DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP 1

Especificación y WP

14 de octubre de 2024 — Algoritmos y Estructuras de Datos

Grupo Siu Guaranin't

Integrante	LU	Correo electrónico
Aleman, Diego Eitan	867/24	diegoaaleman17@gmail.com
Provvisionato, Sofía	152/24	sofiaprovvisionato7@gmail.com
Hoyo Correa, Bruno	473/24	hcbruno59@gmail.com
Skidelsky, Agustín	1109/23	agustinskidelski@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

http://www.exactas.uba.ar

1. Especificación

1.1. grandesCiudades

`proc` `grandesCiudades` (in Ciudades : $seq\langle Ciudad\rangle$) : $seq\langle Ciudad\rangle$

`requiere` $\{(sinRepetidos(ciudades)) \wedge (\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)\}$

`asegura` $\{|res| \leq |ciudades| \wedge (\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L$

$(ciudades[i] \in res \leftrightarrow ciudades[i].habitantes > 50000))\}$

`pred` `sinRepetidos` (in ciudades: $seq\langle Ciudad\rangle$)) {

$(\forall i, j \in \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |ciudades| \wedge i \neq j \longrightarrow_L (ciudades[i].nombre \neq ciudades[j].nombre))$

}

1.2. sumaHabitantes

`proc` `sumaHabitantes` (in menoresDeCiudades : $seq\langle Ciudad\rangle$,in mayoresDeCiudades : $seq\langle Ciudad\rangle$) : $seq\langle \mathbb{Z}\rangle$

`requiere` $\{(|menoresCiudades| = |mayoresCiudades|)\wedge$

mismosElementos(menoresDeCiudades, mayoresDeCiudades) $\wedge$

$(\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |menoresDeCiudades| \longrightarrow_L$

$(menoresDeCiudades[i].habitantes \geq 0 \wedge mayoresDeCiudades[i].habitantes \geq 0))$

}

`asegura` $\{(|res| = |menoresCiudades|) \wedge (\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |menoresCiudades| \longrightarrow_L$

$(\ (\exists j \in \mathbb{Z})(menoresCiudades[i].nombre = mayoresCiudades[j].nombre) \wedge$

$(<menoresCiudades[i].nombre, \ menoresCiudades[i].habitantes + mayoresCiudades[j].habitantes> \in res))\}$

`pred` `sinRepetidos` (in ciudades: $seq\langle Ciudad\rangle$)) {

$(\forall i, j \in \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |ciudades| \ \ \wedge \ \ i \neq j \longrightarrow_L ciudades[i].nombre \neq ciudades[j].nombre)$

}

`pred` `mismosElementos` (in menoresDeCiudades : $seq\langle Ciudad\rangle$,in mayoresDeCiudades : $seq\langle Ciudad\rangle$) {

$(\forall i \in \mathbb{Z})((0 \leq i \leq |menoresCiudades|) \longrightarrow_L (\exists j \in \mathbb{Z})(menoresCiudades[i].nombre = mayoresCiudades[j].nombre))\wedge$

$(\forall j \in \mathbb{Z})((0 \leq j \leq |mayoresCiudades|) \longrightarrow_L (\exists i \in \mathbb{Z})(mayoresCiudades[j].nombre = menoresCiudades[i].nombre))$

}

1.3. hayCamino

`proc hayCamino` (in distancias : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, in desde: $\mathbb{Z}$, in hasta: $\mathbb{Z}$) : `Bool`

`requiere` $\{matrizCuadrada(distancias) \wedge$

$distanciaNoNegativa(distancias) \wedge$

$distanciaCorrecta(distancias) \wedge$

$distanciaASiMisma(distancias) \wedge$

$ciudadesEnRango(distancias, desde, hasta)$

$\}$

`asegura` $\{res = recorridoCorrecto(distancias, desde, hasta)$

$\}$

`pred matrizCuadrada` (distancias : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {

$(\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |distancias| \longrightarrow_L (|distancias[i]| = |distancias|))$

}

`pred distanciaNoNegativa` (distancias : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {

$(\forall i, j \in \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |distancias| \longrightarrow_L (distancias[i][j] \geq 0))$

}

`pred distanciaCorrecta` (distancias : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {

