X)=\lambda$

| Carretera 1 | Carretera 2 | Carretera 3 |
| --- | --- | --- |
| $7(0.3)$ | $7(0.5)$ | $7(0.7)$ |
| $2.1$ | $3.5$ | $4.9$ |
| $E(X)=Var(X)=2.1$ | $E(X)=Var(X)=3.5$ | $E(X)=Var(X)=4.9$ |

Todo el pueblo.

$E(X)=2.1+3.5+4.9=10.5$ accidentes en una semana en todo el pueblo.

4 X v.a Continua con PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1<x<1 \\ 0 \text{ dlc} & \end{cases}$$

Determine el valor de C y la funcion acumulada $F_X(x)$

$$\int_{-1}^{1} c(1-x^2)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 1 \Rightarrow c\left(x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)=1$$

$$\Rightarrow c\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)=1 \Rightarrow c\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=1$$

$$\Rightarrow c\left(2-\frac{2}{3}\right)=1 \Rightarrow c\left(\frac{4}{3}\right)=1 \Rightarrow \boxed{C=\frac{3}{4}}$$

$P(X\leq x)$

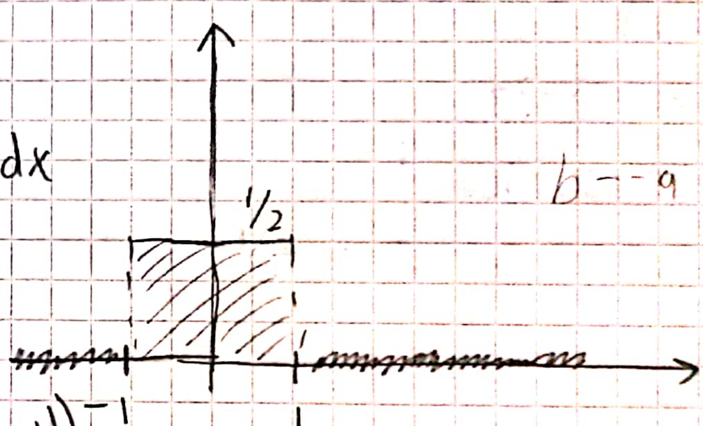
$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{x}\frac{3}{4}(1-x^2)\,dx$$

$$=\frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-x^2)\,dx$$

$$=\frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{x}\right)=\frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{3x-x^3}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{3x-x^3+2}{3}\right)$$

$$=\boxed{\frac{9x-3x^3+6}{12}}$$




b - - a

$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } -1<x<1 \\ 0 & \text{dlc}\end{cases}$$

5) X v.a unif. en (0, 1). Determine $\mathbb{E}(X^n)$ para todo $n>0$ haga lo mismo para X, v.a unif. en (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$

$$P_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{d/c} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$\vdots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{n+1}}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a<x<b \\ 0 & \text{d/c} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{(b^3-a^3)}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^3) = \int_a^b \frac{x^3}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{(b^4-a^4)}{4}$$

$\vdots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{b-a}\,\frac{(b^{n+1}-a^{n+1})}{n+1}}$$

6 $X$ v.a normal con parametros $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 36$ Calcule:

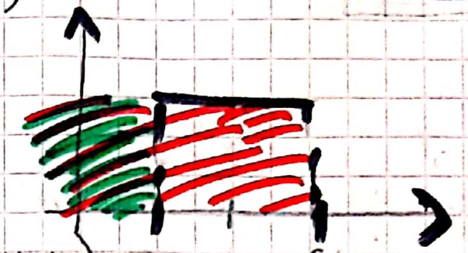
- $P(X > 5)$ $\qquad \frac{x-\mu}{\sigma} = X$

$$= 1 - P\left(\frac{X-10}{6} > \frac{5-10}{6}\right)$$

$$1 - \Phi(0.833) = 1 - (1 - \Phi(0.833)) = 1 - 1 + \Phi(0.833) = \boxed{0.7967}$$

