Tarea De Optimización.

3. Utilizando la condición suficiente de segundo orden, encuentre un mínimo local para el problema.

$$\min \; x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1^2 - x_2 \leq 4$$

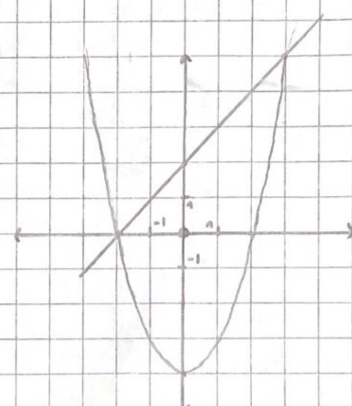
$$x_2 - x_1 \leq 2$$

$g_1 = x_1^2 - x_2 - 4 \leq 0$ $\qquad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$g_2 = x_2 - x_1 - 2 \leq 0$

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

Condición de primer orden



1. $2x_1 + 2M_1 x_1 - M_2 = 0$
2. $2x_2 - M_1 + M_2 = 0$
3. $x_1^2 - x_2 \leq 4$
4. $x_2 - x_1 \leq 2$
5. $(x_1^2 - x_2 - 4)M_1 = 0$
6. $(x_2 - x_1 - 2)M_2 = 0$
7. $M_1 \geq 0$
8. $M_2 \geq 0$

Posibles soluciones:

C1: $M_1 = 0$, $M_2 = 0$.

1. $2x_1 = 0$
   $x_1 = 0$

CUMPLE CNPO

2. $2x_2 = 0$
   $x_2 = 0$

C2 $M_1 = 0$, $M_2 > 0$

4. $X_2 - X_1 = 2$

$X_2 = 2 - X_1$

1. $2X_1 - M_2 = 0$

2. $2X_2 + M_2 = 0$

$1+2 = 2X_1 + 2X_2 = 0$

$2X_1 + 2(2 - X_1) = 0$

$2X_1 + 4 - 2X_1 = 0$

$4 = 0$ NO

C3 $M_2 = 0$, $M_1 > 0$

3. $X_1^2 - X_2 = 4 \Rightarrow -X_2 = 4 \Rightarrow X_2 = -4$

1. $2X_1 + 2M_1X_1 = 0 \Rightarrow 2X_1(1 + M_1) = 0$

$X_1 = 0$ $M_1 = -1$ NO SE PUEDE

2. $2X_2 - M_1 = 0$

$2(-4) = M_1$

$-8 = M_1$ NO

C4 $M_1 > 0$, $M_2 > 0$.

3. $X_1^2 - X_2 = 4$

4. $X_2 - X_1 = 2$

$X_2 = 2 + X_1$

$\Rightarrow X_1^2 - (2 + X_1) = 4$

$X_1^2 - 2 - X_1 - 4 = 0$

$X_1^2 - X_1 - 6 = 0$

X_1 -3

X_1 2

$(X_1 - 3)(X_1 + 2) = 0$

$X_1 = 3$ ó $X_1 = -2$

→ SI $X_1 = 3$

4. $X_2 = 2 + 3$

$X_2 = 5$

5. $(X_1^2 - X_2 - 4)M_1 = 0$

$X_1^2 - X_2 - 4 = 0$

$3^2 - 5 - 4 = 0$

$9 - 9 = 0$

$0 = 0$ ✓

$M_1 = 0$ NO SE PUEDE

6. $(X_2 - X_1 - 2)M_2 = 0$

$X_2 - X_1 - 2 = 0$

$5 - 3 - 2 = 0$

$5 - 5 = 0$

$0 = 0$ ✓

$M_2 = 0$ NO SE PUEDE

1. $2X_1 + 2M_1 X_1 - M_2 = 0$
$2(3) + 2M_1(3) - M_2 = 0$
$6 + 6M_1 - M_2 = 0 \Rightarrow 6 + 6M_1 = M_2$

2 $2X_2 - M_1 + M_2 = 0$
$2(5) - M_1 + M_2 = 0$
$10 - M_1 + M_2 = 0$
$10 - M_1 + (6 + 6M_1) = 0$
$16 + 5M_1 = 0$
$-\frac{16}{5} = M_1$ NO ES FACTIBLE.

