

# LFEAII - Ótica Coerente

Pedro Miguel Pombeiro Curvo (ist1102716)

Salvador Baptista Torpes (ist1102474)

Sofia Tété Garcia Ramos Nunes (ist1102633)

Estêvão Moreira Gomes (ist1102650)

23/24

## 1 Teórica - Transformada de Fourier Ótica

### 1.1 Transformada de Fourier Ótica

A transformada de fourier ótica de um objeto é formada num dado ponto do espaço sempre que a luz proveniente do objeto passa por uma lente: a transformada do objeto corresponde à difração que este provoca à luz quando é atravessado: Quanto maior a frequência espacial de um determinado padrão do objeto, menor as fendas espaciais por onde a luz passa e por isso maior a difração que este provoca, ou seja, maior o ângulo de difração - assim, a luz que atravessa padrões do objeto com frequência espacial maior é difratada mais do que a luz que atravessa padrões do objeto com frequência espacial menor - assim, na imagem de fourier, quanto mais longe radialmente estiver a luz do centro, maior a frequência espacial do padrão que a originou.

A transformada de fourier é uma estrutura que se forma naturalmente sempre que um objeto não opaco se deixa atravessar por luz, provocando a difração da mesma em diferentes intensidades e ângulos consoante as diferentes frequências espaciais do objeto. O objetivo deste trabalho é estudar os padrões da TF de diferentes objetos através do uso de um sistema ótico que, com uma lente, consegue colocar a transformada num plano onde se encontra um filtro de fourier - este plano é ampliado e fotografado para análise das transformadas de fourier dos objetos.

### 1.2 Coordenadas no Espaço de Fourier

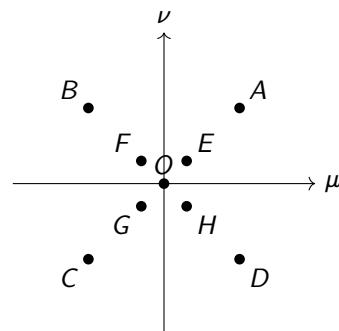
Na montagem experimental utilizada temos duas lentes: uma lente de ampliação e uma lente de fourier: a lente de fourier é colocada depois do objeto e tem como objetivo colocar a transformada de fourier do objeto num plano perto da lente de modo a que depois o possamos observar; No plano focal da lente de fourier, ou seja, onde se pode observar a transformada de fourier do objeto, colocamos um filtro de fourier que possui 3 círculos ajustáveis para poder tapar o ponto central mais intenso. Por fim, seguidamente ao filtro de fourier, colocamos a segunda lente, uma lente de ampliação: esta lente é colocada de modo a que a imagem de fourier no filtro fique no plano focal da lente de

ampliação. Colocamos ainda, depois da lente de ampliação, a câmara CCD que irá captar a imagem final - a distância entre a câmara CCD e a lente de ampliação é menor que a distância focal da mesma lente ao filtro de fourier, de modo a que a imagem final seja ampliada.

Assim, o filtro de fourier encontra-se no plano focal da lente de fourier. É no filtro de fourier que conseguimos observar a transformada de fourier do objeto formada pela lente de fourier. A relação entre as coordenadas no espaço de fourier ( $\mu, \nu$ ) e as frequências espaciais do objeto que estamos a observar ( $\nu_x, \nu_y$ ) é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \mu = \lambda f \nu_x \\ \nu = \lambda f \nu_y \end{cases}$$

Onde  $f$  é a distância focal. Se tivermos um objeto do qual estamos a ver a transformada de fourier então  $\nu_x$  e  $\nu_y$  são as, respetivamente, a frequência do objeto ao longo do eixo  $x$  e do eixo  $y$ . Podemos perceber que, à medida que a frequência espacial aumenta numa dada direção, a coordenada no espaço de fourier aumenta na mesma direção - pontos correspondentes a maiores frequências espaciais encontram-se mais afastados do centro do filtro de fourier.



Note-se que na figura acima o ponto  $O$  corresponde ao centro do filtro que contém normalmente luz intensa e indesejada. Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  correspondem a frequências espaciais mais altas que as dos pontos  $E, F, G$  e  $H$  uma vez que estão mais afastados do centro, ou seja, têm valores de  $\mu$  e  $\nu$  maiores.

