Clase 5. Conteo

Tuesday, August 18, 2020 4:19 PM

1.6

Combinatoria

Conteo

Herramientas o de métodos que permiten contar objetos de interés

Es una rama de las matemáticas que se dedica a contar cosas

Ej. i) # formas en las que se puede comenzar una partida de ajedrez

ii) # formas en las que se pueden intersecar 2 polígonos

iii) # config. de un cubo de Rubrick

iv) # manos posibles en un juego de cartas

En el contexto de probs. frecuentemente se requiere contar # resultados en un determinado evento.

Ya vimos 2 casos en los que el conteo puede ser útil.

i) Ω finito y todo resultado es igualmente posible (ley. de prob. discreta uniforme).

$\forall A \in \mathcal{F}$ $\quad P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

→ # elementos en A

Ω ...

$$p(A) = \frac{\quad}{|\Omega|}$$

↳ # el. en Ω.

ii) si $A \in \mathcal{F}$ tiene elementos igualmente posibles, cada uno (cada singleton) con prob. p.

$$p(A) = p \cdot |A|$$ ↳ contar # elem. en A

Conteo

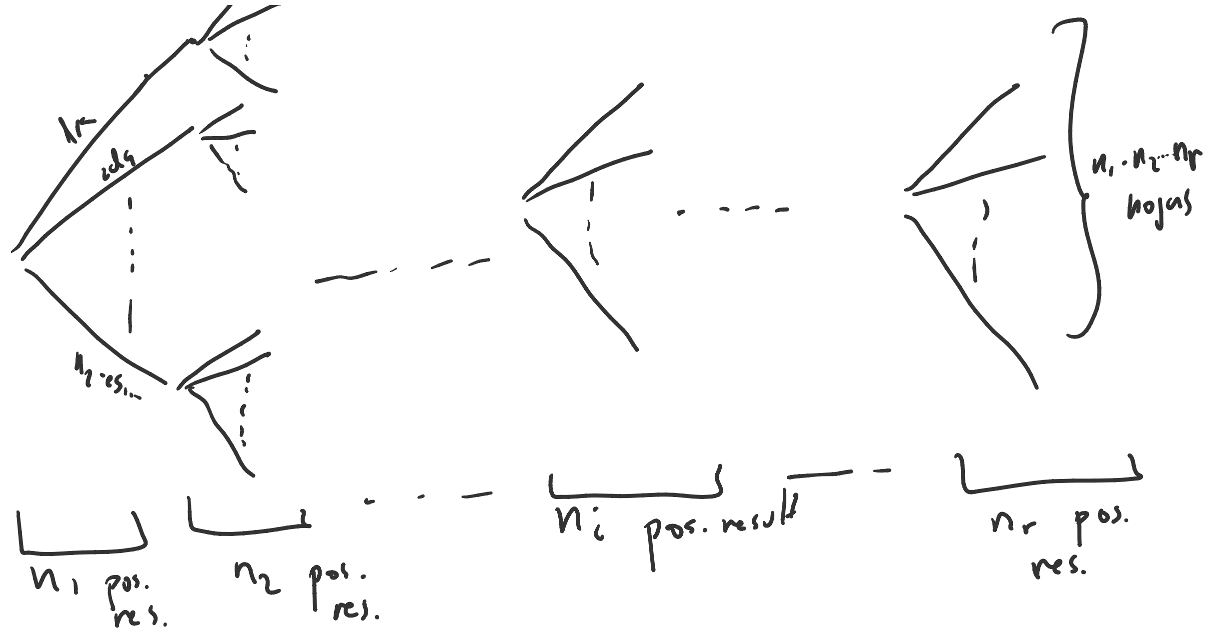
El principio de conteo

Considere un proceso con r pasos

1) Suponga que hay n_1 pos. resultados para el 1ero.
2) " " " n_2 " " " el 2do paso (para cualquier resultado del 1ro).

3) En general, sup. para cada suc. de resultados de los $i-1$ primeros pasos, hay n_i posibles resultados para el i-ésimo. $i = 2, \ldots, r$.