$(\forall i, j \in \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |distancias| \longrightarrow_L (distancias[i][j] = distancias[j][i]))$

}

`pred distanciaASiMisma` (distancias : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {

$(\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |distancias| \longrightarrow_L (distancias[i][i] = 0))$

}

`pred ciudadesEnRango` (distancias : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$,in desde: $\mathbb{Z}$, in hasta: $\mathbb{Z}$) {

$(0 \leq desde < |distancias|) \wedge (0 \leq hasta < |distancias|)$

}

`pred recorridoCorrecto` (distancias : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$,in desde: $\mathbb{Z}$, in hasta: $\mathbb{Z}$) {

$(\exists recorrido : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)(caminoCorrecto(desde, hasta, distancias, recorrido))$

}

`pred caminoCorrecto` (distancias : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$,in desde: $\mathbb{Z}$, in hasta: $\mathbb{Z}$, camino:$seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {

$(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |camino| \longrightarrow_L ((0 \leq camino[j] < |distancias|) \wedge (2 \leq |camino| \leq |distancias|))) \wedge$

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < (|camino| - 1) \longrightarrow_L (((distancias[camino[i]][camino[i+1]]) > 0) \wedge$

$((camino[0] = desde) \wedge (camino[|camino| - 1] = hasta))))$

}

1.4. cantidadCaminosNSaltos

`proc cantidadCaminosNSaltos` (inout conexion: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$,in n : $\mathbb{Z}$) :

`requiere` $\{matrizCuadrada(conexion) \wedge matrizValida(conexion) \wedge n \geq 1\}$

`asegura` $\{(\exists lista : seq\langle seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle\rangle)(lista[0] = conexion) \wedge$

$(\forall i \in \mathbb{Z})(1 \leq i \leq n) \longrightarrow_L (multiplicar(lista[i-1], lista[0], lista[i]) \wedge (conexion = lista[n-1])))$

$\}$

`pred matrizCuadrada` (conexion : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {

$(\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |conexion| \longrightarrow_L (|conexion[i]| = |conexion|))$

}

`pred matrizValida` (conexion : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {

$(\forall i, j \in \mathbb{Z})((0 \leq i, j < |conexion|) \longrightarrow_L (conexion[i][j] = 0 \vee conexion[i][j] = 1))$

}

`pred Multiplicar` (m1 : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$,m2: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$,m3 : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {

$(\forall f, c \in \mathbb{Z})((0 \leq f, c < |m1|) \longrightarrow_L (m3[f][c] = \sum_{i=0}^{|m1|-1}(m1[f][i] \cdot m2[i][c])))$

}

1.5. caminoMinimo

`proc caminoMinimo` (in origen : $\mathbb{Z}$, in destino: $\mathbb{Z}$, in distancias $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) : $seq\langle \mathbb{Z}\rangle$

`requiere` $\{matrizCuadrada(distancias) \land distanciaNoNegativa(distancias) \land distanciaCorrecta(distancias) \land$
$distanciaASiMisma(distancias) \land ciudadesEnRango(distancias, origen, destino)$
$\}$

`asegura` $\{(\neg(hayCamino(distancias, origen, destino)) \longrightarrow |res| = 0) \lor$
$(hayCamino(distancias, origen, destino) \longrightarrow (recorridoMinimo(origen, destino, distancias, res)))$
$\}$

`pred matrizCuadrada` (distancias : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
$(\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |distancias| \longrightarrow_L (|distancias[i]| = |distancias|))$
}

`pred distanciaNoNegativa` (distancias : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
$(\forall i \in \mathbb{Z})(\forall j \in \mathbb{Z})(0 \leq j, i < |distancias| \longrightarrow_L (|distancias[i][j]| \geq 0))$
}

`pred distanciaASiMisma` (distancias : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
$(\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |distancias| \longrightarrow_L (distancias[i][i] = 0))$
}

`pred distanciaCorrecta` (distancias : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
$(\forall i \in \mathbb{Z})(\forall j \in \mathbb{Z})(0 \leq j, i < |distancias| \longrightarrow_L (distancias[i][j] = distancias[j][i]))$
}