### 1.3 Redes de Difração

Uma rede de difração tem múltiplas frequências espaciais próprias: todas as combinações periódicas de riscas formam uma frequência espacial diferente: a frequência própria mais alta de uma rede difração é aquelas que corresponde ao padrão com todas as riscas. Por outro lado, a menor frequência corresponde ao padrão com apenas a primeira e a última riscas: assim, a imagem de fourier de uma rede de difração é um conjunto concêntrico de pontos, sendo que à medida que nos afastamos do centro, a frequência espacial responsável pelo ponto é maior.

### 1.4 Relação Matemática

As transformadas de fourier ópticas que observamos são descritas matematicamente pela transformada de fourier de um conjunto de funções 2D. Se a nossa imagem for descrita pelo gráfico de uma função  $f(x, y)$ , então a sua transformada de fourier é dada por:

$$\mathcal{F}(f(x, y))(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(\mu x + \nu y)} dx dy$$

O imagem de fourier é então o gráfico da função  $\mathcal{F}(f(x, y))(\mu, \nu)$  no plano  $(\mu, \nu)$ .

Em adição, como já vimos anteriormente, a relação entre as coordenadas no espaço de fourier  $(\mu, \nu)$  e as frequências espaciais de um padrão do objeto na direção  $x$  e  $y$  ( $\nu_x, \nu_y$ ) é dada por:

$$\begin{cases} \mu = \lambda f \nu_x \\ \nu = \lambda f \nu_y \end{cases}$$

## 2 Teórica - Interferometria

Com o objetivo de estudar a interferência de ondas eletromagnéticas em fases diferentes, utilizamos um interferômetro de Michelson. O interferômetro de Michelson é composto por uma fonte de luz, um beam splitter, dois espelhos e uma câmara CCD.

### 2.1 Funcionamento do Interferômetro de Michelson

A luz emitida pelo laser é direcionada (possivelmente com a ajuda de um espelho) para o beam splitter. O beam splitter reflete o feixe em duas direções perpendiculares: uma direciona-se a um espelho fixo e é refletido de volta para o beam splitter e do beam splitter para a fonte; o outro feixe é refletido para um espelho móvel (a sua distância o BS varia) e é refletido de volta para o BS e do BS para a câmara CCD. Em adição, o espelho móvel tem um ligeiro tilt de modo a que o feixe que é refletido para a câmara CCD tenha um ângulo de incidência diferente do feixe que é refletido para o espelho fixo: o feixe proveniente do espelho fixo incide perpendicularmente ao CCD enquanto que o feixe proveniente do outro feixe tem um ângulo de incidência igual a  $\theta$ .

Assim, existem dois fenômenos que estamos a observar:

**Fenómenos Geométricos - Interferência** Em primeiro lugar, se mantivermos os dois espelhos a uma mesma distância  $d_0$  do beam splitter e fizermos varia o ângulo de incidência de um dos feixes, podemos observar a formação do padrão de interferência: à medida que a diferença entre os dois ângulos de incidência aumenta, a distância entre os duas riscas no padrão de interferência torna-se cada vez menor - os picos de intensidade do padrão correspondem aos cruzamentos das riscas oblíquas (onda com inclinação  $\theta$ ) com as riscas verticais (onda com inclinação 0). A relação entre a distância  $a$  entre as riscas de interferência no padrão e o ângulo  $\theta$  é dada por:

$$a = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

Onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz do laser.

**Fenómenos Temporais - Contraste** Em segundo lugar, depois de fixarmos um ângulo  $\theta$  para o qual o padrão de interferência seja razoável (uma distância entre discas não demasiado elevada), podemos fazer variar a distância do espelho inclinado ao beam splitter: mantemos um dos espelhos a uma distância  $d_0$  e colocamos uma outra a uma distância  $d_0 + \Delta d$  - ao fazer isto, vamos criar um desfasamento temporal entre a chegada dos dois feixes à CCD dado que, depois do feixe inicial incidir no beam splitter e se dividir, um deles percorre uma distância maior: O desfasamento temporal entre a chegada dos dois feixes à CCD é dado por:

$$\Delta t = \frac{2\Delta d}{c}$$

$$\Delta d = d_2 - d_1$$

Onde assumimos que a velocidade da luz é igual à do vácuo e  $d_2$  é a distância ao espelho móvel e  $d_1$  é a distância ao espelho fixo.

