

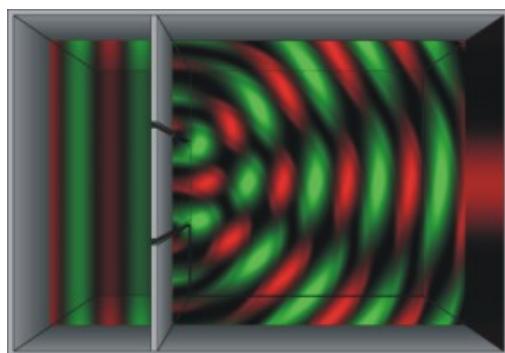
Óptica de Fourier

- Difracção
- Transformadas de Fourier e sistemas lineares
- Análise de Fourier bi-dimensional
- Teoria de difracção escalar (Fresnel e Fraunhofer)
- Transformada de Fourier por uma lente
- Filtragem de Fourier óptica (tratamento de imagem)
- Experiência de óptica de Fourier

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Difracção

A luz nem sempre viaja em linha recta - em particular, quando encontra obstruções no caminho de propagação tende a espalhar-se.



Este fenómeno é conhecido por **difracção**.
A análise de Fourier é particularmente adequada para estudar problemas de difracção.

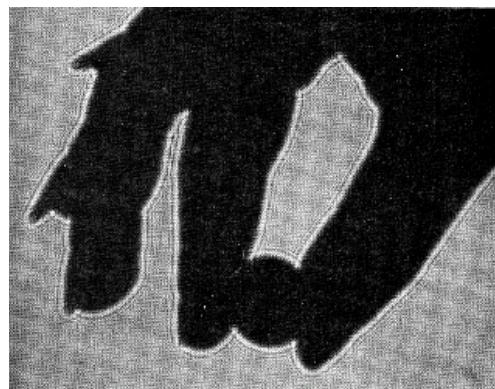
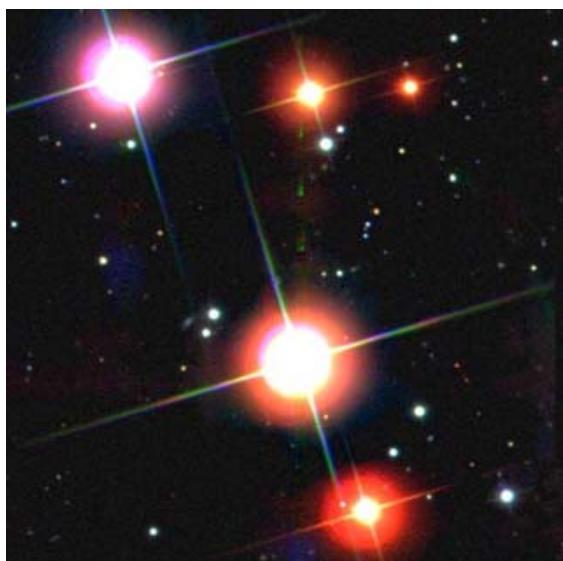
OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Quando as ondas encontram obstáculos, espalham-se...



OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

...o que pode dar origem a resultados curiosos.



OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Análise de Fourier de um sinal

Define-se a Transformada de Fourier (TF) de um sinal arbitrário $f(t)$ por

$$F[f(t)] = \int f(t) e^{-i\omega t} = \int f(t) e^{-i2\pi\nu t} = \tilde{f}(\nu)$$

e a transformada inversa

$$F^{-1}[\tilde{f}(\nu)] = \int \tilde{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} = f(t)$$

A TF pode-se interpretar em termos de qualquer função $f(t)$ poder ser representada por uma soma de funções elementares (ondas harmónicas) multiplicadas por um coeficiente $\tilde{f}(\nu)$

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Algumas propriedades da TF

1. Linearidade

$$F[af(t) + bg(t)] = aF[f] + bF[g]$$

2. Teorema da convolução

$$F[f \otimes g] = F\left[\int f(t')g(t-t')dt'\right] = F[f]F[g] = \tilde{f}(\nu)\tilde{g}(\nu)$$

3. Teorema da autocorrelação

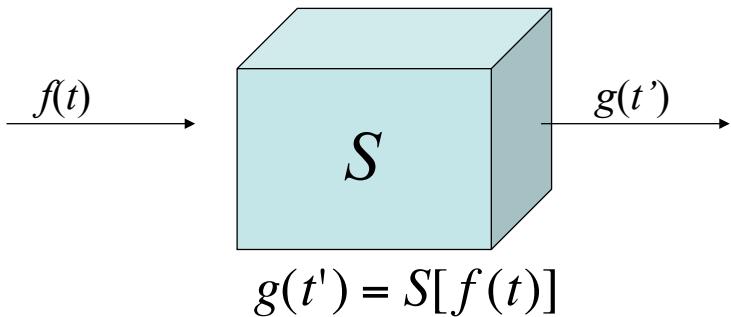
$$F\left[\int f(t')f^*(t-t')dt'\right] = |F[f]|^2 = |\tilde{f}(\nu)|^2$$

4. Teorema de Parseval

$$\int |f(t)|^2 dt = \int |F[f(t)]|^2 d\nu = \int |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu$$

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Sistemas lineares I



Sistemas lineares têm a propriedade de sobreposição:

$$S[af_1(t) + bf_2(t)] = aS[f_1(t)] + bS[f_2(t)] = ag_1(t') + bg_2(t')$$

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Sistemas lineares II

Escrevendo uma função arbitrária em termos de sobreposição de funções elementares (ex. ondas harmónicas)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

$$g(t') = S[f(t)] = S\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right\}$$