Entonces, el # total de posibles resultados es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_r$



Ej Suponga que un exp. consta de 2 pasos.
El 1ro tiene m pos. resultados
$a_1, \ldots, a_m$
El 2do tiene n pos. resultados
$b_1, \ldots, b_n$

Hay $n \times m$ pos. result. (a_i, b_j) $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$
del experimento.

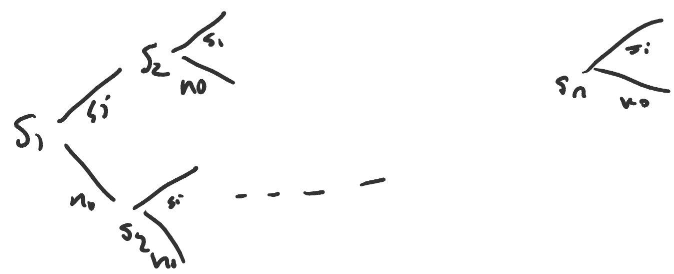
Ej. ¿Cuántos # de teléfono hay de 7 dígitos si el 1ro no puede ser ni 0 ni 1?

$$\underset{1er}{8} \cdot \underset{2do}{10} \cdot \underset{3ro}{10} \cdots \underset{7mo}{10} = 8 \cdot 10^6 \text{ posibles \#.}$$

Ej Sea $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. $|S| = n$.

¿Cuantos subconjuntos tiene S?

Puedo construir un sub. de forma secuencial investigando cada elemento.



$2 \quad 2 \cdot \text{------} \quad 2 = 2^n$ pos subconjuntos.

Vamos a enfocarnos en 3 tipos de objetos combinatóricos: las permutaciones, las combinaciones y las particiones

K-permutaciones

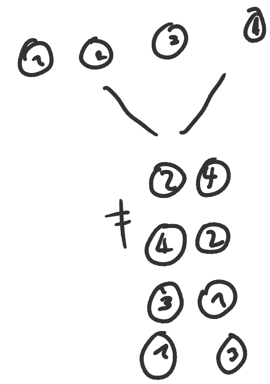
Supongamos que tenemos n objetos. $n \in \mathbb{N}^*$

Sea k un entero, $0 < k \leq n$.

Queremos contar # formas en las que se puede extraer k objetos y organizarlos (# k-permutaciones)

(El orden importa)

(El [illegible] importa)



¿Cuántas k-permutaciones hay?

n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	$n-(k-1)$
1ro	2do	tercero		késimo

Por el P.C voy a tener

$$n(n-1)(n-2)\cdots\left(n-\underbrace{(k-1)}_{=\,n-k+1}\right) \text{ posibles k-perm.}$$

$$\parallel$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdots \cancel{\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{(n-k)(n-k-1)\cdots(2)\cdot(1)}}$$

<u>Resultado</u>

Hay $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ pos. k-perm. de n objetos.

<u>Obs</u> si $k=n$ tenemos $n!$ permutaciones

Ej 1 # palabras de 4 letras dif.

Hay 27 letras en el alfababeto

abcd ≠ badc (orden importa).

Es equiv. a # de 4-permutaciones de 27 letras.

$$\frac{27!}{(27-4)!} = \frac{27!}{23!} = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24.$$

Ej.2 ¡ Juan tiene n_1 libros de ficcion,

n_2 libros de matemáticas

n_3 libros de física.

¿ # formas organizar los libros, de tal manera que todos los del mismo género queden juntos ?

$3! \times n_1!\, n_2! \cdot n_3!$ formas

los libros.

organizar

$3! \times$ Vh : ¿

de organizar los libros.

ii) Juan va a vender k_1 lib. de ficción

" " " k_2 " de mate.

" " " k_3 " " fis:.

¿# formas de organizar los lib. restantes (donde los libros del mismo género están juntos)?

for. de organizar lib. de ficción que quedan es el # de n_1-k_1 - perm de n_1 obj.

(igual para n_2 y n_3)

$$3! \frac{n_1!}{(n_1-\underline{(n_1-k_1)})!} \cdot \frac{n_2!}{(n_2-(n_2-k_2))!} \cdot \frac{n_3!}{(n_3-(n_3-k_3))!}$$

$$= 3! \frac{n_1!}{k_1!} \cdot \frac{n_2!}{k_2!} \cdot \frac{n_3!}{k_3!}$$

<u>Combinaciones</u> (no importa el orden)

Se tienen n objetos, sea $0 < k \leq n$, n, k enteros.