`pred ciudadesEnRango` (distancias : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, origen : $\mathbb{Z}$, destino : $\mathbb{Z}$) {
$(0 \leq origen < |distancias|) \land (0 \leq destino < |distancias|)$
}

`pred recorridoMinimo` (distancias : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, origen : $\mathbb{Z}$, destino : $\mathbb{Z}$, res : $seq\langle \mathbb{Z}\rangle$) {
$caminoCorrecto(origen, destino, distancias, res) \land$
$(\forall otroRecorrido : seq\langle \mathbb{Z}\rangle) caminoCorrecto(origen, destino, distancias, otroRecorrido) \longrightarrow$
$\sum_{i=0}^{|res|-1} (distancias[res[i]][res[i+1]]) \quad \leq \sum_{i=0}^{|otroRecorrido|-1} (distancias[otroRecorrido[i]][otroRecorrido[i+1]])\ )\quad)$
}

`pred caminoCorrecto` (distancias : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, origen : $\mathbb{Z}$, destino : $\mathbb{Z}$, camino : $seq\langle \mathbb{Z}\rangle$) {
$(\forall i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |camino| \longrightarrow_L ((0 \leq camino[i] < |distancias|) \land (2 \leq |camino| \leq |distancias|))) \land$
$(\forall j \in \mathbb{Z})(\ 0 \leq i < (|camino| - 1) \longrightarrow_L (\ distancias[camino[i]][camino[i+1]] \geq 0\ \land$
$((camino[0] = origen) \land (camino[|camino| - 1] = destino))\ ))$
}

2. Correctitud

2.1. Respecto a la especificación

Para demostrar que el programa es totalmente correcto respecto a la especificación, debemos demostrar la validez de la tripla de Hoare (P)S(Q)
Tengo que probar que:

1. P $\longrightarrow$wp(S1,Pc)
2. (Pc)Sc(Qc)
3. Qc $\longrightarrow$wp(S3,Qc)

1. P $\longrightarrow$WP(S1,Pc)

P$\equiv$ $(\exists\ i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[i].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\ i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[i].\text{habitantes} \geq 0) \wedge$
$(\forall\ i, j \in \mathbb{Z})(0 \leq i < j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[i].\text{nombre} \neq \mathit{ciudades}[j].\text{nombre})$

Pc $\equiv (res = 0 \wedge i = 0)$

WP(S1,Pc) $\equiv WP(res = 0; i = 0, Pc)) \equiv WP(res = 0, WP(i = 0, Pc))$

WP(i=0, Pc) $\equiv WP(i = 0, res = 0 \wedge i = 0) \equiv res = 0 \wedge 0 = 0 \equiv res = 0$

WP(res=0,WP(i=0, Pc)) $\equiv WP(res = 0, res = 0) \equiv 0 = 0 \equiv True$

P $\longrightarrow$WP(S1,Pc) $\equiv P \longrightarrow True \equiv True$ para todos los casos.

2. (Pc)Sc(Qc) $\equiv$ Pc $\longrightarrow$WP(while...,Qc)

Primero debemos demostrar la correctitud parcial del ciclo, aplicando el Teorema del Invariante:

a) (Pc $\longrightarrow$I)

b) (I $\wedge B)S(I)$

c) (I $\wedge\neg B) \longrightarrow Qc$

Y luego, para demostrar que el ciclo finaliza aplicaremos el Teorema de Terminación:

d) (I $\wedge B \wedge v_0 = fv)S(fv < v_0)$

e) (I $\wedge fv \leq 0 \longrightarrow \neg B)$

Para eso considero las siguientes variables lógicas, que reemplazaré en las fórmulas correspondientes:

$$B \equiv i < |\text{ciudades}|$$

$$Qc \equiv \text{res} = \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[i].\text{habitantes}$$

$$Pc \equiv (\text{res} = 0) \wedge (i = 0)$$

$$I \equiv (0 \leq i \leq |\text{ciudades}|) \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}$$

$$fv = |\text{ciudades}| - i$$

a) (Pc $\longrightarrow$I)

$\equiv ((\text{res} = 0) \wedge\ (i = 0)) \longrightarrow ((0 \leq i \leq |\text{ciudades}|) \wedge (\text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}))$

Reemplazando las identidades:

$(i = 0) \longrightarrow (0 \leq 0 \leq |\text{ciudades}|) \equiv True$

$(res = 0) \longrightarrow (0 = \sum_{j=0}^{-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes})) \equiv True$ porque se trata de un rango vacio.

