TERCER PARCIAL. OPTIMIZACIÓN SOFIA ROBAYO.

1. $\min x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 = f(x)$

s.a. $2x_1^2 - x_2^2 \geq 1 \Rightarrow 2x_1^2 - x_2^2 - 1 \leq 0 = g_1(x)$

$x_1 - x_2 \leq 0 = g_2(x)$

$x_1 \geq 0 = g_3(x)$

$x_2 \geq 0.\ g_4(x)$

a. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ cumple con la condicion necesaria de primer orden. KKT.

$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ -4x_2 \end{bmatrix}$ $\nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\nabla g_3(x) = 0$ $\nabla g_4(x) = 0$

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 3 \\ -x_2 + 2x_2 + 3 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x) + M_1 \nabla g_1(x) + M_2 \nabla g_2(x) + \cancel{M_3 \nabla g_3(x)} + \cancel{M_4 \nabla g_4(x)} = 0$

$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 3 \\ -x_2 + 2x_2 + 3 \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} 4x_1 \\ -4x_2 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$

1. $2x_1 - x_2 + 3 + 4M_1 x_1 + M_2 = 0$
2. $-x_2 + 2x_2 + 3 - 4M_1 x_2 - M_2 = 0$
3. $2x_1^2 - x_2^2 \geq 1$
4. $x_1 - x_2 \leq 0$
5. $x_1 \geq 0$
6. $x_2 \geq 0$
7. $M_1 \leq 0$
8. $M_2 \geq 0$
9. $M_3 \leq 0$
10. $M_4 \leq 0$
11. $M_1(2x_1^2 - x_2^2 - 1) = 0$
12. $M_2(x_1 - x_2) = 0$
13. $M_3(x_1) = 0$
14. $M_4(x_2) = 0$.

③ $2(1)^2 - (1)^2 - 1 = 0$

$2 - 1 - 1$

$2 - 2 = 0 \rightarrow g_1$ esta activa

④ $1 - 1 = 0 \rightarrow g_2$ esta activa

⑤ $1 \neq 0$

⑥ $1 \neq 0$.

Para esto tenemos que si $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ luego $M_1 \geq 0$, $M_2 \geq 0$, $M_3 = M_4 = 0$

continuacion 1.

verifiquemos que $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 > 0$

① $2(1) - (1) + 3 + 4\mu_1(1) + \mu_2 = 0$

$2 - 1 + 3 + 4\mu_1 + \mu_2 = 0$

$4 + 4\mu_1 + \mu_2 = 0$

$\mu_2 = -4\mu_1 - 4 = -(4\mu_1 + 4)$

② $-1 + 2(1) + 3 - 4\mu_1(1) - \mu_2 = 0$

$-1 + 2 + 3 - 4\mu_1 - \mu_2 = 0$

$4 - 4\mu_1 + 4\mu_1 + 4) = 0$

$8 \neq 0$

Bueno no cumple con la condicion necesaria de primer orden KKT.

2. min $x_1^2 + 2x_2 = f(x)$

s.a. $x_1^2 - x_2^2 \leq 5 = g_1(x) \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 - 5 \leq 0$

$x_2 - x_1 \leq 0 \;\; = g_2(x)$

$\bar{x} = (1,1) \qquad \hat{x} = (0,1)$

$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2 \end{bmatrix}$

- sea $\bar{x} = (1,1)$:

$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0$ y $\nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ podemos decir que $\bar{x}$ es regular.

Tambien podemos saber en ese punto que restriccion es activa y cual es inactiva.

$g_1(x) = x_1^2 - x_2^2 - 5 = 0$
$1^2 - 1^2 - 5$
$1 - 1 - 5$
$1 - 6$
$-5 \neq 0$

$g_2(x) = x_2 - x_1 = 0$
$1 - 1$
$0 = 0$

Por ende en este punto $g_2(x)$ esta activa, luego $\mu_1 = 0 \quad \mu_2 > 0$

① $2x_1 + 2\cancel{\mu_1}^{0} x_1 - \mu_2 = 0$
$2x_1 = \mu_2$
$2(1) = \mu_2$
$2 = \mu_2$

En este punto $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 2$

- sea $\hat{x} = (0,1)$:

$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$ podemos decir que $\hat{x}$ es regular.

Ahora vamos a ver las restricciones activas e inactivas.