Considerando os $\tilde{f}(\nu)$ como coeficientes das ondas harmónicas

$$g(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu) S[e^{i2\pi\nu t}] d\nu$$

Um sistema linear é completamente caracterizado pela resposta a funções elementares

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Sistemas lineares III

A resposta impulsional é a saída do sistema para uma entrada pontual

$$h(t',\tau) = S[\delta(t - \tau)]$$

Um sistema linear é dito *invariante* se

$$h(t',\tau) = h(t' - \tau)$$

Nesse caso, a resposta g é a **convolução** da entrada f com a resposta impulsional h :

$$g(t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t' - \tau)d\tau = f \otimes h$$

Ou, aplicando o teorema da convolução da TF

$$\tilde{g}(\nu) = \tilde{f}(\nu) \boxed{\tilde{h}(\nu)} \quad \text{função de transferência } \tilde{h}(\nu) = F[h(t' - \tau)]$$

OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Análise de Fourier em óptica I

Funções elementares a 2D: ondas planas

$$E(x,y,z) = A e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (k_x, k_y, k_z) \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Em $z=0$ (plano objecto)

$$E(x,y,0) = A e^{-i(k_x x + k_y y)} = A e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} \quad \begin{cases} \nu_x = \frac{k_x}{2\pi} \\ \nu_y = \frac{k_y}{2\pi} \end{cases}$$

Para uma onda arbitrária $E_1(x,y)$

$$F[E_1(x,y)] = \iint E_1(x,y) e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} = \tilde{E}_1(\nu_x, \nu_y)$$

Princípio da óptica de Fourier

Uma onda arbitrária no espaço livre pode ser analisada como uma sobreposição de ondas planas (harmónicas)

OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Análise de Fourier em Óptica II

Correspondência uma harmónica espacial é uma onda plana.

\mathbf{k} é o vector de onda e define a direcção de propagação; logo

$$E(x,y,0) \rightarrow \begin{cases} \theta_x = \arcsin\left(\frac{k_x}{k}\right) = \arcsin(\lambda\nu_x) \\ \theta_y = \arcsin\left(\frac{k_y}{k}\right) = \arcsin(\lambda\nu_y) \end{cases}$$

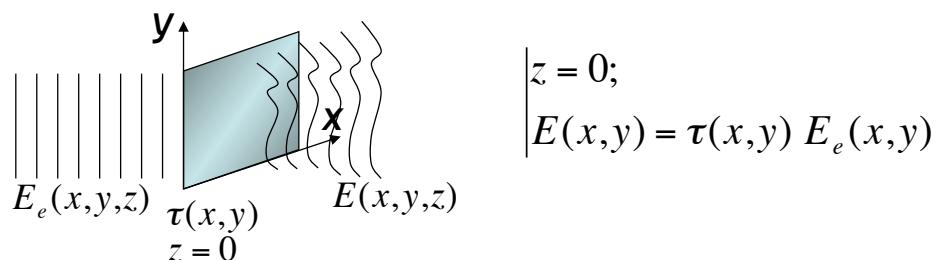
Os períodos da função harmónica no plano (x,y) $\Lambda_x = \frac{1}{\nu_x}; \Lambda_y = \frac{1}{\nu_y}$

Intuitivamente: a transmissão por um elemento fino cuja amplitude é uma função harmónica vai produzir uma onda plana desviada segundo um ângulo quando iluminada por uma onda plana.

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Teoria de difracção escalar

Considerando a transparência $\tau(x,y)$ iluminado por uma onda plana monocromática (polarização linear).



Uma boa aproximação para descrever o $E(x,y,z)$ é admitir que cada ponto no plano $(x,y,0)$ é uma fonte de uma onda esférica.

Princípio de Huygens

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Integral de Kirchhoff

Num plano (x' , y' , z) o campo em cada ponto $E(x', y', z)$ é dado pelo integral de Kirchhoff, ou seja, a soma dos campos de todas as ondas esféricas dos pontos do plano (x , y , 0).

$$E(x', y', z) = \underbrace{\frac{1}{i\lambda}}_{\substack{\text{normalização} \\ \text{fase}}} \iint_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} E(x, y) \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\substack{\text{onda esférica}}} \underbrace{\cos(\hat{n}, \hat{r})}_{\text{direccionalidade}} dxdy$$

O Integral de Kirchhoff é dedutível da equações de Maxwell pelo teorema de Green (Ver Jackson)

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Aproximação de Fresnel I

Como o integral de Kirchhoff é pouco aplicável num tratamento analítico devemos fazer algumas aproximações para o simplificar.