Entonces:

$\equiv ((\text{res} = 0) \wedge\ (i = 0)) \longrightarrow (0 \leq 0 \leq |\text{ciudades}| \wedge 0 = \sum_{j=0}^{-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \equiv True$

Por lo tanto, se cumple la primera condición.

b)

$\{\mathrm{I} \wedge B\} \longrightarrow wp(S, I)$

WP(S, I) $\equiv WP(\text{res} = \text{res} + \text{ciudades}[i].\text{habitantes}; i = i+1, 0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes})$

$\equiv WP(\text{res} = \text{res} + \text{ciudades}[i].\text{habitantes}, WP(i = i+1, 0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}))$

Reemplazo el valor de i en las variables libres y me queda:

WP(res = res + ciudades[i].habitantes, $0 \leq i+1 \leq |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i} \text{ciudades}[j].\text{habitantes})$

Reemplazo res en las variables libres:

$(0 \leq i+1 \leq |\text{ciudades}|) \wedge (\text{res} + \text{ciudades}[i].\text{habitantes} = \sum_{j=0}^{i} \text{ciudades}[j].\text{habitantes})$

$\equiv (0 \leq i < |\text{ciudades}|) \wedge (\text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes})$

Entonces $\{\mathrm{I} \wedge B\} \longrightarrow wp(S, I) \equiv$

$(\ (0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \ \wedge \ (i < |\text{ciudades})|\ )\ ) \longrightarrow$

$(\ 0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}\ )$

Simplificando:

$\equiv (0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \longrightarrow (0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes})$

Este caso es de la forma X $\longrightarrow$X, lo cual es True para cualquier caso:

X	X$\longrightarrow$X
V	V
F	V

c)

$\{\text{I} \wedge \neg B\} \longrightarrow Qc$

$((0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \ \wedge \ (\text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \ \wedge \ (i \geq |\text{ciudades}) \ ) \longrightarrow$
$(\text{res} = \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[i].\text{habitantes})$

Si i $\leq$ |ciudades| y al mismo tiempo $i \leq$ |ciudades| solo hay una opcion y es: i =$|ciudades|$.

Entonces: $\equiv ((i = |\text{ciudades}|) \wedge \ (\text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes})) \longrightarrow_L$
$(\text{res} = \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[i].\text{habitantes})$

Reemplazo i por |ciudades| :

$\equiv (\text{res} = \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[i].\text{habitantes} \ ) \longrightarrow_L \ (\text{res} = \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[i].\text{habitantes})$

Ambos predicados son iguales. Por lo tanto, se cumple la implicación y hasta aquí se prueba la validez parcial del loop, es decir, que el ciclo **while(B) (Sc)** es parcialmente correcto respecto de la especificación (Pc, Qc). Para que sea totalmente correcto y la Tripla de Hoare **(Pc)Sc(Qc)** sea válida, falta demostrar que el ciclo efectivamente termina:

d)

$\{\text{I} \wedge B \wedge v_0 = fv\} \longrightarrow WP(S, fv < v_0)$

WP(S, fv < v_0) $\equiv WP(\text{res} = \text{res} + \text{ciudades}[i].\text{habitantes}; i = i+1, |\text{ciudades}| - i < v_0)$

Reemplazo el valor de i en las variables libres y me queda:

$\equiv WP(\text{res} = \text{res} + \text{ciudades}[i].\text{habitantes}, |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0)$

$\equiv \ \text{def}(\text{ciudades}[i]) \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0$

$\equiv 0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0$

Entonces:

$\{\text{I} \wedge B \wedge v_0 = fv\} \longrightarrow WP(S, fv < v_0) \equiv$
$(\ (0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \ \wedge \ \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \wedge (i < |\text{ciudades}|) \wedge (|\text{ciudades}| - 1 = v_0) \ ) \longrightarrow$
$(0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0)$

Si $0 \leq i \leq$ |ciudades| y $i <$ |ciudades| al mismo tiempo, entonces $0 \leq i <$ |ciudades|.

