ejercicio: Dados $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 / 2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\}$

y $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 / x_3 + x_4 = 0\}$.

Hallar bases para el mayor subespacio contenido en ambos y el menor subespacio que contiene a ambos.

$\sup(S,T) = S + T$

$\inf(S,T) = S \cap T$

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$, $\vec{x} \in S \rightsquigarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$ ← S

si además $\vec{x} \in T$ (simultaneamente) $\rightsquigarrow$ $x_3 + x_4 = 0$ ← T

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 = -3x_5 \\ x_4 = 3x_5 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_2 \\ -3x_5 \\ 3x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad x_2, x_5 \in \mathbb{R}$$

$\vec{x} \in S \cap T$ si y solo si $\vec{x} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{S \cap T = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

$S + T$

1°) base de S, $\quad B_S = \{v_1, v_2, v_3\}$

2°) base de T, $\quad B_T = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

3°) $\{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ generan $S+T$

4°) quitar los vectores l.d. en $\{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ para que quede una base de $S+T$.

1°)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_3 = 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 3x_5 \end{array}$$

$$\vec{x} \in S \iff \vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2°) Idem para T, con ecuación $x_3 + x_4 = 0$ $(x_3 = -x_4)$

$\vec{x} \in T$ si y solo si $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -c \\ d \end{pmatrix}$

$$B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3°) ✓

4°)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & | & \vdots \\ | & 0 & 1 & 0 & \vdots & | & \vdots \\ | & | & 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & \end{bmatrix}$$

$$B_{S+T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\2\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

una base alternativa serían los cinco canónicos.

¿Es posible hallar una base de $\mathbb{R}^5$ tal que 3 de sus 5 elementos sean base de S y 4 de sus 5 elementos sean base de T?

$$\underbrace{B_{S+T}}_{\mathbb{R}^5} = \{ \overbrace{u_1, u_2, v_1}^{B_S}, w_1, w_2 \} \quad B_T: u_1, u_2, w_1, w_2 \qquad , \ u_1, u_2 \in S \cap T$$

$$B_{S+T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\0\\-6\\6\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\} \checkmark$$

$$B_S = \{u_1, u_2, v_1\}$$

$$B_T = \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$$

ejercicio 2: Dados $S = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, p(1) = p(2) = 0 \}$

y $T = gen\{x^3 - 5x^2 + 6x,\ x^2 - 5x + 6\}$

Hallar $S \cap T$ y $S + T$.

$p(x) \in T \iff p(x) = a(x^3 - 5x^2 + 6x) + b(x^2 - 5x + 6)$

además $p(x) \in S$ si y solo si cumple las ecuaciones

$$\begin{cases} p(1) = 0 \\ p(2) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \rightsquigarrow b = -a \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Luego ese reemplazo $p(x) = a(x^3 - 5x^2 + 6x) - a(x^2 - 5x + 6)$

$$p(x) = a(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$S \cap T = \text{gen}\left\{x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right\}$$

$\boxed{S+T}$ 1°) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, p(1) = p(2) = 0\}$

$\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$, $\dim(S) = 2$

$$(x-1)\cdot(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

$$p(x) \in S \iff p(x) = (x^2 - 3x + 2)\cdot q(x) \quad , \quad q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$$

$$p(x) = (x^2 - 3x + 2)(mx + b)$$
$$= m\,(x^3 - 3x^2 + 2x) + b\cdot(x^2 - 3x + 2)$$

$$B_S = \left\{x^3 - 3x^2 + 2x,\ x^2 - 3x + 2\right\}$$

2°) $B_T=\{x^3-5x^2+6x,\ x^2-5x+6\}$

3°) $\{x^3-3x^2+2x,\ x^2-3x+2,\ x^3-5x^2+6x,\ x^2-5x+6\}$

generan $S+T$, se que

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim S\cap T$$
$$= 2+2-1 = 3$$

4°) tomo coordenadas en base $B=\{x^3,x^2,x,1\}$ (los pongo como columnas)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

La matriz escalonada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$\Longrightarrow B_{S+T} = \{x^3-3x^2+2x,\ x^2-3x+2,\ x^3-5x^2+6\}$$