Aproximação paraxial: $|x|, |y| \ll z$ e $|x'|, |y'| \ll z$

$$E(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} E(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\cos(\hat{n}, \hat{r})}_{\approx 1} dxdy$$
$$r \approx z + \frac{(x' - x)^2}{2z} + \frac{(y' - y)^2}{2z} - \dots$$

(expansão de Taylor)

$$r \approx z \Rightarrow \frac{1}{r} \approx \frac{1}{z}$$

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Aproximação de Fresnel II

O integral de Kirchhoff com a aproximação de Fresnel vem

$$E(x',y',z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x,y) e^{\frac{ik}{2z}[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]} dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x,y) h_z(x' - x, y' - y) dx dy$$



$$E(x',y',z) = E(x,y) * h_z(x,y)$$

convolução

$$h_z(x,y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)}$$

Função de resposta de impulso
espaço livre (função de Green)

OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Aproximação de Fresnel III

Por outro lado podemos escrever o integral como uma transformada de Fourier

$$E(x',y',z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x'^2 + y'^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x,y) e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)} e^{-2\pi i \left(\frac{x'}{\lambda z} x + \frac{y'}{\lambda z} y \right)} dx dy$$

$$\mathbf{F} \left[E(x,y) e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)} \right] \left(\frac{x'}{\lambda z}, \frac{y'}{\lambda z} \right)$$

Transformada de Fourier do campo $E(x,y)$
multiplicado por um factor de fase quadrático

OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Aproximação de Fraunhofer I

A aproximação de Fresnel é boa até para distâncias relativamente curtas ($<10\lambda$). No entanto para distâncias grandes (farfield) o factor de fase quadrático fica muito pequeno e pode ser desprezado.

$$z \gg \frac{\pi}{\lambda} (x^2 + y^2)$$

Diferença em
relação à de Fresnel

O Integral vem

$$E(x',y',z) = \underbrace{\frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x'^2+y'^2)}}_{A(x',y',z)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x,y) e^{-2\pi i \left(\frac{x'}{\lambda z} x + \frac{y'}{\lambda z} y \right)} dx dy$$

$v_x = \frac{x'}{\lambda z}$ $v_y = \frac{y'}{\lambda z}$

OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Aproximação de Fraunhofer II

O padrão de difracção no campo longínquo é reduzido à TF do campo logo a seguir à superfície difractada

$$E(x',y',z) = A(\lambda z v_x, \lambda z v_y, z) \mathcal{F} [E(x,y)](v_x, v_y)$$

v_x e v_y são as frequências espaciais e proporcionais aos ângulos α e β

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{x'}{\lambda z} = \frac{\tan \alpha}{\lambda} \approx \frac{\alpha}{\lambda} \\ v_y &= \frac{y'}{\lambda z} = \frac{\tan \beta}{\lambda} \approx \frac{\beta}{\lambda} \end{aligned} \right\} e^{-2\pi i \left(\frac{x'}{\lambda z} x + \frac{y'}{\lambda z} y \right)} \approx e^{ik(x \sin \alpha + y \sin \beta)}$$

a difracção de Fraunhofer é dada pela decomposição da luz em ondas planas segundo ângulos α e β

$$I(v_x, v_y) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} | \mathcal{F} [E(x,y)](v_x, v_y) |^2$$

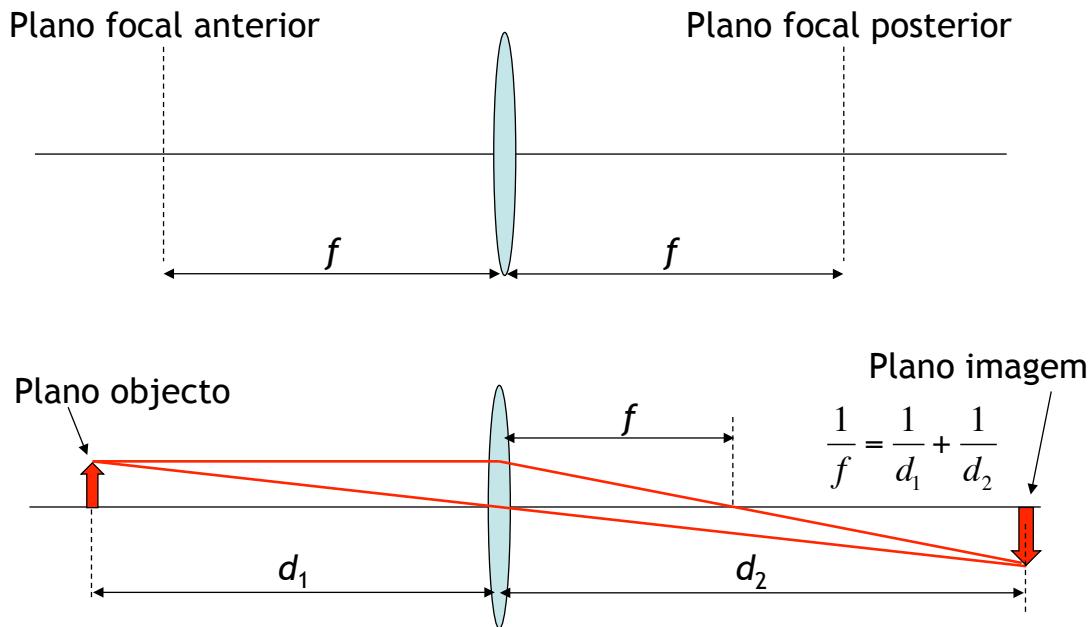
OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Propriedades das lentes I



OPA

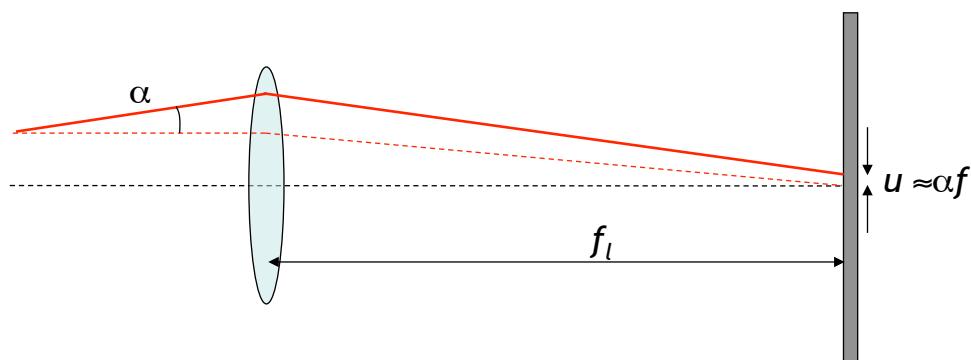
Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Propriedades das lentes II

Os raios de luz paralelos ao eixo de uma lente convergente intersectam o plano focal posterior no eixo.