- $P(4 < X < 16)$

$$P(X < 16) - P(X < 4)$$




$$= P\left(\frac{X-10}{6} < \frac{16-10}{6}\right) - P\left(\frac{X-10}{6} < \frac{4-10}{6}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 =$$

$$= 2(0.8413) - 1 = \boxed{0.6826}$$

- $P(X < 8)$

$$P\left(\frac{X-10}{6} < \frac{8-10}{6}\right) = \Phi(-0.333) = 1 - \Phi(0.333) = 1 - 0.6293$$

$$= \boxed{0.3707}$$

7) La vida en util de horas de un bombillo es una v.a que tiene funcion de densidad.

$$f_x(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 \text{ d/c} & \end{cases}$$

$\lambda = 1$

Vida util esperada del bombillo. Probabilidad de que falle en la primera hora. Falle en la segunda hora dado que no fallo en la primera. de que el bombillo falle en la n+1 esima hora dado que no fallo en las primeras n horas. Independiente.

Sabemos que la variable aleatoria exponcial no tiene memoria esto quiere decir que la CDF condicional de X es la misma CDF original X.

$A = \{\text{falle 1 hora}\}$ $X \leq 1$

$B = \{\text{falle 2 hora}\}$ $X \leq 2$

$E(x) = \frac{1}{\lambda}$ $E(X) = 1$

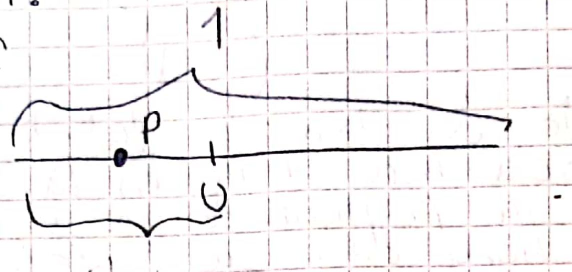
$$P(A) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - (-e^{-0}) = -\frac{1}{e} + 1$$

$P(B|A)$ = Como no tiene memoria va a ser la misma probabilidad de la 1ra hora.

Luego $P(\{n+1 \text{ hora}\} | \{n \text{ hora}\})$ = Igual que el anterior no tiene memoria asi que va a ser la misma que la de la 1ra hora.

**8** Un palo de longitud 1 se divide en un punto U que se distribuye uniformemente sobre (0,1). Determine la longitud esperada de la pieza que contiene a un punto p con $0 \leq p \leq 1$.

Tenemos que f



Sabemos que el palo puede partirse en dos partes. Miremos el primer caso que es que el punto cae en el lado izquierdo, luego $p \leq X < 1$, y de que caiga en el lado derecho $0 \leq X \leq p$. Así como partimos el palo en X, el valor de la longitud del lado izquierdo es X y del lado derecho es $1-X$.

Luego tenemos que la longitud esperada es

$$E(\text{longitud}) = \int_0^p (1-x)\,dx + \int_p^1 x\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^p$$

$$+ \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_p^1 = \frac{1}{2} + p - p^2$$

## Demostración R:

Demuestre que para calcular $S_n$, es suficiente conocer $S_{n-1}$ y $X_n$, tal que los valores $X_k$ para $k=1,\dots,n-1$ no requieren ser almacenados.

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{n-1}{n}}}$$

$$X = \frac{n-1}{n}$$

$$n-1 = nX$$

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} + \frac{n}{(n-1)} - \frac{n}{(n-1)}$$

$$= \frac{(n-1)(X_1 + \dots + X_n) + n^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(n-1)}{n} S_n$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{X_1 + \dots + X_{n-1}}{n-1}\right.$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n-1} + \frac{X_n}{n-1}\right) + \frac{n^2}{n(n-1)} - \frac{n}{(n-1)}$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(S_{n-1} + \frac{X_n}{n-1}\right) + \frac{n^2}{n(n-1)} - \frac{n}{(n-1)}$$