Interferência de dois feixes

- Conceitos gerais de óptica ondulatória
- Interferência de duas ondas
- Interferómetros laser
- Experiência do interferómetro de Michelson
- Análise de interferogramas (inversão de Abel)

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Nota introdutória

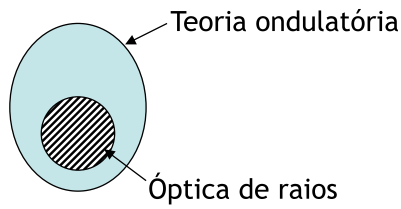
Geral: Interferência de duas ondas

Particular: Interferómetro de Michelson (Nobel da Física 1907)

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Conceitos gerais da óptica ondulatória

$$\text{Dualidade da luz} \begin{cases} \text{corpuscular} \\ \text{ondulatória} \end{cases}$$



Aspecto quântico (partícula) => domina nos aspectos de emissão e absorção

Aspecto ondulatório (onda) => domina nos efeitos de propagação e interferência

$$\boxed{\text{A Luz} \Leftrightarrow \text{Ondas electromagnéticas}}$$

Teoria do campo electromagnético

Equações de Maxwell (SI)

$\nabla \cdot E_m = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	Lei de Coulomb
$\nabla \cdot B = 0$	Monop. magn.
$\nabla \times E = -\dfrac{\partial H}{\partial t}$	Lei de Faraday
$\nabla \times B_m = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E_m}{\partial t} + \mu_0 J$	Lei de Ampère

$$E_m = E + \frac{1}{\varepsilon_0} P; \quad B_m = B + \mu_0 M; \quad J = \sigma E$$

Lei de Ohm

vácuo

não condutor

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\rho = 0 \quad P = 0$$

$$M = 0 \quad \sigma = 0$$

OPA Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Onda electromagnética I

Equação de onda electromagnética no vácuo

$$\boxed{\nabla^2 E - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0}$$

onda segundo z: $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c}$$

Kohlrausch
Weber

veloc. luz no vácuo
(já conhecida)

<u>Luz ⇔ Onda Electromagnética</u>

(confirmado por experiências de difracção)

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Onda electromagnética II

Onda monocromática unidimensional

$$E(z,t) = f(z - ct)$$ Solução da eq. de onda

direcção de propagação

Eq. onda linear vem $E(z,t) = a f(z - ct) + b g(z + ct)$

Análise de Fourier => decomposição em funções de onda fundamentais (componentes)

$$E(z,t) = \underset{\text{amplitude}}{A}\sin\underbrace{(kz - \omega t)}_{\text{fase}}$$

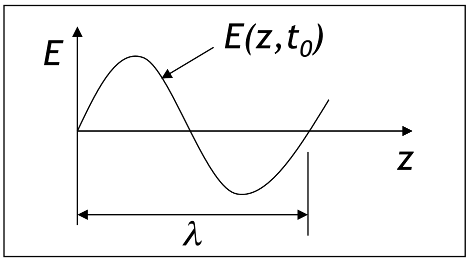
OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

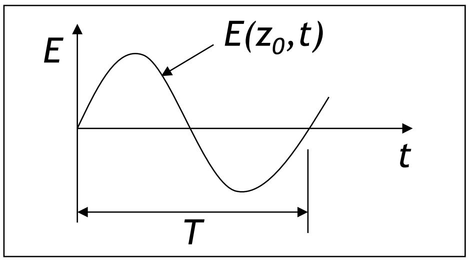
Onda electromagnética III

Componente fundamental - Harmónica

$$E(z,t) = \underset{\text{amplitude}}{A}\,\sin\underbrace{(kz - \omega t)}_{\text{fase}} \qquad \begin{cases} k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{cases}$$

$\dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T} = c$ (velocidade de fase) $\qquad \omega = c\,k$ relação de dispersão (vácuo)