Um raio com um ângulo α em relação ao eixo intersecta o plano focal a uma distância u do eixo, dada por $u = \tan \alpha f \approx \alpha f$.

OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Transformada de Fourier numa lente

Considerando um raio que faz um ângulo α com o eixo dos x e β com o eixo dos y , as coordenadas (u, v) no plano focal são dadas por

$$\frac{u}{f_l} = \tan \alpha \approx \alpha; \quad \frac{v}{f_l} = \tan \beta \approx \beta$$

Esta relação é idêntica à da aprox. Fraunhofer: a lente projecta o padrão de difracção do campo longínquo (TF) no plano de foco

$$\left. \begin{array}{l} v_x = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{u}{\lambda f_l} \\ v_y = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{v}{\lambda f_l} \end{array} \right\} \text{lembrar que } E(x,y) \text{ pode ser decomposto em várias harmónicas (ondas planas com diferentes direcções)}$$
$$\left. \begin{array}{l} \text{no plano do foco} \\ u = \lambda f_l v_x \\ v = \lambda f_l v_y \end{array} \right\}$$

$$\tilde{E}(u,v) = A(u,v,f_l) \iint E(x,y) e^{-2\pi i \left(\frac{u}{\lambda f_l} x + \frac{v}{\lambda f_l} y \right)} dx dy \propto F[E(x,y)](u,v)$$

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Padrão de Fourier no plano focal

O que se observa é a intensidade

$$I(u,v) = |\tilde{E}(u,v)|^2 \propto |F[E(x,y)](v_x, v_y)|^2$$

O factor de fase desaparece, logo o objecto pode ser colocado em qualquer posição antes da lente que o padrão mantém-se inalterável

$$\left. \begin{array}{l} u = \lambda f_l v_x \\ v = \lambda f_l v_y \end{array} \right\} \Rightarrow f_l / \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \text{ ou seja, quanto maior for a distância focal, maior o padrão de Fourier}$$

no plano do foco

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Várias transf. Fourier típicas I

Intuitivamente permite-nos adivinhar o padrão de difracção de objectos complexos

Fonte pontual

$$\rightarrow E(x,y) = E_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{F}[E(x,y)] &= \iint E_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) e^{-2\pi i(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy = \\ &= E_0 e^{-2\pi i(\nu_x x_0 + \nu_y y_0)} = E_0 e^{-k_i \left(u \frac{x_0}{f_l} + v \frac{y_0}{f_l} \right)} \end{aligned}$$

$$I = |\mathbf{F}[E(x,y)]|^2 = |E_0|^2 \text{ uniforme}$$

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Várias transf. Fourier típicas II

Onda plana

$$\rightarrow E(x,y) = E_0 \Rightarrow \mathbf{F}[E(x,y)] = E_0 \delta(\nu_x) \delta(\nu_y)$$

$$\rightarrow E(x,y) = E_0 e^{\frac{2\pi}{\lambda}(x \sin \alpha + y \sin \beta)}$$

$$\rightarrow \mathbf{F}[E(x,y)] = E_0 \delta\left(\nu_x - \frac{\sin \alpha}{\lambda}\right) \delta\left(\nu_y - \frac{\sin \beta}{\lambda}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = f_l \sin \alpha \approx f_l \alpha \\ v_0 = f_l \sin \beta \approx f_l \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Coordenadas} \\ \text{do ponto no} \\ \text{plano de foco} \end{array}$$

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Várias transf. Fourier típicas III

Fenda de extensão infinita

Largura infinitesimal $\rightarrow E(x,y) = E_0 \delta(x)$

$$\rightarrow \mathcal{F} [E(x,y)] = E_0 \delta(v_y)$$

Largura finita $\rightarrow E(x,y) = E_0 \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = E_0 \times \begin{cases} 1 & \text{para } |x| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$$\rightarrow \mathcal{F} [E(x,y)] = E_0 \delta(v_y) \frac{\sin(\pi v_x a)}{\pi v_x}$$

$a \uparrow$ \Rightarrow mais juntos estão os máximos

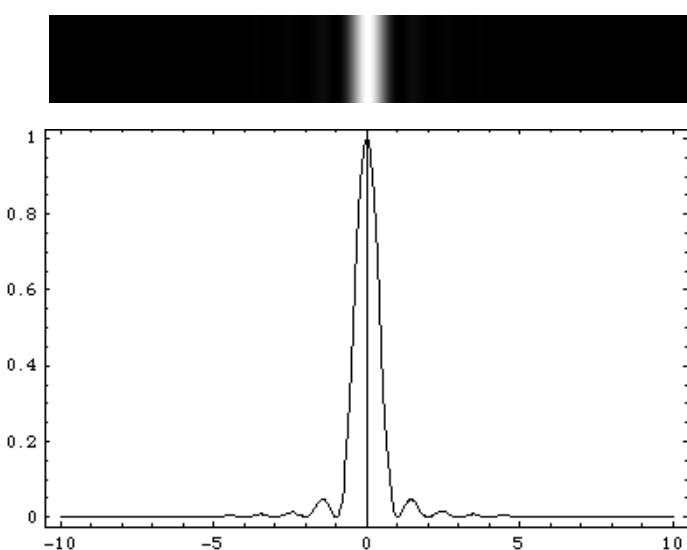
OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Fenda infinita



OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

A difracção nos suportes (“aranha”) do espelho secundário dos telescópios provoca um efeito de cruz à volta das imagens das estrelas.