$\equiv (\ (0 \leq i < |\text{ciudades}| \ \wedge \ \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \wedge (|\text{ciudades}| - 1 = v_0) \ ) \longrightarrow$
$(0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0)$

Queda una implicación de la forma (A $\wedge B) \longrightarrow C,$ donde

$A \equiv (0 \leq i < |\text{ciudades}| \ \wedge \ \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes});$

$B \equiv (|\text{ciudades}| - 1 = v_0);$

$C \equiv (0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0)$

A es de la forma (D$\wedge E$) y C es de la forma $(D \wedge F)$:

$(0 \leq i < |\text{ciudades}| \ \wedge \ \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \longrightarrow (0 \leq i < |\text{ciudades}|) \equiv (D \wedge E) \longrightarrow (D) \ \equiv A \longrightarrow D \equiv True$

D	E	D$\wedge E$	(D$\wedge E$) $\longrightarrow D$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Luego, con la información de B, si reemplazamos el valor de v$_o$ en las apariciones libres de v_o en C nos queda:

$$0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0 \equiv$$

$$0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < |\text{ciudades}| - 1$$

Como i$\geq$ 0,esto siempre es verdadero.

De esta forma, demostramos que $B \longrightarrow (D \wedge F) \equiv B \longrightarrow C \equiv True$

Entonces:

$(A \wedge B) \longrightarrow (D \wedge F) \equiv (A \wedge B) \longrightarrow C \equiv True$ para cualquier caso.

e) (I $\wedge fv \leq 0 \longrightarrow \neg B$)

$(\ 0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \ \wedge \ \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \ \wedge \ |\text{ciudades}| - i \leq 0 \ \ ) \longrightarrow i \geq |\text{ciudades}|$

Como $\ 0 \leq i \leq |\text{ciudades}|$ y $|\text{ciudades}| \leq i,$ entonces $i = |\text{ciudades}|.$

$\equiv (i = |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \longrightarrow i \geq |\text{ciudades}|$

$i = |\text{ciudades}| \ \longrightarrow i \geq |\text{ciudades}| \equiv True$, entonces:

$\equiv (i = |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \longrightarrow i \geq |\text{ciudades}| \equiv True$

De esta manera, queda demostrado que la ejecución del ciclo **while B do Sc endwhile** siempre termina.

Al demostrar la correctitud parcial del ciclo y su finalización, se concluye que la tripla de Hoare (Pc)Sc(Qc) es válida.

Para que el programa entero sea correcto, nos queda demostrar el último punto:

3. Qc $\longrightarrow$wp(S3,Q)

Q $\equiv$ res $= \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[i]$.habitantes

WP(S3,Q) $\equiv WP(skip, Q) \equiv Q \equiv$ res $= \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[i]$.habitantes

Qc $\longrightarrow$wp(S3,Q) $\equiv$ res $= \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[i]$.habitantes $\longrightarrow$ res $= \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[i]$.habitantes $\equiv True$

Es de la forma A$\longrightarrow$A $\equiv True$ para todos los casos.

Entonces, al haber ya demostrado los siguientes ítems:

1. P $\longrightarrow$wp(S1,Pc)
2. (Pc)Sc(Qc)
3. Qc $\longrightarrow$wp(S3,Qc)

Por monotonía, esto nos permite afirmar que P $\longrightarrow_L$WP(S1,while...,S3,Q) $\equiv$ True, es decir, que la tripla de Hoare (P)S(Q) es válida.

Por lo tanto, el programa completo es totalmente correcto respecto a la especificación.