Á medida que aumenta o desfasamento temporal entre os dois feixes, dado que estes são pulsos sinusoidais e não senos infinitos, os feixes deixam de se sobrepor e passamos a ter menos contraste - muito ruído e pouca interferência. O contraste máximo que podemos observar acontece quando o desfasamento temporal é nulo e os dois feixes estão em fase.

Em adição, o contraste pode ser calculado pela seguinte equação:

$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Onde  $I_{max}$  é a intensidade máxima e  $I_{min}$  é a intensidade mínima do padrão de interferência. O objetivo nesta segunda parte é poder desenhar um gráfico do contraste da imagem de interferência obtida (para um  $\theta$  constante) em função do desfasamento temporal  $\Delta t$  entre os dois feixes. A relação entre o contraste como função do desfasamento  $K(\Delta t)$  e o espetro de energia  $I(\omega)$  é dada pela transformada de fourier:

$$K(\Delta t) = \mathcal{F}(I(\omega))(\Delta t)$$

Onde  $\omega$  é a frequência angular da onda e  $I(\omega)$  é o espetro de energia da onda. Quando fazemos a transformada de fourier de  $I$  obtemos o contraste do padrão de interferência como função do desfasamento temporal.

## 2.2 Equação da Difração

A equação da difração permite-nos relacionar o comprimento de onda da onda com o ângulo entre os dois feixes que estão a sofrer interferência.

## 2.3 Cálculo do ângulo $\theta$

O ângulo  $\theta$  calcula-se com a íris totalmente fechada uma vez que assim podemos tirar uma foto onde sejam visíveis/separáveis os dois feixes de luz que estão a sofrer interferência: como o feixe fica muito fino podemos vê-los distintos e calcular a distância entre eles através do comprimento dos pixels do CCD. Assim sendo, a distância entre os dois feixes  $\Delta_{CCD}$  corresponde ao cateto oposto de um triângulo de cujo cateto adjacente é a distância  $L$  entre o CCD e o espelho móvel onde um dos feixes está a ser refletido com inclinação. Assim, o ângulo  $\theta$  é dado por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta_{CCD}}{L}\right) \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\Delta_{CCD}}{L}$$

## 2.4 Amplificação da Imagem

Entre o BS e o CCD colocamos uma lente de ampliação de modo a que a imagem de interferência seja ampliada e possamos observar melhor o padrão de interferência. De modo a sabermos qual a distância a que devíamos colocar a lente para obter a ampliação pretendida, usamos a fórmula da lente:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$$

Onde  $f$  é a distância focal da lente,  $d_o$  é a distância entre a lente e o objeto (neste caso, o BS) e  $d_i$  é a distância entre a lente e a imagem, neste caso, o CCD.

A magnificação  $M$  da imagem é dada por:

$$M = -\frac{d_i}{d_o}$$

## 2.5 Desvio de fase no Interferograma

Como é que podemos calcular o desvio de fase entre o feixe emitido pelo laser e o feixe resultante da interferência?

## 2.6 Variação com a temperatura

De modo a averiguar como varia o padrão de interferência com a alteração da temperatura do meio, colocamos um ferro de soldar entre o BS e o espelho fixo. À medida que a temperatura aumentava, observámos que as riscas do padrão de interferência ficavam desformadas à medida que a temperatura aumentava.

## 2.7 Variação com a distância do 2º espelho

Fizemos variar a distância do espelho móvel ao BS e observámos que as riscas do padrão de interferência ficavam mais juntas à medida que a distância aumentava - riscas mais finas - menos a.

## 2.8 Variação com Ondas de Pressão

Com o objetivo de estudar como varia o padrão de interferência com ondas sonoras de determinada frequência. Colocamos uma coluna num suporte externo à mesa ótica para evitar que as vibrações mecânicas se propaguem para os espelhos do interferómetro. Verificámos que as ondas sonoras provocam um movimento do padrão de riscas de interferência: o padrão oscila como um todo a diferentes frequências consoante a frequência do som que é emitido.