OPA
Óptica Aplicada

Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Várias transf. Fourier típicas IV

Duas fontes pontuais

$$\rightarrow E(x,y) = E_0 \delta(y) [\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)]$$

$$\rightarrow \mathbf{F}[E(x,y)] = E_0 [e^{-2\pi i \nu_x x_0} + e^{2\pi i \nu_x x_0}] = E_0 2 \cos(2\pi \nu_x x_0)$$

$$I(\nu_x) \propto |\mathbf{F}[E(x,y)]|^2 = |E_0|^2 2[1 + \cos(4\pi \nu_x x_0)]$$

$$\text{Período da grelha} \rightarrow \Delta \nu_x = \frac{1}{2x_0}$$

OPA
Óptica Aplicada

Departamento de Física
Instituto Superior Técnico

Várias transf. Fourier típicas V

Se gravarmos numa transparência será que reproduzimos as duas fontes pontuais?

Rede Sinusoidal

$$\rightarrow \tau(x,y) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{2\pi i \frac{x}{d}} + \frac{1}{4} e^{-2\pi i \frac{x}{d}}$$

$$\rightarrow E(x,y) = E_0 \tau(x,y) = E_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{2\pi i \frac{x}{d}} + \frac{1}{4} e^{-2\pi i \frac{x}{d}} \right]$$

$$\rightarrow \mathbf{F} [E(x,y)] = \frac{1}{2} E_0 \delta(v_y) \delta(v_x) \quad \text{ordem 0}$$

$$+ \frac{1}{4} E_0 \delta(v_y) \delta(v_x - \frac{1}{d}) \quad \text{ordem 1}$$

Porquê três pontos ?

Componente DC não nula!

$$+ \frac{1}{4} E_0 \delta(v_y) \delta(v_x + \frac{1}{d}) \quad \text{ordem -1}$$

OPA Departamento de Física

Óptica Aplicada

Instituto Superior Técnico

Várias transf. Fourier típicas VI

A maior parte dos componentes ópticos são circulares

Abertura circular

$$\rightarrow \tau(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{para } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow \tau(r,\theta) = \begin{cases} 1 & r \leq a \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\rightarrow E(r,\theta) = E_0 \tau(r)$$

$$\rightarrow \mathbf{F} [E](v,\varphi) = \frac{E_0 a}{v} J_1(2\pi v a)$$

$$v_1 = \frac{1.22}{2a} = \frac{u_1}{\lambda f} \quad \longrightarrow \boxed{r_{Airy} = 1.22 \lambda \frac{f}{D} = 1.22 \lambda f / \#}$$

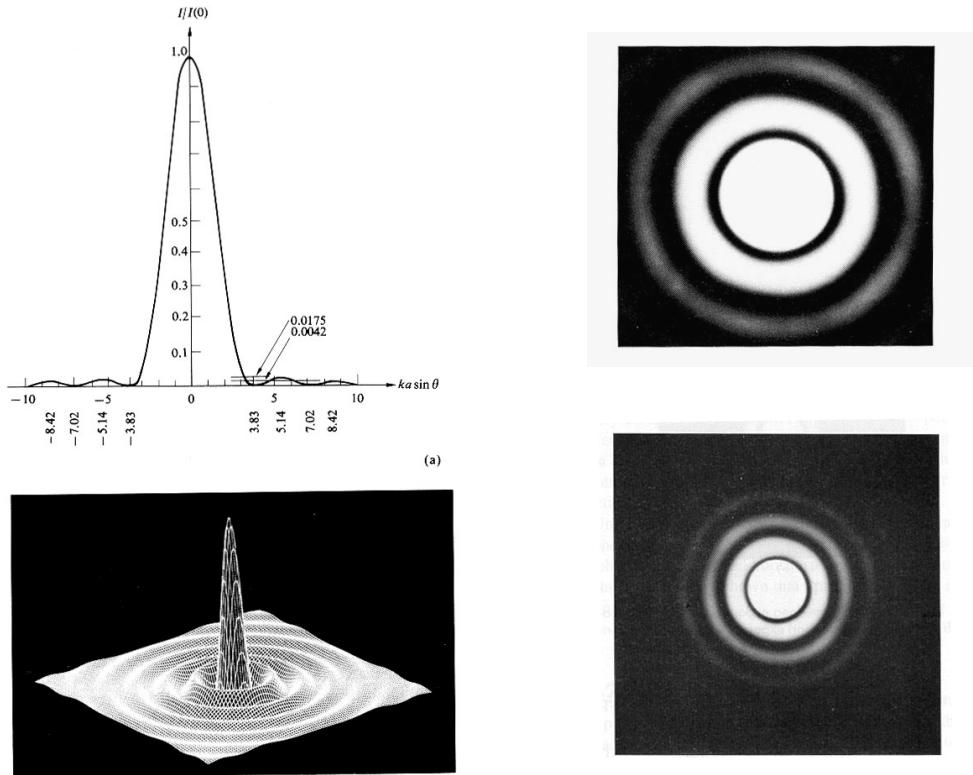
(1º mínimo)

