Matteforsøk – Newtons avkjølingslov

Sofie Hjelle

Teori:

Newtons avkjølingslov beskriver hvordan temperaturen til et system endres når det utveksler varme med omgivelsene rundt. Den sier at hastigheten til temperaturendringen er proporsjonal med forskjellen mellom temperaturen til systemet og temperaturen til omgivelsene. Newtons avkjølingslov kan skrives slik:

$$T'(t) = -\alpha(T(t) - T_k)$$

Der $T'(t)$ er endringen i temperatur, α er proporsjonalitetskonstanten, $T(t)$ er temperaturen til systemet, og T_k er temperaturen til omgivelsene.

Proporsjonalitetskonstanten α er spesifikk for hvert system, fordi den avhenger av egenskapene til systemet og omgivelsene rundt, og reflekterer hvor effektivt varme kan overføres mellom systemet og omgivelsene. Det står minus-tegn foran α fordi temperaturendringen er negativ når systemet avkjøles, men α i seg selv er en positiv konstant.

Newtons avkjølingslov beskriver en førsteordens differensialligning, som kan utledes slik:

$$T' = -\alpha(T - T_k)$$

$$T' = -\alpha T + \alpha T_k$$

$$T' + \alpha T = \alpha T_k$$

$$e^{\alpha t}T' + \alpha T e^{\alpha t} = \alpha T_k e^{\alpha t}$$

$$(Te^{\alpha t})' = \alpha T_k e^{\alpha t}$$

$$\int (Te^{\alpha t})' = \int \alpha T_k e^{\alpha t}$$

$$Te^{\alpha t} = T_k e^{\alpha t} + C$$

$$T(t) = T_k + Ce^{-\alpha t}$$

Forsøket:

Vi kokte opp vann i en rund skål, og målte temperaturen først hvert andre minutt, og så senere hvert femte minutt, til temperaturen til vannet var likt temperaturen i rommet. Temperaturen i rommet var 26,2°C.

Grunnen til hvorfor vi begynte å måle hvert femte minutt i stedet for hvert andre, var fordi vi kunne se på målingene at temperaturen endret seg saktere.

Målinger:

Minutter etter start	Temperatur, vann (°C)
0	94
2	82
4	75,2
6	71,2
8	67,2
10	64,4
12	61,4
14	59,1
16	57
18	55,2
20	52,8
22	51,5
24	50
26	48,6
28	47,2

30	45,8
35	43
40	40,2
45	38,7
50	35,7
55	33,8
60	32,4
65	31,3
70	30,2
75	29,3
80	28,5
85	27,7
90	27,2
95	26,8
100	26,5
105	26,2

Beregninger av α og C:

Regner ut C fra $T(0)$:

$$T(0) = T_k + Ce^{-\alpha \cdot 0}$$

$$C = T(0) - T_k$$

$$T(0) = 94°\text{C}\,, \qquad T_k = 26.2°\text{C}$$

$$C = 94 - 26.2 = 67.8$$

Regner ut α fra $T(10)$:

$$T(10) = T_k + Ce^{-\alpha \cdot 10}$$

$$64.4 = 26.2 + 67.8e^{-\alpha \cdot 10}$$

$$e^{-\alpha \cdot 10} = \frac{64.4 - 26.2}{67.8}$$

$$-10\alpha = \ln(0.563)$$

$$\alpha = -\frac{\ln(0.563)}{10} \approx 0.0574$$

Vi bruker en verdi basert på en tidlig måling fordi:

- Det er større temperaturforskjell, altså ved tidlige målinger følger systemet Newtons avkjølingslov mer nøyaktig enn ved senere.
- Det er mindre påvirkning av ytre faktorer. Jo lenger skålen med vann står, jo mer kan faktorer som for eksempel fordamping og endringer i luftstrømmer påvirke målingene.

Vi velger uansett å regne ut α fra en verdi basert på en senere måling, for å undersøke stabiliteten i verdien.

Regner ut α fra $T(90)$:

$$T(90) = T_k + Ce^{-\alpha \cdot 90}$$

$$27.2 = 26.2 + 67.8e^{-\alpha \cdot 90}$$

$$e^{-\alpha \cdot 90} = \frac{27.2 - 26.2}{67.8}$$

$$-90\alpha = \ln(0.01475)$$

$$\alpha = -\frac{\ln(0.01475)}{90} \approx 0.0469$$

Vi ser at de ulike verdiene for α varierer, som tyder på at modellen ikke tar høyde for alle faktorer.

Temperaturen som en funksjon av tiden kan altså skrives som følgende uttrykk:

$$T(t) = 26.2 + 67.8e^{-0.0574t}$$

$$T(t) = 26.2 + 67.8e^{-0.0469t}$$

Resultater og plotting:

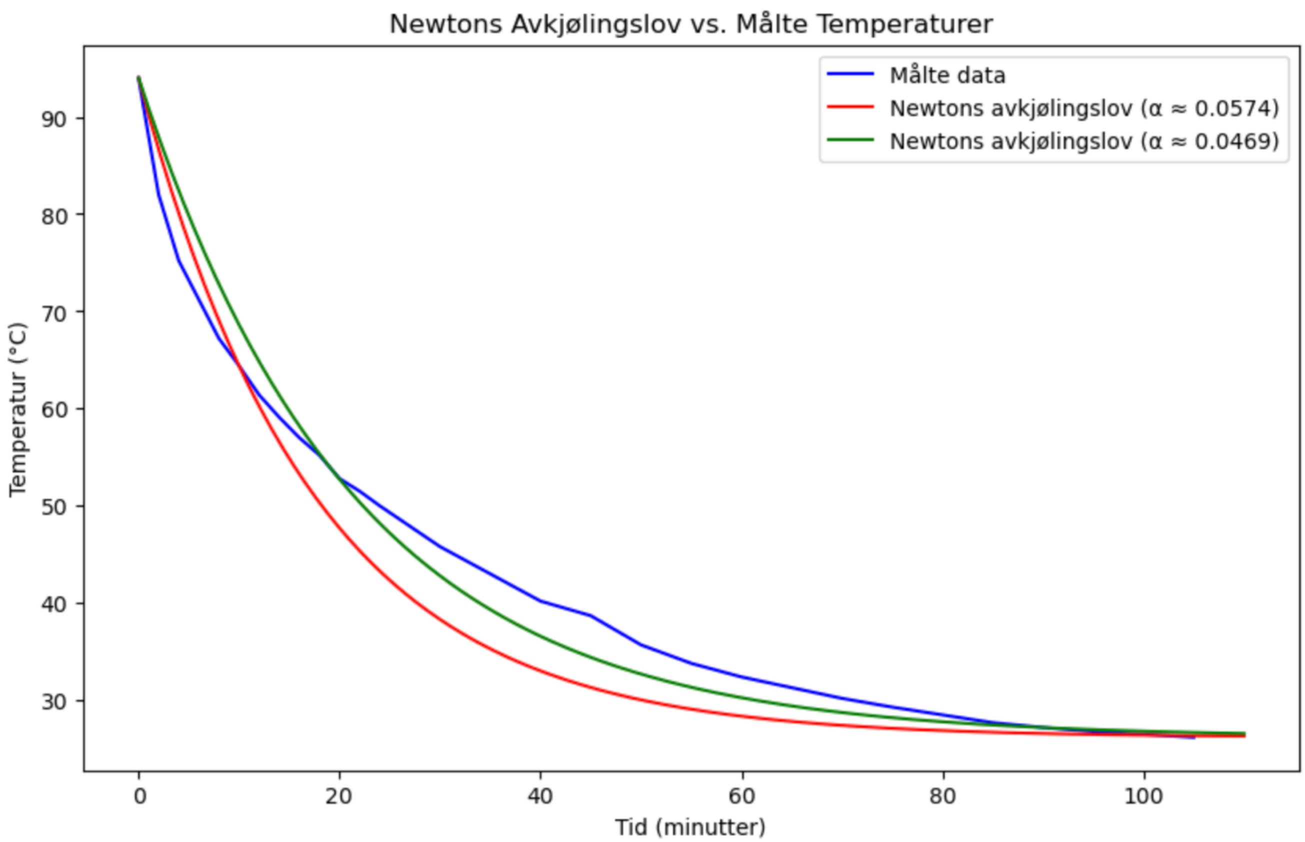
Nå har vi to funksjoner som skal uttrykke temperaturen som en funksjon av tiden i minutter for forsøket vårt, og vi plotter begge inn i python sammen med de faktiske målingene våre. Slik kan vi vurdere hvordan de ulike verdiene for α passer i forhold til målingene.

Python-koden:

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

import math


# Definerte data

minutes = np.array([0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26,

            28, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80,

            85, 90, 95, 100, 105])

temperature = np.array([94, 82, 75.2, 71.2, 67.2, 64.4, 61.4, 59.1,

              57, 55.2, 52.8, 51.5, 50, 48.6, 47.2,

              45.8, 43, 40.2, 38.7, 35.7, 33.8,

              32.4, 31.3, 30.2, 29.3, 28.5, 27.7,

              27.2, 26.8, 26.5, 26.2])


# Omgivelsestemperatur (T_k)

T_k = 26.2
```

```
alpha1 = 0.0574

alpha2 = 0.0469

C = 67.8


def newtons_law(t, alpha):

   return T_k + C*math.e**(-alpha*t)


# Generer data for plotting

t_fit = np.linspace(0, 110, 200)

T_fit1 = newtons_law(t_fit, alpha1)

T_fit2 = newtons_law(t_fit, alpha2)


# Plotting

plt.figure(figsize=(10, 6))

plt.plot(minutes, temperature, 'b-', label='Målte data')  # Bruker linje med punkter

plt.plot(t_fit, T_fit1, 'r-', label=f'Newtons avkjølingslov (α ≈ {alpha1:.4f})')

plt.plot(t_fit, T_fit2, 'g-', label=f'Newtons avkjølingslov (α ≈ {alpha2:.4f})')

plt.title('Newtons Avkjølingslov vs. Målte Temperaturer')

plt.xlabel('Tid (minutter)')

plt.ylabel('Temperatur (°C)')

plt.legend()

plt.grid(False)  # Fjerner rutenettet
```

plt.show()



Vi ser fra plottet over at α-verdien basert på en tidlig måling egner seg bedre til å vurdere temperaturen kort tid etter at vannet har begynt å kjøle seg ned, mens α-verdien basert på en senere måling egner seg bedre til å vurdere temperaturen etter lenger tid.

Feilkilder:

En eventuell feilkilde i dette forsøket er at vi gikk ut ifra at temperaturen i rommet var konstant, noe som i virkeligheten ikke vil stemme.

En annen feilkilde er knyttet til fordamping. Funksjonene våre tar ikke høyde for fordamping, selv om det vil være med å senke temperaturen på vannet som ble igjen i skålen.

Utstyret vi brukte kan også regnes som en feilkilde. Vi brukte et helt vanlig termometer til målingene, og det finnes bedre termometre som nok ville vært mer nøyaktige.