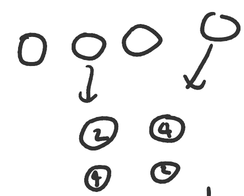
Se tienen n objetos, sea $0 < k \le$

¿De cuántas formas puedo extraer k de los n objetos?

(El orden no importa)

Si el orden importara tendría

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$



Como el orden no importa me toca dividir por el número de formas de organizar los k elementos que saqué.

Sabemos que hay $k!$ formas de hacerlo.

Luego el # de formas de sacar k objetos de un conjunto de n, es:

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Teo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

de sub. de tamaño k de un conj. de tamaño n.

Ej ¿Cuántas formas hay de sacar 5 balotas de una bolsa con 50?
(cada balota tiene un # y el orden no importa)

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{45!\,5!}$$

Teo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1.$

Dem i) (Probab.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P(\Omega) = 1.$

ii) (Alg). $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}$

$a = p,\ b = 1-p.$

$\displaystyle 1 = (p+1-p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Teo 2 $\displaystyle\sum^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Teo 2

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Dem Tarea

Particiones. (Generalización de combinaciones).

Una comb. se puede ver como una forma de partir un conjunto de n el. en 2.

k extraídos

$n-k$ que quedan

Una partición es partir un conjunto en varios subconjuntos.

Supongamos que hay un conjunto con n objetos. Queremos ver el # formas de partir el conjunto en r subconjuntos el 1ro con n_1 elementos, 2do con n_2, 3ro con n_3 etc.

n obj.

$(n = n_1 + n_2 + \dots + n_r)$

n_1 obj. n_2 obj.   . . . . n_r obj

$\swarrow \quad \downarrow \quad \cdots \quad n_r$ obj

n_1 obj. $\quad n_2$ obj.

Hay $\binom{n}{n_1}$ formas de formar el 1er.

Hay $\binom{n-n_1}{n_2}$ formas de " el 2do.

$\vdots$

Hay $\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$ formas de formar el r-ésimo.

Por P.C, # formas de partir el conjunto es

$\underline{n=n_1+\cdots+n_r}$

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_r}{n_r} =$$

$$\frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{\cancel{(n-n_1-n_2)!}\cdot n_2!}\cdots\cdots\frac{\cancel{n_r!}}{(n_r-n_r)!\,\cancel{n_r!}}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_r!} = \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r}$$

$n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_r!$ $\quad \big(n_1, n_2, n_3 \ldots$

Coef. mult.

Ej (Anagramas)

¿Cuántas pal. dif se pueden hacer con las letras de la palabra

ARARACUARA?

2 formas resolver.

i) Hay 10 letras. Hay 10! formas de organizar las letras.

Toca dividir por # formas de org. las A's, las R's, las C's, las U's.

$$\frac{10!}{5!\,3!\,1!\,1!}$$

ii) Yo puedo fijarme en las pos.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ letras

$\{1, \ldots, 10\} \to$ pos.

5 posic. $\quad$ 3 pos. $\quad$ 1 pos. $\quad$ 1 pos.

5 posic. 3 pos. 1 pos. 1 pos.

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

A R U C.

Yo puedo dividir mis pos. en aquellas que tendrán una A, aquellas con R y aquellas con U y C.

$$\binom{10}{5,3,1,1} = \frac{10!}{5!3!1!1!}$$

Ej.

Hay 4 est. doc. 12 pregrado

¿# formas de dividir los estud. en 4 grupos de 4.?

$$\binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4!4!4!4!}$$

¿# formas de dividirlos en 4 grupos de 4 t.q. haya un est. de doc. por grupo?

Hay $\binom{12}{3,3,3,3} = \frac{12!}{3!3!3!3!}$ de div. los de preg.

Hay 4! formas de div los est. de

Hay $4!$ formas de [illegible]
doc.

Tengo por el P.C

$$\frac{4!\,12!}{3!\,3!\,3!\,3!}$$ formas de formar mis grupos.

Si se forman al azar los grupos.
prob. de tener 1 estu. doc. por grupo
es

$$\frac{4!\,\dfrac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!}}{\dfrac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!}}$$