Onda electromagnética IV

Notação complexa da harmónica

$$E(z,t) = \underset{\text{amplitude}}{E_0}\, e^{\overset{\text{fase}}{i(kz - \omega t)}}$$

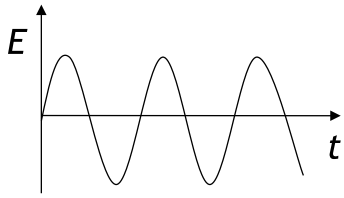
Transformando no fim na parte real $\mathrm{Re}\{E\} = \frac{1}{2}\left[E + E^*\right]$
(só para operações lineares)

Geral: $\boxed{E(r,t) = E_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}$ Onda plana segundo ***k*• *r***

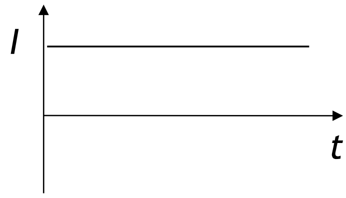
sentido em relação a ***k***

Intensidade da onda I

Não existe forma de seguir o $E(r,t)$ - só Intensidade



$\xrightarrow{\text{o que é mensurável}}$



Exemplo: T do HeNe é aprox. 2 fs

Conceito não linear pois $\boxed{I_{total} \neq I_1 + I_2}$

Definição: $\boxed{\text{Intensidade} = \dfrac{\text{Energia}}{\text{Área x Tempo}}}$ Densidade de potência (Irradiância)

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Intensidade da onda II

Relacionar I com a amplitude de E
(densidades volúmicas de energia campo)

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

(condensador plano)

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

(espira de corrente)

Das eqs. de Maxwell
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \,, \vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0 & \text{(Divergências)} \\ \vec{n} \times \vec{E}_0 = c\, \vec{B}_0 & \text{(Rotacionais)} \end{cases}$$

Escalar: $E = c\,B$ vem $u_E = u_B$ logo $\boxed{u = u_E + u_B = 2u_E = \varepsilon_0 E^2}$

Densidade Total

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Intensidade da onda III

Energia que atravessa ΔA durante Δt

volume

$$I = \frac{u c \, \Delta t \, \Delta A}{\Delta A \, \Delta t} = u c$$

Daqui vem

$$\boxed{I = \varepsilon_0 \, c \, E^2}$$

Intensidade "instantânea" mas qualquer medida da intensidade é uma média num intervalo de tempo

T_m >> período T

Intensidade da onda IV

Onda monocromática 1D

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\left[E(z)\, e^{-i\omega t} + E^*(z)\, e^{i\omega t}\right]$$

$$I(z,t) = \frac{\varepsilon_0 c}{4}\left[E^2(z)\, e^{-2i\omega t} + E^{*2}(z)\, e^{2i\omega t} + 2E(z)E^*(z)\right]$$

Intensidade média ($T_m \, \omega$ >> 1)

$$\boxed{I(z) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E(z)\, E^*(z) = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\left|E_0\right|^2}$$

Const. no tempo e no espaço

Interferência de duas ondas I

Equação de Interferência $E_1(r,t) = E_1\, e^{i\varphi_1};\, E_2(r,t) = E_2\, e^{i\varphi_2}$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\,\mathrm{Re}\left\{\left\langle E_1^* E_2 \right\rangle\right\}} \qquad \begin{cases} \varphi_1 = k_1 z - \omega_1 t \\ \varphi_2 = k_2 z - \omega_2 t \end{cases}$$

Coerência: **origem** - propriedade atribuída à capacidade da radiação produzir fenómenos de interferência

presente - é definida pelas propriedades de correlação das quantidades do campo (óptico)

Interferência revela a correlação entre duas ondas
Interferómetro de Michelson ⇒ coerência temporal

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Interferência de duas ondas II

Princípio: sobrepor uma onda de luz com uma cópia desta deslocada no tempo

$\boxed{E_2(t) = E_1(t+\tau)}$ Dado pela diferença de percurso *2d* $\boxed{\tau = \dfrac{2d}{c}}$

