Lemas útiles: Sean S, T, U conjuntos

- $S \cup T = T \cup S$
- $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$
- $(S^c)^c = S$
- $S \cup \Omega = \Omega$
- $S \cup (T \cup U) = (S \cup T) \cup U$
- $S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U)$
- $S \cap S^c = \emptyset$
- $S \cap \Omega = S$

Axiomas de probabilidad:

1. No negatividad $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

2.1. La aditividad. Si $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = 0$

$\rightsquigarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2.2. Si $A_1, A_2, \ldots$ son disyuntos 2 a 2,

$\rightsquigarrow P(A_1, A_2, \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

3. Normalización: $P(\Omega) = 1$

Lemas

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

Probabilidad condicional: Sea B un evento tal que $P(B) > 0$. definimos la probabilidad condicional de un evento A (condicionados al evento B) como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Corolario: Las propiedades de las funciones de probabilidad (de antes) tambien se cumplen para la probabilidad condicional.

Ejemplo: A_1, A_2 eventos

1. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$

2. $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2 | B)$

Modelos matemáticos y probabilidad condicional

A veces es mas facil calcular probabilidades condicionales primero y luego probabilidades no condicionales.

⤳ **Lema:** A, B eventos, $P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

⤳ **Teorema:** Regla de multiplicación.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eventos y los eventos sobre los que se condiciona tienen probabilidad positiva.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) P(A_2|A_1) \ldots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

$$= \cancel{P(A_1)} \, \frac{\cancel{P(A_2 \cap A_1)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdots \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_n\right)}{\cancel{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)}}$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_n\right)$$

Teorema de probabilidad total (teorema divide y vencerás)

⤳ Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos disyuntos 2 a 2 que forman una partición de Ω. Suponga que $P(A_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, entonces para todo evento B. $(\forall B)(B \subset \mathcal{F})$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i)$$

~> **Teorema de Bayes.** Sean $A_1, \dots, A_n$ eventos que forman una partición de Ω tal que $P(A_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$.
Entonces $\forall B \in \mathcal{F}$ (B evento) tal que $P(B) > 0$, tenemos que:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B \mid A_j)}$$

Demostración $P(A_i \mid B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_i) P(B \mid A_i)}{P(B)}$

y en denominador aplicamos el teorema de probabilidad total quedando:

$$= \frac{P(A_i) P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) P(A_j)}$$

~> **Definicion:** Decimos que A, B eventos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

~> **Teorema:** Sean A, B eventos, $P(B) > 0$. Si A y B son independientes.

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Demostración: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A)$

~> **Definición:** Sea C un evento tal que $P(C) > 0$ (necesitamos que la probabilidad de C sea mayor que 0 para condicionar sobre C). Decimos que 2 eventos A y B son independientes condicionales a C si:

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) P(B \mid C)$$

Independencia de una colección de eventos.

~> **Definición:** Decimos que $A, \dots, A_n$ eventos son independientes entre si

$$P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i), \quad \forall S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Pruebas independientes y probabilidades binomiales

- Definición: Una prueba con 2 posibles resultados se conoce como prueba o experimento de Benotti.

  ejemplo: Tirar una moneda $\rightsquigarrow \{c, s\}$

- Definición: Suponga que un experimento consta de multiples pruebas de Benotti identicas e independientes. Entonces el experimento se llama experimento o prueba binomial.

  ejemplo: Tirar una moneda n veces.

- Definición: Llamamos ley o función de probabilidad binomial a la función de probabilidad $P(k)$ asociada a tener k aciertos y $n-k$ fallas en n pruebas de Bernoulli.

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\hookrightarrow$ k aciertos.

- Teorema: $\sum_{k=0}^{n} P(k) = 1.$ $\rightsquigarrow$ Se puede demostrar con argumentos algebraicos con la forma del binomio de Newton.

Combinaciones

- En este caso no importa el orden
- Se tienen n objetos, sea $0 \leq k \leq n$, $n, k \in \mathbb{Z}$
- De cuantas formas puedo extraer k de los n objetos ?

  El orden no importa

  - Si el orden importara tendría $\frac{n!}{(n-k)!}$.

  Como el orden no importa toca dividir por el número de formas de organizar los k elementos que saqué

  - Sabemos que hay $k!$ formas de hacerlo. Luego el # de formas de sacar k elementos de un conjunto de n es:

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

⤳ Teorema: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

\# subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n.

⤳ Ejemplo Cuantas formas hay de sacar 5 balotas de una bolsa con 50? (cada balota tiene un número y el orden no importa.)

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{(50-5)!\,5!} = \frac{1}{\binom{50}{5}}$$

⤳ Teorema: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$

⤳ Teorema: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Particiones.

⤳ Ejemplo: (Anagramas) Cuantas palabras diferentes se pueden hacer con las letras de la palabra:

A R A R A C U A R A

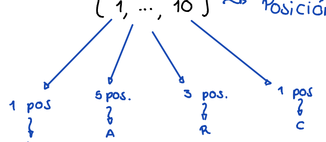
Hay 2 formas de resolverlo:

1. Hay 10 letras. Hay 10! formas de organizar las letras. Toca dividir por el # de formas de organizar las A's, R's, C's y U's

$$\frac{10!}{5!\,3!\,1!\,1!}$$

2. Yo puedo fijarme en las opciones

$\{1, \dots, 10\}$ ⤳ Posición de las letras.



