

Resumen

En este documento se presentan las fórmulas de distancia entre el punto, la recta y el plano.

Álgebra I

Formulario de distancias

Andrés Miniguano T.

Milton Torres E.

e-mail: andres.miniguano@epn.edu.ec

e-mail: milton.torres@epn.edu.ec

6 de abril de 2017

1 Notación

En lo que sigue usaremos las letras del alfabeto a, b, c, \dots para un punto en el espacio con coordenadas dadas por índices; es decir

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Además, se usarán las letras del alfabeto griego para denotar escalares: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

La única excepción a las reglas anteriores se dará con el vector

$$w = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

que indican los ejes horizontal, vertical y espacial.

2 Definiciones

- **Punto:** Es cualquier elemento del espacio, el cual consiste en una tripleta ordenada de números reales; es decir, un elemento de \mathbb{R}^3 . Por ejemplo, si $a \in \mathbb{R}^3$, entonces lo escribiremos como

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

- **Recta:** Dados dos puntos a y b , una recta con vector director a y vector constante b consiste en todos los puntos de la forma

$$t a + b;$$

aquí t es un número real. A esta recta la notamos como

$$R : [\langle a \rangle + b].$$

- **Plano:** Dados un punto a y un escalar α , un plano de vector normal a consiste en todos los puntos w que satisfacen

$$a \cdot w = a_1 x + a_2 y + a_3 z = \alpha.$$

Aquí \cdot indica el producto punto entre a y w ; y el plano se nota

$$H : [\langle a, w \rangle = \alpha].$$

3 Formulario

0. **Distancia entre dos puntos:** Para dos puntos a y b , su distancia $dd(a, b)$ es la norma de su resta:

$$d(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{(a - b) \cdot (a - b)} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

1. **Distancia entre un punto y una recta:** La distancia entre un punto a y la recta $R : [\langle b \rangle + c]$ tiene dos fórmulas:

- *Fórmula de proyección:*

$$d\left(a, R : [\langle b \rangle + c]\right) = \left\| (a - c) - \frac{(a - c) \cdot b}{\|b\|^2} b \right\|$$

- *Fórmula del binormal:*

$$d\left(a, R : [\langle b \rangle + c]\right) = \frac{\|(a - c) \times b\|}{\|b\|}$$

2. **Distancia entre un punto y un plano:** Si a es un punto y $H : [\langle b, x \rangle = \alpha]$ un plano, entonces:

$$d\left(a, H : [\langle b, x \rangle = \alpha]\right) = \frac{a \cdot b - \alpha}{\|b\|}.$$

3. **Distancia entre dos rectas:** Si $R : [\langle a \rangle + c]$ y $S : [\langle b \rangle + d]$ son dos rectas, entonces tenemos dos casos:

- *Rectas paralelas:*

$$d\left(R : [\langle a \rangle + c], S : [\langle b \rangle + d]\right) = \frac{\|(c - d) \times a\|}{\|a\|}$$

- *Rectas que se cruzan:*

$$d\left(R : [\langle a \rangle + c], S : [\langle b \rangle + d]\right) = \frac{|\det(c - d, a, b)|}{\|a \times b\|}.$$

4. **Distancia entre una recta y un plano:** Para la recta $R : [\langle a \rangle + c]$ y el plano $H : [\langle b, w \rangle = \alpha]$, entonces necesariamente su distancia no se anula si son paralelos con:

$$d\left(R : [\langle a \rangle + c], H : [\langle b, w \rangle = \alpha]\right) = \frac{c \cdot b - \alpha}{\|b\|}$$

5. **Distancia entre dos planos:** Finalmente para los planos $H : [\langle a, w \rangle = \alpha]$ e $I : [\langle b, w \rangle = \beta]$:

$$d\left(H : [\langle a, w \rangle = \alpha], I : [\langle b, w \rangle = \beta]\right) = \frac{|\alpha - \beta|}{\|a\|} = \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Nota

Las fórmulas anteriores se demuestran usando elementos del álgebra lineal y cálculo vectorial, puesto que en algunos casos basta plantear un problema de minimización, en otros sólo aplicar propiedades del determinante y proyecciones. Algo bastante interesante es que todas las fórmulas anteriores se basan en obtener la norma de un único elemento, dicho elemento viene dado por el siguiente teorema:

Teorema 1 (Proyección sobre un conjunto cerrado, convexo y no vacío). *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto cerrado, convexo y no vacío; entonces para todo $a \in \mathbb{R}^3$ existe un único $b \in M$ tal que*

$$d(a, b) = \inf \{ d(a, c) : c \in M \};$$

A b se lo denomina la proyección de a en M y se nota $\text{proy}_M a := b$.

Notemos que este teorema nos permite afirmar que siempre existe un punto que optimiza la distancia entre un conjunto y otro punto.