E_1 - espelho fixo; E_2 - espelho móvel

Intensidade vem

$$I = \left\langle E\,E^* \right\rangle = \left\langle E_1\,E_1^* \right\rangle + \left\langle E_2\,E_2^* \right\rangle + \left\langle E_1\,E_2^* \right\rangle + \left\langle E_1^*\,E_2 \right\rangle$$

$$= 2I_1 + \underbrace{2\mathrm{Re}\left\{\left\langle E_1^* E_2 \right\rangle\right\}}_{\text{termo de interferência ou função de correlação}}$$

média no tempo

soma das intensidades

termo de interferência ou função de correlação

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Interferência de duas ondas III

$E_2(t) = E_1(t+\tau)$

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma(\tau) &= \left\langle E_1^*(t)E_1(t+\tau)\right\rangle \\ &= \lim_{T_m\to\infty}\frac{1}{T_m}\int_{-T_m/2}^{T_m/2} E_1^*(t)E_1(t+\tau)\,dt\end{aligned}}$$

- Função de autocorrelação de $E_1(t)$

- Função de autocoerência complexa

Exº: onda harmónica $E_1(t) = E_0 e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned}I(\tau) &= 2I_1 + 2\mathrm{Re}\{\Gamma(\tau)\} = 2I_1 + 2I_1\mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega\tau}\right\} \\ &= 2I_1\left(1+\cos(\omega\tau)\right)\end{aligned}$$

Coerência temporal I

Uma forma de medir a coerência é analisar o contraste das intensidades do padrão (visibilidade)

$$\boxed{K(\tau) = \frac{I_{max}(\tau_1) - I_{min}(\tau_2)}{I_{max}(\tau_1) + I_{min}(\tau_2)}} \qquad \begin{cases} \tau_1 - \tau_2 \approx \dfrac{\lambda}{2c} \\ K(\tau) \leq 1 \end{cases}$$

Em função de $\Gamma(\tau)$

$$K(\tau) = \frac{2I_1 + 2|\Gamma(\tau)| - 2I_1 + 2|\Gamma(\tau)|}{2I_1 + 2|\Gamma(\tau)| + 2I_1 - 2|\Gamma(\tau)|} = \frac{|\Gamma(\tau)|}{I_1} = \frac{|\Gamma(\tau)|}{\Gamma(0)} = |\gamma(\tau)|$$

grau de coerência

Coerência temporal II

Exº: Duas ondas planas monocromáticas

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega_1 t} + E_0 e^{-i\omega_2 t}$$

Em função de $\Gamma(\tau)$

$$\omega_1 = \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\tau) = |E_0|^2 e^{-i\omega\tau} \quad \rightarrow \quad K(\tau) = \left|e^{-i\omega\tau}\right| = 1$$

$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\tau) = |E_0|^2\left[e^{-i\omega_1\tau} + e^{-i\omega_2\tau}\right] \quad \rightarrow \quad K(\tau) = \left|\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\tau\right)\right|$$

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Coerência temporal III

Exº: Soma de *m* ondas harmónicas

$$E(t) = \sum_{m=1}^{M} E_{0_m} e^{-i\omega_m t}; \quad \Gamma(\tau) = \sum_{m=1}^{M} \left|E_{0_m}\right|^2 e^{-i\omega_m \tau}$$

em contínuo

$$E(t) = \int_0^{\infty} E_0(\omega) e^{-i\omega t} dt; \quad \Gamma(\tau) = \underbrace{\int_0^{\infty} |E_0(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega}$$

logo $\boxed{\tau_c = \dfrac{1}{\Delta\nu_c} \quad \rightarrow \quad l_c = c\,\tau_c}$

Transformada de Fourier da distribuição de intensidade espectral de um feixe $|E_0(\omega)|^2$

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Interferómetros I

Duas ondas planas de intensidade I_0 a propagarem-se na direcção z com uma diferença de fase dada pela distância $l = c\ \tau$ (diferença de percurso)

$$\boxed{I = 2I_0\left[1 + \cos(\omega\tau)\right] = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right)\right]}$$

Equação de Interferência

Interferómetro: instrumento óptico que separa duas ondas provenientes da mesma fonte (div. feixe), atrasa um dos percursos (espelhos), e depois recombina-as (div. feixe) e detecta a intensidade da sobreposição.