Yo puedo dividir mis posiciones en aquellas que tendrán una A, aquellas con R y aquellas con U y C.

$$\binom{10}{5,3,1,1} = \frac{10!}{5!\,3!\,1!\,1!}$$

~ Definición: (Variable aleatoria) (Definición coloquial)
Considere un experimento aleatorio cuyos resultados forman Ω (El espacio muestral). Una variable aleatoria (v.a.) es una función X que asigna un # real a cada resultado. Estos números son lo que se conoce como los valores de la variable aleatoria.

~ Definición: (Variable aleatoria discreta)
Es discreta si su rango es finito o enumerable.

~ Teorema: Si el espacio muestral (Ω) es discreto, solo se pueden definir v.a. discretas.

Funciones de masa de probabilidad (FMP's o PMF's)

~ Lo que hacen es asignar probabilidades a los valores de la variable aleatoria.

~ Definición: Sea X una variable aleatoria discreta. La FMP de X denotada P_x es una función que a cada valor x de X le asigna la probabilidad del evento $\{X = x\}$

$$P_x(x) = P(\{X = x\}) = P(X^{-1}(\{x\}))$$

~ Ejemplo Se tira una moneda 2 veces

X: # caras

$$X = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Omega = \{\underbrace{cc}_{X=2}, \underbrace{cs, sc}_{X=1}, \underbrace{ss}_{X=0}\}$$

$$P_x(0) = P(\{X=0\}) = P(X^{-1}(\{0\}))$$

$$= P(\{X=0\}) = P(\{ss\}) = \frac{1}{4}$$

$$P_x(1) = P(\{X=1\}) = P(X^{-1}(\{1\}))$$

$$= P(\{cs, sc\}) = \frac{1}{2}$$

$$P_x(2) = P(\{X=2\}) = P(X^{-1}(\{2\}))$$

$$= P(\{cc\}) = \frac{1}{4}$$

Construcción de PMF DE X

1. $\forall x$ valor de X se busca $X^{-1}(\{x\})$

2. Se suman las probabilidades de todos los singletons contenidos contenidos en $X^{-1}(\{x\})$ para calcular

$$P_x(x) = P(\{X = x\})$$

Se suman todos las $P(\{\omega\})$ donde $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = x$

V. A. Bernoulli

~> **Definición:** Una v.a. Bernouli es aquella que puede asumir dos posibles valores (1 o 0) con probabilidades P y 1-P respectivamente.

~> **Ejemplo:** Un paciente llega al hospital por una posible enfermedad

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si tiene la enfermedad} \\ 0 & \text{si nó} \end{cases}$$

$$P_x(k) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1-p & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

V. A. Binomial

~> **Definición** Una v.a. binomial con parámetros n y p, $n \in \mathbb{N}^k$, $0 \leq p \leq 1$ es aquella asociada con posibles valores $k = 0, \dots, n$ asociados a tener k - exitos (aciertos) y $n-k$ fallos al repetir n pruebas de bernouli identicas e independientes (Experimento Binomial)

$$X = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{cases} \qquad P_x(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 0, \dots, n$$

~> **Ejemplo:** Tirar una moneda con probabilidad de cara P, n veces.

x: # de caras

X v.a. Binomial.

Variable Aleatoria Geometrica:

~ **Definición:** Una variable aleatoria geometrica con parametro p, $0<p<1$, es aquella con posibles valores $k = 0, 1, \dots$; $k \in \mathbb{N}^*$ asociada a tener el primer acierto despues de repetir k pruebas de Bernoulli independiente e identica.

$$x = \begin{cases} 1, \dots & P_x(k) = (1-p)^{k-1} p \\ & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

~ **Ejemplo:** Se tira una moneda con probabilidad de cara p, hasta que salga cara.

X: # tiros hasta obtener cara

$$P_x(k) = (1-p)^{k-1} p \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

~ **Teorema:** $\sum_{k=1}^{\infty} P_x(k) = 1$, Sea X una variable aleatoria geometrica con parametro p, $0<p<1$

Demostración

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_x(k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} \quad , \quad l = k-1$$

$$= p \sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^{l} \quad , \text{ como } \quad 0<p<1 \Rightarrow 0<1-p<1$$

$$= p\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right) = \frac{p}{p} = 1$$

Variable aleatoria Poisson.

~ **Definición:** Una variable aleatoria Poisson con parametro $\lambda > 0$, es aquella que toma valores $k = 0, 1, 2, \dots$, $k \in \mathbb{N}$. Con probabilidades:

$$P_x(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

~ **Teorema:** X es una variable aleatoria poisson con $\lambda > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_x(k) = 1$$

Demostración:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_x(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \rightarrow e^{\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

~> Observaciones:

1. La variable aleatoria Poisson es menos intuitiva.

2. Una forma de verla es como una aproximación a la variable aleatoria binomial cuando n es grande y p pequeño.
En este caso si $\lambda = np$:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \simeq e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

~> Ejemplo: X: # errores de ortografia en un libro pubicado.

3. La variable aleatoria poisson se utiliza para modelar el # de eventos en un determinado periodo de tiempo.

~> Ejemplo: # meteoritos que caen en un día a la tierra.

~> Ejemplo: # clientes que llegan a un local en una hora.