$g_1(x) = \cancel{x_1^2}^{0} - x_2^2 - 5 = 0$
$= -1^2 - 5 = 0$
$-1 - 6 = 0$
$-7 \neq 0$

$g_2(x) = 1 - 0 = 0$
$1 \neq 0.$

cont. pto 2. → vemos que ninguna de las restricciones esta activa.

luego para $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 0$.

**3.** $\min\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5 = f(x)$

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0 = g_1(x)$$

$$x_1 \geq 0 = g_2(x)$$

$$x_2 \geq 0 = g_3(x)$$

$x_0 = (0, 2)$.

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$ $\quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \nabla g_2 = 0 \quad \nabla g_3(x) = 0$

$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \nabla g_1(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \nabla g_2(x_0) = 0 \quad \nabla g_3(x) = 0$.

$$f(x) + \mu_1 \nabla g_1 + \mu_2 \cancel{\nabla g_2}^{0} + \mu_3 \cancel{\nabla g_3}^{0} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

1. $4x_1 - x_2 + \mu_1 = 0$
2. $-x_1 + \mu_1 = 0$
3. $x_1 + x_2 - 2 \leq 0$
4. $-x_1 \leq 0$
5. $-x_2 \leq 0$
6. $\mu_1 (x_1 + x_2 - 2) = 0$
7. $\mu_2 (x_1) = 0$
8. $\mu_3 (x_2) = 0$
9. $\mu_1 \geq 0$
10. $\mu_2 \geq 0$
11. $\mu_3 \geq 0$

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 > 0 \quad \mu_3 = 0.$$

(2) $x_1 = 0$

(1) $x_2 = 0$

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 0 \quad \mu_3 = 0$$

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$

continuacion 3.

vease que para cualquier situacion $x_1 = \emptyset$
$x_2 = \emptyset$.

asi cualquera este activa o inactiva, siempre va a ser $x_1 = \emptyset$
$x_2 = \emptyset$.

4. $\min\ (x_1-2)^2+(x_2+2)^2 = f(x)$

$s.a.\ x_1 - x_2 \leq 1 = g(x)$

$q(x,c) = f(x) + c \cdot P(x)$

$P(x) = \max(0, g(x))^2$

$= \max(0, (x_1 - x_2 - 1)^2)$

$= (x_1 - x_2 - 1)^2$

$q(x,c) = (x_1-2)^2 + (x_2+2)^2 + c(x_1 - x_2 - 1)^2$

$$\nabla q(x,c) = \begin{bmatrix} 2(x_1-2)+2c(x_1-x_2-1) \\ 2(x_2+2)-2c(x_1-x_2-1) \end{bmatrix} = 0$$

① $2(x_1-2)+2c(x_1-x_2-1) = 0$

② $2(x_2+2)-2c(x_1-x_2-1) = 0$

①+② $2(x_1-2)+2(x_2+2)$

$2x_1 - 4 + 2x_2 + 4$

$2x_1 = -2x_2$

$x_1 = -x_2$

$-x_1 = x_2$

② $2(-x_1+2) - 2c(x_1+x_1-1) = 0$

$-2x_1 + 4 - 4x_1c + 2c = 0$

$-2x_1 - 4x_1c = -2c - 4$

$x_1(-2-4c) = -2c-4$

$x_1 = \dfrac{-2c-4}{-2-4c}$ $\quad x_1 = \dfrac{\cancel{-2}(c+2)}{\cancel{-2}(1+2c)}$ $\quad x_1 = \dfrac{c+2}{1+2c}$

luego como $x_2 = -x_1$ entonces $x_2 = -\dfrac{c+2}{1+2c}$

$\lambda = 2c\ g(x) = 2c(x_1 - x_2 - 1)$

$= 2c\left(\dfrac{c+2}{1+2c} + \dfrac{c+2}{1+2c} - 1\right)$

$= 2c\left(\dfrac{2c+4}{1+2c} - 1\right) = \dfrac{4c^2+8c}{1+2c} - 2c$

$= \lim\limits_{c\to\infty} \dfrac{4+\cancel{\frac{8}{c}}^{0}}{\cancel{\frac{1}{c^2}}^{0}+\frac{2}{c}} - \cancel{\frac{2}{c}}^{0}$ $\quad \boxed{\lambda = 4}$