Interferómetros II

Interferómetros por tipo:

Três tipos clássicos

- Mach-Zehnder
- Michelson
- Sagnac

OPA Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Interferómetros III

Sensibilidade $I(\varphi)$:

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \ l}$$

Índice de refracção

Pequenas distâncias

Comprimento de onda

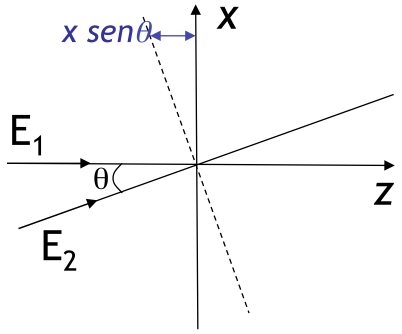
Exemplo: $\frac{l}{\lambda_0} = 10^4 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \Delta\varphi = 2\pi \\ n \approx 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta n = 10^{-4} \\ \Delta l = \lambda_0 \\ \Delta\lambda \approx \frac{\lambda_0^2}{l} \end{cases}$

Interferência oblíqua I

Se inclinarmos ligeiramente um dos espelhos do interferómetro, aparece imediatamente um padrão de riscas estacionário no alvo.

E_1 propaga-se segundo z $\rightarrow E_1 = (I_0)^{1/2} e^{-ikz}$

E_2 propaga-se segundo θ em relação a z $\rightarrow E_2 = (I_0)^{1/2} e^{-i(k\cos\theta\, z + k\sin\theta\, x)}$



Interferência oblíqua II

Em $z = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = k\,x \sin\theta$

$$\boxed{I(x) = 2I_0\left[1 + \cos\left(k\ x\ \sin\theta\right)\right]}$$

<u>Equação de Interferência para ondas oblíquas</u>

Padrão sinusoidal segundo x

$$\Delta\varphi = k\,\Delta x \sin\theta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{\sin\theta}}$$

Largura entre riscas

Interferência oblíqua III

Exemplo: $\Delta x = 1\ \mathrm{mm}; \quad \lambda = 633\ \mathrm{nm}$ (laser de HeNe)

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{\Delta x}\right) = 0.036^{\mathrm{o}} \approx 2'$$

<u>Se $\theta = 30^{\mathrm{o}}$ vem $\Delta x = 2\lambda$</u>

- Sugere método de impressão de alta resolução (redes de difracção)
- Sugere método de monitorização do ângulo em relação a uma referência (alinhamento fino; registrar o padrão de interferência dum objecto)

Exp.ª interferómetro laser

<u>Objectivo</u>: Determinação do campo de temperaturas na vizinhança de uma ponta cilíndrica aquecida (ferro de soldar)

Método não perturbativo

Variação da fase (ω=const.):