2.2. Resultado mayor a 50.000

En el punto anterior, demostramos la correctitud y finalización del ciclo y que el programa entero es correcto. Ahora debemos probar que el loop es correcto, sigue terminando pese a los cambios en el invariante y siempre resulta en una suma mayor a 50000.
Similar al punto anterior, debemos aplicar el teorema del invariante y de terminacion pero agregando ciertos predicados a la precondición, el invariante y a la postcondición. Lo que debemos probar es lo siguiente:

1. P $\longrightarrow$wp(S1,Pc)

P$\equiv$ $(\exists\, i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[i].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[i].\text{habitantes} \geq 0) \wedge$
$(\forall\, i, j \in \mathbb{Z})(0 \leq i < j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[i].\text{nombre} \neq ciudades[j].\text{nombre})$

Pc $\equiv (\text{res} = 0) \wedge (i = 0)\ \wedge\ (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$

WP(S1,Pc) $\equiv WP(res = 0; i = 0, Pc)) \equiv WP(res = 0, WP(i = 0, Pc))$

WP(i=0, Pc)
$\equiv WP(i = 0, \text{res} = 0 \wedge i = 0\ \wedge\ (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0))$
$\equiv \text{res} = 0 \wedge 0 = 0\ \wedge\ (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$
$\equiv \text{res} = 0\ \wedge\ (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$

WP(res=0,WP(i=0, Pc))
$\equiv WP(res = 0, \text{res} = 0\ \wedge\ (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0))$
$\equiv 0 = 0\ \wedge\ (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$
$\equiv (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$

P $\longrightarrow$WP(S1,Pc)
$\equiv (\exists\, i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[i].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, i \in \mathbb{Z})(0 \leq i < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[i].\text{habitantes} \geq 0) \wedge$
$(\forall\, i, j \in \mathbb{Z})(0 \leq i < j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[i].\text{nombre} \neq ciudades[j].\text{nombre}) \longrightarrow$
$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000)\ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$

Nos queda de la forma (A $\wedge B) \longrightarrow A \equiv True$ para todos los casos.

Luego, para la 2da parte de la demostración, utilizaremos las siguientes variables lógicas:

$B \equiv i <$ |ciudades|

$$Qc \equiv \text{res} = \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \wedge \text{res} > 50000$$

$Pc \equiv (\text{res} = 0) \wedge (i = 0) \ \wedge \ (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$

$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$

$$I \equiv (0 \leq i \leq |\text{ciudades}|) \wedge (\text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \wedge$$

$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$

$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$

$fv \equiv |\text{ciudades}| - i$

Necesitamos probar las siguientes preposiciones:

a) (Pc $\longrightarrow$I)

b) (I $\wedge B)S(I)$

c) (I $\wedge\neg B) \longrightarrow Qc$

d) (I $\wedge B \wedge V_0 = F_v) \longrightarrow WP(S, F_v < V_0)$

e) (I $\wedge F_v \leq 0) \longrightarrow \neg B$

Demostración:

a)

(Pc $\longrightarrow$I)

(res $= 0 \wedge i = 0\ \wedge (\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000) \wedge$

$(\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$) $\longrightarrow$

$(0 \leq i \leq$ |ciudades| $\wedge$ res $= \sum_{j=0}^{i-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$

$(\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000) \wedge$

$(\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0))$

Como no cambian las relaciones de fuerza, puesto que le agrego a ambos términos los mismos predicados, y teniendo en cuenta que ambos son verdaderos, podemos ver que se mantiene la demostración del ejercicio 2.1.

b)

{I $\wedge B$} $\longrightarrow$ $wp(S, I)$

WP(S, I) $\equiv WP($ res = res+ciudades$[i]$.habitantes; $i = i$+1, $0 \leq i \leq$ |ciudades| $\wedge$ res $= \sum_{j=0}^{i-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$

$(\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000)$ $\wedge$

$(\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$)

$\equiv WP($res = res + ciudades$[i]$.habitantes$, WP($ $i = i + 1, 0 \leq i \leq$ |ciudades| $\wedge$ res $= \sum_{j=0}^{i-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$

$(\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000)$

$\wedge\ (\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0))$)

Reemplazo i en las variables libres:

$\equiv WP($ res = res + ciudades$[i]$.habitantes$, 0 \leq i + 1 \leq$ |ciudades| $\wedge$ res $= \sum_{j=0}^{i}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$

$(\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000) \wedge$

$(\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$)

Reemplazo res en las variables libres:

$\equiv 0 \leq i + 1 \leq$ |ciudades| $\wedge$ res + ciudades$[i]$.habitantes $= \sum_{j=0}^{i}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$

$(\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000)$

$\wedge\ (\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$

$\equiv 0 \leq i <$ |ciudades| $\wedge$ res $= \sum_{j=0}^{i-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$