Raio do disco de Airy : define a resolução máxima das imagens por limite de difracção dos sistemas ópticos

OPA Departamento de Física

Óptica Aplicada

Instituto Superior Técnico



OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Sistemas compostos de difracção

Propriedades da Transformada de Fourier

$$\text{linearidade} \rightarrow \mathcal{F}[E_1 + E_2] = \mathcal{F}[E_1] + \mathcal{F}[E_2]$$

$$\text{translação} \rightarrow \mathcal{F}[E(x + \Delta x)](\nu_x) = e^{2\pi i \nu_x \Delta x} \mathcal{F}[E(x)](\nu_x)$$

$$\text{dilatação} \rightarrow \mathcal{F}[E(ax)](\nu_x) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[E(x)]\left(\frac{\nu_x}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{convolução} &\rightarrow \mathcal{F}[E_1(x) \cdot E_2(x)] = \mathcal{F}[E_1(x)] * \mathcal{F}[E_2(x)] \\ &\rightarrow \mathcal{F}[E_1(x) * E_2(x)] = \mathcal{F}[E_1(x)] \cdot \mathcal{F}[E_2(x)] \end{aligned}$$

OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Rede de fendas múltiplas

$$\rightarrow E(x,y) = E_0 \sum_{m=1}^M \text{rect}\left(\frac{x}{a} - \frac{md}{a}\right) = E_0 \left[\sum_{m=1}^M \delta(x - md) \right] * \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$\rightarrow \mathcal{F} [E(x,y)] = E_0 \delta(v_y) \frac{\sin(\pi v_x a)}{\pi v_x} \sum_{m=1}^M e^{-2\pi i m d v_x} =$$
$$= E_0 \delta(v_y) \frac{\sin(\pi v_x a)}{\pi v_x} e^{-\pi i d v_x (M+1)} \frac{\sin(\pi M d v_x)}{\sin(\pi d v_x)}$$

Calculando a intensidade o factor de fase perde-se

$$I(v_x, v_y) \propto |E_0|^2 \delta(v_y) \frac{\sin^2(\pi v_x a)}{(\pi v_x)^2} \frac{\sin^2(\pi M d v_x)}{\sin^2(\pi d v_x)}$$

envolvente Departamento de Física estrutura fina

OPA Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Filtragem de Fourier óptica

Sistema de filtragem 4f: tal como no sinal podemos tratar uma imagem manipulando o espectro no plano de Fourier

$$\mathcal{F} [E(x,y)](u,v) \quad \begin{cases} u = \lambda f_l v_x \\ v = \lambda f_l v_y \end{cases} \quad \text{no plano do foco}$$

Para a reconstrução da imagem filtrada utilizada-se uma segunda lente

$$\mathcal{F} [\mathcal{F} [E(x,y)]] = E(-x, -y)$$

Filtro passa-baixo

Presente em todos os sistemas ópticos (aberturas limitadas
- limite por difracção)

Filtro espacial (pinhole)

$$\rightarrow \tau(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) = (0,0) \\ 0 & resto \end{cases} \Rightarrow E(u,v) = E_0\delta(u,v) \quad (\text{fonte pontual})$$

Só a onda plana não difractada pode passar ($F[\delta] = 1$)

Filtro espacial colimador  Limpa as irregularidades de um feixe produzidas pela difracção no pó ou sujidade

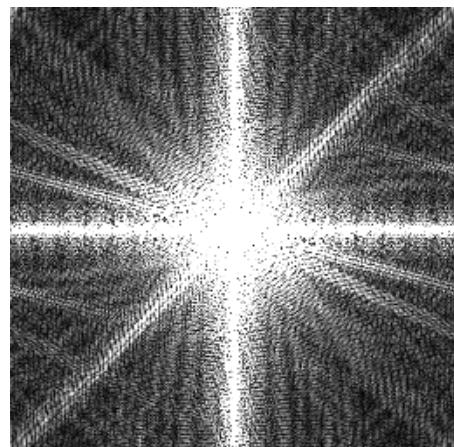
Muito utilizado em
laboratórios de óptica