índice de refracção do meio segundo uma linha perpendicular

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\int (n-1)\,dl$$

método para obter *n* em função de $\delta\phi$

OPA
Óptica Aplicada

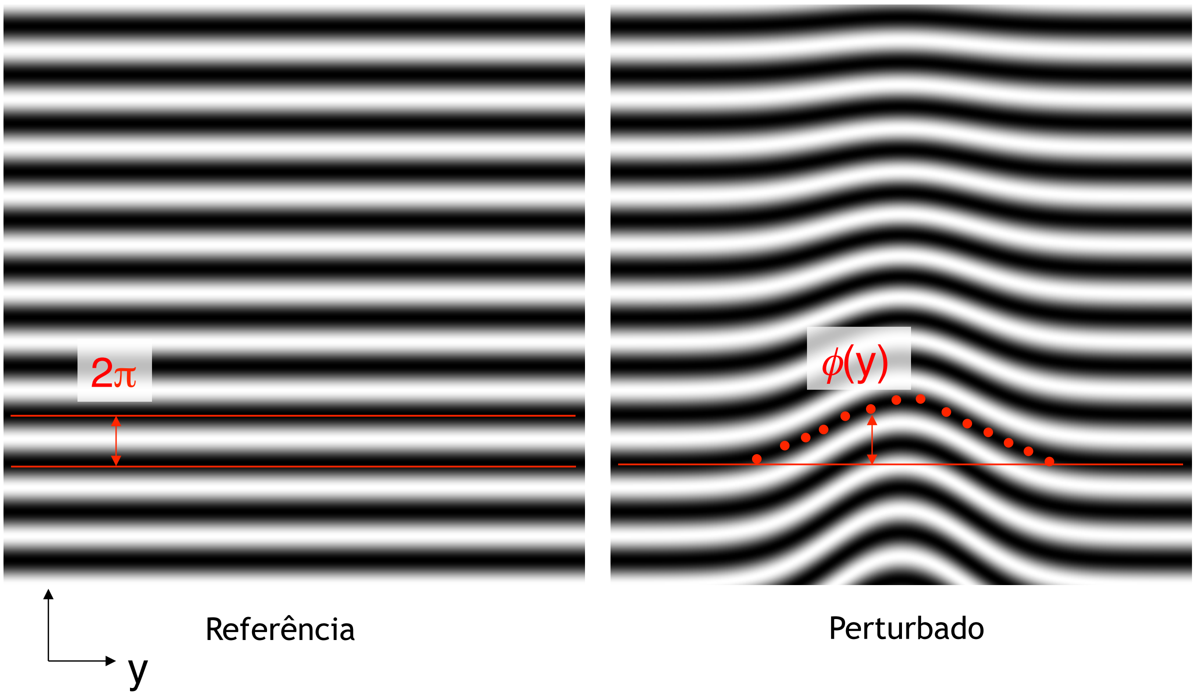
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Interferograma

OPA
Óptica Aplicada

Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Tratamento de interferogramas

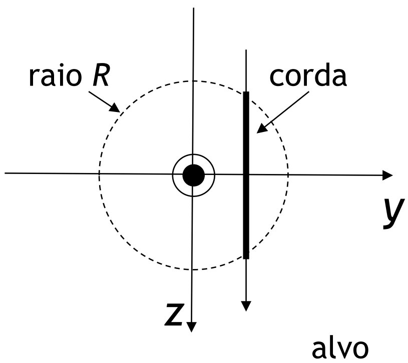


OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Inversão de Abel

Em interferometria medimos o valor médio do desvio de fase ao longo de uma linha. Assumindo simetria cilíndrica, podemos deduzir a distribuição radial usando a inversão de Abel.

$$\phi(y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} (n_r - 1)\, dz$$



Transformada inversa de Abel:

$$n_r - 1 = -\frac{1}{\pi} \frac{\lambda_0}{2\pi} \int_r^R \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}$$

Cálculo do integral: ver artigo do RAL

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Dados adicionais

Temos que ter a relação do índice de refracção do ar em relação à temperatura.

n_{AR}[632.8 nm; PTN]=1.00029115

(T=0ºC; P=1atm)

n-1 é proporcional à densidade do gás (PV=nRT) vem

$$(n_1-1)T_1 = (n_2-1)T_2$$

<u>Questão:</u>
Para um determinado sistema de detecção qual a influência do tamanho das riscas de interferência na **resolução** e **sensibilidade** nas medidas do interferómetro laser?

OPA
Óptica Aplicada
Departamento de Física
Instituto Superior Técnico