→ SI $X_1 = -2$

4. $X_2 = 2 + (-2)$
$X_2 = 0$

1. $2X_1 + 2M_1 X_1 - M_2 = 0$
$2(-2) + 2M_1(-2) - M_2 = 0$
$-4 - 4M_1 - M_2 = 0$
$4 + 4M_1 + M_2 = 0 \Rightarrow 4 + 4M_1 + M_1 = 0$
$4 + 5M_1 = 0$
$-\frac{4}{5} = M_1$ NO ES FACTIBLE

2 $2X_2 - M_1 + M_2 = 0$
$-M_1 + M_2 = 0$
$M_2 = M_1$

ÚNICO PUNTO FACTIBLE que cumple CNPO: $X^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $M^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$f(X) = 0$

$J(X^*) = \{ y : \nabla g_1(X^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla g_2(X^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ X^* es un PUNTO regular.

$H(X) = \begin{bmatrix} 2 + 2M_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $G_1(X) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $G_2(X) = 0$

$H(X^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $G_1(X^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $G_2(X^*) = 0$

$$L(X^*, M^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

NO hay plano tangente las restricciones g_1 y g_2 están inactivas y X^* es un punto interior, semidefinida positiva.

5. Considere el problema

$$\text{Min. } 2e^{x_1} + 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$\text{s.a. } 3x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

a). Formule un problema penalizado con $\gamma = 10$.

$$P(x) = (3x_1 + 2x_2 - 6)^2$$

$$Q(x,\gamma) = 2e^{x_1} + 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + \gamma(3x_1 + 2x_2 - 6)^2$$

$$= 2e^{x_1} + 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 10(3x_1 + 2x_2 - 6)^2$$

b). Inicie en el punto [1 1] y realice dos iteraciones del método del gradiente para resolver el problema penalizado.

Para resolver el problema vamos a utilizar el método de Newton

$$F(x) = 2e^{x_1} + 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 10(3x_1 + 2x_2 - 6)^2 \qquad x_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} 2e^{x_1} + 6x_1 + 2x_2 + 10 \cdot 2 \cdot 3(3x_1 + 2x_2 - 6) \\ 2x_1 + 8x_2 + 10 \cdot 2 \cdot 2(3x_1 + 2x_2 - 6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{x_1} + 6x_1 + 2x_2 + 60(3x_1 + 2x_2 - 6) \\ 2x_1 + 8x_2 + 40(3x_1 + 2x_2 - 6) \end{bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 2e^{x_1} + 6 + 60 \cdot 3 & 2 + 60 \cdot 2 \\ 2 + 40 \cdot 3 & 8 + 40 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(x_A) = \begin{bmatrix} 2e^1 + 6 + 2 + 60(3 + 2 - 6) \\ 2 + 8 + 40(3 + 2 - 6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e - 52 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -46.56 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$H(x_A) = \begin{bmatrix} 2e^1 + 186 & 122 \\ 122 & 88 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 191.44 & 122 \\ 122 & 88 \end{bmatrix}$$

$$X_B = X_A - H(X_A)^{-1}\nabla f(X_A) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-0.22279\\-0.03203\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.22279\\1.03203\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X_B) = \begin{bmatrix}2e^{1.22279}+6(1.22279)+2(1.03203)+60[3(1.22279)+2(1.03203)-6]\\2(1.22279)+8(1.03203)+40[3(1.22279)+2(1.03203)-6]\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0.13990\\-0.00098\end{bmatrix}$$

$$H(X_B) = \begin{bmatrix}2e^{1.22279}+186 & 122\\122 & 88\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}192.79 & 122\\122 & 88\end{bmatrix}$$

$$X_C = X_B - H(X_B)^{-1}\nabla f(X_B) = \begin{bmatrix}1.22279\\1.03203\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.000597\\-0.00829\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1.21681\\1.04032\end{bmatrix}$$