OPA

Departamento de Física

Óptica Aplicada

Instituto Superior Técnico

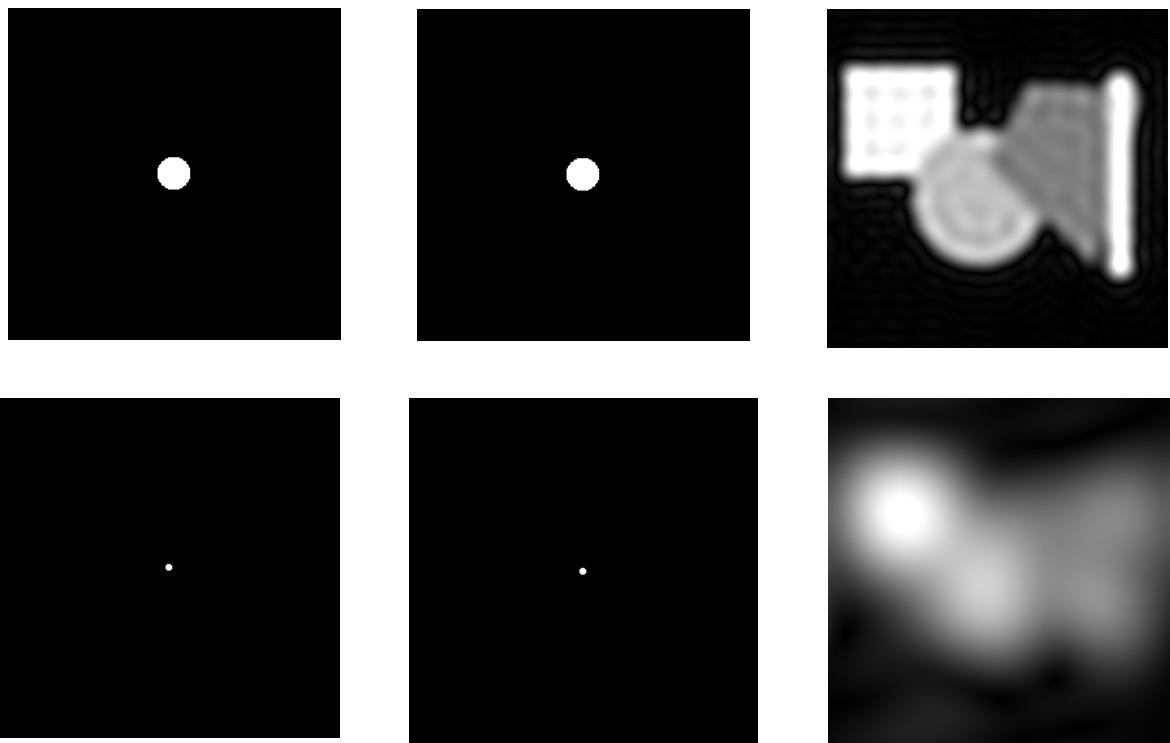


OPA

Departamento de Física

Óptica Aplicada

Instituto Superior Técnico



Filtro passa-alto I

Dark-field method: corta componente DC e deixa passar as frequências elevadas (contornos)

Rede sinusoidal

$$\rightarrow E(x,y) = E_0 \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right] = E_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)$$

$$\rightarrow \mathbf{F}_{hp} [E(x,y)] = E_0 \delta(v_y) \left[\cancel{\frac{1}{2} \delta(v_x)} + \frac{1}{4} \delta\left(v_x - \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{4} \delta\left(v_x + \frac{1}{d}\right) \right]$$

$$\rightarrow \mathbf{F} [\mathbf{F}_{hp} [E(x,y)]] = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{d/2}\right) \rightarrow I = \boxed{\frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{\pi x}{d/2}\right)}$$

Filtro passa-alto II

Em objectos finos com variação de fase

$$E(x,y) \propto \tau(x,y) = a e^{i\varphi(x,y)} \rightarrow I(x,y) = |a|^2$$

- $|\varphi| \ll 2\pi \Rightarrow \tau(x,y) \approx a[1 + i\varphi(x,y)]$

Amostras orgânicas
 Fluxo de ar à volta do obj.
 Vórtices; ondas de choque
 Impressões digitais
 const. (sem info da fase)

$$\rightarrow \mathbf{F}_{hp}[E] \propto a \left[\delta(v_x) \delta(v_y) + i \mathbf{F}[\varphi(x,y)] \right]$$

$$\rightarrow \mathbf{F}[\mathbf{F}_{hp}[E]] \propto i a \mathbf{F}[\mathbf{F}[\varphi(x,y)]] = i a \varphi(-x,-y)$$

$$I \propto a^2 \varphi^2(-x,-y)$$

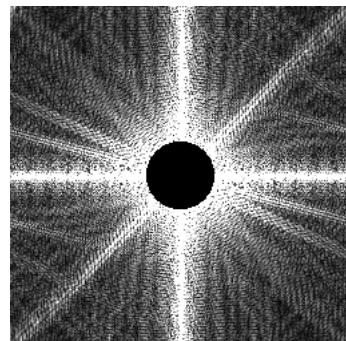
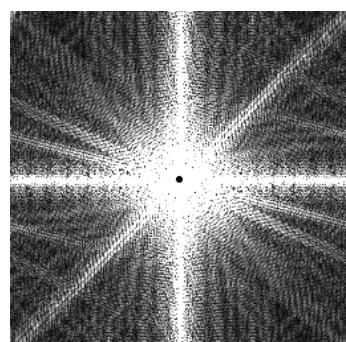
Variação quadrática da fase ($\varphi=\text{const.} \Rightarrow I=0$)
"dark-field method"