## 2.9 Variação com o ângulo de incidência

Pretendemos agora estudar como varia o padrão de interferência com o ângulo de tilt do espelho móvel. Tiramos várias fotos do padrão à medida que variámos o ângulo.

# 3 Análise de Dados

## 3.1 Tratamento de imagem

Existem dois tipos de imagens com as quais podemos trabalhar: Em primeiro lugar temos as imagens RGB - estas são imagens cuja informação está guardada numa matriz onde o número de linhas e colunas é o número de pixels na vertical e na horizontal da imagem. Cada entrada da matriz é um vetor com 3 entradas:  $[R, G, B]$  onde  $R$ ,  $G$  e  $B$  são as intensidades de vermelho, verde e azul respetivamente:

$$\text{image} = \begin{bmatrix} [R, G, B] & [R, G, B] & \cdots & [R, G, B] \\ [R, G, B] & [R, G, B] & \cdots & [R, G, B] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [R, G, B] & [R, G, B] & \cdots & [R, G, B] \end{bmatrix}$$

onde  $\begin{cases} R \in [0, 255] \\ G \in [0, 255] \\ B \in [0, 255] \end{cases}$

Em segundo lugar, temos as imagens **greyscale** - estas imagens são semelhantes mas a informação associada a cada ponto não é um array com três números mas sim um número entre 0 e 1 que representa a intensidade de cinzento do pixel:

$$\text{image} = \begin{bmatrix} I & I & \cdots & I \\ I & I & \cdots & I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & \cdots & I \end{bmatrix}$$

## 3.2 Ótica de Fourier

### 3.2.1 Calibração

Para a calibração, utilizámos as seguintes imagens: em cada uma foram feitas duas linhas paralelas aos limites da craveira e duas linhas perpendiculares às anteriores. Foi medida a distância, em

pixels, entre os pontos de interseção das linhas paralelas e perpendiculares - essa foi a distância utilizada para a calibração. A incerteza de cada pixel é de 1 pixel uma vez que a imagem 2D funciona como um histograma onde cada pixel é um bin - apenas podemos estar num pixel ou outro, não há valores intermédios. A distância entre dois pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  em pixels é dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Sabendo que os erros de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$  são todos iguais a  $\pm 1$  pixel, a incerteza da distância  $d$  é dada por:

$$\delta d = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right| + \left| \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right| + \left| \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right| + \left| \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right|$$