$(\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000)$

$\wedge\ (\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$

{I $\wedge B$} $\longrightarrow$ $wp(S, I)$

$\equiv ((0 \leq i \leq$ |ciudades| $\wedge$ res $= \sum_{j=0}^{i-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$

$(\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000) \wedge$

$(\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$)$\wedge$

i $<$ |ciudades|) $\longrightarrow$($0 \leq i <$ |ciudades| $\wedge$ res $= \sum_{j=0}^{i-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$

$(\exists\ k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000) \wedge$

$(\forall\ j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$)

Como $(0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \wedge i < |\text{ciudades}|) \longrightarrow 0 \leq i < |\text{ciudades}|$, entonces:

$\equiv (0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \;\wedge$
$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0)\ ) \longrightarrow$
$(0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \;\wedge$
$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0)\ ) \equiv True$

Este caso es de la forma A $\longrightarrow$A, lo cual es True para cualquier caso.

c)

(I $\wedge \neg B) \longrightarrow Qc$

$(\ (\ \ 0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \;\wedge$
$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0)\ ) \wedge i \geq |\text{ciudades}|\ ) \longrightarrow$
$(\text{res} = \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \wedge \text{res} > 50000)$

Como $0 \leq i \leq |\text{ciudades}|$ y $|\text{ciudades}| \leq i,$ entonces $i = |\text{ciudades}|$.

Reemplazo i por $|\text{ciudades}|$:

$\equiv (\text{res} = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \wedge (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0)\ ) \longrightarrow$
$(\text{res} = \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \wedge \text{res} > 50000)$

$\equiv (\text{res} = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \;\wedge (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0)\ ) \longrightarrow$
$(\text{res} = \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \wedge \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} > 50000)$

Tengo algo de la forma: A $\wedge B \wedge C \longrightarrow A \wedge D$, Donde:

$A \equiv$ res $= \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes

$B \equiv (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000)$

$C \equiv (\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$

$D \equiv res > 50000$

$A \longrightarrow A \equiv True$

y $B \wedge C \longrightarrow D \equiv True$ puesto que:

Hay dos casos que analizaremos por separado: $k \neq j \vee k = j$:

$k \neq j$

$\equiv$ (res $= \sum_{j=0}^{|ciudades|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge\, (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\wedge\, k \neq j \longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $>$ 50000) $\wedge\, (\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$) $\longrightarrow$ (res $= \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$ res > 50000)

$\equiv False$

Si modificamos la implicación podemos probar que para todo $k \neq j$, res > 0 :

(res $= \sum_{j=0}^{|ciudades|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge\, (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\wedge\, k \neq j \longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $>$ 50000) $\wedge\, (\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$) $\longrightarrow$

(res $= \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$ res > 0)

$\equiv True$

k = j :

$\equiv$ (res $= \sum_{j=0}^{|ciudades|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge\, (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\wedge\, k = j \longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $>$ 50000) $\wedge\, (\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$) $\longrightarrow$ (res $= \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge$ res > 50000)

$\equiv True$

((k $\neq j \longrightarrow res > 0) \vee (k = j \longrightarrow res > 50000)) \longrightarrow$ (res $= \sum_{j=0}^{|ciudades|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge\, res > 50000) \equiv$ $True$

Se cumple siempre, pues suma elementos mayores a 0 y al menos uno mayor a 50000.

Por lo tanto B $\wedge C \longrightarrow D \equiv True$.

Entonces $A \wedge B \wedge C \longrightarrow A \wedge D \equiv True$

y entonces queda demostrado que:

(res $= \sum_{j=0}^{|ciudades|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge\, (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[k]$.habitantes $> 50000) \wedge$

$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j <$ |ciudades| $\longrightarrow_L$ $ciudades[j]$.habitantes $\geq 0)$) $\longrightarrow$

(res $= \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes $\wedge \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades$[j]$.habitantes > 50000)

$\equiv True$

Por lo tanto demostramos que el ciclo sigue siendo correcto y que el valor devuelto siempre será mayor a 50000.

d)