OPA

Departamento de Física

Óptica Aplicada

Instituto Superior Técnico



OPA

Departamento de Física

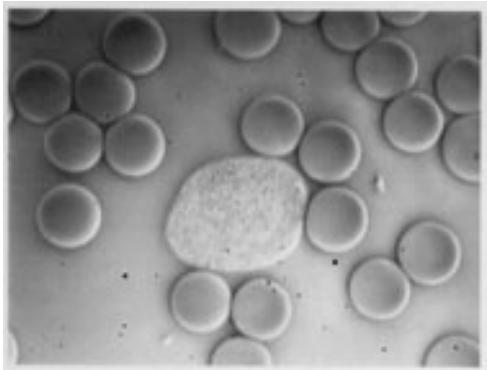
Óptica Aplicada

Instituto Superior Técnico

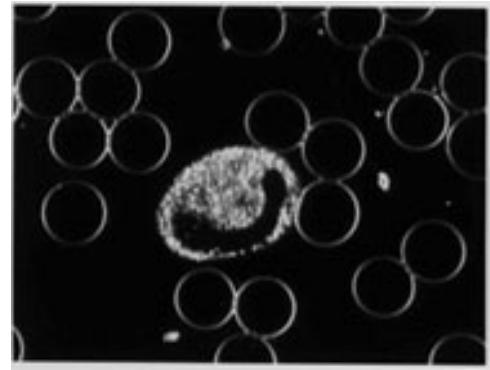
Filtro passa-alto III

Exº: células de sangue vistas ao microscópio

Sem filtro



Com filtro



OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

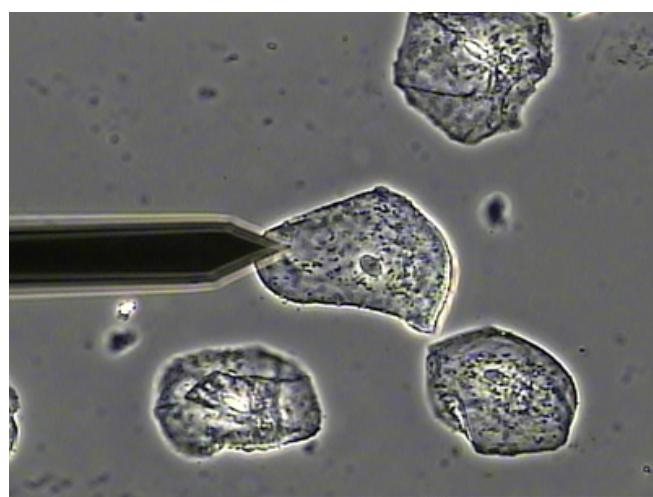
Instituto Superior Técnico

Outros filtros de fase

- Filtro de fase (*phase contrast method*) (Frits Zernike)

$$\rightarrow \mathbf{F}_{pf} [E] \propto i a \left[\delta(v_x) \delta(v_y) + \mathbf{F} [\varphi(x, y)] \right]$$

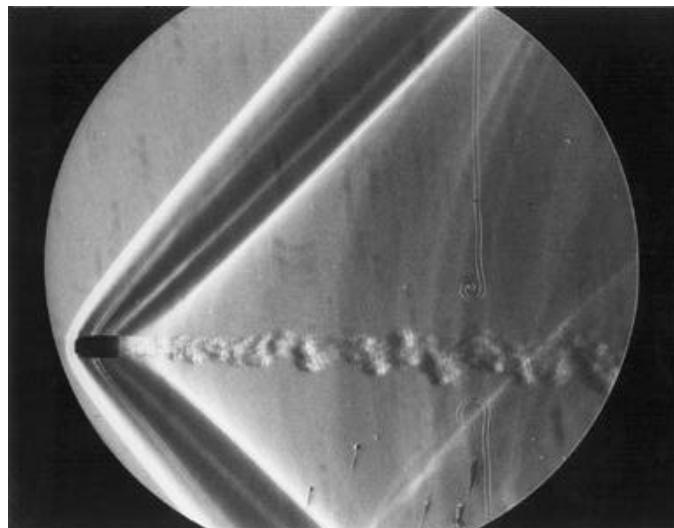
$$I_{pf} \approx a^2 (1 + 2\varphi(-x, -y)) \quad \text{linear com a fase } (\varphi \ll 2\pi)$$



Outros filtros de fase

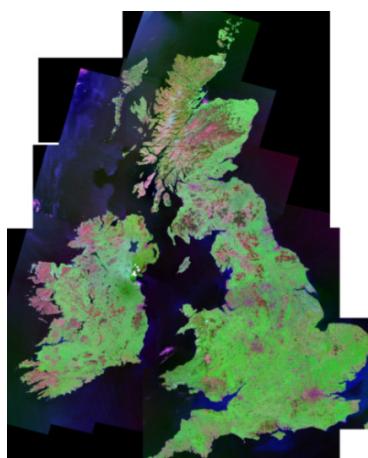
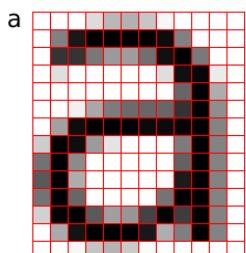
- Filtro de meio-plano (*Schlieren method*) (uma lâmina no plano de Fourier)

$$I(-x, -y) \propto \left| \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right|$$



Aplicações do tratamento de imagem

- Eliminação de pontos de impressão (*raster elimination*) -> filtro passa-baixo descontinuidades (v_x, v_y)
- Eliminação da grelha de fotos por satélite



OPA

Óptica Aplicada

Departamento de Física

Instituto Superior Técnico

Aplicações do tratamento de imagem

- Reconstrução automática da fase em interferogramas
- Filtros holográficos (filtro em amplitude de fase)
 - 1º Gravação do holograma de Fourier
 - 2º Filtragem (reconhecimento de padrões)

muito interessante
muito rápido} mas difícil de aplicar (muito sensível)  Computadores

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico

Exp. Óptica de Fourier

Objectivo: Demonstração da Transformada de Fourier óptica e da filtragem óptica.

Tratamento de imagem á velocidade da luz

- Obtenção dos espectros de Fourier de dois slides
- Aplicação de vários filtros (passa-baixo, passa-alto, Schlieren...)



Comparação com simulação
numérica por computador

OPA Departamento de Física
Óptica Aplicada Instituto Superior Técnico