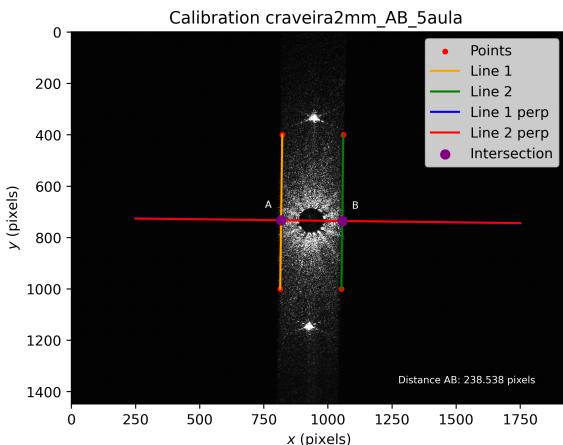


Figura 1: Calibração da craveira 2mm

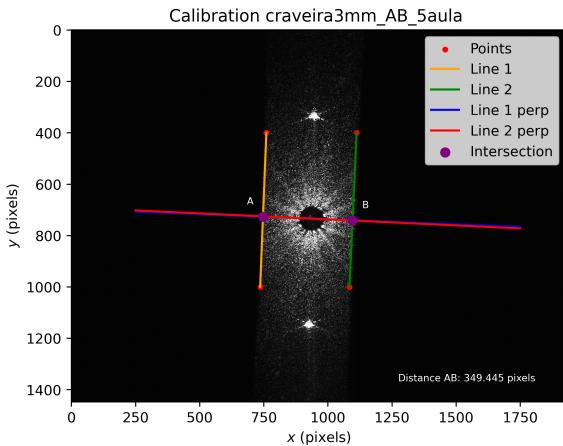


Figura 2: Calibração da craveira 3mm

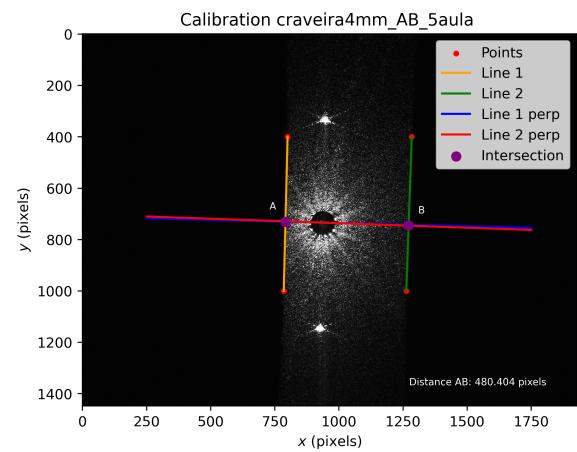


Figura 3: Calibração da craveira 4mm

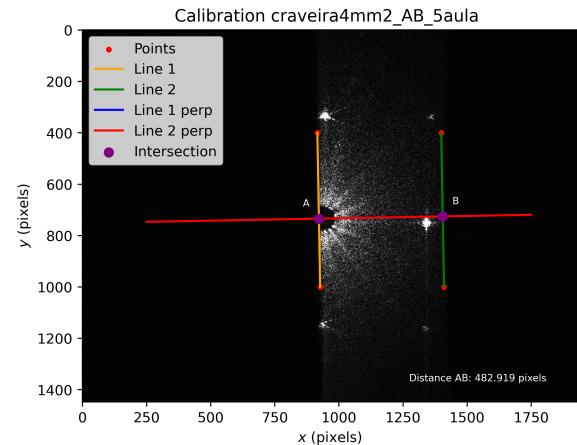


Figura 4: Calibração da craveira 4mm 2

Em seguida, realizou-se uma regressão linear entre os valores em metros e em pixels para obter uma calibração:

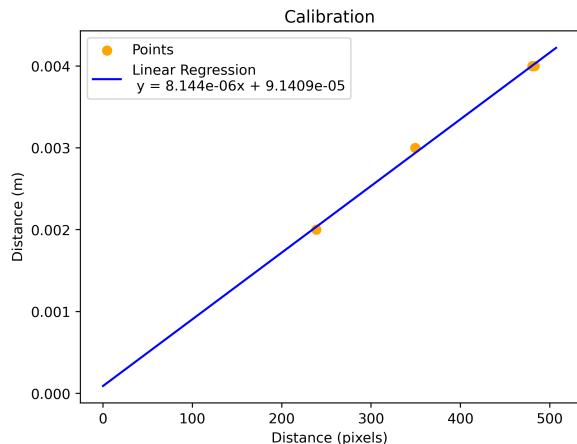


Figura 5: Calibração

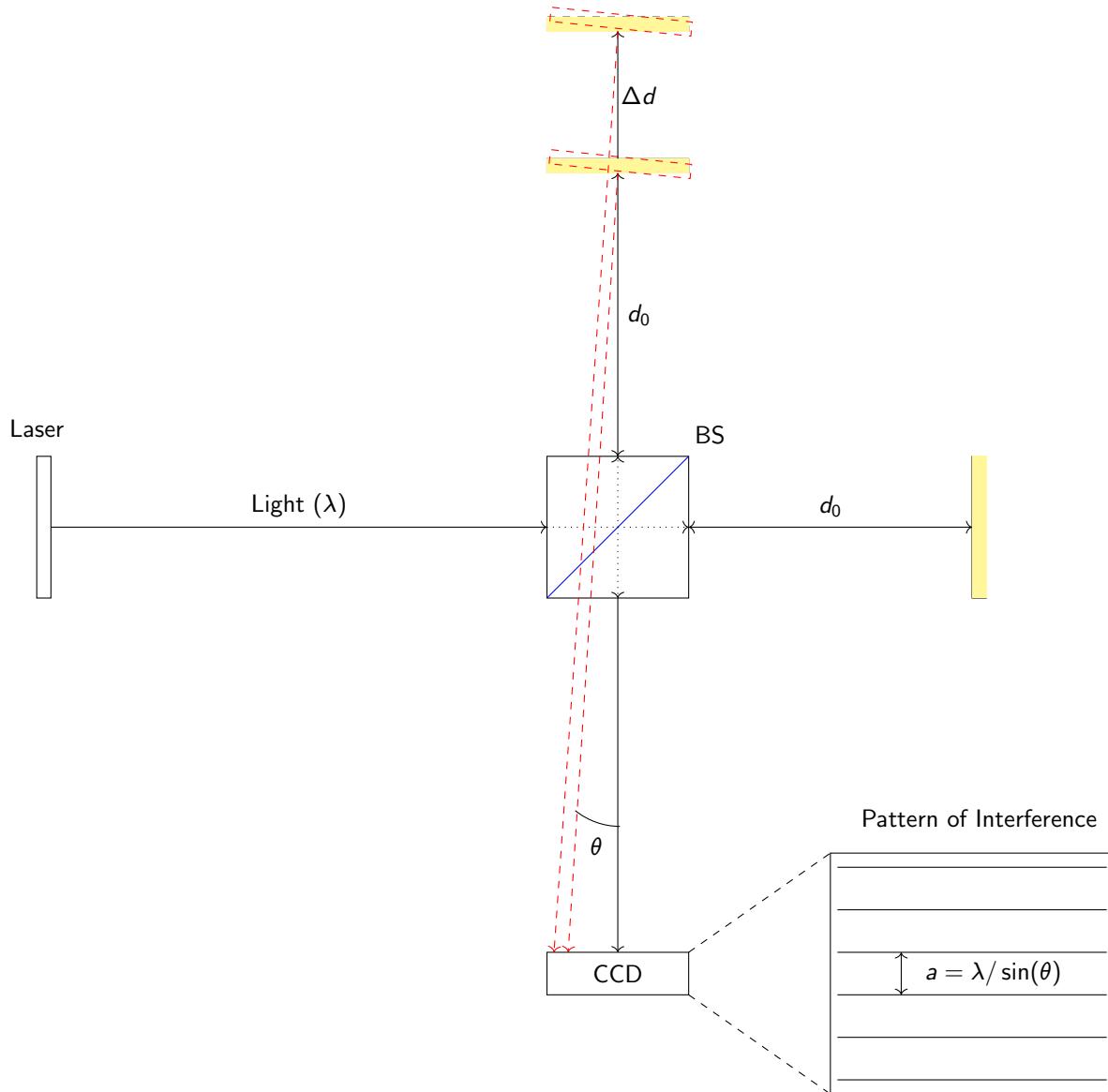
A reta de ajuste foi:

$$\text{Distance (m)} = 8.144 \times 10^{-6} \times \text{Pixels} + 9.141 \times 10^{-5}$$

### 3.2.2 Filtro AB

O nosso objetivo é agora determinar as frequências espaciais do filtro AB utilizado

## 4 Montagem - Interferómetro de Michelson



## LightPipes Simulation

1. Criar o plano da simulação grid - tenho de dizer o tamanho total GridSize(), lambda, GridDimension() (=1024)
2. criar o feixe - begin()
3. criar o objeto - aperture() - objeto opaco ou screen() - objeto normal
4. propagar o feixe até à lente - exsitem várias - Forvard() ou Fresnel(): Field3 = Forvard(distância a percorrer, Field2)
5. propagar a simulação a distância entre o objeto e a lente;
6. Simular a lente - lens() - é uma função de progação através da lente;
7. propagar a simulação a distância entre a lente e o plano de fourier - a distância focal da lente;
8. Se quiser bloquear altas ou baixas frequências, colocamos respetivamente uma circular aperture e um circular screen;
9. Informação guardada no campo: intensidade, fase;
10. Objeto branco no fundo preto em png: aperture;
11. Objeto preto no fundo branco em png: screen;

## **Aula Apresentação LFEUI**

1. Até 27 de outubro - escolher uma experiência;
2. 3 Novembro - enviar lista com os pares grupos-experiência;
3. 6 Novembro - Leilão dos grupos em falta;
4. 10 Novmebro - Verificação junto dos Responsáveis;