$\{\mathrm{I} \wedge B \wedge v_0 = fv\} \longrightarrow WP(S, fv < v_0)$

WP(S, fv < v_0) $\equiv WP(\text{res} = \text{res} + \text{ciudades}[i].\text{habitantes}; i = i+1, |\text{ciudades}| - i < v_0)$

Reemplazo el valor de i en las variables libres y me queda:

$\equiv WP(\text{res} = \text{res} + \text{ciudades}[i].\text{habitantes}, |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0)$

$\equiv$ def(ciudades[i]) $\wedge$ |ciudades| $- i - 1 < v_0$

$\equiv 0 \leq i <$ |ciudades| $\wedge$ |ciudades| $- i - 1 < v_0$

Entonces:

$\{\mathrm{I} \wedge B \wedge v_0 = fv\} \longrightarrow WP(S, fv < v_0) \equiv$

$((0 \leq i \leq |\text{ciudades}|) \wedge (\text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \wedge$

$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$

$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0) \wedge (fv \equiv |\text{ciudades}| - i) \wedge$

$(i < |\text{ciudades}|) \wedge (|\text{ciudades}| - 1 = v_0)\ ) \longrightarrow$

$(0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0)$

Si $0 \leq i \leq$ |ciudades| y $i <$ |ciudades| al mismo tiempo, entonces $0 \leq i <$ |ciudades|.

$\equiv (((0 \leq i < |\text{ciudades}|) \wedge (\text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes}) \wedge$

$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$

$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0) \longrightarrow$

$(0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0)$

$\equiv True$

definimos ciertas variables para probar que la demostración es igual al punto anterior:

A $\equiv (((0 \leq i < |\text{ciudades}|) \wedge (\text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes})$

B $\equiv (\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[k].\text{habitantes} > 50000) \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L ciudades[j].\text{habitantes} \geq 0)$

C $\equiv (0 \leq i < |\text{ciudades}| \wedge |\text{ciudades}| - i - 1 < v_0)$

En el punto D del ejercicio 2.1 demostramos la afirmacion A $\longrightarrow$C, y en este caso nosotros tenemos una afirmacion A $\wedge B \longrightarrow C$ y con la demostracion podemos dar por verdadera nuetra afirmación ya que no cambian las relaciones de fuerza

e) (I $\wedge fv \leq 0 \longrightarrow \neg B$)

$(0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \ \wedge$
$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[k].\text{habitantes} > 50000) \ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0) \wedge \ |\text{ciudades}| - i \leq 0 \ \ ) \longrightarrow i \geq |\text{ciudades}|$

Como $0 \leq i \leq |\text{ciudades}|$ y $|\text{ciudades}| \leq i,$ entonces $i = |\text{ciudades}|$.

$\equiv (i = |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \ \wedge$
$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[k].\text{habitantes} > 50000) \ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0)) \longrightarrow i \geq |\text{ciudades}|$

$i = |\text{ciudades}| \longrightarrow i \geq |\text{ciudades}| \equiv True$, entonces:

$\equiv (i = |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \ \wedge$
$(\exists\, k \in \mathbb{Z})(0 \leq k < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[k].\text{habitantes} > 50000) \ \wedge$
$(\forall\, j \in \mathbb{Z})(0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \mathit{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0)) \longrightarrow i \geq |\text{ciudades}| \equiv True$

De esta manera, queda demostrado que la ejecución del ciclo **while B do Sc endwhile** siempre termina.

3. Qc $\longrightarrow$wp(S3,Q)

Q $\equiv$ res $= \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades[i].habitantes

WP(S3,Q) $\equiv WP(skip, Q) \equiv Q \equiv$ res $= \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades[i].habitantes

Qc $\longrightarrow$wp(S3,Q) $\equiv$ (res $= \sum_{j=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades[j].habitantes $\wedge$ res > 50000) $\longrightarrow$ res $= \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1}$ ciudades[i].habitantes

Es de la forma (A$\wedge B$) $\longrightarrow A \equiv True$ para todos los casos, porque:

A	B	A$\wedge B$	(A$\wedge B$) $\longrightarrow A$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Por lo tanto la postcondición esperada es la misma que la del código.

De esta forma quedó demostrado que el código siempre devuelve un valor mayor a 50000 y que pese a los cambios en el invariante el ciclo sigue terminando.